Методы оптимизации. Семинар 4. Сопряжённые множества. Лемма Фаркаша.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

26 сентября 2016 г.

Напоминание

- Внутренность и относительная внутренность выпуклого множества
- Проекция точки на множство
- Отделимость выпуклых множеств
- Опорная гиперплоскость

Сопряжённое множество

Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество X^*, что

$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Сопряжённый конус

Если $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — конус, тогда

$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Сопряжённое подпространство

Если X — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, тогда

$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Факты о сопряжённых множествах

Theorem

Пусть X — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$X^{**} = \overline{conv\,(X \cup \{0\})}.$$

Theorem

Пусть X — замкнутое выпуклое множество, включающее 0. Тогда $X^{**} = X$.

Theorem

Пусть $X_1 \subset X_2$, тогда $X_2^* \subset X_1^*$.

Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

- Неотрицательный октант: $\mathbb{R}^n_+$
- Конус положительных полуопределённых матриц: $\mathbf{S}^n_+$
- $\{(x_1, x_2) | |x_1| \leq x_2\}$
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq r\}$
- $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\| \leq t\}$

Лемма Фаркаша

Lemma (Фаркаш)

Примеры

Резюме

- Сопряжённые множества
- Свойства сопряжённых множеств
- Лемма Фаркаша