Методы оптимизации. Семинар 3. Проекция точки на множество, отделимость, опорная гиперплоскость.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

19 сентября 2016 г.

Напоминание

- Аффинная оболочка и аффинное множество
- Выпуклая оболочка и выпуклое множество
- Коническая оболочка и выпуклый конус
- Операции, сохраняющие выпуклость

Внутренности множества

Внутренность множества

Внутренность множества G состоит из точек из G, таких что:

$$\mathbf{int}\, G = \{\mathbf{x} \in G \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset G\},$$

где $B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon\}$

Относительная внутренность

Относительной внутреностью множества G называют следующее множество:

$$\mathbf{relint}\, G = \{\mathbf{x} \in G \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathbf{aff}\, G \subseteq G\}$$

Вопрос: зачем нужна концепция относительной внутренности?

Примеры

Найти относительные внутренности следующих множеств

- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \leq 1,\ \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 = 1,\ \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq x_1 \leq 1,\ -1 \leq x_2 \leq 1,\ x_3 = 0\}$

Проекция точки на множество

Расстояние между точкой и множеством

Расстоянием d от точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ является

$$d(\mathbf{a}, X, \|\cdot\|) = \inf\{\|\mathbf{a} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in X\}$$

Проекция точки на множество

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $X \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_X(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in X} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Вопросы: единственна ли проекция? Если нет, то в каких случаях единственна? Какая связь между единственностью проекции и выпуклостью множества?

Факты о проекциях

Критерий проекции

Точка $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$ является проекцией точки $\mathbf{a}$ на множество $X \Leftrightarrow \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{a} - \pi_X(\mathbf{a})\|, \ \forall \mathbf{x} \in X$.

Критерий проекции для нормы ℓ_2

Точка $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$ является проекцией точки $\mathbf{a}$ на множество $X \Leftrightarrow \langle \pi_X(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_X(\mathbf{a}) \rangle \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in X$.

Примеры

- Проекция на шар $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \|\mathbf{x}\|_* \leq 1\}$ в различных нормах
- Проекция на аффинное множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, rank(\mathbf{A}) = m\}$
- Проекция на аффинное множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{S}\mathbf{y},\ \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times m},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, rank(\mathbf{S}) = m\}$

Отделимость выпуклых множеств

Определение

Пусть $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$ произвольные множества. Они называются:

- отделимыми, если $\exists \mathbf{p}, \beta$: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta \geq \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle$, $\forall \mathbf{x}_1 \in X_1$ и $\forall \mathbf{x}_2 \in X_2$.
- собственно отделимыми, если они отделимы и $\exists \mathbf{x}_1^* \in X$ и $\exists \mathbf{x}_2^* \in X$: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1^* \rangle > \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2^* \rangle$
- сильно отделимыми, если $\exists \mathbf{p} \neq 0$ и β: $\inf\limits_{\mathbf{x}_1 \in X_1} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle > \beta > \sup\limits_{\mathbf{x}_2 \in X_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle$
- строго отделимы, если $\forall \mathbf{x}_1 \in X_1$ и $\forall \mathbf{x}_2 \in X_2$: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle > \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle$.

Разделяющая гиперплоскость

Разделяющей гиперплоскостью для множеств X_1, X_2 является такая гиперплоскость $\{\mathbf{x} | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$, что $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta$ для всех $\mathbf{x}_1 \in X_1$ и $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta$ для всех $\mathbf{x}_2 \in X_2$

Факты об отделимости

Существование

Пусть X_1 и X_2 выпуклые непересекающиеся множества, тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

Критерий для выпуклых множеств

Два выпуклых множества, таких что по крайней мере одно из них открыто, не пересекаются тогда и только тогда, когда существует разделяющая гиперплоскость.

Критерий сильной отделимости

Два выпуклых множества сильно отделимы тогда и только тогда когда расстояние между ними положительно.

Примеры

- Построить разделяющую гиперплоскость для множеств X_1, X_2: $X_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 x_2 > 1, x_1 > 0\}$, $X_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 \leq 9 + \frac{4}{x_1 - 1}\}$.
- Критерий разрешимости системы строгих линейных неравенств $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ как не пересечение аффинного множества $\{\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ и множества $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | y_i > 0\}$
- Пример двух замкнутых выпуклых не пересекающихся множеств, которые не являются строго отделимыми
- Построить разделяющую гиперплоскость для множеств $X_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\}$ и $X_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + 1 \leq x_n\}$.

Опорная гиперплоскость

Опорная гиперплоскость

Гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ называется опорной к множеству X в граничной точке $\mathbf{x}_0$, если $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_0 \rangle$ для всех $\mathbf{x} \in X$.

Собственно опорная гиперплоскость

Гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ называется опорной к множеству X в точке $\mathbf{x}_0$, если она опорная и $\exists \tilde{\mathbf{x}} \in X$: $\langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle > \beta$.

Теорема об опорной гиперплоскости

В любой граничной (относительно граничной) точке выпуклого множества существует опорная (собственно опорная) гиперплоскость.

Примеры

- Выразить множество $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ | x_1 x_2 \geq 1\}$ как пересечение гиперплоскостей.
- Построить опорную гиперплоскость к множеству $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | e^{x_1} \leq x_2\}$ в точке $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$
- Найти уравнене гиперплоскости опорной к множеству $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 \geq x_1^2 + x_2^2\}$ и отделяющей его от точки $\mathbf{x}_0 = (-5/4, 5/16, 15/16)$

Резюме

- Внутренность и относительная внутренность выпуклого множества
- Проекция точки на множство
- Отделимость выпуклых множеств
- Опорная гиперплоскость