Методы оптимизации.
Семинар 4. Сопряжённые множества.
Лемма Фаркаша.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

26 сентября 2016 г.

Напоминание

- Внутренность и относительная внутренность выпуклого множества
- Проекция точки на множство
- Отделимость выпуклых множеств
- Опорная гиперплоскость

Сопряжённое множество

Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество X^*, что
$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Сопряжённый конус

Если $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — конус, тогда
$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Сопряжённое подпространство

Если X — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, тогда
$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Факты о сопряжённых множествах

Theorem

Пусть X *— произвольное множество в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$X^{**} = \overline{conv\,(X \cup \{0\})}.$$

Theorem

Пусть X *— замкнутое выпуклое множество, включающее 0. Тогда* $X^{**} = X$.

Theorem

Пусть $X_1 \subset X_2$, *тогда* $X_2^* \subset X_1^*$.

Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

- Неотрицательный октант: $\mathbb{R}^n_+$
- Конус положительных полуопределённых матриц: $\mathbf{S}^n_+$
- $\{(x_1, x_2) | |x_1| \leq x_2\}$
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq r\}$
- $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\| \leq t\}$

Лемма Фаркаша

Lemma (Фаркаш)

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *и* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:*

$$1)\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0$$

$$2)\ \mathbf{p}\mathbf{A} \geq 0,\ \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$$

Важное следствие

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1)\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$2)\ \mathbf{p}\mathbf{A} = 0,\ \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0,\ \mathbf{p} \geq 0$$

Применение

Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём сннизу, то задача имеет решение.

Геометрическая интерпретация

Геометрия леммы Фаркаша

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ — $\mathbf{b}$ лежит в конусе, натянутым на столбцы матрицы $\mathbf{A}$

$\mathbf{pA} \geq 0$, $\langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$ — существует разделяющая гиперплоскость между вектором $\mathbf{b}$ и конусом из столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Резюме

- Сопряжённые множества
- Свойства сопряжённых множеств
- Лемма Фаркаша