Методы оптимизации. Семинар 10. Двойственность.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

14 октября 2016 г.

Напоминание

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
  - общей задачи оптимизации
  - задачи безусловной оптимизации
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Обозначения

Задача

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = p^*$$

$$\text{s.t. } g_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m$$

$$h_j(x) \leq 0, \; j = 1, \ldots, p$$

Лагранжиан

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$$

Двойственные переменные

Вектора $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ называются двойственными переменными.

Двойственная функция

Функция $g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ называется двойственной функцией Лагранжа.

Свойства двойственной функции

Вогнутость

Двойственная функция является вогнутой как инфимум аффинных функций по $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ в независимости от того, является ли исходная задача выпуклой.

Нижняя граница

Для любого $\boldsymbol{\lambda}$ и для $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ выполнено $g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \leq p^*$.

Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
&\max g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = d^* \\
\text{s.t. } &\boldsymbol{\mu} \geq 0
\end{aligned}
$$

Зачем?

- Двойственная задача выпукла независимо от того, выпукла ли прямая
- Нижняя оценка может достигаться

Примеры

Слабая и сильная двойственность

Геометрическая интерпретация

Условия Каруша-Куна-Таккера

Механическая интерпретация

Примеры