Примеры решения задач линейного программирования симплекс-методом

Александр Катруца

Здесь использованы материалы из книги [1].

1. Задача 1

Решить задачу табличным симплекс методом:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ & 2x_2 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ & x_{1,2,3} \geq 0 \end{aligned}$$

Решение: по виду задачи ясно, что она не в канонической форме. Введём дополнительные переменные и запишем её в канонической форме:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ & 2x_2 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20 \\ & x_{1,2,3,4,5,6} \geq 0 \end{aligned}$$

Заметим, что матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, где $m = 3$ и $n = 6$. Теперь нужно найти угловую точку допустимого множества, то есть такую точку, чтобы она лежала в множестве и существовало множество индексов $\mathcal{B} \subset \{1, \ldots, n\}$ мощностью $|\mathcal{B}| = m = 3$, что матрица из столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с индексами из множества $\mathcal{B}$ была невырождена, и координаты угловой точки с индексами не из множества $\mathcal{B}$ были нулевыми. В данном случае достаточно очевидно, что $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 20, 20, 20)$, $\mathcal{B}_0 = \{4, 5, 6\}$ и матрица базиса $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_m$ — невырождена. Если начальная угловая точка не так очевидна, необходимо выполнить двухфазный симплекс-метод или М-метод. Такой пример будет приведён ниже.

Теперь составим таблицу 1 симплекс-метода, модифицируя которую получим решение поставленной задачи. Столбцы этой таблицы соответствуют столбцам матрицы $\mathbf{A}$. Последние $m = 3$ строк соответствуют базисным переменным с индексами из множества $\mathcal{B}_0$. В $m + 1$ строке с конца расположены оценки замещения для каждой переменной x_i, а в первом столбце отрицательное значение целевой функции.

Таблица 1: Первоначальная таблица симплекс-метода

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_0}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_0} = 0$	-10	-12	-12	0	0	0
$x_4 = 20$	1	2	2	1	0	0
$x_5 = 20$	**2**	1	2	0	1	0
$x_6 = 20$	2	2	1	0	0	1

Выберем столбец, оценка замещения которого отрицательна и индекс котрого минимален. Поэтому $j^* = 1$. Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1$. Так как $u_i > 0$ для $i =\in \{1, 2, 3\}$, то $\theta^* = 10$ и $\ell \in \{5, 6\}$. В соответствии с правилом Бранда выберем $\ell = 5$. Таким образом, выбран ведущий элемент равный 2, он выделен жирным в таблице 1.

Далее с помощью элементарных преобразований получим базисную матрицу для новой угловой точки с базисом $\mathcal{B}_1 = \{4, 1, 6\}$. Прежде всего покажем, как изменится значение целевой функции. Для этого элементарным преобразованием занулим оценку замещения, соответствующую x_1.

Таблица 2: Таблица симплекс-метода после первой итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = 100$	0	-7	-2	0	5	0
$x_4 = 10$	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1 = 10$	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6 = 0$	0	**1**	-1	0	-1	1

Далее выбираем столбец x_2, поскольку оценка замещения отрицательная и индекс минимален $(2 < 3)$. Аналогично предыдущей итерации $u = \mathbf{a}_2$ и $\theta^* = 0$ при $\ell = 6$. Таким образом, заменяем x_6 на x_2 и ведущий элемент равен 1 (выделен жирным). Заметим, что текущее решение является вырожденным, так как $x_6 = 0$. Поэтому значение целевой функции не меняется при смене базиса. Зануляем оценку замещения для x_2 и строки в столбце x_2 кроме строки с ведущим элементом. Получили таблицу 3.

Таблица 3: Таблица симплекс-метода после второй итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = 100$	0	0	-9	0	-2	7
$x_4 = 10$	0	0	**2.5**	1	1	-1.5
$x_1 = 10$	1	0	1.5	0	1	-0.5
$x_2 = 0$	0	1	-1	0	-1	1

Далее выбираем стобец x_3, так как его индекс минимален среди столбцов с отрицательной оценкой замещения. Аналогично предыдущей итерации $\mathbf{u} = \mathbf{a}_3$ и $\theta^* = \frac{x_4}{u_1} = 4$ для $\ell = 4$. Таким образом, заменяем x_4 на x_3. Получим следующую таблицу 4.

Поскольку все оценки замещения неотрицательны, то решение найдено и оно является оптимальным. Найденное решение соответствует $(x_1, x_2, x_3) = (4, 4, 4)$ и находится в первом столбце и последних $m = 3$ строках. В первом столбце и $m + 1$ строке с конца находится отрицательное значение значения целевой функции, то есть оптимальное значение равно -136. Знаки $-$ в ячейках таблицы означают, что значения в этих ячейках неважны и их можно не считать.

Таблица 4: Таблица симплекс-метода после третьей итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = 136$	0	0	0	3.6	1.6	1.6
$x_3 = 4$	0	0	1	0.4	0.4	-0.6
$x_1 = 4$	1	0	0	$-$	$-$	$-$
$x_2 = 4$	0	1	0	0.4	-0.6	0.4

2. Задача 2

В этой задаче показано, что симплекс-метод может зациклиться, и как это зацикливание может быть преодолено с помощью правила Бранда. Здесь описание переходов от таблицы к таблице не будет описано столь подробно как в предыдущем примере, поскольку они полностью аналогичны. Ведущий элемент на каждой итерации будет выделен жирно.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4\\
\text{s.t. }&\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \le 0\\
&\frac{1}{2}x_2 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \le 0\\
&x_3 \le 1\\
&x_{1,2,3,4} \ge 0
\end{aligned}
$$

Преобразуем эту задачу к канонической форме:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4\\
\text{s.t. }&\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0\\
&\frac{1}{2}x_2 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0\\
&x_3 + x_7 = 1\\
&x_{1,2,3,4,5,6,7} \ge 0
\end{aligned}
$$

Аналогично предыдущему примеру начальная угловая точка $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Ей соответствует таблица 5.

Таблица 5: Изначальная таблица симплекс-метода

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 0$	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
$x_5 = 0$	$\mathbf{1/4}$	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 = 0$	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

При проведении симплекс-метода индексы будем выбирать так:

- столбец ведущего элемета определяется минимальным значением оценки замещения
- ведущий элемент определяется, как минимальный индекс, соответствующий θ^*

Таблица 6: Таблица симплекс-метода после первой итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 0$	0	-4	$-7/2$	33	3	0	0
$x_1 = 0$	1	-32	-4	36	4	0	0
$x_6 = 0$	0	$\mathbf{4}$	$3/2$	-15	-2	1	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

Таблица 7: Таблица симплекс-метода после второй итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 0$	0	0	-2	18	1	1	0
$x_1 = 0$	1	0	$\mathbf{8}$	-84	-12	8	0
$x_2 = 0$	0	1	$3/8$	$-15/4$	$-1/2$	$1/4$	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

Таблица 8: Таблица симплекс-метода после третьей итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 0$	$1/4$	0	0	-3	-2	3	0
$x_3 = 0$	$1/8$	0	1	$-21/2$	$-3/2$	1	0
$x_2 = 0$	$-3/64$	1	0	$\mathbf{3/16}$	$1/16$	$-1/8$	0
$x_7 = 1$	$-1/8$	0	0	$21/2$	$3/2$	-1	1

Таблица 9: Таблица симплекс-метода после четвёртой итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 0$	$-1/2$	16	0	0	-1	1	0
$x_3 = 0$	$-5/2$	56	1	0	$\mathbf{2}$	-6	0
$x_4 = 0$	$-1/4$	$16/3$	0	1	$1/3$	$-2/3$	0
$x_7 = 1$	$5/2$	-56	0	0	-2	6	1

Таблица 10: Таблица симплекс-метода после пятой итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 0$	$-7/4$	44	$1/2$	0	0	-2	0
$x_5 = 0$	$-5/4$	28	$1/2$	0	1	-3	0
$x_4 = 0$	$1/6$	-4	$-1/6$	1	0	$\mathbf{1/3}$	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

Получили таблицу 11, в точности совпадающую с изначальной таблицей 5. Таким образом, следуя указанным правилам выбора ведущего элемента симплекс-метод никогда не остановится.

Таблица 11: Таблица симплекс-метода после шестой итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 0$	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
$x_5 = 0$	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 = 0$	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

2.1 Правило Бранда

Теперь проведём итерации симплекс-метода, используя правило Бранда для выбора ведущего элемента. Можно увидеть, что вплоть до таблицы 9 последовательность шагов совпадает. Поэтому рассмотрим таблицу 9 с точки зрения правила Бранда. В таблице 12 красным отмечен ведущий элемент, выбор которого привёл к зацикливанию, а синим — ведущрий элемент, выбранный по правилу Бранда. Покажем, что его использование приведёт к остановке симплекс-метода за конечное число шагов.

Таблица 12: Таблица симплекс-метода после четвёртой итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 0$	$-1/2$	16	0	0	-1	1	0
$x_3 = 0$	$-5/2$	56	1	0	$\mathbf{2}$	-6	0
$x_4 = 0$	$-1/4$	$16/3$	0	1	$1/3$	$-2/3$	0
$x_7 = 1$	$\mathbf{5/2}$	-56	0	0	-2	6	1

Таблица 13: Таблица симплекс-метода после пятой итерации по правилу Бранда

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 1/5$	0	$24/5$	0	0	$-7/5$	$11/5$	$1/5$
$x_3 = 1$	0	0	1	0	0	0	1
$x_4 = 1/10$	0	$-4/15$	0	1	$\mathbf{2/15}$	$-1/15$	$1/10$
$x_1 = 2/5$	1	$-112/5$	0	0	$-4/5$	$12/5$	$2/5$

Таблица 14: Таблица симплекс-метода после шестой итерации по правилу Бранда

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 5/4$	0	2	0	$21/2$	0	$3/2$	$5/4$
$x_3 = 1$	0	0	1	0	0	0	1
$x_5 = 3/5$	0	$-8/5$	0	6	$4/5$	$-2/5$	$3/5$
$x_1 = 1$	1	-24	0	6	0	2	1

Видно, что все оценки замещения неотрицательны, следовательны найдено решение исходной задачи: $\mathbf{x}^* = (1, 0, 1, 0)$ и $f^* = -\frac{5}{4}$.

3. Задача 3

В этой задаче рассматривается пример использования двухфазного симплекс-метода.

$$
\begin{aligned}
&\min x_1 + x_2 + x_3\\
\text{s.t. } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3\\
& -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2\\
& 4x_2 + 9x_3 = 5\\
& 3x_3 + x_4 = 1\\
& x_{1,2,3,4} \geq 0
\end{aligned}
$$

Для этой задачи начальная угловая точка не так очевидна, как для предыдущих задач. Поэтому необходимо провести двухфазный симплекс-метод.

Фаза 1. Составим вспомогательную задачу

$$
\begin{aligned}
&\min x_5 + x_6 + x_7 + x_8\\
\text{s.t. } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3\\
& -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2\\
& 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5\\
& 3x_3 + x_4 + x_8 = 1\\
& x_1, \ldots, x_8 \geq 0
\end{aligned}
$$

Поскольку изначально $b_i > 0$ для всех i, то преобразования строк матрицы $\mathbf{A}$ не требуется. Иначе нужно было бы умножить соответствующую строку на -1.

Начальная угловая точка для вспомогательной задачи очевидна, $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 3, 2, 5, 1)$ и соответствующий подвектор $\mathbf{c}_B = (1, 1, 1, 1)$. Изначальные оценки замещения $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{a}_j$, где $\mathbf{a}_j$ — j-ый столбец матрицы $\mathbf{A}$.

Таким образом, заполнение изначальной таблицы симплекс-метода показано в таблице 15.

Таблица 15: Изначальная таблица симплекс-метода

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\mathbf{c}_\mathcal{B}^\top \mathbf{x}_\mathcal{B} = -11$	0	-8	-21	-1	0	0	0	0
$x_5 = 3$	1	2	3	0	1	0	0	0
$x_6 = 2$	-1	**2**	6	0	0	1	0	0
$x_7 = 5$	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_8 = 1$	0	0	3	1	0	0	0	1

Таблица 16: Таблица симплекс-метода после первой итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\mathbf{c}_\mathcal{B}^\top \mathbf{x}_\mathcal{B} = -3$	-4	0	3	-1	0	4	0	0
$x_5 = 1$	**2**	0	-3	0	1	-1	0	0
$x_2 = 1$	$-1/2$	1	3	0	0	$1/2$	0	0
$x_7 = 1$	2	0	-3	0	0	-2	1	0
$x_8 = 1$	0	0	3	1	0	0	0	1

Таблица 17: Таблица симплекс-метода после второй итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = -1$	0	0	-3	-1	2	2	0	0
$x_1 = 1/2$	1	0	$-3/2$	0	$1/2$	$-1/2$	0	0
$x_2 = 5/4$	0	1	$9/4$	0	$1/4$	$1/4$	0	0
$x_7 = 0$	0	0	0	0	-1	-1	1	0
$x_8 = 1$	0	0	**3**	1	0	0	0	1

Таблица 18: Таблица симплекс-метода после третьей итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = 0$	0	0	0	0	2	2	0	1
$x_1 = 1$	1	0	0	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
$x_2 = 1/2$	0	1	0	$-3/4$	$1/4$	$1/4$	0	$-3/4$
$x_7 = 0$	0	0	0	0	-1	-1	1	0
$x_3 = 1/3$	0	0	1	$1/3$	0	0	0	$1/3$

В таблице 18 видно, что значение целевой функции равно 0, значит найдена допустимая угловая точка исходной задачи $\mathbf{x}_0 = (1, 1/2, 1/3, 0)$. Однако в базисе присутствует вспомогательная переменная x_7. Так как в строке, которая ей соответствует все переменные в столбцах исходных переменных равны нулю, то эта строка избыточна и её можно исключить из таблицы.

Таким образом, итоговая таблица для начала второй фазы симплекс-метода представлена в таблице 19.

Таблица 19: Таблица симплекс-метода для начала второй фазы симплекс-метода

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = -11/6$	0	0	0	$-1/12$
$x_1 = 1$	1	0	0	$1/2$
$x_2 = 1/2$	0	1	0	$-3/4$
$x_3 = 1/3$	0	0	1	**1/3**

Таблица 20: Таблица симплекс-метода после первой итерации во второй фазе симплекс-метода

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = -7/4$	0	0	$1/4$	0
$x_1 = 1/2$	1	0	$-3/2$	0
$x_2 = 5/4$	–	–	–	0
$x_4 = 1$	0	0	3	1

Так как все оценки замещения положительные, получено решение исходной задачи. Таким образом, решение исходной задачи $\mathbf{x}^* = (1/2, 5/4, 0, 1)$ и $f^* = 7/4$.

Список литературы

[1] Dimitris Bertsimas and John N. Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization*, Belmont, MA: Athena Scientific, 1997, 5th edition