

# Методы оптимизации.

## Семинар 11. Двойственность.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,  
Факультет Управления и Прикладной Математики

28 ноября 2016 г.

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
  - общей задачи оптимизации
  - задачи безусловной оптимизации
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

# Обозначения

## Задача

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) &= p^* \\ \text{s.t. } g_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

## Лагранжиан

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

## Двойственные переменные

Вектора  $\mu$  и  $\lambda$  называются двойственными переменными.

## Двойственная функция

Функция  $g(\mu, \lambda) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \mu)$  называется двойственной функцией Лагранжа.

# Свойства двойственной функции

## Вогнутость

Двойственная функция является **вогнутой** как инфимум аффинных функций по  $(\mu, \lambda)$  в независимости от того, является ли исходная задача выпуклой.

## Нижняя граница

Для любого  $\lambda$  и для  $\mu \geq 0$  выполнено  $g(\mu, \lambda) \leq p^*$ .

## Двойственная задача

$$\begin{aligned} \max g(\mu, \lambda) &= d^* \\ \text{s.t. } \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

## Зачем?

- Двойственная задача выпукла независимо от того, выпукла ли прямая
- Нижняя оценка **может** достигаться

# Связь с сопряжённой функцией

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \min f_0(x) \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{Cx} = \mathbf{d} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \inf_{\mathbf{x}} (f_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{Cx} - \mathbf{d})) = \\ &= -\mathbf{b}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{d} + \inf_{\mathbf{x}} (f_0(\mathbf{x}) + (\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x}) = \\ &= -\mathbf{b}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{d} - f_0^*(-\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

Области определений двойственной и сопряжённой функций связаны:

$$\text{dom } g = \{(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \mid -\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\mu} \in \text{dom } f_0^*\}$$

Найти двойственную функцию:

- Решение СЛУ минимальной нормы

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Линейное программирование

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Задача разбиения

$$\begin{aligned} \min \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} \\ \text{s.t. } x_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

# Слабая и сильная двойственность

## Определение

Оптимальные значения целевой функции в прямой и двойственной задаче связаны соотношением

$$d^* \leq p^*.$$

Если  $d^* < p^*$ , то свойство называют слабой двойственностью.  
Если  $d^* = p^*$ , то — сильной двойственностью.

## Замечание

Слабая двойственность есть всегда по построению двойственной задачи.

## Вопросы

- При каких условиях выполняется сильная двойственность?
- Как использовать двойственность для проверки оптимальности?

# Критерий субоптимальности

По построению  $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ , поэтому  
 $f_0(x) - p^* \leq f_0(x) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \varepsilon$ .

## Определение

Разность  $f_0(x) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$  называется *двойственным зазором* и является оценкой сверху для разности текущего и оптимального значения функции.

Способы использования:

- критерий остановки в итерационном процессе
- теоретическая оценка сходимости алгоритма
- проверка оптимальности данной точки



## Теорема

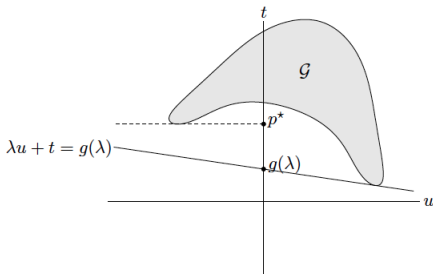
Если задача выпуклая и существует  $x$ , лежащий внутри допустимой области, т.е. ограничения типа неравенств выполнены как строгие неравенства, то выполнено свойство сильной двойственности.

- Решение СЛАУ наименьшей нормы
- Линейное программирование
- Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями
- Невыпуклая задача с сильной двойственностью

# Геометрическая интерпретация

$$\min_x f_0(x), \text{ where } f_1(x) \leq 0.$$

$$g(\lambda) = \inf_{(u,t) \in \mathcal{G}} (t + \lambda u) \quad \mathcal{G} = \{(f_1(x), f_0(x)) \mid x \in \mathcal{D}\}$$



- $\lambda = 0$
- $\lambda^*$  — оптимальное значение
- $\lambda > \lambda^*$

# Условия дополняющей нежёсткости

Пусть  $\mathbf{x}^*$  и  $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  решения прямой и двойственной задачи. То есть

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^*) &= g(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \\ f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) &\leq \\ f(\mathbf{x}^*), \quad \boldsymbol{\mu} &\geq 0 \end{aligned}$$

## Условия дополняющей нежёсткости

$$\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

Для каждого неравенства

- либо множитель Лагранжа равен нулю
- либо оно активно.

# Условия Каруша-Куна-Таккера

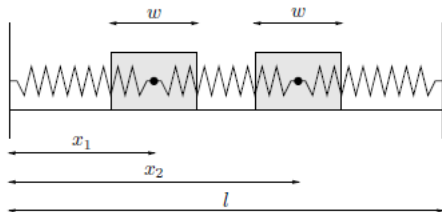
Из прошлого семинара известны необходимые условия ККТ:

- ❶  $g_i(x^*) = 0$  — допустимость в прямой задаче
- ❷  $h_j(x^*) \leq 0$  — допустимость в прямой задаче
- ❸  $\mu_j^* \geq 0$  — допустимость в двойственной задаче
- ❹  $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$  — условие дополняющей нежёсткости
- ❺  $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$  — определение двойственной функции

Пример ( $\mathbf{P} \in \mathbf{S}_+^n$ )

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

# Механическая интерпретация



Поиск устойчивого положения системы:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} & \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(l - x_2)^2 \\ \text{s.t.} & \frac{w}{2} - x_1 \leq 0 \\ & w + x_1 - x_2 \leq 0 \\ & \frac{w}{2} - l + x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

# Примеры

- Орицательная энтропия при линейных ограничениях

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1} x_i \log x_i$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1$$

- Сформулировать двойственную задачу и по её решению найти решение прямой задачи:

$$\min \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + x + y + 2z$$

$$\text{s.t. } x + 2y + z = 4$$

- Релаксация Лагранжа для задачи бинарного линейного программирования:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n$$

- Двойственная задача: что это такое и зачем оно надо?
- Сильная и слабая двойственность
- Условия Слейтера
- Геометрическая и механическая интерпретации