Методы оптимизации. Семинар 9. Условия оптимальности.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

31 октября 2016 г.

Напоминание

- Конус возможных направлений
- Касательный конус
- Острый экстремум

Мотивация

Вопрос 0

Когда существует решение оптимизационной задачи?

Вопрос 1

Как проверить, что точка является решением оптимизационной задачи?

Вопрос 2

Из каких условий можно найти решение оптимизационной задачи?

Существование решения

Теорема Вейерштрасса

Пусть $X \subset R^n$ компактное множество и пусть $f(x)$ непрерывная функция на X. Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на X существует.

Эта теорема гарантирует, что решение подавляющего большинства разумных задач существует.

Условия оптимальности

Определение

Условием оптимальности будем называть некоторое выражение, выполнимость которого даёт необходимое и (или) достаточное условие экстремума.

Классы задач:

- Общая задача минимизации
- Задача безусловной минимизации
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Общая задача минимизации

Задача

$$f(x) \to \min_{x \in X}$$

Критерий оптимальности

Пусть $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

1. если x^* точка минимума $f(x)$ на X, то $\partial_X f(x^*) \neq \emptyset$ и $0 \in \partial_X f(x^*)$
2. если для некоторой точки $x^* \in X$ существует субдифференциал $\partial_X f(x^*)$ и $0 \in \partial_X f(x^*)$, то x^* — точка минимума $f(x)$ на X.

Какие недостатки у приведённого критерия?

Примеры

- $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \alpha\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_2 \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n},\ \alpha > 0$
- $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \alpha\|\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - b\|_2 \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n},\ \alpha > 0$
- Ограничение на допустимое множество

$$(x+2)^2 + |y+3| \to \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

$$\text{s.t. } 8 + 2x - y \leq 0$$

Задача безусловной минимизации

Задача: $f(x) \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n}$.

Критерий оптимальности для выпуклых функций

Пусть $f(x)$ выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда точка x^* решение задачи безусловной минимизации $\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x^*)$.

Следствие

Если $f(x)$ выпукла и дифференцируема на $\mathbb{R}^n$. Тогда точка x^* решение задачи безусловной минимизации $\Leftrightarrow$ $\nabla f(x^*) = 0$.

Достаточное условие для невыпуклых функций

Пусть f дважды дифференцируема на $\mathbb{R}^n$ и x^* такая что $\nabla f(x^*) = 0$. Тогда если $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$, то x^* точка строгого локального минимума $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$.

Примеры

- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_2}) \cos x_2 \to \min$
- Функция Розенброка:
  $(1 - x_1)^2 + \alpha \sum\limits_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 \to \min, \ \alpha > 0$
- $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + e^{x_1 + x_2} \to \min$

Задача

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$
$$\text{s.t. } g_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, m$$

Лагранжиан

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Критерий оптимальности

Пусть $f(x)$ и $g_i(x)$ дважды дифференцируемы в точке x^* и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности x^*. Пусть также $\nabla_x L(x^*, \boldsymbol{\lambda}) = 0$. Тогда если $\nabla^2 L(x^*, \boldsymbol{\lambda}) \succ 0$, то x^* — точка локального минимума.

Примеры

- $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^4 \to \mathrm{extr}_{\mathbf{x} \in G}, \; G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = 1\},$
  $\alpha_i > 0, \; c_i > 0$
- $x_1 + 4x_2 + 9x_3 \to \mathrm{extr}_{\mathbf{x} \in G}, \; G = \left\{ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1 \right\}$
- Примеры из задачника по матану на метод множителей Лагранжа

Задача

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x) = 0, \; i = 1, \dots, m$$
$$h_j(x) \leq 0, \; j = 1, \dots, n$$

Лагранжиан

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j h_j(x)$$

Критерий оптимальности

Примеры

- Пример 1

$$\begin{aligned} &\operatorname{extr}(x_1 - 3)(x_2 - 2) \\ \text{s.t. } &x_1 + 2x_2 = 4 \\ &x_1^2 + x_2^2 \le 5 \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- Пример 2

$$\operatorname{extr} \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i}$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$$

$$x_i > 0,\ b > 0,\ c_i > 0,\ a_i > 0$$

- Пример 3

$$\begin{aligned} &\operatorname{extr}(x_1 x_3 - 2x_2) \\ \text{s.t. } &2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 10 \\ &3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned}$$