

Методы оптимизации.

Семинар 10. Двойственность.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

14 октября 2016 г.

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
 - общей задачи оптимизации
 - задачи безусловной оптимизации
 - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств
 - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Обозначения

Задача

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) &= p^* \\ \text{s.t. } g_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

Двойственные переменные

Вектора μ и λ называются двойственными переменными.

Двойственная функция

Функция $g(\mu, \lambda) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \mu)$ называется двойственной функцией Лагранжа.

Свойства двойственной функции

Вогнутость

Двойственная функция является **вогнутой** как инфимум аффинных функций по (μ, λ) в независимости от того, является ли исходная задача выпуклой.

Нижняя граница

Для любого λ и для $\mu \geq 0$ выполнено $g(\mu, \lambda) \leq p^*$.

Двойственная задача

$$\begin{aligned} \max g(\mu, \lambda) &= d^* \\ \text{s.t. } \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

Зачем?

- Двойственная задача выпукла независимо от того, выпукла ли прямая
- Нижняя оценка может достигаться

Примеры

Найти двойственную функцию:

- Решение СЛУ минимальной нормы

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Линейное программирование

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Задача разбиения

$$\begin{aligned} \min \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} \\ \text{s.t. } x_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Слабая и сильная двойственность

Геометрическая интерпретация

Условия Каруша-Куна-Таккера

Механическая интерпретация

