Il Corpo Nero

I corpi caldi emettono radiazione

I fisici alla fine del secolo scorso si trovarono di fronte a un problema significativo: studiare il modo in cui i corpi caldi emettono radiazioni. Si sapeva come funzionava il meccanismo a grandi linee - si sapeva cioè che il calore causava la vibrazione delle molecole e degli atomi di un solido, ed era noto pure che le parti più piccole della materia erano esse stesse complessi sistemi di cariche elettriche. Le convinzioni di Maxwell sul fatto che le cariche in moto emettessero radiazioni elettromagnetiche erano state confermate dagli esperimenti di Hertz e altri fisici. Altresì, era noto dalle equazioni di Maxwell che tale radiazione viaggiava alla velocità della luce e da ciò si dedusse che la luce stessa - e le radiazioni infrarosse ad essa connesse - erano in realtà onde elettromagnetiche. La questione era, quindi, che quando un corpo veniva riscaldato, le vibrazioni causate a livello atomico avrebbero implicato il movimento delle cariche. Se si assumeva che la teoria di Maxwell - perfettamente funzionante nel mondo macroscopico - fosse valida anche su scala microscopica, allora tali cariche oscillanti avrebbero dovuto emettere radiazioni, presumibilmente sviluppando calore e luce.

Energia Irraggiata

Ciascun corpo ha la capacità di emettere o assorbire energia. È opportuno quindi introdurre due concetti fondamentali:

1. **Potere Emissivo**

Facilmente misurabile, rappresenta l'energia emessa dal corpo per unità di superficie nell'unità di tempo. Tutti i corpi - fatta eccezione per i buchi neri - hanno potere emettono energia, poiché la radiazione che su di essi incide viene riemessa in parte dopo essere stata, per così dire, digerita.

2. **Potere Assorbente**

Non misurabile, consiste nel rapporto tra l'energia assorbita da un corpo e l'energia totale che su di esso incide.

Quello che i fisici tentarono di fare fu scoprire il modo in cui i corpi "digerivano" la radiazione incidente per poi riemetterla.

Robert Kirchoff, nel teorema da lui stesso dimostrato, affermò che il rapporto tra il potere emissivo di un corpo e il suo potere assorbente è funzione di due variabili:

A) La temperatura del corpo in questione

B) La lunghezza d'onda della radiazione incidente sul corpo

Premesso questo, ci si concentrò sullo studio di quei corpi che avevano potere assorbente pari a 1. Per tali corpi - detti **corpi neri** - la funzione di Kirchoff, $F(T;\lambda)$, esprimeva esclusivamente il potere emissivo, semplificandosi enormemente.

Un corpo nero assorbe qualsiasi radiazione incidente, quindi riemette a tutte le frequenze, nel *continuum*.

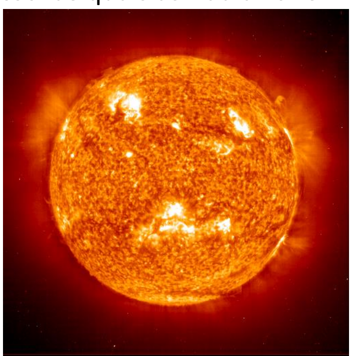
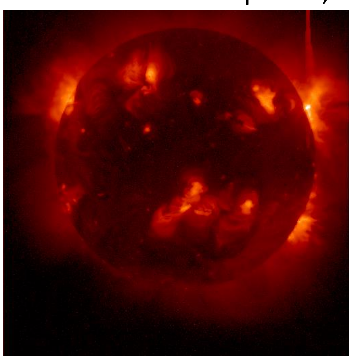


Immagine del Sole ottenuta utilizzando un filtro per raggi X NASA - 17 Giugno 1999


Spettrogramma solare: He NASA - 17 Giugno 1999

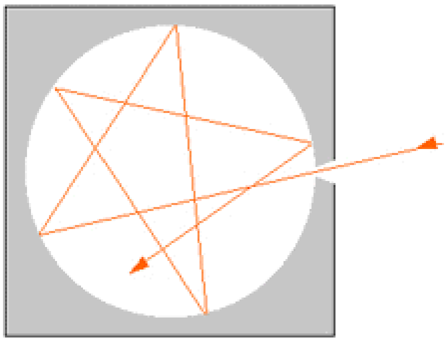
Il Sole può essere considerato un corpo nero di colore giallo che emette prevalentemente alla temperatura di 5500 K. L'enorme massa gli consente di assorbire qualunque radiazione incidente e riemetterla senza modificare il proprio stato termico.

Modello di corpo nero

Per poter meglio studiare il potere emissivo di un corpo è stato necessario costruire un modello che riproducesse con buona approssimazione le caratteristiche di un corpo nero ideale.
A tale scopo si è considerata una cavità rivestita internamente di nerofumo, materiale assorbente; tale cavità possiede un piccolissimo foro su una parete, di dimensioni trascurabili rispetto a quelle della cavità.

Tale configurazione permette alla cavità stessa di digerire l'eventuale radiazione che penetra dal foro, con possibilità praticamente nulle che il raggio entrato riesca ad uscire.
In realtà dobbiamo sottolineare che il corpo emette radiazione dopo la termalizzazione. Tuttavia l'emissione è di natura completamente diversa rispetto alla radiazione che incideva inizialmente.
L'emissione di corpo nero, infatti, dipende esclusivamente dalla temperatura efficace del corpo stesso.

Per i fisici di fine secolo fu naturale pensare alla cavità sopracitata come costituita da atomi di **Thomson**.
Questi, per un effetto di risonanza - efficace solo ad alcune frequenze - sono in grado di contribuire alla termalizzazione della radiazione.
Per coprire tutte le frequenze, così come deve appunto fare un corpo nero, è necessario associare un numero altissimo di atomi - intesi come *oscillatori armonici* - in modo che dal loro accoppiamento si formi un sistema di termalizzazione più efficace.



- **Legge di Stefan-Boltzmann**
  Studiando l'emissione dei corpi i fisici **Stefan** e **Boltzmann** riuscirono ad estrapolare sperimentalmente una semplice funzione in grado di esprimere la potenza emessa per unità di superficie da un corpo nero.
  La densità di energia nella cavità dopo la termalizzazione sarà una sommatoria - integrale - di energie relative ad una determinata frequenza ν e temperatura T.

$$U = \int_0^{+\infty} u(\nu, \mathrm{T}) \cdot d\nu \rightarrow U = U(\mathrm{T})$$

  Da cui si deduce che la densità di energia è in funzione della sola temperatura.
  La legge di Stefan, sull'energia totale emessa da un corpo nero nell'unità di tempo, afferma appunto tale potenza è proporzionale a T^4, con costante di proporzionalità d, detta costante di Stefan-Boltzmann.

$$E = \sigma \cdot \mathrm{T}^4$$

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

- **Legge di Wien**
  Wien si occupò di come avveniva l'equilibrio termico tra la radiazione incidente e l'interno della cavità. Egli considerò le pareti interne come specchi ideali, incapaci di riflettere completamente la radiazione. Ciò che il fisico ipotizzava era quindi un urto non perfettamente elastico.
  Dopo calcoli complessi, Wien giunse alla formulazione della legge omonima:
  $$u(\nu) = \nu^3 \cdot F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$
  A tale legge segue quella dello spostamento di Wien. Essa afferma che esiste una particolare relazione tra la temperatura assoluta T di un corpo nero e la lunghezza d'onda λ_{max} per la quale si ha l'emissione
  $$\lambda_{\max} T = K$$
  più intensa. Tale relazione è riassunta nell'equazione:
  È evidente che, essendo temperatura e lunghezza d'onda inversamente proporzionali, all'aumentare di T noteremo che diminuisce la lunghezza d'onda alla quale il corpo emette prevalentemente. Ovvero, aumenta la frequenza di emissione massima.

__**La termalizzazione**__

Abbiamo già detto che un corpo nero termalizza l'energia al suo interno, ovvero la digerisce grazie a una serie di urti non perfettamente elastici. Ci sono due differenti interpretazioni del modo in cui un corpo nero assorba e termalizzi la radiazione che penetra al suo interno.

- **Interpretazione classica**
  In questo caso si considerano esclusivamente le pareti interne della cavità, come se fossero composte da oscillatori armonici quali gli atomi di Thomson; le onde incidenti sono tradotte per risonanza in oscillazioni. Poiché gli atomi di Thomson possiedono un coefficiente di smorzamento, l'onda viene riflessa finché non perde memoria di sé. Quando la radiazione è stata digerita, ci troviamo di fronte ad un equilibrio termico all'interno della cavità.
  Secondo questa prima interpretazione, l'energia dE interna è facilmente descritta dalla seguente equazione:
  $$dE = V \cdot u(\nu) \cdot d\nu$$
  Dove V è il volume della cavità. È anche vero che, se vi sono $dN(\nu)$ oscillatori sulle pareti, l'energia dE è data dal prodotto tra l'energia media di ciascun oscillatore per $dN(\nu)$:
  $$dE = < E >_{media} \cdot dN(\nu)$$

- **Interpretazione quantistica**
  Basandoci sulle teorie quantistiche dobbiamo considerare tutto il volume interno della cavità come un insieme di oscillatori - i fotoni - che trasmettono l'energia per pacchetti definiti (i quanti, appunto). Nell'interpretazione classica si consideravano degli oscillatori materiali (gli atomi di Thomson), mentre in fisica quantistica si opera una scomposizione della radiazione stessa.
  L'energia nella cavità sarà, come per il metodo classico, espressa dalla formula:
  $$dE = < E >_{media} \cdot dN(\nu)$$
  Ora, tuttavia, si procederà in modo diverso per calcolare il numero degli oscillatori relativi alla frequenza $\nu + \Delta\nu$. Dal punto di vista statistico è opportuno sottolineare il fatto che, per frequenze molto piccole, vi saranno pochissime radiazioni in risonanza. Ciò è ben evidente dalla seguente equazione, che esprime il numero di frequenze $n(\nu)$ che risuonano attorno a una frequenza incidente ν:
  $$n(\nu) = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3}$$
  Ora, moltiplicando $n(\nu)$ per l'energia media di ciascuna frequenza in risonanza e dividendo infine per il volume (noi cerchiamo infatti la densità di energia), otteniamo:

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot < E >_{media}$$

Quest'ultima può essere considerata un'espressione universale, poiché può essere utilizzata sia in meccanica classica che quantistica.

Calcolo dell'energia

Anche per quanto riguarda il calcolo dell'energia, come abbiamo visto in precedenza, è possibile operare in due modi distinti a seconda si tratti il problema in modo classico oppure quantistico.
In entrambi i casi sarà utilizzata come formula di partenza l'espressione universale ottenuta per la densità di energia, ovvero:

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot < E >_{media}$$

Differente sarà tuttavia il modo in cui verrà calcolata l'energia media di ciascun oscillatore.

- **Metodo classico**
  I fisici giunsero facilmente alla soluzione del problema energetico, ricorrendo al principio fondamentale di equipartizione dell'energia.

  $$< E > = {}^{1}/_{2}\ n \cdot k \cdot T$$

  Considerando l'onda vibrante come vincolata ad un piano di oscillazione, possiamo affermare che essa si muove su due dimensioni. Pertanto il valore *n*, che esprime i gradi di libertà del sistema, è uguale a due.

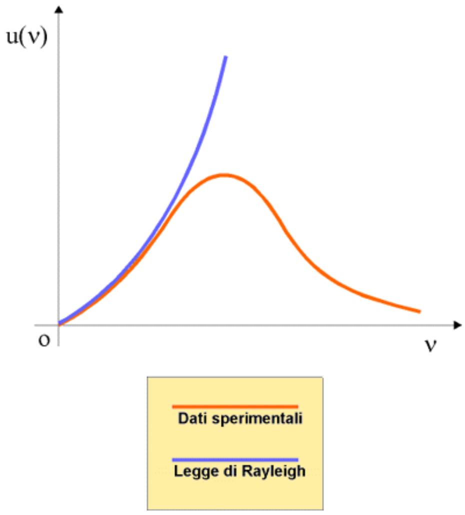
  $$< E > = k \cdot T$$

  Ora è sufficiente sostituire quanto ottenuto nell'equazione universale che esprime la densità di energia all'interno della cavità:

  $$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k \cdot T$$

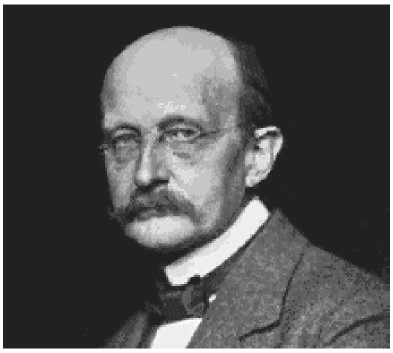
  Tale equazione è detta di **Rayleigh-Jeans**, e sorprendentemente risulta in palese contrasto con i dati sperimentali. Confrontando il grafico prodotto da tale legge con le misure fatte in laboratorio, risulta subito evidente che la legge di Rayleigh è accettabile solo per basse frequenze.
  Infatti la relazione prevede che la densità di energia cresca con l'aumentare della frequenza, con proporzionalità quadratica. Ma ciò che ne otteniamo, considerando il *continuum* delle frequenze, è un'energia infinita!
  Tale fenomeno è detto catastrofe ultravioletta.
  Evidentemente, considerarono i fisici, il principio di equipartizione dell'energia non è applicabile in questo caso; in altre parole, è necessario trovare un metodo alternativo per il calcolo dell'energia media $<E>$.

La Catastrofe ultravioletta



Non è possibile operare un taglio delle frequenze più alte per far coincidere le due curve. In tal caso, infatti, si negherebbe una delle peculiarità essenziali del corpo nero: l'emissione a tutte le frequenze.

- **Metodo quantistico**
  Fondamentale per la soluzione del problema energetico fu l'apporto di Max Planck. Egli pose come inequivocabile il fatto che il corpo nero emettesse nel *continuum* delle frequenze. Ciò che non avveniva nel *continuum*, bensì per quantità discrete, era l'emissione energetica.
  Più semplicemente, ciascun oscillatore nella cavità emetteva energia in quantità discrete, multiple di una quantità minima detta *quanto* di energia.
  Planck, nella legge omonima, espresse tale quantità discreta come il prodotto di una costante h (costante di Planck) per la frequenza propria di un singolo oscillatore.
  $$E = h\nu$$
  Partendo dalle considerazioni classiche ed elaborandole sulla base della propria teoria, Planck giunse inoltre a definire la densità di energia relativa al modello di corpo nero.
  $$< E >_{media} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$
  Come è possibile notare, si tratta di un'espressione dell'energia in funzione sia di ν che di T. Inoltre tale equazione si rivela molto flessibile: utilizzando costanti universali (h e k), è infatti utilizzabile per qualsiasi corpo nero, indipendentemente dalla forma della cavità nonché dal materiale di cui è composta.
  Grazie alla soluzione di Planck, utilizzando la relazione universale per il calcolo della densità di energia è possibile ottenere:
  $$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$
  Tale legge si dimostrò incredibilmente vicina ai risultati sperimentali, descrivendo perfettamente l'andamento della curva di emissione.
  Infatti, se si assume che h sia uguale a $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s, la curva sperimentale e quella analitica risultano praticamente coincidenti.



Max Planck (Kiel 1858 - Gottinga 1947), fisico tedesco

Casi limite

È possibile prevedere l'andamento della curva analitica data dalla soluzione di Planck osservando ciò che avviene nei casi limite, ovvero quando considerando frequenze molto piccole o molto grandi.

Per ν che tende a 0, la soluzione di Planck si riduce alla legge classica:
$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k \cdot T$$
Il valore della densità di energia tende chiaramente a 0.
Ecco riconfermato il fatto che la spiegazione classica è un'approssimazione della teoria quantistica per basse frequenze.

Per ν che tende a infinito, la soluzione di Planck è ridotta alla formula:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \cdot h \cdot \nu^3 \cdot e^{-h\nu/_{kT}}$$

Anche in questo caso è evidente che il valore totale tende a 0.

Sapendo che la curva di emissione è sempre positiva ed appurato che essa tende a zero agli estremi (zero e infinito), ne deriva che essa dovrà presentare almeno un massimo.
A quest'ultimo corrisponde una ν particolare, detta ν_{max}, per la quale si verifica l'emissione massima.

Curva di emissione