Методы оптимизации. Семинар 2. Выпуклые множества.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

12 сентября 2016 г.

Напоминание

- Предмет и задача курса
- Общая постановка задачи математического программирования
- Примеры задач оптимизации:
  - линейное программирование
  - метод наименьших квадратов
  - выпуклая оптимизация
- Чем хороши выпуклые задачи?

Аффинное множество

Аффинное множество

Множество A называется аффинным, если для любых x_1, $x_2 \in A$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in A$.

Примеры: $\mathbb{R}^n$, гиперплоскость, точка.

Аффинная комбинация точек

Пусть $x_1, \ldots, x_k \in G$, тогда точка $\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$ при $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1$ называется аффинной комбинацией точек $x_1, \ldots, x_k$.

Аффинная оболочка точек

Множество $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in G, \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \right\}$ называется аффинной оболочкой множества G и обозначается $\mathbf{aff}(G)$.

Утверждения

Утверждение 1

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда в него входят все аффинные комбинации его точек.

Утверждение 2

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $\{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$.

Выпуклое множество

Выпуклое множество

Множество C называется выпуклым, если

$$\forall x_1,\ x_2 \in C, \theta \in [0,1] \to \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C.$$

$\emptyset$ и $\{x_0\}$ также считаются выпуклыми.

Примеры: $\mathbb{R}^n$, афинное множество, луч, отрезок.

Выпуклая комбинация точек

Пусть $x_1, \ldots, x_k \in G$, тогда точка $\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$ при $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1,\ \theta_i \geq 0$ называется выпуклой комбинацией точек $x_1, \ldots, x_k$.

Выпуклая оболочка точек

Множество $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in G, \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}$ называется выпуклой оболочкой множества G и обозначается **conv**(G).

Операции, сохраняющие выпуклость

- Пересечение любого (конечного или бесконечного) числа выпуклых множеств — выпуклое множество
- Образ аффинного отображения выпуклого множества — выпуклое множество
- Линейная комбинация выпуклых множеств — выпуклое множество
- Декартово произведение выпуклых множеств — выпуклое множество

Примеры

Проверьте на аффинность и выпуклость следующие множества:

- Полупространство: $\{\mathbf{x} | \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq c\}$
- Многоугольник: $\{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} \preceq \mathbf{b}, \ \mathbf{C}\mathbf{x} = 0\}$
- Шар по норме в $\mathbb{R}^n$: $B(r, x_c) = \{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$
- Элипсоид: $\mathcal{E}(x_c, \mathbf{P}, r) = \{x \mid (x - x_c)^\top \mathbf{P}^{-1}(x - x_c) \leq r\}$
- Множество симметричных положительно-определённых матриц: $\mathbf{S}^n_+ = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{X}^\top = \mathbf{X}, \ \mathbf{X} \succeq 0\}$
- $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \ \mathrm{Tr}(\mathbf{X}) = const\}$
- Гиперболическое множество: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \geq 1\}$

Конус

Конус (выпуклый)

Множество C называется конусом (выпуклым конусом), если

$$\forall x \in C, \theta \geq 0 \to \theta x \in C$$

$$(\forall x_1, x_2 \in C, \theta_1, \theta_2 \geq 0 \to \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C)$$

Примеры: $\mathbb{R}^n$, афинное множество, проходящее через 0, луч.

Коническая (неотрицательная) комбинация точек

Пусть $x_1, \ldots, x_k \in G$, тогда точка $\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$ при $\theta_i \geq 0$ называется конической (неотрицательной) комбинацией точек $x_1, \ldots, x_k$.

Коническая оболочка точек

Множество $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in G, \theta_i \geq 0 \right\}$ называется конической оболочкой множества G и обозначается **cone**(G).

Примеры конусов

- $\mathbf{S}_+^n$
- Нормальный конус: $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq t\}$
  Для ℓ_2-нормы называется конусом второго порядка или Лоренцевым конусом
- Конкретные примеры с числами

Резюме

- Аффинное множество
- Выпуклое множество
- Конус
- Методы проверки свойств конкретных множеств