

Методы оптимизации.

Семинар 3. Проекция точки на множество, отделимость, опорная гиперплоскость.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

19 сентября 2016 г.

- Аффинная оболочка и аффинное множество
- Выпуклая оболочка и выпуклое множество
- Коническая оболочка и выпуклый конус
- Операции, сохраняющие выпуклость

Внутренности множества

Внутренность множества

Внутренность множества G состоит из точек из G , таких что:

$$\text{int}G = \{x \in G \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset G\},$$

где $B(x, \varepsilon) = \{y \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\}$

Относительная внутренность

Относительной внутренностью множества G называют следующее множество:

$$\text{relint}G = \{x \in G \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}G \subseteq G\}$$

Вопрос: зачем нужна концепция относительной внутренности?

Проекция точки на множество

Расстояние между точкой и множеством

Расстоянием d от точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ является

$$d(\mathbf{a}, X, \|\cdot\|) = \inf\{\|\mathbf{a} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in X\}$$

Проекция точки на множество

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $X \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_X(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in X} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Вопросы: единственна ли проекция? Если нет, то в каких случаях единственна? Какая связь между единственностью проекции и выпуклостью множества?

Факты о проекциях

Критерий проекции

Точка $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$ является проекцией точки \mathbf{a} на множество $X \Leftrightarrow \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{a} - \pi_X(\mathbf{a})\|, \forall \mathbf{x} \in X$.

Критерий проекции для нормы ℓ_2

Точка $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$ является проекцией точки \mathbf{a} на множество $X \Leftrightarrow \langle \pi_X(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_X(\mathbf{a}) \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in X$.



Опорная гиперплоскость

Отделимость выпуклых множеств

- Внутренность и относительная внутренность выпуклого множества
- Проекция точки на множество
- Опорная гиперплоскость
- Отделимость выпуклых множеств