Семинар № 8
«Разные конусы и сопряжённые функции»

Александр Катруца

3 ноября 2016 г.

1. Разбор промежуточной контрольной

Сначала несколько замечаний о прошедшей промежуточной контрольной.

1. Большинство написали все базовые определения и формулировки, и это уже неплохо. Те, кто не написал, пожалуйста, непременно выучите это к экзамену.

2. Почему-то почти никто не взялся сформулировать задачу проекции точки на вероятностный симплекс. Симплекс — это множество вида $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum\limits_{i=1}^n x_i = 1\right\}$. В условии он был назван вероятностным, потому что $\mathbf{x}$ можно интерпретировать как дискретное вероятностное распределение. И чтобы навести вас на определение симплекса, если вы его забыли. Таким образом, задача нахождения проекции точки $\mathbf{y}$ на вероятностный симплекс формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \\ \text{s.t. } & x_i \geq 0 \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

   и является выпуклой, так как целевая функция выпукла на выпуклой области определения — симплексе.

3. Далее, небольшое напоминание определения выпуклой задачи.

   Определение 1 Оптимизационная задача называется *выпуклой*, если целевая функция является выпуклой на выпуклом допустимом множестве.

4. В задаче про нормальный конус имелся в виду конус, с помощью которого опрелелялся условный субдифференциал. Но за ответ про конус, заданный некоторой нормой, я снижал совсем немного.

5. В задаче, где надо было проверить выпуклость множества, зависящего от параметра t, некоторые довольно мучительно, влоб, показали, что это множество пустое и поэтому выпуклое. Однако ожидалось, что вы заметите, что при фиксированном t — это

множество — шар, а значит выпукло. А дальше надо было привести утверждение про выпуклость пересечения любого числа выпукых множеств. Про этот приём я упоминал на семинаре.

6. В задаче про нахождение множества разделяющих плоскостей для заданной точки и множества, кажется, толькьо один человек правильно набросал путь решения. А именно надо было нарисовать картинку (специально задача дана в 2D) и понять, что для каждой точки, лежащей на оси ординат, между «углом» множества и данной точкой существует свой набор разделябщих гиперплоскостей. То есть первый параметр — это точка на оси ординат, второй параметр — это множество угловых коэффициентов, которое зависит от первого параметра. Далее нужно было аккуратно провести вычисления предельных положения разделяющих гиперплоскостей и записать ответ.

В целом, у меня осталось скорее положительное впечатление от вашей работы, однако я уже упоминал, что дальше контрольные будут оцениваться строже. По крайней мере по отношению к тем, кто не может написать базовые определения курса.

2. Конусы

3. Сопряжённые функции