

Методы оптимизации.

Семинар 9. Условия оптимальности.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

31 октября 2016 г.

- Конус возможных направлений
- Касательный конус
- Острый экстремум

Вопрос 0

Когда существует решение оптимизационной задачи?

Вопрос 1

Как проверить, что точка является решением оптимизационной задачи?

Вопрос 2

Из каких условий можно найти решение оптимизационной задачи?

Теорема Вейерштрасса

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ компактное множество и пусть $f(x)$ непрерывная функция на X . Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на X существует.

Эта теорема гарантирует, что решение подавляющего большинства разумных задач существует.

Определение

Условием оптимальности будем называть некоторое выражение, выполнимость которого даёт необходимое и (или) достаточное условие экстремума.

Классы задач:

- Общая задача минимизации
- Задача безусловной минимизации
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Общая задача минимизации

Задача

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in X}$$

Критерий оптимальности

Пусть $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

- ① если x^* точка минимума $f(x)$ на X , то $\partial_X f(x^*) \neq \emptyset$ и $0 \in \partial_X f(x^*)$
- ② если для некоторой точки $x^* \in X$ существует субдифференциал $\partial_X f(x^*)$ и $0 \in \partial_X f(x^*)$, тогда x^* — точка минимума $f(x)$ на X .

Какие проблемы у приведённого критерия?

- $\mathbf{x}^T \mathbf{x} + \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_2 \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}, \alpha > 0$
- $\mathbf{x}^T \mathbf{x} + \alpha \|\mathbf{c}^T \mathbf{x} - b\|_2 \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}, \alpha > 0$
- Ограничение на допустимое множество

$$\begin{aligned} (x+2)^2 + |y+3| &\rightarrow \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \\ \text{s.t. } 8 + 2x - y &\leq 0 \end{aligned}$$

Задача безусловной минимизации

Задача

Критерий оптимальности

Задача

Критерий оптимальности

Задача

Критерий оптимальности

