Методы оптимизации. Семинар 10. Двойственность.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

14 октября 2016 г.

Напоминание

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
  - общей задачи оптимизации
  - задачи безусловной оптимизации
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Обозначения

Задача

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = p^*$$
$$\text{s.t. } g_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m$$
$$h_j(x) \leq 0, \ j = 1, \ldots, p$$

Лагранжиан

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$$

Двойственные переменные

Вектора $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ называются двойственными переменными.

Двойственная функция

Функция $g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf\limits_{x \in \mathcal{D}} L(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ называется двойственной функцией Лагранжа.

Свойства двойственной функции

Вогнутость

Двойственная функция является вогнутой как инфимум аффинных функций по $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ в независимости от того, является ли исходная задача выпуклой.

Нижняя граница

Для любого $\boldsymbol{\lambda}$ и для $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ выполнено $g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \leq p^*$.

Двойственная задача

$$\begin{aligned} &\max g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = d^* \\ \text{s.t. } &\boldsymbol{\mu} \geq 0 \end{aligned}$$

Зачем?

- Двойственная задача выпукла независимо от того, выпукла ли прямая
- Нижняя оценка может достигаться

Примеры

Найти двойственную функцию:

- Решение СЛУ минимальной нормы

$$\begin{aligned} &\min \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Линейное программирование

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Задача разбиения

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{W}\mathbf{x} \\ \text{s.t. } &x_i^2 = 1, \; i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Слабая и сильная двойственность

Определение

Оптимальные значения целевой функции в прямой и двойственной задаче связаны соотношением

$$d^* \leq p^*.$$

Если $d^* < p^*$, то свойство называют слабой двойственностью.
Если $d^* = p^*$, то — сильной двойственностью.

Замечание

Слабая двойственность есть всегда по построению двойственной задачи.

Вопросы

- При каких условиях выполняется сильная двойственность?
- Как использовать двойственность для проверки оптимальности?

Условия Слейтера

Теорема

Если задача выпуклая и существует x, лежащий внутри допустимой области, т.е. ограничения типа неравенств выполнены как строгие неравенства, то выполнено свойство сильной двойственности.

- Решение СЛАУ наименьшей нормы
- Линейное программирование
- Квадратичное программирование с квадратичными огранчиениями
- Невыпуклая задача с сильной двойственностью

Геометрическая интерпретация

Условия дополняющей нежёсткости

Пусть $\mathbf{x}^*$ и $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ решения прямой и двойственной задачи. То есть

$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{x}^*) = g(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \\
& f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) \leq \\
& f(\mathbf{x}^*), \qquad \boldsymbol{\mu} \geq 0
\end{aligned}
$$

Условия дополняющей нежёсткости

$$
\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \qquad j = 1, \ldots, p
$$

Для каждого неравенства либо множитель Лагранжа равен нулю, либо оно активно.

Условия Каруша-Куна-Таккера

Механическая интерпретация

Примеры

- $$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ &\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \end{aligned}$$
-
-