2022-
2023

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΑΠΘ – ΤΕΧΝΙΚΕΣ
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Φίλιππος
Γερμανόπουλος

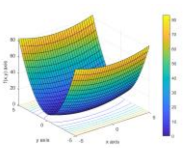
[3Η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ]

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

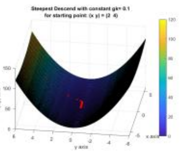
ΘΕΜΑ 1

Στην παρούσα εργασία μεταβάλλουμε ορισμένες παραμέτρους των μεθόδων Μέγιστης Καθόδου και Μέγιστης Καθόδου με Προβολή και παρατηρούμε την συμπεριφορά μια συνάρτησης ,της $f(x) = 1/3*x_1^2+3*x_2^2$, απουσίας και παρουσίας περιορισμών αντίστοιχα.

Αρχικά χρησιμοποιούμε τον κώδικα MATLAB που υλοποιήθηκε και κατά τη διάρκεια της δεύτερης εργαστηριακής άσκησης και εφαρμόζει τη μέθοδο της Μεγίστης Καθόδου για την εύρεση ελαχίστου μίας δοσμένης συνάρτησης. Τούτη τη φορά δόθηκαν 4 διαφορετικές σταθερές τιμές για το $γ_κ$ = [0.1, 0.3, 3 , 5] , ενώ η ακρίβεια ορίστηκε ως ε = 0.001. Ως αρχικό σημείο εκκίνησης επιλέχθηκε το (2,4) αυθαίρετα, με μοναδική απαγορευμένη τιμή το (0,0) , που όπως γνωρίζουμε εκ των προτέρων , αποτελεί το ελάχιστο της νέας μας συνάρτησης και μάλιστα ολικό.
Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις περιπτώσεις αυτές , όπως επίσης και ένα γράφημα για την οπτικοποίησης της συνάρτησης μας.

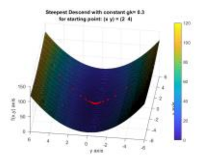


- Για γκ=0.1 :



Steepest Descend with constant gk= 0.1
for starting point: (x y) = (2 4)
f(x,y) axis
y axis
x axis

- Για γκ = 0.3:



Συνεπώς βρέθηκε το ολικό ελάχιστο με επιτυχία για τιμές γ_κ =0.1 και γ_κ =0.3 και μάλιστα οι απαιτούμενες επαναλήψεις για γ_κ=0.1 ήταν περισσότερες (105 σε αριθμό) καθώς το βήμα μας έχει σχετικά μικρή τιμή.

Συγκεκριμένα για γ_κ = 3 δεν συγκλίνει η μέθοδος επειδή η τιμή βήματος είναι μεγάλη και έτσι δεν εντοπίζεται ποτέ το ελάχιστο.

Τέλος η μέθοδος για γ_κ = 5 δεν συγκλίνει επειδή η τιμή του βήματος είναι μεγάλη, δεν ικανοποιεί ποτέ τις απαραίτητες συνθήκες τερματισμού και φτάνει να εκτελεί 1000 βήματα, όπου ορίστηκε ως ανώφλι βημάτων και έτσι ο αλγόριθμος απορρίπτει την επιλογή αυτή.

Τα αποτελέσματα αυτά αποδεικνύονται και με μαθηματική αυστηρότητα. Σύμφωνα με τη θεωρία, η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου είναι της μορφής :

$\chi_{\kappa+1} = \chi_\kappa - \gamma_\kappa * \text{gradient}(f(\chi_\kappa))$

όπου $\text{gradient}(f(\chi_\kappa)) = [2/3*\chi_1 , 6*\chi_2]$ στην περίπτωσή μας.

Συνεπώς έχουμε :

$\chi_1 = (\chi_{10},\chi_{20}) - \gamma_\kappa *(2/3*\chi_{10} , 6*\chi_{20}) = ((1-2/3*\gamma_\kappa)*\chi_{10} , (1-6*\gamma_\kappa)*\chi_{20})$

$\chi_2 = (\chi_{11},\chi_{21}) - \gamma_\kappa *(2/3*\chi_{11} , 6*\chi_{21}) = ((1-2/3*\gamma_\kappa)*\chi_{11} , (1-6*\gamma_\kappa)*\chi_{21}) =>$

$\chi_2 = ((1-2/3*\gamma_\kappa)^2*\chi_{10} , (1-6*\gamma_\kappa)^2*\chi_{20})$

Συνεπώς συνεχίζοντας τον συλλογισμό, ο Ν-οστός όρος θα είναι:

$$\mathbf{X_N = ((1\text{-}2/3*\gamma_\kappa)^N*\chi_{10} , (1\text{-}6*\gamma_\kappa)^N*\chi_{20}).}$$

Από εδώ συμπεραίνουμε πως εάν το **Ν τείνει στο άπειρο**, τότε ο πρώτος όρος έχει δύο πιθανά αποτελέσματα. Ειδικότερα , η ποσότητα $|1-2/3*\gamma_\kappa|^N* |\chi_{1\kappa}|$ θα **απειρίζεται** , εάν **γ_κ > 3** , και η ίδια ποσότητα θα **μηδενίζεται** , εάν **$0<\gamma_\kappa<3$.**

Ομοίως ερευνούμε και τον δεύτερο όρο $|1-6*\gamma_\kappa|^N*|\chi_{20}|$, όπου εάν το **Ν πάλι τείνει στο άπειρο** , τότε ο όρος θα **απειρίζεται** εάν **γ_κ> 1/3** και θα **μηδενίζεται** για **$0<\gamma_\kappa<1/3$**.

Προφανώς η επιτυχής αναζήτηση του ελαχίστου του αλγορίθμου απαιτεί γ_κ τέτοιο ώστε να συγκλίνουν και οι δύο όροι. Συνδυάζοντας τα συμπεράσματά μας λοιπόν, καταλήγουμε ότι το εύρος των επιτρεπτών τιμών του βήματος είναι :

$0<\gamma_\kappa<1/3$.

Έτσι επαληθεύονται και τα αποτελέσματα του κώδικα MATLAB, εφόσον ο αλγόριθμος εντοπίζει επιτυχώς το ελάχιστο της συνάρτησης για $\gamma_\kappa = 0.1 , 0.3 < 1/3$, ενώ για $\gamma_\kappa= 3 , 5 > 1/3$ δεν οδηγηθήκαμε στο ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 2

Από εδώ και στο εξής γίνεται χρήση της μεθόδου Μέγιστης Καθόδου με Προβολή, όπου λόγω της ύπαρξης περιορισμών χρειάζεται να διασφαλισθεί η παραμονή των σημείων εντός των ορίων του δυνατού συνόλου Χ. Πλέον, κάθε φορά που ο αλγόριθμος οδηγείται σε ένα **μη εφικτό** σημείο, υπολογίζει την προβολή του σημείου στο X^2 και συνεχίζει την διαδικασία, η οποία τερματίζει εάν φτάσει σε στάσιμο σημείο ή εάν φτάσει τις 1000 επαναλήψεις.

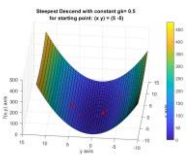
Τα σημεία υπολογίζονται σύμφωνα με τη σχέση :

$\chi_{\kappa+1} = \chi_\kappa + \gamma_\kappa(\chi\text{tilde}_\kappa - \chi_\kappa)$, με τον περιορισμό ότι το γ_κ ανήκει (0,1].

Επίσης χtilde_κ προσδιορίζεται από το χ_κ αν κινηθούμε στην κατεύθυνση της αρνητικής κλίσης με βήμα s_k και στη συνέχεια βρούμε την προβολή του $\chi_\kappa - s_k*\text{gradient}(f(\chi_\kappa))$ στο Χ, καταλήγοντας έτσι στο εφικτό σημείο.

Για την μελέτη της αντικειμενικής συνάρτησης θεωρήθηκαν οι εξής περιορισμοί:
$-10 <= \chi_1 <= 5$ και $-8 <= \chi_2 <= 12$.

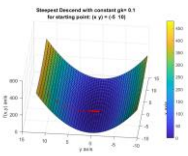
Ακόμη, χρησιμοποιήθηκαν οι εξής τιμές:
$s_k=5$, $\gamma_\kappa= 0.5$, $\varepsilon= 0.01$ και αρχικό σημείο εκκίνησης το (5 , -5) .



Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος δεν καταφέρνει να εντοπίσει το ελάχιστο, και αυτό γιατί η τιμή $\gamma_\kappa=0.5$ ξεπερνά τα όρια που προσδιορίστηκαν από την μαθηματική ανάλυση που προηγήθηκε. Ο αλγόριθμος σταματά στην χιλιοστή επανάληψη και τερματίζει.

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

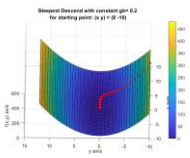
Το ζητούμενο του θέματος αυτού ήταν ίδιο με αυτό του θέματος 2, αλλά με τη διαφορά ότι τώρα έχουμε τις εξής τιμές:
s_k=15 , $γ_κ$= 0.1 , ε= 0.01 και αρχικό σημείο εκκίνησης το (-5 , 10) .



Εδώ παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει και μάλιστα με 103 επαναλήψεις. Ωστόσο παρατηρείται ταλάντωση πριν την τελική σύγκλιση, κάτι που μας υποδεικνύει ότι οι τιμές $γ_κ$ και s_k δεν είναι ιδανικές. Ένας απλός και πρακτικός τρόπος για να οδηγηθεί ο αλγόριθμος στο ελάχιστο με μεγαλύτερη ευκολία θα ήταν να επιλεχθεί μικρότερη τιμή του βήματος s_k.

<u>ΘΕΜΑ 4</u>

Το ζητούμενο του θέματος αυτού ήταν ίδιο με αυτό του θέματος 2 και 3, αλλά με τη διαφορά ότι τώρα έχουμε τις εξής τιμές:
s_k=0.1 , $γ_κ$= 0.2 , ε= 0.01 και αρχικό σημείο εκκίνησης το (8 , -10) .



Αρχικά οφείλουμε να επισημάνουμε πως το αρχικό σημείο εκκίνησης δεν ανήκει στα επιτρεπτά όρια και άρα πρόκειται για ένα **μη εφικτό σημείο** , σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Παρόλα αυτά, ο αλγόριθμος καταφέρνει και συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο επιτυχώς, με ένα μεγαλύτερο χρονικό κόστος βέβαια από ότι στην δεύτερη περίπτωση, εφόσον εδώ απαιτούνται 261 επαναλήψεις.

Συμπεράσματα

Στο πρώτο κομμάτι της εργασίας έγινε εμφανής πλέον η επιρροή που έχει το βήμα $γ_κ$ στην Μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου. Αποδείχθηκε μαθηματικά λοιπόν, πως για κάθε αντικειμενική συνάρτηση προκύπτει ένα άνω όριο για το βήμα και στην περίπτωσή μας αυτό ήταν η τιμή 1/3. Στις περιπτώσεις που το βήμα ξεπερνά αυτήν την τιμή, τότε η μέθοδος προφανώς και δεν μπορεί να συγκλίνει και δεν εντοπίζεται το ολικό ελάχιστο. Επίσης ελέγχθηκε και η περίπτωση όπου το βήμα έχει την τιμή οριακή τιμή 1/3 και τότε ο αλγόριθμος οδηγήθηκε σε ταλάντωση.

Στο δεύτερο θέμα, όπου πλέον ασχολούμαστε με την Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου με Προβολή ο αλγόριθμος ταλαντώνεται τελικά μεταξύ δύο σημείων και δεν βρίσκει επιτυχώς το ελάχιστο, πράγμα που οφείλεται στις σχετικά μεγάλες επιλογές βημάτων. Αξίζει να αναφερθεί ότι το αρχικό σημείο εκκίνησης στην περίπτωση αυτή ήταν εφικτό, παρόλο που δεν εντοπίστηκε το ολικό ελάχιστο.

Στο τρίτο θέμα αντιθέτως, ο αλγόριθμος συγκλίνει επιτυχώς και μάλιστα σε λίγες επαναλήψεις. Η ταχύτητα του αλγορίθμου θα μπορούσε να αυξηθεί σημαντικά επίσης με πρακτικό τρόπο. Αυτό επιτυγχάνεται με διαφορετική επιλογή των βημάτων και μάλιστα τέτοια ώστε το γινόμενο $γ_κ * s_k < 1/3$, σύμφωνα με την ανάλυση που κάναμε προηγουμένως. Βέβαια, το βήμα οφείλει να είναι αρκούντως μεγάλο, τέτοιο ώστε να μην καθυστερεί τελικά τη διαδικασία και επιφέρει ανεπιθύμητα αποτελέσματα. Το σημείο εκκίνησης ήταν και πάλι εφικτό.

Στο τέταρτο θέμα παρατηρούμε πως το σημείο εκκίνησης δεν είναι εφικτό σημείο. Παρόλα αυτά ο αλγόριθμος καταφέρνει και συγκλίνει , βρίσκοντας έτσι το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης. Η διαφορά είναι ότι οι απαιτούμενες επαναλήψεις είναι αρκετές περισσότερες και η δυσκολία της εύρεσης του ελαχίστου είναι προφανώς μεγαλύτερη. Η εκτέλεση του αλγορίθμου επιβεβαιώνει τις εκτιμήσεις μας αυτές. Αξίζει να αναφερθεί πως η Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή, όταν εκτελείται με πολύ μεγάλες τιμές βήματος , δεν επιτρέπει ακραία αύξηση τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως στην Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου. Έτσι, παραμένει ο αλγόριθμος εντός του ορισμένου συνόλου.