

# Примеры решения задач линейного программирования симплекс-методом

Александр Катруца

Здесь использованы материалы из книги [1].

## 1. Задача 1

Решить задачу табличным симплекс методом:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ & 2x_2 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ & x_{1,2,3} \geq 0 \end{aligned}$$

**Решение:** по виду задачи ясно, что она не в канонической форме. Введём дополнительные переменные и запишем её в канонической форме:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ & 2x_2 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20 \\ & x_{1,2,3,4,5,6} \geq 0 \end{aligned}$$

Заметим, что матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , где  $m = 3$  и  $n = 6$ . Теперь нужно найти угловую точку допустимого множества, то есть такую точку, чтобы она лежала в множестве и существовало множество индексов  $\mathcal{B} \subset \{1, \dots, n\}$  мощностью  $|\mathcal{B}| = m = 3$ , что матрица из столбцов матрицы  $\mathbf{A}$  с индексами из множества  $\mathcal{B}$  была невырождена, и координаты угловой точки с индексами не из множества  $\mathcal{B}$  были нулевыми. В данном случае достаточно очевидно, что  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 20, 20, 20)$ ,  $\mathcal{B}_0 = \{4, 5, 6\}$  и матрица базиса  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_m$  — невырождена. Если начальная угловая точка не так очевидна, необходимо выполнить двухфазный симплекс-метод или М-метод. Такой пример будет приведён ниже.

Теперь составим таблицу 1 симплекс-метода, модифицируя которую получим решение поставленной задачи. Столбцы этой таблицы соответствуют столбцам матрицы  $\mathbf{A}$ . Последние  $m = 3$  строк соответствуют базисным переменным с индексами из множества  $\mathcal{B}_0$ . В  $m + 1$  строке с конца расположены оценки замещения для каждой переменной  $x_i$ , а в первом столбце отрицательное значение целевой функции.

Таблица 1: Первоначальная таблица симплекс-метода

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$-\mathbf{c}_{B_0}^\top \mathbf{x}_{B_0} = 0$	-10	-12	-12	0	0	0
$x_4 = 20$	1	2	2	1	0	0
$x_5 = 20$	<b>2</b>	1	2	0	1	0
$x_6 = 20$	2	2	1	0	0	1

Выберем столбец, оценка замещения которого отрицательна и индекс которого минимален. Поэтому  $j^* = 1$ . Тогда  $\mathbf{u} = \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1$ . Так как  $u_i > 0$  для  $i \in \{1, 2, 3\}$ , то  $\theta^* = 10$  и  $\ell \in \{5, 6\}$ . В соответствии с правилом Бранда выберем  $\ell = 5$ . Таким образом, выбран ведущий элемент равный 2, он выделен жирным в таблице 1.

Далее с помощью элементарных преобразований получим базисную матрицу для новой угловой точки с базисом  $\mathcal{B}_1 = \{4, 1, 6\}$ . Прежде всего покажем, как изменится значение целевой функции. Для этого элементарным преобразованием занулим оценку замещения, соответствующую  $x_1$ .

Таблица 2: Таблица симплекс-метода после первой итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$-\mathbf{c}_{B_1}^\top \mathbf{x}_{B_1} = 100$	0	-7	-2	0	5	0
$x_4 = 10$	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1 = 10$	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6 = 0$	0	<b>1</b>	-1	0	-1	1

Далее выбираем столбец  $x_2$ , поскольку оценка замещения отрицательная и индекс минимален ( $2 < 3$ ). Аналогично предыдущей итерации  $\mathbf{u} = \mathbf{a}_2$  и  $\theta^* = 0$  при  $\ell = 6$ . Таким образом, заменяем  $x_6$  на  $x_2$  и ведущий элемент равен 1 (выделен жирным). Заметим, что текущее решение является вырожденным, так как  $x_6 = 0$ . Поэтому значение целевой функции не меняется при смене базиса. Зануляем оценку замещения для  $x_2$  и строки в столбце  $x_2$  кроме строки с ведущим элементом. Получили таблицу 3.

Таблица 3: Таблица симплекс-метода после второй итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$-\mathbf{c}_{B_1}^\top \mathbf{x}_{B_1} = 100$	0	0	-9	0	-2	7
$x_4 = 10$	0	0	<b>2.5</b>	1	1	-1.5
$x_1 = 10$	1	0	1.5	0	1	-0.5
$x_2 = 0$	0	1	-1	0	-1	1

Далее выбираем столбец  $x_3$ , так как его индекс минимален среди столбцов с отрицательной оценкой замещения. Аналогично предыдущей итерации  $\mathbf{u} = \mathbf{a}_3$  и  $\theta^* = \frac{x_4}{u_1} = 4$  для  $\ell = 4$ . Таким образом, заменяем  $x_4$  на  $x_3$ . Получим следующую таблицу 4.

Поскольку все оценки замещения неотрицательны, то решение найдено и оно является оптимальным. Найденное решение соответствует  $(x_1, x_2, x_3) = (4, 4, 4)$  и находится в первом столбце и последних  $m = 3$  строках. В первом столбце и  $m + 1$  строке с конца находится отрицательное значение значения целевой функции, то есть оптимальное значение равно  $-136$ . Знаки  $-$  в ячейках таблицы означают, что значения в этих ячейках неважны и их можно не считать.

Таблица 4: Таблица симплекс-метода после третьей итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$-\mathbf{c}_{B_1}^\top \mathbf{x}_{B_1} = 136$	0	0	0	3.6	1.6	1.6
$x_3 = 4$	0	0	1	0.4	0.4	-0.6
$x_1 = 4$	1	0	0	—	—	—
$x_2 = 4$	0	1	0	0.4	-0.6	0.4

## 2. Задача 2

В этой задаче показано, что симплекс-метод может заиклиться, и как это заикливание может быть преодолено с помощью правила Бранда. Здесь описание переходов от таблицы к таблице не будет описано столь подробно как в предыдущем примере, поскольку они полностью аналогичны. Ведущий элемент на каждой итерации будет выделен жирно.

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}} -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \\
 & \text{s.t. } \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0 \\
 & \quad \frac{1}{2}x_2 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0 \\
 & \quad x_3 \leq 1 \\
 & \quad x_{1,2,3,4} \geq 0
 \end{aligned}$$

Преобразуем эту задачу к канонической форме:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}} -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \\
 & \text{s.t. } \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\
 & \quad \frac{1}{2}x_2 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\
 & \quad x_3 + x_7 = 1 \\
 & \quad x_{1,2,3,4,5,6,7} \geq 0
 \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему примеру начальная угловая точка  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ . Ей соответствует таблица 5.

Таблица 5: Изначальная таблица симплекс-метода

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = 0$	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0
$x_5 = 0$	<b>1/4</b>	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 = 0$	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

При проведении симплекс-метода индексы будем выбирать так:

- столбец ведущего элемента определяется минимальным значением оценки замещения
- ведущий элемент определяется, как минимальный индекс, соответствующий  $\theta^*$

Таблица 6: Таблица симплекс-метода после первой итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = 0$	0	-4	$-7/2$	33	3	0	0
$x_1 = 0$	1	-32	-4	36	4	0	0
$x_6 = 0$	0	<b>4</b>	$3/2$	-15	-2	1	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

Таблица 7: Таблица симплекс-метода после второй итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = 0$	0	0	-2	18	1	1	0
$x_1 = 0$	1	0	<b>8</b>	-84	-12	8	0
$x_2 = 0$	0	1	$3/8$	$-15/4$	$-1/2$	$1/4$	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

Таблица 8: Таблица симплекс-метода после третьей итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = 0$	$1/4$	0	0	-3	-2	3	0
$x_3 = 0$	$1/8$	0	1	$-21/2$	$-3/2$	1	0
$x_2 = 0$	$-3/64$	1	0	<b><math>3/16</math></b>	$1/16$	$-1/8$	0
$x_7 = 1$	$-1/8$	0	0	$21/2$	$3/2$	-1	1

Таблица 9: Таблица симплекс-метода после четвёртой итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = 0$	$-1/2$	16	0	0	-1	1	0
$x_3 = 0$	$-5/2$	56	1	0	<b>2</b>	-6	0
$x_4 = 0$	$-1/4$	$16/3$	0	1	$1/3$	$-2/3$	0
$x_7 = 1$	$5/2$	-56	0	0	-2	6	1

Таблица 10: Таблица симплекс-метода после пятой итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = 0$	$-7/4$	44	$1/2$	0	0	-2	0
$x_5 = 0$	$-5/4$	28	$1/2$	0	1	-3	0
$x_4 = 0$	$1/6$	-4	$-1/6$	1	0	<b><math>1/3</math></b>	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

Получили таблицу 11, в точности совпадающую с изначальной таблицей 5. Таким образом, следуя указанным правилам выбора ведущего элемента симплекс-метод никогда не остановится.

Таблица 11: Таблица симплекс-метода после шестой итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = 0$	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
$x_5 = 0$	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 = 0$	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

## 2.1 Правило Бранда

Теперь проведём итерации симплекс-метода, используя правило Бранда для выбора ведущего элемента. Можно увидеть, что вплоть до таблицы 9 последовательность шагов совпадает. Поэтому рассмотрим таблицу 9 с точки зрения правила Бранда. В таблице 12 красным отмечен ведущий элемент, выбор которого привёл к заикливанию, а синим — ведущий элемент, выбранный по правилу Бранда. Покажем, что его использование приведёт к остановке симплекс-метода за конечное число шагов.

Таблица 12: Таблица симплекс-метода после четвёртой итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = 0$	$-1/2$	16	0	0	-1	1	0
$x_3 = 0$	$-5/2$	56	1	0	<b>2</b>	-6	0
$x_4 = 0$	$-1/4$	$16/3$	0	1	$1/3$	$-2/3$	0
$x_7 = 1$	<b><math>5/2</math></b>	-56	0	0	-2	6	1

Таблица 13: Таблица симплекс-метода после пятой итерации по правилу Бранда

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = 1/5$	0	$24/5$	0	0	$-7/5$	$11/5$	$1/5$
$x_3 = 1$	0	0	1	0	0	0	1
$x_4 = 1/10$	0	$-4/15$	0	1	<b><math>2/15</math></b>	$-1/15$	$1/10$
$x_1 = 2/5$	1	$-112/5$	0	0	$-4/5$	$12/5$	$2/5$

Таблица 14: Таблица симплекс-метода после шестой итерации по правилу Бранда

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = 5/4$	0	2	0	$21/2$	0	$3/2$	$5/4$
$x_3 = 1$	0	0	1	0	0	0	1
$x_5 = 3/5$	0	$-8/5$	0	6	$4/5$	$-2/5$	$3/5$
$x_1 = 1$	1	-24	0	6	0	2	1

Видно, что все оценки замещения неотрицательны, следовательно найдено решение исходной задачи:  $\mathbf{x}^* = (1, 0, 1, 0)$  и  $f^* = -\frac{5}{4}$ .

## 3. Задача 3

В этой задаче рассматривается пример использования двухфазного симплекс-метода.

$$\begin{aligned}
& \min x_1 + x_2 + x_3 \\
& \text{s.t. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\
& \quad -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\
& \quad 4x_2 + 9x_3 = 5 \\
& \quad 3x_3 + x_4 = 1 \\
& \quad x_{1,2,3,4} \geq 0
\end{aligned}$$

Для этой задачи начальная угловая точка не так очевидна, как для предыдущих задач. Поэтому необходимо провести двухфазный симплекс-метод.

**Фаза 1.** Составим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned}
& \min x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \\
& \text{s.t. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\
& \quad -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\
& \quad 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\
& \quad 3x_3 + x_4 + x_8 = 1 \\
& \quad x_1, \dots, x_8 \geq 0
\end{aligned}$$

Поскольку изначально  $b_i > 0$  для всех  $i$ , то преобразования строк матрицы  $\mathbf{A}$  не требуется. Иначе нужно было бы умножить соответствующую строку на  $-1$ .

Начальная угловая точка для вспомогательной задачи очевидна,  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 3, 2, 5, 1)$  и соответствующий подвектор  $\mathbf{c}_B = (1, 1, 1, 1)$ . Изначальные оценки замещения  $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{a}_j$ , где  $\mathbf{a}_j$  —  $j$ -ый столбец матрицы  $\mathbf{A}$ .

Таким образом, заполнение изначальной таблицы симплекс-метода показано в таблице 15.

Таблица 15: Изначальная таблица симплекс-метода

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = -11$	0	-8	-21	-1	0	0	0	0
$x_5 = 3$	1	2	3	0	1	0	0	0
$x_6 = 2$	-1	<b>2</b>	6	0	0	1	0	0
$x_7 = 5$	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_8 = 1$	0	0	3	1	0	0	0	1

Таблица 16: Таблица симплекс-метода после первой итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = -3$	-4	0	3	-1	0	4	0	0
$x_5 = 1$	<b>2</b>	0	-3	0	1	-1	0	0
$x_2 = 1$	-1/2	1	3	0	0	1/2	0	0
$x_7 = 1$	2	0	-3	0	0	-2	1	0
$x_8 = 1$	0	0	3	1	0	0	0	1

Таблица 17: Таблица симплекс-метода после второй итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = -1$	0	0	-3	-1	2	2	0	0
$x_1 = 1/2$	1	0	-3/2	0	1/2	-1/2	0	0
$x_2 = 5/4$	0	1	9/4	0	1/4	1/4	0	0
$x_7 = 0$	0	0	0	0	-1	-1	1	0
$x_8 = 1$	0	0	<b>3</b>	1	0	0	0	1

Таблица 18: Таблица симплекс-метода после третьей итерации

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = 0$	0	0	0	0	2	2	0	1
$x_1 = 1$	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2
$x_2 = 1/2$	0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4
$x_7 = 0$	0	0	0	0	-1	-1	1	0
$x_3 = 1/3$	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

В таблице 18 видно, что значение целевой функции равно 0, значит найдена допустимая угловая точка исходной задачи  $\mathbf{x}_0 = (1, 1/2, 1/3, 0)$ . Однако в базисе присутствует вспомогательная переменная  $x_7$ . Так как в строке, которая ей соответствует все переменные в столбцах исходных переменных равны нулю, то эта строка избыточна и её можно исключить из таблицы.

Таким образом, итоговая таблица для начала второй фазы симплекс-метода представлена в таблице 19.

## Фаза 2.

Таблица 19: Таблица симплекс-метода для начала второй фазы симплекс-метода

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = -11/6$	0	0	0	-1/12
$x_1 = 1$	1	0	0	1/2
$x_2 = 1/2$	0	1	0	-3/4
$x_3 = 1/3$	0	0	1	<b>1/3</b>

Таблица 20: Таблица симплекс-метода после первой итерации во второй фазе симплекс-метода

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$-\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = -7/4$	0	0	1/4	0
$x_1 = 1/2$	1	0	-3/2	0
$x_2 = 5/4$	-	-	-	0
$x_4 = 1$	0	0	3	1

Так как все оценки замещения положительные, получено решение исходной задачи. Таким образом, решение исходной задачи  $\mathbf{x}^* = (1/2, 5/4, 0, 1)$  и  $f^* = 7/4$ .

## Список литературы

- [1] Dimitris Bertsimas and John N. Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization*, Belmont, MA: Athena Scientific, 1997, 5th edition