

Методы оптимизации.

Семинар 7. Субдифференциал.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

17 октября 2016 г.

- Выпуклая функция
- Надграфик и множество подуровня функции
- Критерии выпуклости функции
- Неравенство Йенсена

Зачем?

Важным свойством непрерывной выпуклой функции f является то, что в выбранной точке x для всех $y \in \text{dom } f$ выполнено неравенство:

$$f(y) - f(x) \geq \langle a, y - x \rangle$$

для некоторого вектора a , то есть касательная к графику функции является **глобальной** оценкой снизу для функции.

- Если f дифференцируема, то $a = \nabla f(y)$.
- Что делать, если f недифференцируема?

Субградиент

Вектор \mathbf{a} называется субградиентом функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке \mathbf{x} , если

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle$$

для всех $\mathbf{y} \in X$.

Субдифференциал

Множество субградиентов функции f в точке \mathbf{x} называется субдифференциалом f в \mathbf{x} и обозначается $\partial f(\mathbf{x})$.

Теорема Моро-Рокафеллара

Пусть $f_i(\mathbf{x})$ — выпуклые функции на выпуклых множествах G_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда, если $\bigcap_{i=1}^n G_i \neq \emptyset$ то функция

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(\mathbf{x}), \quad a_i > 0$$
 имеет субдифференциал $\partial_G f(\mathbf{x})$

на множестве $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ и $\partial_G f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{G_i} f_i(\mathbf{x})$.

Если функция — максимум

Если $f(\mathbf{x}) = \max_{i=1, \dots, m} (f_i(\mathbf{x}))$, тогда

$$\partial_G f(\mathbf{x}) = \text{Conv}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{J}(\mathbf{x})} \partial_G f_i(\mathbf{x})\right), \text{ где}$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \{i = 1, \dots, m \mid f_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\}$$

Найдите субдифференциал для следующих функций.

- Модуль: $f(x) = |x|$
- Норма ℓ_2 : $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$
- Скалярный максимум: $f(x) = \max(e^x, 1 - x)$
- Векторный максимум: $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{c}^T \mathbf{x}|$
- $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}| + |\mathbf{c}_2^T \mathbf{x}|$

Условный субдифференциал

Определение

Множество $\{\mathbf{a} | f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle, \forall \mathbf{x} \in X\}$ называется субдифференциалом f в \mathbf{x}_0 на множестве X и обозначается $\partial_X f(\mathbf{x}_0)$.

Как перейти от безусловного субдифференциала к условному?

Если f — выпуклая функция, то рассмотрим функцию $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x}|X)$, которая тоже выпуклая. Тогда

$$\partial g(\mathbf{x}_0) = \partial_X f(\mathbf{x}_0) = \partial f(\mathbf{x}_0) + \partial \delta(\mathbf{x}_0|X).$$

Найдём $\partial \delta(\mathbf{x}_0|X)$:

$$\delta(\mathbf{x}|X) - \delta(\mathbf{x}_0|X) \stackrel{\mathbf{x} \in X}{=} 0 \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$

Нормальный конус

Множество $N(\mathbf{x}_0|X) = \{\mathbf{a} | \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0, \forall \mathbf{x} \in X\}$ называется нормальным конусом к множеству X в точке \mathbf{x}_0 .

Тогда $\partial_X f(\mathbf{x}_0) = \partial f(\mathbf{x}_0) + N(\mathbf{x}_0|X)$

- $f(x) = |x|$, $X = \{-1 \leq x \leq 1\}$
- $f(\mathbf{x}) = |x_1 - x_2|$, $X = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 2\}$

- Субградиент
- Субдифференциал
- Условный субдифференциал
- Методы вычислений