Примеры решения задач линейного программирования симплекс-методом

Александр Катруца

Здесь использованы материалы из книги [1].

1. Решить задачу табличным симплекс методом:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}}\ & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\ \text{s.t. }\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ & 2x_2 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ & x_{1,2,3} \geq 0 \end{aligned}$$

Решение: по виду задачи ясно, что она не в канонической форме. Введём дополнительные переменные и запишем её в канонической форме:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}}\ & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\ \text{s.t. }\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ & 2x_2 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20 \\ & x_{1,2,3,4,5,6} \geq 0 \end{aligned}$$

Заметим, что матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, где $m = 3$ и $n = 6$. Теперь нужно найти угловую точку допустимого множества, то есть такую точку, чтобы она лежала в множестве и существовало множество индексов $\mathcal{B} \subset \{1, \ldots, n\}$ мощностью $|\mathcal{B}| = m = 3$, что матрица из столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с индексами из множества $\mathcal{B}$ была невырождена, и координаты угловой точки с индексами не из множества $\mathcal{B}$ были нулевыми. В данном случае достаточно очевидно, что $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 20, 20, 20)$, $\mathcal{B}_0 = \{4, 5, 6\}$ и матрица базиса $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_m$ — невырождена. Если начальная угловая точка не так очевидна, необходимо выполнить двухфазный симплекс-метод или М-метод. Такой пример будет приведён ниже.

Теперь составим таблицу 1 симплекс-метода, модифицируя которую получим решение поставленной задачи. Столбцы этой таблицы соответствуют столбцам матрицы $\mathbf{A}$. Последние $m = 3$ строк соответствуют базисным переменным с индексами из множества $\mathcal{B}_0$. В $m+1$ строке с конца расположены оценки замещения для каждой переменной x_i, а в первом столбце отрицательное значение целевой функции.

Выберем столбец, оценка замещения которого отрицательна и индекс котрого минимален. Поэтому $j^* = 1$. Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1$. Так как $u_i > 0$ для $i = \in \{1, 2, 3\}$, то $\theta^* = 10$

Таблица 1: Первоначальная таблица симплекс-метода

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_0}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_0} = 0$	-10	-12	-12	0	0	0
$x_4 = 20$	1	2	2	1	0	0
$x_5 = 20$	**2**	1	2	0	1	0
$x_6 = 20$	2	2	1	0	0	1

и $\ell \in \{5, 6\}$. В соответствии с правилом Бранда выберем $\ell = 5$. Таким образом, выбран ведущий элемент равный 2, он выделен жирным в таблице 1.

Далее с помощью элементарных преобразований получим базисную матрицу для новой угловой точки с базисом $\mathcal{B}_1 = \{4, 1, 6\}$. Прежде всего покажем, как изменится значение целевой функции. Для этого элементарным преобразованием занулим оценку замещения, соответствующую x_1.

Таблица 2: Таблица симплекс-метода после первой итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = 100$	0	-7	-2	0	5	0
$x_4 = 10$	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1 = 10$	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6 = 0$	0	**1**	-1	0	-1	1

Далее выбираем столбец x_2, поскольку оценка замещения отрицательная и индекс минимален $(2 < 3)$. Аналогично предыдущей итерации $u = \mathbf{a}_2$ и $\theta^* = 0$ при $\ell = 6$. Таким образом, заменяем x_6 на x_2 и ведущий элемент равен 1 (выделен жирным). Заметим, что текущее решение является вырожденным, так как $x_6 = 0$. Поэтому значение целевой функции не меняется при смене базиса. Зануляем оценку замещения для x_2 и строки в столбце x_2 кроме строки с ведущим элементом. Получили таблицу 3.

Таблица 3: Таблица симплекс-метода после второй итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = 100$	0	0	-9	0	-2	7
$x_4 = 10$	0	0	**2.5**	1	1	-1.5
$x_1 = 10$	1	0	1.5	0	1	-0.5
$x_2 = 0$	0	1	-1	0	-1	1

Далее выбираем стобец x_3, так как его индекс минимален среди столбцов с отрицательной оценкой замещения. Аналогично предыдущей итерации $\mathbf{u} = \mathbf{a}_3$ и $\theta^* = \frac{x_4}{u_1} = 4$ для $\ell = 4$. Таким образом, заменяем x_4 на x_3. Получим следующую таблицу 4.

Поскольку все оценки замещения неотрицательны, то решение найдено и оно является оптимальным. Найденное решение соответствует $(x_1, x_2, x_3) = (4, 4, 4)$ и находится в первом столбце и последних $m = 3$ строках. В первом столбце и $m + 1$ строке с конца находится отрицательное значение значения целевой функции, то есть оптимальное значение равно -136. Знаки $-$ в ячейках таблицы означают, что значения в этих ячейках неважны и их можно не считать.

Таблица 4: Таблица симплекс-метода после третьей итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = 136$	0	0	0	3.6	1.6	1.6
$x_3 = 4$	0	0	1	0.4	0.4	-0.6
$x_1 = 4$	1	0	0	$-$	$-$	$-$
$x_2 = 4$	0	1	0	0.4	-0.6	0.4

2. В этой задаче показано, что симплекс-метод может зациклиться, и как это зацикливание может быть преодолено с помощью правила Бранда. Здесь описание переходов от таблице к таблице не будет описано столь подробно как в предыдущем примере, поскольку они полностью аналогичны. Ведущий элемент на каждой итерации будет выделен жирно.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \\
\text{s.t. } &\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0 \\
&\frac{1}{2}x_2 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0 \\
&x_3 \leq 1 \\
&x_{1,2,3,4} \geq 0
\end{aligned}
$$

Преобразуем эту задачу к канонической форме:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \\
\text{s.t. } &\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\
&\frac{1}{2}x_2 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\
&x_3 + x_7 = 1 \\
&x_{1,2,3,4,5,6,7} \geq 0
\end{aligned}
$$

Аналогично предыдущему примеру начальная угловая точка $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Ей соответствует такая таблица 5.

Таблица 5: Изначальная таблица симплекс-метода

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^\top \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = 0$	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
$x_5 = 0$	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 = 0$	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

При проведении симплекс-метода индексы будем выбирать так:

- столбец ведущего элемета определяется минимальным значением оценки замещения
- ведущий элемент определяется, как минимальный индекс, соответствующий θ^*

Список литературы

[1] Dimitris Bertsimas and John N. Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization*, Belmont, MA: Athena Scientific, 1997, 5th edition