Методы оптимизации. Семинар 8. Разные конусы.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

24 октября 2016 г.

Напоминание

- Субдифференциал
- Условный субдифференциал
- Нормальный конус

Конус возможных направлений

Определение

Конусом возможных направдений для множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}_0 \in G$ будем называть такое множество $\Gamma(\mathbf{x}_0|G) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{s} \in G,\ 0 \le \alpha \le \overline{\alpha}(\mathbf{s})\}$.

Определение для выпуклого множества

Конусом возможных направдений для выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}_0 \in X$ будем называть такое множество
$\Gamma(\mathbf{x}_0|X) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{s} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),\ \lambda > 0, \forall x \in X\}$.

Какая связь между нормальным конусом и конусом возможных направлений?

Пример

Полезный факт

Пусть $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = \overline{1,n};\ \varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x} - b_i = 0,\ i = \overline{n,m}\}$. Тогда если $\varphi_i(\mathbf{x})$ выпуклы и множество G регулярно, то

$\Gamma(\mathbf{x}_0|G) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \nabla\varphi_i(\mathbf{x}_0)^{\mathsf{T}}\mathbf{s} \leq 0, i \in I, \mathbf{a}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{s} = 0, i = \overline{n,m}\}$

и

$$\Gamma^*(\mathbf{x}_0|G) = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{p} = \sum_{i=m}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i - \sum_{i \in I} \mu_i \nabla\varphi_i(\mathbf{x}_0)\right\},$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\mu_i \geq 0$, $\mathbf{x}_0 \in G$ и $I = \{i : \varphi_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$.

Найти $\Gamma(\mathbf{x}_0|X)$ и $\Gamma^*(\mathbf{x}_0|X)$ следующих множества:
$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + 2x_2^2 \leq 3,\ x_1 + x_2 = 0\}$.

Касательный конус

Острый экстремум

Резюме

- Конус возможных направлений
- Касательный конус
- Острый экстремум