Методы оптимизации.
Семинар 6. Выпуклые функции.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

10 октября 2016 г.

Напоминание

- Производная по скаляру
- Производная по вектору
- Производная по матрице
- Производная сложной функции

Определения функций

Выпуклая функция

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется выпуклой (строго выпуклой), если X — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ ($\alpha \in (0, 1)$) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Вогнутая функция

Функция f вогнутая (строго вогнутая), если $-f$ выпуклая (строго выпуклая).

Сильно выпуклая функция

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сильно выпуклой с константой $\theta > 0$, если X — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) - \theta\alpha(1-\alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

Определения множеств

Надграфик (эпиграф)

Надграфиком функции f называется множество
$\text{epi}f = \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R},\ y \geq f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Множество подуровней (множество Лебега)

Множество подуровня функции f называется следующее множество

$$C_\gamma = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \leq \gamma\}.$$

Критерии выпуклости

Дифференциальный критерий первого порядка

Дифференциальный критерий второго порядка

Связь с надграфиком

Ограничение на прямую

Примеры

Неравенство Йенсена

Примеры

Резюме

- Выпуклая функция
- Надграфик и множество подуровня функции
- Критерии выпуклости функции
- Неравенство Йенсена