

Методы оптимизации.

Семинар 8. Разные конусы.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

24 октября 2016 г.

- Субдифференциал
- Условный субдифференциал
- Нормальный конус

Конус возможных направлений

Определение

Конусом возможных направлений для множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}_0 \in G$ будем называть такое множество

$$\Gamma(\mathbf{x}_0|G) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{s} \in G, 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}(\mathbf{s})\}.$$

Определение для выпуклого множества

Конусом возможных направлений для выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}_0 \in X$ будем называть такое множество

$$\Gamma(\mathbf{x}_0|X) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{s} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \lambda > 0, \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Какая связь между нормальным конусом и конусом возможных направлений?

Полезный факт

Пусть $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{0, n-1}; \varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i = 0, i = \overline{n, m}\}$. Тогда если $\varphi_i(\mathbf{x})$ выпуклы и множество G регулярно, то

$\Gamma(\mathbf{x}_0 | G) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{s} \leq 0, i \in I, \mathbf{a}_i^T \mathbf{s} = 0, i = \overline{n, m}\}$
и

$$\Gamma^*(\mathbf{x}_0 | G) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{p} = \sum_{i=n}^m \lambda_i \mathbf{a}_i - \sum_{i \in I} \mu_i \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_0) \right\},$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}, \mu_i \geq 0, \mathbf{x}_0 \in G$ и
 $I = \{i : \varphi_i(\mathbf{x}_0) = 0, i = \overline{0, n-1}\}$.

Найти $\Gamma(\mathbf{x}_0 | X)$ и $\Gamma^*(\mathbf{x}_0 | X)$ следующих множества:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + 2x_2^2 \leq 3, x_1 + x_2 = 0\}.$$

Касательный конус

Определение

Касательным конусом к множеству G в точке $x_0 \in \overline{G}$ называется следующее множество $T(x_0|G) = \{\lambda z | \lambda > 0, \exists \{x_k\} \subset G, x_k \rightarrow x_0, x_k \neq x_0, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_0 - x_k}{\|x_0 - x_k\|_2} = z\}$

Пояснение

Касательный конус состоит из всех направлений, по которым можно сходиться к точке x_0 по последовательностям из множества G .

Лемма

Если G — выпуклое множество, то $T(x_0|G) = \Gamma(x_0|G)$.

Пусть множество

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{0, n-1} \quad \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, i = \overline{n, m}\}$$

регулярно, тогда

$$T(\mathbf{x}_0|G) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n | \nabla \varphi_i^T(\mathbf{x}_0)\mathbf{z} \leq 0, i \in I, \quad \nabla \varphi_i^T(\mathbf{x}_0)\mathbf{z} = 0, i = \overline{n, m}\}$$

и

$$T^*(\mathbf{x}_0|G) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{p} = \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_0) - \sum_{i \in I} \mu_i \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_0) \right\},$$

где $\mu_i \geq 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $I = \{i | \varphi_i(\mathbf{x}_0) = 0, i = \overline{0, n-1}\}$

Пример: найти $T(\mathbf{x}_0|G)$ и $T^*(\mathbf{x}_0|G)$ для множества

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1^2 + 2x_2^2 = 1\}$$

Острый экстремум

Определение

Точка \mathbf{x}^* — точка острого минимума функции f на множестве G , если существует $\gamma > 0$:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$

Лемма

Пусть f — дифференцируемая функция на $G \subset \mathbb{R}^n$. Точка \mathbf{x}^* — точка острого минимума функции f на множестве G тогда и только тогда, когда существует такое $\alpha > 0$, что $\nabla f^T(\mathbf{x}^*)\mathbf{z} \geq \alpha > 0$, $\mathbf{z} \in T(\mathbf{x}^*|G)$, $\|\mathbf{z}\|_2 = 1$.

Примеры

- $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}_G$, $G = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 2, x_1 + x_2 \leq 1\}$
- $x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{extr}_G$

- Конус возможных направлений
- Касательный конус
- Острый экстремум