Методы оптимизации.
Семинар 6. Выпуклые функции.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

10 октября 2016 г.

Напоминание

- Производная по скаляру
- Производная по вектору
- Производная по матрице
- Производная сложной функции

Определения функций

Выпуклая функция

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется выпуклой (строго выпуклой), если X — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ ($\alpha \in (0, 1)$) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Вогнутая функция

Функция f вогнутая (строго вогнутая), если $-f$ выпуклая (строго выпуклая).

Сильно выпуклая функция

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сильно выпуклой с константой $m > 0$, если X — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2) - m\alpha(1 - \alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

Определения множеств

Надграфик (эпиграф)

Надграфиком функции f называется множество
$\text{epi} f = \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}, \ y \geq f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Множество подуровней (множество Лебега)

Множество подуровня функции f называется следующее множество

$$C_\gamma = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \leq \gamma\}.$$

Замкнутая функция

Функция f называется замкнутой, если её надграфик замкнутое множество.

Критерии выпуклости

Дифференциальный критерий первого порядка

Функция f выпукла тогда и только тогда, когда $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \subset \mathbb{R}^n$ выполнена:
$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f^\mathsf{T}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

Дифференциальный критерий второго порядка

Непрерывная и дважды дифференцируемая функция f выпукла тогда и только тогда, когда $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{ri}(X) \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:
$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \succeq 0.$$

Связь с надграфиком

Функция выпукла тогда и только тогда, когда её надграфик выпуклое множество.

Ограничение на прямую

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда выпукла функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ на множестве $\{t | \mathbf{x} + t\mathbf{v} \in X\}$ для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Критерии сильной выпуклости

Дифференциальный критерий первого порядка

Функция f сильно выпукла с константой m тогда и только тогда, когда $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \subset \mathbb{R}^n$ выполнена:

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f^\top(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$$

Дифференциальный критерий второго порядка

Непрерывная и дважды дифференцируемая функция f сильно выпукла с константой m тогда и только тогда, когда $\forall \mathbf{x} \in \mathrm{ri}(X) \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}.$$

Примеры

Неравенство Йенсена

Примеры

Резюме

- Выпуклая функция
- Надграфик и множество подуровня функции
- Критерии выпуклости функции
- Неравенство Йенсена