

Примеры решения задач методом внешних штрафов и методом модифицированной функции Лагранжа

Александр Катруца

1. Методом внешних штрафных функций и методом модифицированной функции Лагранжа решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} \min x^2 + 2y^2 + z^2 + xy \\ \text{s.t. } x + 2y + z \geq 3 \end{aligned}$$

- Решение методов штрафов: запишем задачу безусловной оптимизации, используя штрафную функцию для ограничений типа неравенств

$$\min x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + \frac{\mu}{2}(\max(-x - 2y - z + 3, 0))^2 \quad (1)$$

Рассмотрим 2 случая:

- (а) $-x - 2y - z + 3 \leq 0$. Тогда задача (1) примет вид:

$$\min x^2 + 2y^2 + z^2 + xy$$

Из необходимых условий экстремума следует, что единственная точка, которая им удовлетворяет — это точка $(0, 0, 0)$. Однако она не удовлетворяет предположению, при котором была получена $(-0 - 2 \cdot 0 - 0 + 3 \not\leq 0)$.

- (б) $-x - 2y - z + 3 \geq 0$. Тогда задача (1) примет вид:

$$\min x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + \frac{\mu}{2}(x + 2y + z - 3)^2$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} 2x + y + \mu(x + 2y + z - 3) = 0 \\ 4y + x + 2\mu(x + 2y + z - 3) = 0 \\ 2z + \mu(x + 2y + z - 3) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (\mu + 2)x + (2\mu + 1)y + \mu z = 3\mu \\ (2\mu + 1)x + (4\mu + 4)y + 2\mu z = 6\mu \\ \mu x + 2\mu y + (\mu + 2)z = 3\mu \end{cases}$$

Далее выразим x, y, z через μ и определим, к чему сходятся эти выражения при $\mu \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} x = 3 - 2y - \left(1 + \frac{2}{\mu}\right)z \\ y = \frac{1}{2} \left(-3 + z \left(5 + \frac{2}{\mu}\right)\right) \\ z \left(1 + \frac{2}{\mu} + 4 + \frac{2}{3} \left(4 + \frac{4}{\mu}\right)\right) = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{12}{23} \\ y = \frac{18}{23} \\ z = \frac{21}{23} \end{cases}$$

- Решение методом модифицированной функции Лагранжа: составим модифицированную функцию Лагранжа

$$M = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + \frac{1}{2t} ((\max(0, \lambda + t(-x - 2y - z + 3)))^2 - \lambda^2)$$

- (a) если \max обращается в 0, то стационарная точка нарушает ограничения, следовательно, этот случай не даёт решения
- (b) иначе, модифицированная функция Лагранжа записывается в виде

$$M = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + \frac{1}{2t} ((\lambda + t(-x - 2y - z + 3))^2 - \lambda^2)$$

2.