

Elaborato di Calcolo Numerico

Finoia Luca 6132811 Calabrese Filippo 5826217

July 21, 2019

1	ERRORI ED ARITMETICA FINITA	3
1.1	Esercizio 1	3
1.2	Esercizio 2	5
1.3	Esercizio 3	6
1.4	Esercizio 4	8
2	RADICI DI UN EQUAZIONE	10
2.1	Esercizio 5	10
2.2	Esercizio 6	15
2.3	Esercizio 7	16
3	SISTEMI LINEARI E NON LINEARI	20
3.1	Esercizio 8	20
3.2	Esercizio 9	22
3.3	Esercizio 10	23
3.4	Esercizio 11	26
3.5	Esercizio 12	27
3.6	Esercizio 13	28
4	APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI	32
4.1	Esercizio 14	32
4.2	Esercizio 15	34
4.3	Esercizio 16	36
4.4	Esercizio 18	38
4.5	Esercizio 19	39
4.6	Esercizio 20	43
4.7	Esercizio 21	46

5	FORMULE DI QUADRATURA	49
5.1	Esercizio 22	49
5.2	Esercizio 23	52
6	CALCOLO DEL GOOGLE PAGERANK	55
6.1	Esercizio 24	55
6.2	Esercizio 25	57
6.3	Esercizio 26	59
6.4	Esercizio 27	60
6.5	Esercizio 28	61

CHAPTER 1

ERRORI ED ARITMETICA FINITA

1.1 Esercizio 1

Descrizione: Verificare che, per h sufficientemente piccolo, $\frac{3}{2}f(x) - 2f(x - h) + \frac{1}{2}f(x - 2h) = hf'(x) + O(h^3)$.

Soluzione:

considerando il Polinomio di Taylor centrato in x_0 al secondo ordine:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f^1(x_0)h + \frac{1}{2}f^2(x_0)h^2 + O(h^3) \quad (1.1)$$

si effettua una sostituzione con $f(x_0 - h)$ nella funzione e si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}f(x) - 2 \left[f(x) - f^1(x)h + \frac{1}{2}f^2(x)h^2 + O(h^3) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[f(x) - f^1(x)2h + \frac{1}{2}f^2(x)4h^2 + O(h^3) \right] = \\ = hf^1(x) + O(h^3) \end{aligned} \quad (1.2)$$

da cui otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}f(x) - 2f(x) + 2f^1(x)h - \\ - f^2(x)h^2 + \frac{1}{2}f(x) - \\ - f^1(x)h + f^2(x)h^2 + O(h^3) = \\ = hf^1(x) + O(h^3) \end{aligned} \quad (1.3)$$

quindi per h sufficientemente piccoli si ottiene:

$$hf'(x) + O(h^3) = hf'(x) + O(h^3) \quad (1.4)$$

1.2 Esercizio 2

Descrizione: Quanti sono i numeri di macchina normalizzati della doppia precisione IEEE? Argomentare la risposta.

Soluzione:

L'insieme dei numeri di macchina \mathcal{M} é un insieme finito di elementi, tramite i quali é possibile rappresentare un insieme denso \mathcal{I} e che rappresenta un sottoinsieme dei numeri reali $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.

$$\mathcal{I} = [-real_{max}, -real_{min}] \cup \{0\} \cup [real_{min}, real_{max}] \quad (1.5)$$

con $real_{max}$ e $real_{min}$ che indicano rispettivamente il piú grande ed il piú piccolo in valore assoluto tra i numeri macchina diversi da 0.

Per trovare i numeri di macchina normalizzati che possono essere ottenuti della doppia precisione IEEE possiamo considerare la seguente formula

$$b^s \cdot b^m \cdot (b^e - b^s) \quad (1.6)$$

dove indichiamo con b la base utilizzata, s i bit riservati per il segno, m i bit riservati per la mantissa ed e i bit riservati per l'esponente.

Considerando che lo standard *ANSI/IEEE 754-1985* utilizza una base binaria, per la rappresentazione dei numeri reali in singola e doppia precisione, abbiamo $b = 2$ indipendentemente dalla precisione utilizzata. Inoltre, per il formato a doppia precisione abbiamo 1 bit per il segno ($s = 1$), 52 bit per la mantissa ($m = 52$) e 11 bit per l'esponente ($e = 11$),

andando a sostituire i valori appena ricavati nella formula (1.6) otteniamo i numeri di macchina normalizzati che possono essere ottenuti della doppia precisione IEEE, quindi:

$$\begin{aligned} &= 2^1 \cdot 2^{52} \cdot (2^{11} - 2^1) = \\ &= 2^{1+52} \cdot (2^{11} - 2^1) = \\ &= 2^{1+52+11} - 2^{1+52+1} = \\ &= 2^{64} - 2^{54} = 18,428,729,675,200,069,632 \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.3 Esercizio 3

Descrizione: Eseguire il seguente script Matlab e spiegare i risultati ottenuti:

```
format long e
n=75;
u=1e-300; for i=1:n, u=u*2; end, for i=1:n, u=u/2; end, u
u=1e-300; for i=1:n, u=u/2; end, for i=1:n, u=u*2; end, u
```

Svolgimento:

```
>> format long e
>> n=75;
>> u=1e-300; for i=1:n, u=u*2; end, for i=1:n, u=u/2; end, u

u =

    1.0000000000000000e-300

>> u=1e-300; for i=1:n, u=u/2; end, for i=1:n, u=u*2; end, u

u =

    1.119916342203863e-300

>> |
```

in questo script Matlab viene moltiplicato per 2 un valore $u=1e-300$ per 75 volte, successivamente questo valore u viene diviso per 2 per 75 volte e infine si visualizza il valore in u , poi, viene riportato u al valore di partenza, cioè $u=1e-300$, e viene prima diviso per 2 per 75 volte, poi moltiplicato per 2 per 75 volte e infine si visualizza il valore in u .

Se fossimo in matematica esatta, in entrambi i casi, avremmo u che sarebbe uguale al valore di partenza poiché è stato prima moltiplicato e diviso per la stessa cifra (2^{75}) e poi diviso e moltiplicato per la stessa cifra (2^{75}). Tuttavia in Matlab i calcoli vengono effettuati in matematica finita e pertanto nel primo caso, in cui la moltiplicazione precede la divisione otteniamo lo stesso risultato che otterremmo in matematica esatta ovvero $1.0000000000000000e-300$, nel secondo caso invece otteniamo un valore differente ovvero $1.119916342203863e-300$.

La causa per cui nel secondo caso otteniamo un valore diverso da quello iniziale è da attribuire ad un errore di round-off, per la precisione un errore di underflow, causato nel primo ciclo in cui viene u viene diviso per 2 per 75 volte, dove, durante una delle iterazioni viene a verificarsi che, $0 < |u| < r_{min}$. La

mantissa viene dunque denormalizzata e successivamente viene divisa per 2 diverse volte, portando alla generazione dell'errore.

1.4 Esercizio 4

Descrizione: Eseguire le seguenti istruzioni Matlab e spiegare i risultati ottenuti:

```
format long e  
a = 1.1111111111111111  
b = 1.1111111111111111  
a + b  
a - b
```

Soluzione:

```
>> format long e  
a = 1.1111111111111111;  
b = 1.1111111111111111;  
a + b  
a - b  
  
ans =  
  
2.2222222222222221e+00  
  
ans =  
  
8.881784197001252e-16  
fx >>
```

In questo script matlab vengono sommati due numeri a e b e poi viene fatta la differenza tra i due numeri a e b .

Nel caso della somma tra i due numeri il risultato ottenuto in Matlab corrisponde con il risultato ottenuto in matematica esatta in quanto una somma di numeri concorde é sempre ben condizionata poiché abbiamo

$$|\varepsilon_y| \leq \frac{|a| + |b|}{|a + b|} \varepsilon_x \equiv k \cdot \varepsilon_x \quad (1.8)$$

in cui k é il numero di condizionamento

$$k = \frac{|a| + |b|}{|a + b|} \quad (1.9)$$

e per una somma di numeri concorde $k=1$ e quindi é sempre ben condizionata.

Nel caso della differenza tra i due numeri a e b invece il risultato ottenuto in Matlab differisce dal risultato ottenuto in matematica esatta perché esso é 0.000000000000001 . In questo caso si verifica quindi il fenomeno della cancellazione numerica in cui si ha una perdita di cifre significative nel momento in cui viene effettuata una somma tra due numeri prossimi in valore assoluto ma opposti in segno. Infatti in questo caso, in cui $a \approx b$, si ottiene un numero di condizionamento arbitrariamente grande e quindi l'operazione di somma algebrica risulta mal condizionata.

CHAPTER 2

RADICI DI UN'EQUAZIONE

2.1 Esercizio 5

Descrizione: Scrivere function Matlab distinte che implementino efficientemente i seguenti metodi per la ricerca degli zeri di una funzione:

- metodo di bisezione
- metodo di Newton
- metodo delle secanti
- metodo delle corde

Detta x_i l'approssimazione al passo i -esimo, utilizzando come criterio di arresto $|\Delta x_i| \leq \text{tol} \cdot (1 + |x_i|)$ essendo tol una opportuna tolleranza specificata in ingresso.

Soluzione:

metodo di bisezione

```
1 function [x,i] = bisezione(fun,a,b,tolx)
2 %   x=bisezione(fun,a,b,tolx)
3 %   parametri in ingresso
4 %   fun -> funzione in cui si effettua la ricerca degli zeri
5 %   a,b -> estremi dell'intervallo di ricerca
6 %   tolx -> parametro che indica la tolleranza su x
7 %   valori di ritorno
8 %   x -> radice della funzione
9 %   i -> numero di iterazioni
10 %   il metodo di bisezione restituisce la radice di una funzione fun in
11 %   un intervallo [a,b] ed il numero di iterazioni effettuate
12 if a>b, error('intervallo non valido'),end
13 fa=feval(fun,a);
14 fb=feval(fun,b);
15 if fa*fb>0,error('nessuna radice in [a,b]'),end
16 if fa==0,x=a;return; elseif fb==0,x=b;return, end
17 nmax = ceil(log2((b-a)/tolx));
18 for i=1:nmax
19     df=abs((fb-fa)/(b-a));
20     x=(a+b)/2; fx=feval(fun,x);
21     if abs(fx)<=df*(1+abs(x))*tolx,return;
22     elseif fa*fx<0
23         b=x;
24         fb=fx;
25     else
26         a=x;
27         fa=fx;
28     end
29 end
30 return
```

metodo di Newton

```
1 function [x,i]= Newton(f,f1,x0,tol,itmax)
2 %   x=newton(f,f1,x0,tol,itmax)
3 %   parametri in ingresso
4 %   f -> funzione in cui si effettua la ricerca degli zeri
5 %   f1 -> derivata della funzione f
6 %   x0 -> punto di partenza
7 %   tol -> parametro che indica la tolleranza
8 %   itmax -> numero massimo di iterazioni
9 %   valori di ritorno
10 %   x -> radice della funzione
11 %   i -> numero di iterazioni
12 %   il metodo di newton restituisce la radice di una funzione f
13 %   ed il numero di iterazioni effettuate
14 fx = feval(f,x0);
15 f1x = feval(f1,x0);
16 x = x0-fx/f1x;
17 i = 0;
18 while (i<itmax) && (abs(x-x0)>=(1+abs(x))*tol)
19     i = i+1;
20     x0 = x;
21     fx = feval(f,x0);
22     f1x = feval(f1,x0);
23     x = x0-fx/f1x;
24 end
25 if abs(x-x0) >= (1+abs(x))*tol
26     error('il metodo non converge')
27 end
28 return
```

metodo delle secanti

```
1 function [x,i]= secanti(f,f1,x0,tol,itmax)
2 %   x=secanti(f,f1,x0,tol,itmax)
3 %   parametri in ingresso
4 %   f -> funzione in cui si effettua la ricerca degli zeri
5 %   f1 -> derivata della funzione f
6 %   x0 -> punto di partenza
7 %   tol -> parametro che indica la tolleranza
8 %   itmax -> numero massimo di iterazioni
9 %   valori di ritorno
10 %   x -> radice della funzione
11 %   i -> numero di iterazioni
12 %   il metodo delle secanti restituisce la radice di una funzione f
13 %   ed il numero di iterazioni effettuate
14 fx = feval(f,x0);
15 f1x = feval(f1,x0);
16 x = x0-fx/f1x;
17 i = 0;
18 while (i<itmax) && (abs(x-x0)>=(1+abs(x))*tol)
19     i=i+1;
20     fx0 = fx;
21     fx = feval(f,x);
22     x1 = (fx*x0-fx0*x)/(fx-fx0);
23     x0 = x;
24     x = x1;
25 end
26 if abs(x-x0) >= (1+abs(x))*tol
27     error('il metodo non converge')
28 end
29 return
```

metodo delle corde

```
1 function [x,i]= corde(f,f1,x0,tol,itmax)
2 %   x=corde(f,f1,x0,tol,itmax)
3 %   parametri in ingresso
4 %   f -> funzione in cui si effettua la ricerca degli zeri
5 %   f1 -> derivata della funzione f
6 %   x0 -> punto di partenza
7 %   tol -> parametro che indica la tolleranza
8 %   itmax -> numero massimo di iterazioni
9 %   valori di ritorno
10 %   x -> radice della funzione
11 %   i -> numero di iterazioni
12 %   il metodo delle corde restituisce la radice di una funzione f
13 %   ed il numero di iterazioni effettuate
14 fx = feval(f,x0);
15 flx = feval(f1,x0);
16 x = x0-fx/flx;
17 i = 0;
18 while (i<itmax) && (abs(x-x0)>=(1+abs(x))*tol)
19     x0 = x;
20     fx = feval(f,x0);
21     x = x0-fx/flx ;
22     i = i+1;
23 end
24 if abs(x-x0) >= (1+abs(x))*tol
25     error('il metodo non converge')
26 end
27 return
```

2.2 Esercizio 6

Descrizione: Utilizzare le function del precedente esercizio per determinare una approssimazione della radice della funzione $f(x) = x - e^{-x}\cos(x/100)$, per $tol = 10^{-i}$, $i = 1, 2, \dots, 12$, partendo da $x_0 = -1$. Per il metodo di bisezione, utilizzare $[-1, 1]$, come intervallo di confidenza iniziale. Tabulare i risultati, in modo da confrontare le iterazioni richieste da ciascun metodo. Commentare il relativo costo computazionale.

Soluzione:

tolleranza	bisezione		Newton		secanti		corde	
	radice	iterazioni	radice	iterazioni	radice	iterazioni	radice	iterazioni
10^{-1}	5.000000000000000e-01	2	5.663058026182579e-01	2	5.662928457961099e-01	3	4.021808606806709e-01	2
10^{-2}	5.625000000000000e-01	5	5.671373451065942e-01	3	5.671339926160822e-01	4	5.495185718942192e-01	6
10^{-3}	5.664062500000000e-01	9	5.671373451065942e-01	3	5.671339926160822e-01	4	5.651741531554760e-01	10
10^{-4}	5.671386718750000e-01	13	5.671374702931882e-01	4	5.671374697616252e-01	5	5.670103627779298e-01	15
10^{-5}	5.671386718750000e-01	13	5.671374702931882e-01	4	5.671374697616252e-01	5	5.671232371727831e-01	19
10^{-6}	5.671386718750000e-01	13	5.671374702931882e-01	4	5.671374702931907e-01	6	5.671358764608520e-01	23
10^{-7}	5.671374797821045e-01	23	5.671374702931882e-01	4	5.671374702931907e-01	6	5.671372918143774e-01	27
10^{-8}	5.671374797821045e-01	23	5.671374702931911e-01	5	5.671374702931907e-01	6	5.671374503069613e-01	31
10^{-9}	5.671374704688787e-01	30	5.671374702931911e-01	5	5.671374702931907e-01	6	5.671374689985149e-01	36
10^{-10}	5.671374702360481e-01	33	5.671374702931911e-01	5	5.671374702931911e-01	7	5.671374701482120e-01	40
10^{-11}	5.671374702942558e-01	35	5.671374702931911e-01	5	5.671374702931911e-01	7	5.671374702769563e-01	44
10^{-12}	5.671374702942558e-01	35	5.671374702931911e-01	5	5.671374702931911e-01	7	5.671374702913732e-01	48

Nella tabella sono riportate le radici ricavate con ogni metodo e il relativo numero di iterazioni necessarie per ottenere tale risultato per ogni $tol = 10^{-i}$, $i = 1, 2, \dots, 12$.

Il metodo di bisezione ed il metodo delle corde hanno una valutazione di funzione e convergenza lineare mentre il metodo di Newton ha due valutazioni di funzioni, una per la funzione e una per la sua derivata, e convergenza quadratica. Da quanto detto, consegue che col metodo di Newton si ha una maggiore velocità nella ricerca della radice ma si ha anche un costo computazionale maggiore per singola iterazione. Il metodo delle secanti ha una valutazione di funzione, quindi un costo computazionale minore del metodo di Newton, e una convergenza ≈ 1.618 , quindi ha una velocità maggiore dei metodi di bisezione e delle secanti.

2.3 Esercizio 7

Descrizione: Calcolare la molteplicità della radice nulla della funzione $f(x) = x^2 \cdot \sin(x^2)$. Confrontare, quindi, i metodi di Newton, Newton modificato, e di Aitken, per approssimarla per gli stessi valori di tol del precedente esercizio (ed utilizzando il medesimo criterio di arresto), partendo da $x_0 = 1$. Tabulare e commentare i risultati ottenuti.

Soluzione:

La molteplicità m della radice nulla della funzione $f(x) = x^2 \cdot \sin(x^2)$ è $m = 4$. Per calcolarla, è stato utilizzato il seguente script matlab:

Calcolo della Molteplicità

```
1 function y = molteplicita (fun , x0)
2 %
3 % y = molteplicita (fun , x0)
4 % Funzione che calcola e rende la molteplicita '
5 % dello zero di funzione (x0) specificato .
6 %
7 if feval (fun , x0 )~= 0
8     error ( 'Il valore in x0 deve essere uno zero per la funzione .' );
9 end
10 syms x;
11 f1 = fun ;
12 y = 0;
13 while ( feval (f1 , x0) == 0)
14     f1 = eval ([ '@(x)' char ( diff (f1(x) ))]);
15     y = y +1;
16 end
17 return
```

metodo di Newton modificato

```
1 function [x, i] = NewtonMod(f, df, m, x0, tol, itmax)
2 %   x=NewtonMod(f,df,m,x0,tol,itmax)
3 %   parametri in ingresso
4 %   f -> funzione in cui si effettua la ricerca degli zeri
5 %   df -> derivata della funzione f
6 %   m -> molteplicità della radice
7 %   x0 -> punto di partenza
8 %   tol -> parametro che indica la tolleranza
9 %   itmax -> numero massimo di iterazioni
10 %   valori di ritorno
11 %   x -> radice della funzione
12 %   i -> numero di iterazioni
13 %   il metodo di newton restituisce la radice di una funzione f
14 %   ed il numero di iterazioni effettuate
15 i=1;
16 fx=feval(f,x0);
17 dfx=feval(df,x0);
18 x=x0-m*(fx/dfx);
19 while(i<itmax && abs(x - x0) >= tol*(1+abs(x)))
20     i=i+1;
21     x0=x;
22     fx=feval(f,x0);
23     dfx=feval(df,x0);
24     x=x0-m*(fx/dfx);
25 end
26 if (abs(x - x0) >= tol*(1+abs(x)))
27     error('il metodo non converge');
28 end
29 return
```

metodo di Aitken

```
1 function [x,i] = aitken(f, f1, x0, tol, itmax)
2 %   x=aitken(f,f1,x0,tol,itmax)
3 %   parametri in ingresso
4 %   f -> funzione in cui si effettua la ricerca degli zeri
5 %   f1 -> derivata della funzione f
6 %   x0 -> punto di partenza
7 %   tol -> parametro che indica la tolleranza
8 %   itmax -> numero massimo di iterazioni
9 %   valori di ritorno
10 %   x -> radice della funzione
11 %   i -> numero di iterazioni
12 %   il metodo di aitken restituisce la radice di una funzione f
13 %   ed il numero di iterazioni effettuate
14 i=0;
15 x=x0;
16 vai=1;
17 while(i<itmax) && vai
18     i=i+1;
19     x0=x;
20     fx=feval(f,x0);
21     f1x=feval(f1,x0);
22     x1=x0-fx/f1x;
23     fx=feval(f,x1);
24     f1x=feval(f1,x1);
25     x=x1-fx/f1x;
26     x=(x*x0-x1^2)/(x-2*x1+x0);
27     vai = abs(x-x0)>tol*(1+abs(x));
28 end
29 if vai, error('il metodo non converge'),end
30 return
```

tolleranza	Newton		NewtonMod		Aitken	
	radice	iterazioni	radice	iterazioni	radice	iterazioni
10 ⁻¹	3.84317880607062e-01	2	0	3	6.4929e-19	3
10 ⁻²	2.8805139309385e-02	11	0	3	6.4929e-19	3
10 ⁻³	2.883766303035e-03	19	0	3	6.4929e-19	3
10 ⁻⁴	2.887022508866152e-04	27	0	3	0	4
10 ⁻⁵	2.890282391459780e-05	35	NaN	4	0	4
10 ⁻⁶	2.893545954951113e-06	43	NaN	4	0	4
10 ⁻⁷	2.896813203496438e-07	51	NaN	4	0	4
10 ⁻⁸	2.900084141256734e-08	59	NaN	4	0	4
10 ⁻⁹	2.903358772397679e-09	67	NaN	4	0	4
10 ⁻¹⁰	2.906637101089656e-10	75	NaN	4	0	4
10 ⁻¹¹	2.909919131507756e-11	83	NaN	4	0	4
10 ⁻¹²	2.913204867831785e-12	91	NaN	4	0	4

dai risultati in tabella si evince che il metodo di Newton richiede un numero elevato di iterazioni nel caso di radici multiple, diventando inefficiente in confronto al metodo di Newton modificato e il metodo di Aitken che richiedono un numero di iterazioni molto minore e risultando così più efficienti nel caso di radici multiple ripristinando la convergenza quadratica.

CHAPTER 3

SISTEMI LINEARI E NON LINEARI

3.1 Esercizio 8

Descrizione: Scrivere una function Matlab che, data in ingresso una matrice A , restituisca una matrice, LU , che contenga l'informazione sui suoi fattori L ed U , ed un vettore p contenente la relativa permutazione, della fattorizzazione LU con pivoting parziale di A : **function** $[LU, p] = palu(A)$. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function.

Soluzione:

fattorizzazione LU con pivoting parziale

```
1 function [LU, p] = palu(A)
2 % function [LU, p] = palu(A)
3 % parametri
4 % A -> matrice quadrata non singolare
5 %
6 % funzione che, data una matrice n*n, non singolare, la fattorizza in A=LU
7 % tramite pivoting parziale. restituisce le informazioni dei fattori
8 % memorizzati in A e il vettore che memorizza le permutazioni effettuate
9 LU=A;
10 [m,n]=size(LU);
11 if m~=n, error('matrice non quadrata');end
12 p=1:n;
13 for i=1:n-1
```

```

14     [mi, ki]=max(abs(A(i:n, i)));
15     if mi==0, error('matrice singolare');end
16     ki=ki+i-1;
17     if ki>i
18         LU([i ki],:)=LU([ki i],:);
19         p([i ki])=p([ki i]);
20     end
21     LU(i+1:n, i)=LU(i+1:n, i)/LU(i, i);
22     LU(i+1:n, i+1:n)= LU(i+1:n, i+1:n)-LU(i+1:n, i)*LU(i, i+1:n);
23 end
24 return

```

3.2 Esercizio 9

Descrizione: Scrivere una function Matlab che, data in ingresso la matrice LU ed il vettore p creati dalla function del precedente esercizio, ed il termine noto del sistema lineare $Ax = b$, ne calcoli la soluzione: **function** $x = \text{lusolve}(LU, p, b)$. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function.

Svolgimento:

Risoluzione matrice fattorizzata LU

```
1 function x = lusolve(LU,p,b)
2 % x=lusolve(LU,p,b)
3 % parametri
4 % LU-> matrice nxn fattorizzata LU
5 % p->vettore delle permutazioni
6 % b->vettore dei termini noti
7 % Data una matrice nxn fattorizzata LU, p vettore delle permutazioni e
8 % b di lunghezza n, risolve Ax=b, cioè: LUx=b Ux=y e Ly=b
9 [m,n]= size (LU);
10 lb = length (b);
11 if m~=n, error ('La matrice LU non e quadrata .'); end
12 if length (p)~= n
13     error ('Vettore di permutazione non consistente con la matrice '); end
14 if length (b)~= n
15     error ('Vettore di permutazione non consistente con la matrice '); end
16 b=b(p);
17 x=b(:);
18 for j=2:n
19     x(j:n)=x(j:n)-LU(j:n,j-1)*x(j-1);
20 end
21 for j=n:-1:1
22     x(j)=x(j)/LU(j,j);
23     x(1:j-1)=x(1:j-1)-LU(1:j-1,j)*x(j);
24 end
25 return
```

3.3 Esercizio 10

Descrizione: Scaricare la function *cremat* che crea sistemi lineari $n \times n$ la cui soluzione è il vettore $v = (1 \dots n)^T$. Eseguire, quindi, lo script Matlab (vedere esercizio) per testare le function dei precedenti esercizi. Confrontare i risultati ottenuti con quelli attesi, e dare una spiegazione esauriente degli stessi.

Soluzione:

Una volta scaricata la funzione *cremat*

cremat

```
1 function [A,b] = cremat(n,k,simme)
2 %
3 % [A,b] = cremat(n,k,simme) Crea una matrice A nxn ed un termine noto b,
4 % in modo che la soluzione del sistema lineare
5 % A*x=b sia x = [1,2,...,n]^T.
6 % k non ve lo dico a cosa serve.
7 % simme, se specificato, crea una matrice
8 % simmetrica e definita positiva.
9 %
10 if nargin==1
11     sigma = 1/n;
12 else
13     sigma = 10^(-k);
14 end
15 rng(0);
16 [q1,r1] = qr(rand(n));
17 if nargin==3
18     q2 = q1';
19 else
20     [q2,r1] = qr(rand(n));
21 end
22 A = q1*diag([sigma 2/n:1/n:1])*q2;
23 x = [1:n]';
24 b = A*x;
25 return
```

ed eseguito il seguente script


```

n = 10;
x = zeros(n,15);
for i = 1:15
    [A,b] = cremat(n,i);
    [LU,p] = palu(A);
    x(:,i) = lusolve(LU,p,b);
end

```

otteniamo i seguenti risultati

```

disp(x(1:10,1:5))
1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
2.0000    2.0000    2.0000    2.0000    2.0000
3.0000    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000
4.0000    4.0000    4.0000    4.0000    4.0000
5.0000    5.0000    5.0000    5.0000    5.0000
6.0000    6.0000    6.0000    6.0000    6.0000
7.0000    7.0000    7.0000    7.0000    7.0000
8.0000    8.0000    8.0000    8.0000    8.0000
9.0000    9.0000    9.0000    9.0000    9.0000
10.0000   10.0000   10.0000   10.0000   10.0000

```

```

disp(x(1:10,6:10))
1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
2.0000    2.0000    2.0000    2.0000    2.0000
3.0000    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000
4.0000    4.0000    4.0000    4.0000    4.0000
5.0000    5.0000    5.0000    5.0000    5.0000
6.0000    6.0000    6.0000    6.0000    6.0000
7.0000    7.0000    7.0000    7.0000    7.0000
8.0000    8.0000    8.0000    8.0000    8.0000
9.0000    9.0000    9.0000    9.0000    9.0000
10.0000   10.0000   10.0000   10.0000   10.0000

```

```

disp(x(1:10,11:15))
1.0000    0.9999    1.0022    1.0060    0.8926
2.0000    2.0002    1.9935    1.9825    2.3131
3.0000    2.9999    3.0021    3.0056    2.8997
4.0000    4.0002    3.9931    3.9815    4.3314
5.0000    4.9995    5.0174    5.0466    4.1649
6.0000    6.0003    5.9914    5.9769    6.4133
7.0000    7.0002    6.9934    6.9823    7.3175
8.0000    8.0000    7.9994    7.9983    8.0300
9.0000    9.0002    8.9940    8.9839    9.2881
10.0000   10.0001    9.9976    9.9936   10.1138

```

notiamo che i risultati ottenuti coincidono con i risultati attesi per $k \leq 12$, quindi abbiamo dei risultati perturbati.

Questo vuol dire che per il condizionamento del problema per le matrici

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq k(A) \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right) \quad (3.1)$$

abbiamo un numero di condizionamento di A molto piccolo e quindi una matrice ben condizionata per $1 \leq k < 12$ ed un numero di condizionamento di A $\gg 1$ e quindi una matrice mal condizionata per $k \geq 12$

3.4 Esercizio 11

Descrizione: Scrivere una function Matlab che, data in ingresso una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $m \geq n = \text{rank}(A)$, restituisca una matrice, QR , che contenga l'informazione sui fattori Q ed R della fattorizzazione QR di A : **function** $QR = \text{myqr}(A)$. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function.
Soluzione:

fattorizzazione QR

```
1 function QR=myqr(A)
2 % QR=myqr(A)
3 % parametri
4 % A -> matrice da fattorizzare QR
5 % funzione che fattorizza QR una matrice A
6 QR=A;
7 [m,n]=size(QR);
8 if m<n,error('il numero di righe è minore del numero di colonne'),end
9 for i=1:n
10     alfa=norm(QR(i:m,i));
11     if alfa==0,error('la matrice A non ha rango massimo'),end
12     if QR(i,i)>=0, alfa=-alfa;end
13     v1 = QR(i,i)-alfa;
14     QR(i,i)=alfa;
15     QR(i+1:m,i)=QR(i+1:m,i)/v1;
16     beta = -v1/alfa;
17     QR(i:m,i+1:n)=QR(i:m,i+1:n)-(beta*[1;QR(i+1:m,i)])*...
18         ([1;QR(i+1:m,i)]'*QR(i:m,i+1:n));
19 end
20 return
```

3.5 Esercizio 12

Descrizione: scrivere una function Matlab che, data in ingresso la matrice QR creata dalla function del precedente esercizio, ed il termine noto del sistema lineare $Ax = b$, ne calcoli la soluzione nel senso dei minimi quadrati: function $x = qrsolve(QR,b)$. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function.

Svolgimento:

risoluzione matrice fattorizzata QR

```
1 function x= qrsolve(A,b)
2 % x=qrsolve(A,b)
3 % parametri
4 % A -> Matrice fattorizzata QR
5 % b -> vettore dei termini noti
6 % la funzione risolve il sistema lineare Ax=b dove A è
7 % una matrice fattorizzata QR
8 [m,n]=size(A);
9 if m < n
10     error('QR non contiene i dati della fattorizzazione qr.');
```

```
11 end
12 if m ~= length(b)
13     error('Matrice e vettore dei termini noti non consistenti .');
```

```
14 end
15 x=b;
16 for i=1:n
17     v=[1; A(i+1:m,i)];
18     beta = 2/(v'*v);
19     x(i:m)=x(i:m)-(beta*(v'*x(i:m)))*v;
20 end
21 x=x(1:n);
22 for i=n:-1:1
23     x(i)=x(i)/A(i,i);
24     if i>1
25         x(1:i-1)=x(1:i-1)-x(i)*A(1:i-1,i);
26     end
27 end
28 return
```

3.6 Esercizio 13

Descrizione: Scaricare la function `cremat1` che crea sistemi lineari $m \times n$, con $m \geq n$, la cui soluzione (nel senso dei minimi quadrati) é il vettore $x = (1 \cdots n)^T$. Eseguire, quindi, lo script Matlab (vedere esercizio) per testare le function dei precedenti esercizi.

Soluzione:

una volta scaricata la function `cremat1`

`cremat1`

```
1 function [A,b] = cremat1(m,n)
2 %
3 % [A,b] = cremat1(m,n)      Crea una matrice A nxn ed un termine noto b,
4 %                          in modo che la soluzione del sistema lineare ,
5 %                          A*x=b, nel senso dei minimi quadrati, sia
6 %                          x = [1,2,...,n]^T.
7 %
8 rng(0);
9 A = rand(m,n);
10 [q,r] = qr(A);
11 b = r*[1:n]';
12 b(n+1:m) = rand(m-n,1);
13 b = q*b;
14 return
```

ed aver eseguito lo script

```
for n = 5:10
    xx = [1:n]';
    for m = n:n+10
        [A,b] = cremat1(m,n);
        QR = myqr(A);
        x = qrsolve(QR,b);
        disp([m n norm(x-xx)])
    end
end
```

otteniamo i seguenti risultati

n	m	norm(x-xx)
5	5	0.1556e ⁻¹²
6	5	0.0215e ⁻¹²
7	5	0.0130e ⁻¹²
8	5	0.0249e ⁻¹²
9	5	0.0053e ⁻¹²
10	5	0.0117e ⁻¹²
11	5	0.0097e ⁻¹²
12	5	0.0040e ⁻¹²
13	5	0.0056e ⁻¹²
14	5	0.0054e ⁻¹²
15	5	0.0047e ⁻¹²
6	6	0.0539e ⁻¹²
7	6	0.0129e ⁻¹²
8	6	0.0261e ⁻¹²
9	6	0.0170e ⁻¹²
10	6	0.0137e ⁻¹²
11	6	0.0210e ⁻¹²
12	6	0.0128e ⁻¹²
13	6	0.0106e ⁻¹²
14	6	0.0056e ⁻¹²
15	6	0.0084e ⁻¹²
16	6	0.0066e ⁻¹²
7	7	0.0275e ⁻¹²
8	7	0.0536e ⁻¹²
9	7	0.0093e ⁻¹²
10	7	0.0215e ⁻¹²
11	7	0.0265e ⁻¹²
12	7	0.0188e ⁻¹²
13	7	0.0104e ⁻¹²
14	7	0.0236e ⁻¹²

n	m	norm(x-xx)
15	7	0.0165e ⁻¹²
16	7	0.0077e ⁻¹²
17	7	0.0158e ⁻¹²
8	8	0.0941e ⁻¹²
9	8	0.0227e ⁻¹²
10	8	0.0414e ⁻¹²
11	8	0.0324e ⁻¹²
12	8	0.0290e ⁻¹²
13	8	0.0140e ⁻¹²
14	8	0.0121e ⁻¹²
15	8	0.0378e ⁻¹²
16	8	0.0151e ⁻¹²
17	8	0.0115e ⁻¹²
18	8	0.0136e ⁻¹²
9	9	0.0703e ⁻¹²
10	9	0.0712e ⁻¹²
11	9	0.0590e ⁻¹²
12	9	0.0692e ⁻¹²
13	9	0.0222e ⁻¹²
14	9	0.0149e ⁻¹²
15	9	0.0435e ⁻¹²
16	9	0.0285e ⁻¹²
17	9	0.0165e ⁻¹²
18	9	0.0218e ⁻¹²
19	9	0.0263e ⁻¹²
10	10	0.0613e ⁻¹²
11	10	0.1235e ⁻¹²
12	10	0.0683e ⁻¹²
13	10	0.0270e ⁻¹²
14	10	0.0481e ⁻¹²
15	10	0.0395e ⁻¹²
16	10	0.0555e ⁻¹²
17	10	0.0236e ⁻¹²
18	10	0.0193e ⁻¹²
19	10	0.0219e ⁻¹²
20	10	0.0188e ⁻¹²

CHAPTER 4

APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI

4.1 Esercizio 14

Descrizione: Scrivere un programma che implementi efficientemente il calcolo del polinomio interpolante su un insieme di ascisse distinte.

Soluzione:

metodo interpolante di Newton

```
1 function y = NewtonInterp(xi, fi, x)
2 %
3 %   y = newton(xi, fi, x) Calcolo il polinomio
4 %                           interpolante le coppie (xi, fi)
5 %                           nelle ascisse x
6 n=length(xi);
7 if length(fi)~= n, error('dati inconsistenti'); end
8 for i=1:n-1
9     for j=i+1:n
10        if xi(i)==xi(j), error('ascisse non distinte');
11        end
12    end
13 end
14 f=divdif(xi, fi);
15 y=f(n);
16 for i=n-1:-1:1
17     y=y.*(x-xi(i))+f(i);
18 end
19 return
```

```

1 function f=dividif(xi,fi)
2 %
3 % f=dividif(xi,fi)  funzione che calcola
4 %                  le differenze divise
5 %
6 n=length(xi);
7 f=fi;
8 for i=1:n-1
9     for j=n:-1:i+1
10        f(j)=(f(j)-f(j-1))/(xi(j)-xi(j-i));
11    end
12 end
13 return

```

4.2 Esercizio 15

Descrizione: Scrivere un programma che implementi efficientemente il calcolo del polinomio interpolante di Hermite su un insieme di ascisse distinte.

Soluzione:

Hermite

```
1 function y = Hermite(xi, fi, dfi, x)
2 %
3 %   y = Hermite(xi, fi, dfi, x)
4 %                               Calcolo il polinomio
5 %                               interpolante le coppie (xi, fi)
6 %                               nelle ascisse x
7 n=length(xi);
8 if length(fi)~=n, error('dati inconsistenti'); end
9 for i=1:n-1
10     for j=i+1:n
11         if xi(i)==xi(j), error('ascisse non distinte');
12         end
13     end
14 end
15 fh=zeros(2*n);
16 xh=zeros(2*n);
17 for i=1:n
18     fh(2*i-1)=fi(i);
19     fh(2*i)=dfi(i);
20     xh(2*i-1)=xi(i);
21     xh(2*i)=xi(i);
22 end
23 fh=divdifH(fh, xh);
24 y=fh(2*n);
25 for i=2*n-1:-1:1
26     y=y.*(x-xh(i))+fh(i);
27 end
28 return
```

```

1 function f = dividifH(f,x)
2 %   f=dividifH(f,x)
3 %   calcola le differenze divise secondo il
4 %   polinomio interpolante di Hermite
5 n=length(x)-1;
6 for i=n:-2:3
7     f(i)=(f(i)-f(i-2))/(x(i)-x(i-1));
8 end
9 for j=2:n
10     for i=n+1:-1:j+1
11         f(i)=(f(i)-f(i-1))/(x(i)-x(i-j));
12     end
13 end
14 return

```

4.3 Esercizio 16

Descrizione: Scrivere un programma che implementi efficientemente il calcolo di una spline cubica naturale interpolante su una partizione assegnata.

Soluzione:

Spline naturale

```
1 function s = naturalSpline(x,y,xp)
2 %   s = naturalSpline(x,y,xp)
3 %   funzione per valutare le ascisse tramite spline naturale
4 %   parametri
5 %   x-> ascisse di interpolazione
6 %   y-> valori della funzione in x
7 %   xp-> punti di interpolazione
8 n=length(x);
9 hi=x(2:n) - x(1:n-1);
10 divdif=(y(2:n)-y(1:n-1))./hi;
11 divdif=6*((divdif(2:end) - divdif(1:end-1))./(x(3:end)-x(1:end-2)));
12 sub=(hi(2:end-1))./(hi(1:end-2)+hi(2:end-1));
13 sup=(hi(2:end-1))./(hi(2:end-1)+hi(3:end));
14 m=tridiag(sub,sup,divdif);
15 m = [0,m,0];
16 ri = zeros(1,n);
17 qi = zeros(1,n);
18 for i = 2:n
19     ri(i-1) = y(i-1) - ((hi(i-1)^2)/6) * m(i-1);
20     qi(i-1) = (y(i)-y(i-1))/hi(i-1) - (hi(i-1)/6) * (m(i) - m(i-1));
21 end
22 s=evalSpline(ri,qi,xp,x,m,hi);
23 return
```

```

1 function m = tridiag(sub,sup,divdif)
2 % m = tridiag(sub,sup,divdif)
3 % funzione che restituisce una matrice tridiagonale
4 n=length(divdif);
5 l=zeros(1,n);
6 v=zeros(n);
7 v(1)=2;
8 for i = 2:n
9     v(i)=2-l(i)*sup(i-1);
10    l(i)=sub(i-1)/v(i-1);
11 end
12 y=zeros(n);
13 y(1)=divdif(1);
14 for j= 2:n
15     y(j)=divdif(j)-l(j)*y(j-1);
16 end
17 m(n)=y(n)/v(n);
18 for k = n-1:-1:1
19     m(k)=(y(k)-sup(k)*m(k+1))/v(k);
20 end
21 return

1 function s=evalSpline(ri,qi,xp,xi,m,hi)
2 % s=evalSpline(ri,qi,xp,xi,m,hi)
3 n = length(xp);
4 s = zeros(n,1)';
5 for j = 1 : n
6     i = range(xi, xp(j));
7     s(j) = ( ((xp(j)-xi(i-1))^3*m(i) + ((xi(i)-xp(j))^3)*m(i-1))/ ...
8     (6*hi(i-1))) + qi(i-1)*(xp(j)-xi(i-1)) + ri(i-1);
9 end
10 return

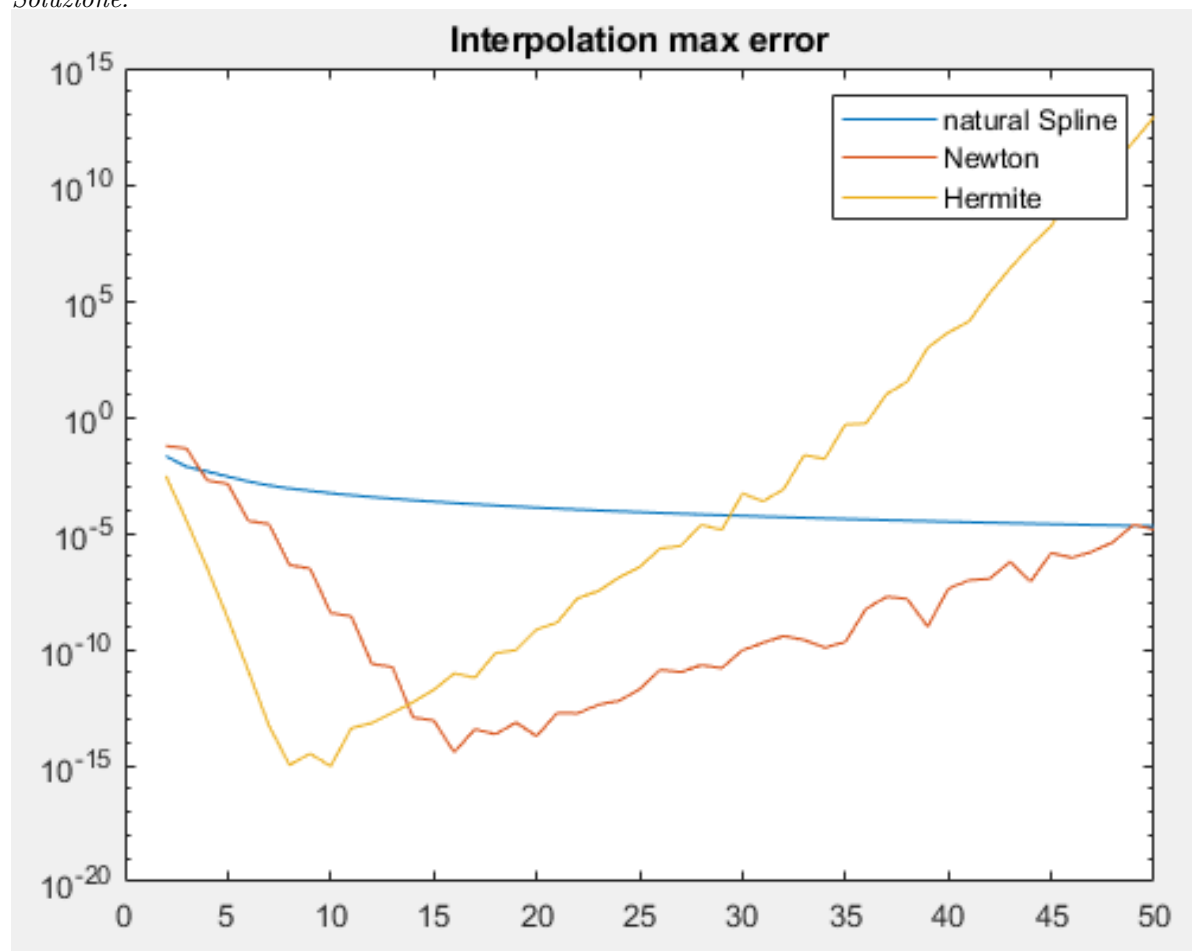
1 function i = range(xi, xp)
2 % i=range(xi, xp)
3 for i=2:length(xi)
4     if xi(i)>=xp
5         return;
6     end
7 end
8 return

```

4.4 Esercizio 18

Descrizione: Confrontare i codici degli esercizi 14–17 per approssimare la funzione $f(x) = \sin(x)$ sulle ascisse $x_i = i\pi/n, i = 0, 1, \dots, n$, per $n = 1, 2, \dots, 10$. Graficare l'errore massimo di approssimazione verso n (in semilog), calcolato su una griglia uniforme di 10001 punti nell'intervallo $[0, \pi]$.

Soluzione:



4.5 Esercizio 19

Descrizione: Calcolare (numericamente) la costante di Lebesgue per i polinomi interpolanti di grado $n = 2, 4, 6, \dots, 40$, sia sulle ascisse equidistanti che su quelle di Chebyshev (utilizzare 10001 punti equispaziati per valutare la funzione di Lebesgue). Graficare convenientemente i risultati ottenuti. Spiegare, quindi, i risultati ottenuti approssimando la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5]$$

utilizzando le ascisse equidistanti e di Chebyshev precedentemente menzionate (tabulare il massimo errore valutato su una griglia 10001 punti equidistanti nell'intervallo $[-5, 5]$).

Soluzione:

Ricordiamo che la costante di Lebesgue Λ_n è definita come:

$$\Lambda_n = \|\lambda_n\|$$
$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^n |L_{i,n}(x)|$$
$$L_{i,n}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

con $\lambda_n(x)$ funzione di Lebesgue, $L_{i,n}(x)$ il polinomio di base di Lagrange per l'interpolazione polinomiale e x_0, \dots, x_n le ascisse di interpolazione.

Calcolo della costante di Lebesgue

Per il calcolo della Costante di Lebesgue, abbiamo utilizzato il seguente Script matlab:

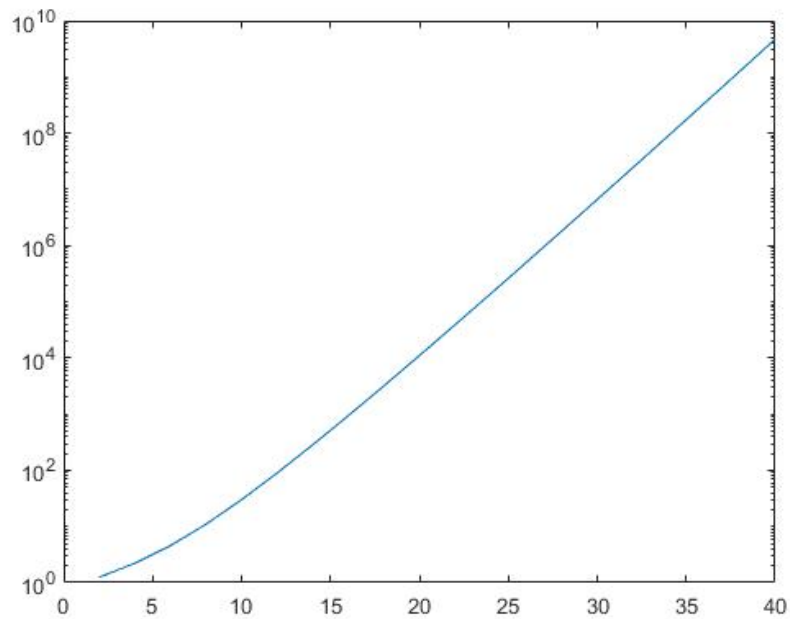
```
1 a = 0; b = 20;
2 x = a : (b-a)/10000 : b; % genero le ascisse necessarie per il calcolo
3 lebesgueEq = 1 : 20;
4 lebesgueCh = 1 : 20;
5 costLeb1=costLeb1'; costLeb2=costLeb2';
6 for n = 2 : 2 : 40
7
8     x1 = a : (b-a)/n : b;
9     functLeb1 = 0;
10
11     x2 = (a+b)/2 + ((b-a)/2)*cos(((2*(n:-1:0))+1)*pi/((2*n)+2));
12     functLeb2 = 0;
13     for i = 0:n
14         lin1 = 1; lin2 = 1;
```

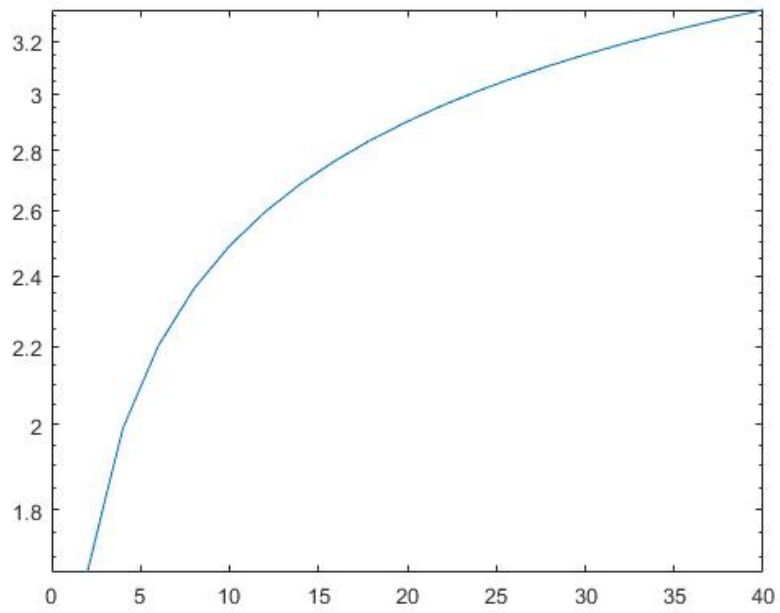


```

15         for j = [0:i-1,i+1:n]
16             lin1 = lin1 .* (x-x1(j+1))/(x1(i+1)-x1(j+1));
17             lin2 = lin2 .* (x-x2(j+1))/(x2(i+1)-x2(j+1));
18         end
19         functLeb1 = functLeb1 + abs(lin1);
20         functLeb2 = functLeb2 + abs(lin2);
21     end
22     lebesgueEq(n/2) = max(functLeb1);
23     lebesgueCh(n/2) = max(functLeb2);
24 end
25 semilogy((2:2:40),lebesgueEq); %grafica per equidistanti
26 semilogy((2:2:40),lebesgueCh); %grafica per Chebyshev

```





Per la tabulazione, Å stato utilizzato il seguente *script*:

```

1 b = 5; a = -5;
2 x = a : (b-a)/10000 : b;
3 f = @(x) 1./(1 + x.^2);
4 value = feval(f,x);
5 E = zeros(20, 3);
6 E(:,1) = 2:2:40;
7 for n = 2 : 2 : 40
8     xEq = a : (b-a)/n : b;
9     xCh = (a+b)/2 + ((b-a)/2)*cos(((2*(n-1:0))+1)*pi/((2*n)+2));
10    equid = newton(xEq, (feval(f, xEq)), x);
11    chebysh = newton(xCh, (feval(f, xCh)), x);
12    E(n/2, 2) = max(abs(value(1:end)-equid(1:end)));
13    E(n/2, 3) = max(abs(value(1:end)-chebysh(1:end)));
14 end

```

Di seguito riportiamo i risultati ottenuti dall'esecuzione:

n	Ascisse Equidistanti	Ascisse di Chebyshev
2	$6.462292487 \cdot 10^{-1}$	$6.005977 \cdot 10^{-1}$
4	$4.383571219 \cdot 10^{-1}$	$4.020169 \cdot 10^{-1}$
6	$6.169479237 \cdot 10^{-1}$	$2.642274 \cdot 10^{-1}$
8	$1.045176501 \cdot 10^0$	$1.708356 \cdot 10^{-1}$
10	$1.915658802 \cdot 10^0$	$1.091534 \cdot 10^{-1}$
12	$3.663392805 \cdot 10^0$	$6.921570 \cdot 10^{-2}$
14	$7.194881107 \cdot 10^0$	$4.660234 \cdot 10^{-2}$
16	$1.439385128 \cdot 10^1$	$3.261358 \cdot 10^{-2}$
18	$2.919043772 \cdot 10^1$	$2.249228 \cdot 10^{-2}$
20	$5.982230871 \cdot 10^1$	$1.533371 \cdot 10^{-2}$
22	$1.236242551 \cdot 10^2$	$1.035891 \cdot 10^{-2}$
24	$2.572129123 \cdot 10^2$	$6.948423 \cdot 10^{-3}$
26	$5.381745497 \cdot 10^2$	$4.634870 \cdot 10^{-3}$
28	$1.131420473 \cdot 10^3$	$3.078216 \cdot 10^{-3}$
30	$2.388280971 \cdot 10^3$	$2.061587 \cdot 10^{-3}$
32	$5.058959842 \cdot 10^3$	$1.401747 \cdot 10^{-3}$
34	$1.074904570 \cdot 10^4$	$9.493348 \cdot 10^{-4}$
36	$2.290122855 \cdot 10^4$	$6.407501 \cdot 10^{-4}$
38	$4.890718552 \cdot 10^4$	$4.312103 \cdot 10^{-4}$
40	$1.046676871 \cdot 10^5$	$2.894608 \cdot 10^{-4}$

Osservando la tabella, si nota come rispetto alle ascisse *Equidistanti*, quelle di *Chebyshev* vadano a minimizzare il valore di Λ_n al crescere di n.

4.6 Esercizio 20

Con riferimento al precedente esercizio, tabulare il massimo errore di approssimazione (calcolato come sopra indicato), sia utilizzando le ascisse equidistanti che quelle di Chebyshev su menzionate, relativo alla spline cubica naturale interpolante $f(x)$ su tali ascisse.

Soluzione:

Utilizzando il seguente *script*, tabuliamo il massimo errore di approssimazione in relazione ad n , sia usando *Ascisse Equidistanti* sia usando le *Ascisse di Chebyshev*:

Tabulazione errore di interpolazione:

```
1 b = 5; a = -5;
2 x = a : (b-a)/10000 : b;
3 f = @(x) 1./(1 + x.^2);
4 valEffett = feval(f,x);
5
6 E = zeros(20, 3);
7 E(:,1) = 2:2:40;
8
9 for n = 2 : 2 : 40
10     xEq = a : (b-a)/n : b;
11     xCh = (a+b)/2 + ((b-a)/2)*cos(((2*(n:-1:0))+1)*pi/((2*n)+2));
12     xCh(1) = floor(xCh(1));
13     xCh(end) = ceil(xCh(end));
14
15     equid = splineCubica(xEq, feval(f,xEq),x,0);
16     chebysh = splineCubica(xCh, feval(f,xCh),[0.010, 0.098, 0.127, 0.278,
17     0.906, 0.913, 0.958, 0.965];
18     yi = [1.003626, 1.025686, 1.029512, 1.029130, 0.994781,...
19     0.990156, 1.016687, 1.057382, 1.061462, 1.091263,...
20     1.096476];
21     err = zeros(11,1);
22     for n = 1:11
23         A = ones(11,n);
24         for i = 2:n
25             A(1:11,i) = xi(1:11).^(i-1);
26         end
27         [Q,R] = qr(A);
28         g1 = Q'*yi';
29         x = zeros(n,1);
30         x(1:n)=g1(1:n);
31
32         for i = n: -1:1
```

```

33         x(i) = x(i)/R(i,i);
34         for j = i-1 : -1 : 1
35             x(j) = x(j) - (R(j,i)*x(i));
36         end
37     end
38
39     % grado minimo e coefficienti
40     if norm(abs((A*x)-yi')) <= 10E-6, n-1, x, break; end
41
42     % per graficare i risultati ottenuti su n
43     err(n) = norm(abs((A*x)-yi'));
44 end
45 semilogy((1:11), err), x, 0);
46
47 E(n/2, 2) = max(abs(valEffett(1:end)-equid(1:end)));
48 E(n/2, 3) = max(abs(valEffett(1:end)-chebysh(1:end)));
49
50 end

```

Per la tabulazione, Åš stato utilizzato il seguente *script*:

```

1  b = 5; a = -5;
2  x = a : (b-a)/10000 : b;
3  f = @(x) 1./(1 + x.^2);
4  value = feval(f,x);
5  E = zeros(20, 3);
6  E(:,1) = 2:2:40;
7  for n = 2 : 2 : 40
8      xEq = a : (b-a)/n : b;
9      xCh = (a+b)/2 + ((b-a)/2)*cos(((2*(n:-1:0))+1)*pi/((2*n)+2));
10     equid = newton(xEq, (feval(f, xEq)), x);
11     chebysh = newton(xCh, (feval(f, xCh)), x);
12     E(n/2, 2) = max(abs(value(1:end)-equid(1:end)));
13     E(n/2, 3) = max(abs(value(1:end)-chebysh(1:end)));
14 end

```

Di seguito riportiamo i risultati ottenuti dall'esecuzione:

n	Asc. Equidistanti	Asc. Chebyshev
2	$6.01194546811499 \cdot 10^{-1}$	$6.01194546811499 \cdot 10^{-1}$
4	$2.79313407519679 \cdot 10^{-1}$	$3.39131026109277 \cdot 10^{-1}$
6	$1.29300088354098 \cdot 10^{-1}$	$2.18135003973960 \cdot 10^{-1}$
8	$5.6073852878562 \cdot 10^{-2}$	$1.36254235305040 \cdot 10^{-1}$
10	$2.1973825749582 \cdot 10^{-2}$	$8.2370601192499 \cdot 10^{-2}$
12	$6.908801437726 \cdot 10^{-3}$	$4.8074211277442 \cdot 10^{-2}$
14	$2.482863475717 \cdot 10^{-3}$	$2.6851489822686 \cdot 10^{-2}$
16	$3.745402833396 \cdot 10^{-3}$	$1.4031887250398 \cdot 10^{-2}$
18	$3.717998718041 \cdot 10^{-3}$	$6.489162938626 \cdot 10^{-3}$
20	$3.182857643174 \cdot 10^{-3}$	$2.216040957510 \cdot 10^{-3}$
22	$2.529653088972 \cdot 10^{-3}$	$3.078305878636 \cdot 10^{-3}$
24	$1.925792361619 \cdot 10^{-3}$	$3.665162885583 \cdot 10^{-3}$
26	$1.427047863663 \cdot 10^{-3}$	$3.755656321067 \cdot 10^{-3}$
28	$1.039053280857 \cdot 10^{-3}$	$3.559859767591 \cdot 10^{-3}$
30	$8.24362333267 \cdot 10^{-4}$	$3.218191413753 \cdot 10^{-3}$
32	$6.55498681241 \cdot 10^{-4}$	$2.819367883114 \cdot 10^{-3}$
34	$5.23708228635 \cdot 10^{-4}$	$2.416245085713 \cdot 10^{-3}$
36	$4.21003570779 \cdot 10^{-4}$	$2.037950397401 \cdot 10^{-3}$
38	$3.40837796214 \cdot 10^{-4}$	$1.698506006900 \cdot 10^{-3}$
40	$2.77976540596 \cdot 10^{-4}$	$1.402824430908 \cdot 10^{-3}$

Nel caso proposto in questo esercizio, notiamo che la scelta delle *Ascisse Equidistanti* risulta vantaggiosa rispetto alle *Ascisse di Chebyshev*.

4.7 Esercizio 21

Descrizione: Uno strumento di misura ha una accuratezza di 10^{-6} (in opportune unità di misura). I dati misurati nelle posizioni x_i sono dati da y_i , come descritto dalla seguente tabella. Calcolare il grado minimo, ed i relativi coefficienti, del polinomio che meglio approssima i precedenti dati nel senso dei minimi quadrati con una adeguata accuratezza. Graficare convenientemente i risultati ottenuti.

i	x_i	y_i
0	0.010	1.003626
1	0.098	1.025686
2	0.127	1.029512
3	0.278	1.029130
4	0.547	0.994781
5	0.632	0.990156
6	0.815	1.016687
7	0.906	1.057382
8	0.913	1.061462
9	0.958	1.091263
10	0.965	1.096476

Soluzione:

Dare risposta a questo quesito significa andare a risolvere il sistema $Va = y$ nel senso dei minimi quadrati. Per $n = 0 \dots 10$ andiamo ad iterare il nostro procedimento, imponendo un criterio di arresto sulla norma del vettore residuo $\|r - n\| \leq 10^{-6}$. Dobbiamo creare la matrice rettangolare di Vandermonde relativa ai valori x_i e scomporla nei suoi fattori $Q \in R^{m \times m}$ ed $R \in R^{m \times n}$ relativi alla sua fattorizzazione QR . Dato che Q è ortogonale e $R = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ ovvero è formata da una matrice quadrata $\hat{R} \in R^{n \times n}$ triangolare superiore e per il resto è composta da zeri, calcoliamo il vettore g_1 con la formula $g = Q^T y$ e $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ con $g_1 \in R^n$ e $g_2 \in R^{m-n}$. Nel nostro caso, avremo $m = 11$. Risolviamo quindi il sistema lineare $\hat{R}a = g_1$ per trovare i coefficienti del polinomio di grado n . Per ottenere quanto specificato, è stato utilizzato il seguente *script*, che fornisce anche la visualizzazione grafica della norma del vettore residuo:

Risoluzione del sistema ai minimi quadrati:

```

1 xi = [0.010, 0.098, 0.127, 0.278, 0.547, 0.632, 0.815, ...
2       0.906, 0.913, 0.958, 0.965];
3 yi = [1.003626, 1.025686, 1.029512, 1.029130, 0.994781, ...
4       0.990156, 1.016687, 1.057382, 1.061462, 1.091263, ...
5       1.096476];

```

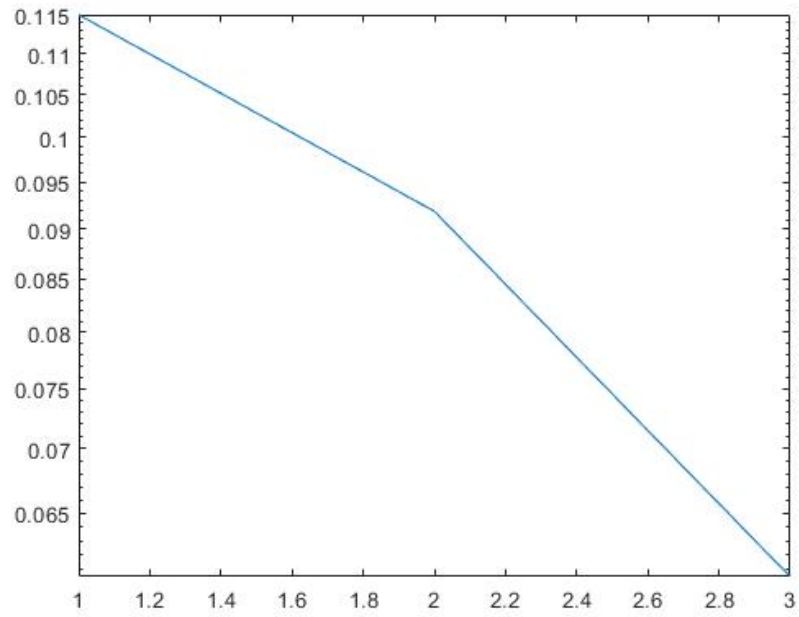
```

6  err = zeros(11,1);
7  for n = 1:11
8      A = ones(11,n);
9      for i = 2:n
10         A(1:11,i) = xi(1:11).^(i-1);
11     end
12     [Q,R] = qr(A);
13     g1 = Q'*yi';
14     x = zeros(n,1);
15     x(1:n)=g1(1:n);
16
17     for i = n:-1:1
18         x(i) = x(i)/R(i,i);
19         for j = i-1:-1:1
20             x(j) = x(j) - (R(j,i)*x(i));
21         end
22     end
23
24     % grado minimo e coefficienti
25     if norm(abs((A*x)-yi')) <= 10E-6, n-1, x, break; end
26
27     % per graficare i risultati ottenuti su n
28     err(n) = norm(abs((A*x)-yi'));
29 end
30 semilogy((1:11),err)

```


L'output ci indica che il polinomio ha grado 3 e che i suoi coefficienti sono i seguenti:

a0 = + 0.999999854479502
a1 = + 0.375001162045807
a2 = - 1.250002941638535
a3 = + 1.000001891005298



CHAPTER 5

FORMULE DI QUADRATURA

5.1 Esercizio 22

Descrizione: Scrivere due functions che implementino efficientemente le formule adattative dei trapezi e di Simpson.

Soluzione:

formula dei trapezi adattiva

```
1 function I2 = trapad(fun,a,b,tol,fa,fb)
2 % I2 = trapad(fun,a,b,tol,fa,fb)
3 % parametri
4 % fun->funzione
5 % a,b->intervallo
6 % tol->tolleranza
7 % calcola un' approssimazione dell' integrale definito di fun(x)
8 % da a a b con tolleranza tol ( default 1e -5).
9 x1=(a+b)/2;
10 if nargin<=4
11     fa=feval(fun,a);
12     fb=feval(fun,b);
13     if nargin==3
14         tol=1e-5;
15     end
16 end
17 f1=feval(fun,x1);
18 h=(b-a)/2;
```

```

19 I1=h*( fa+fb );
20 I2=I1/2+h*f1 ;
21 err=abs( I2-I1 )/3;
22 if err>tol
23     I2=trapad( fun , a , x1 , tol/2 , fa , f1 )+...
24         +trapad( fun , x1 , b , tol/2 , f1 , fb );
25 end
26 return

```

formula di Simpson adattiva

```
1 function I2 = simpad(fun,a,b,tol,fa,fb,f1)
2 % I2 = simpad(fun,a,b,tol,fa,fb)
3 % parametri
4 % fun->funzione
5 % a,b->intervallo
6 % tol->tolleranza
7 % calcola un' approssimazione dell' integrale definito di fun(x)
8 % da a a b con tolleranza tol ( default 1e -5).
9 x1=(a+b)/2;
10 if nargin<=4
11     fa=feval(fun,a);
12     fb=feval(fun,b);
13     f1=feval(fun,x1);
14     if nargin==3
15         tol=1e-5;
16     end
17 end
18 h=(b-a)/6;
19 I1=h*(fa+4*f1+fb);
20 x2=(a+x1)/2;
21 x3=(x1+b)/2;
22 f2=feval(fun,x2);
23 f3=feval(fun,x3);
24 I2 = 0.5*h*(fa+4*f2+2*f1+4*f3+fb);
25 err=abs(I2-I1)/15;
26 if err>tol
27     I2=simpad(fun,a,x1,tol/2,fa,f1,f2)+...
28         +simpad(fun,x1,b,tol/2,f1,fb,f3);
29 end
30 return
```

5.2 Esercizio 23

Descrizione: Sapendo che

$$I(x) = \int_0^{\arctan(30)} (1 + \tan^2(x)) dx = 30 \quad (5.1)$$

tabulare il numero dei punti richiesti dalle formule composite dei trapezi e di Simpson per approssimare $I(f)$ con tolleranze $tol = 10^{-i}$, con $i = 2, \dots, 8$

Soluzione:

per prima cosa é stato necessario effettuare una modifica al metodo dei trapezi adattivo e al metodo di Simpson adattivo per fare in modo che ritornassero il numero di punti

```
1 function [I2,punti] = trapadcount(fun,a,b,tol,fa,fb)
2 % I2 = trapadcount(fun,a,b,tol,fa,fb)
3 % parametri
4 % fun->funzione
5 % a,b->intervallo
6 % tol->tolleranza
7 % calcola un' approssimazione dell' integrale definito di fun(x)
8 % da a a b con tolleranza tol ( default 1e -5).
9 persistent count;
10 x1=(a+b)/2;
11 if nargin<=4
12     fa=feval(fun,a);
13     fb=feval(fun,b);
14     count=0;
15     if nargin==3
16         tol=1e-5;
17     end
18 end
19 count=count+1;
20 f1=feval(fun,x1);
21 h=(b-a)/2;
22 I1=h*(fa+fb);
23 I2=I1/2+h*f1;
24 err=abs(I2-I1)/3;
25 if err>tol
26     I2=trapadcount(fun,a,x1,tol/2,fa,f1)+...
27         +trapadcount(fun,x1,b,tol/2,f1,fb);
28 end
29 punti=count+2;
30 return
```

```

1 function [I2,punti] = simpadcount(fun,a,b,tol,fa,fb,f1)
2 % I2 = simpadcount(fun,a,b,tol,fa,fb)
3 % parametri
4 % fun->funzione
5 % a,b->intervallo
6 % tol->tolleranza
7 % calcola un' approssimazione dell' integrale definito di fun(x)
8 % da a a b con tolleranza tol ( default 1e -5).
9 persistent count;
10 x1=(a+b)/2;
11 if nargin<=4
12     fa=feval(fun,a);
13     fb=feval(fun,b);
14     f1=feval(fun,x1);
15     count=0;
16     if nargin==3
17         tol=1e-5;
18     end
19 end
20 count=count+3;
21 h=(b-a)/6;
22 I1=h*(fa+4*f1+fb);
23 x2=(a+x1)/2;
24 x3=(x1+b)/2;
25 f2=feval(fun,x2);
26 f3=feval(fun,x3);
27 I2 = 0.5*h*(fa+4*f2+2*f1+4*f3+fb);
28 err=abs(I2-I1)/15;
29 if err>tol
30     I2=simpadcount(fun,a,x1,tol/2,fa,f1,f2)+...
31         +simpadcount(fun,x1,b,tol/2,f1,fb,f3);
32 end
33 punti=count+2;
34 return

```

poi si é eseguito il seguente script per visualizzare i risultati

```
f = @(x) 1 + (tan(x)).^2;
a = 0;
b = atan(30);
for i=2:8
    [I2, counter] = simpadcount(f, a, b, 10^-i);
    disp(counter)
    err = abs(30 - I2);
    disp(err)
    [I2, counter] = trapadcount(f, a, b, 10^-i);
    disp(counter)
    err = abs(30 - I2);
    disp(err)
end
```

ottenendo così i risultati della seguente tabella

tolleranza	Simpson		trapezi	
	#punti	errore	#punti	errore
10 ²	71	2.3725e-03	375	4.7645e-03
10 ³	113	6.1653e-04	1181	5.7372e-04
10 ⁴	203	5.0167e-05	3687	5.2639e-05
10 ⁵	371	2.2207e-06	11883	5.4546e-06
10 ⁶	635	3.9818e-07	37273	5.6355e-07
10 ⁷	1145	3.5653e-08	116747	5.2552e-08
10 ⁸	2045	3.5877e-09	375793	5.5077e-09

CHAPTER 6

CALCOLO DEL GOOGLE PAGERANK

6.1 Esercizio 24

Descrizione: Scrivere una function che implementi efficientemente il metodo delle potenze.

Soluzione:

metodo delle potenze

```
1 function [l1,x1] = potenze(A,tol,itmax)
2 % [f1,x1] = potenze(A,tol,itmax)
3 % parametri
4 % A-> matrice
5 % tol->tolleranza
6 % itmax-> numero massimo di iterazioni
7 % funzione che implementa il metodo delle potenze per calcolare
8 % l'autovalore dominante e il corrispettivo autovettore
9 [m,n]=size(A);
10 if m~=n,error('dati inconsistenti'),end
11 if nargin<=2
12     if nargin<=1
13         tol=1e-6;
14     else
15         if tol>= 0.1 || tol<=0, error('tolleranza non valida');end
16     end
17     itmax = ceil (- log10 ( tol))*n;
18 end
```



```

19 x = rand(n, 1);
20 l1=0;
21 for k = 1: itmax
22     x1=x/norm(x);
23     x=A*x1;
24     l0=l1;
25     l1=x'*x1;
26     err=abs(l1-l0);
27     if err<=tol*(1+abs(l1)), break, end
28 end
29 if err>tol*(1+abs(l1)), error('convergenza non ottenuta');end
30 return

```

6.2 Esercizio 25

Descrizione: Sia data la matrice di Toeplitz simmetrica A_N in cui le extra-diagonali più esterne sono le none. Partendo dal vettore $\underline{u}_0 = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$, applicare il metodo delle potenze con tolleranza $\text{tol} = 10^{-10}$ per $N = 10 : 10 : 500$, utilizzando la function dell'esercizio 24. Graficare il valore dell'autovalore dominante, e del numero di iterazioni necessarie per soddisfare il criterio di arresto, rispetto ad N . Utilizzare la funzione `spdiags` di Matlab per creare la matrice e memorizzarla come matrice sparsa.

Soluzione:

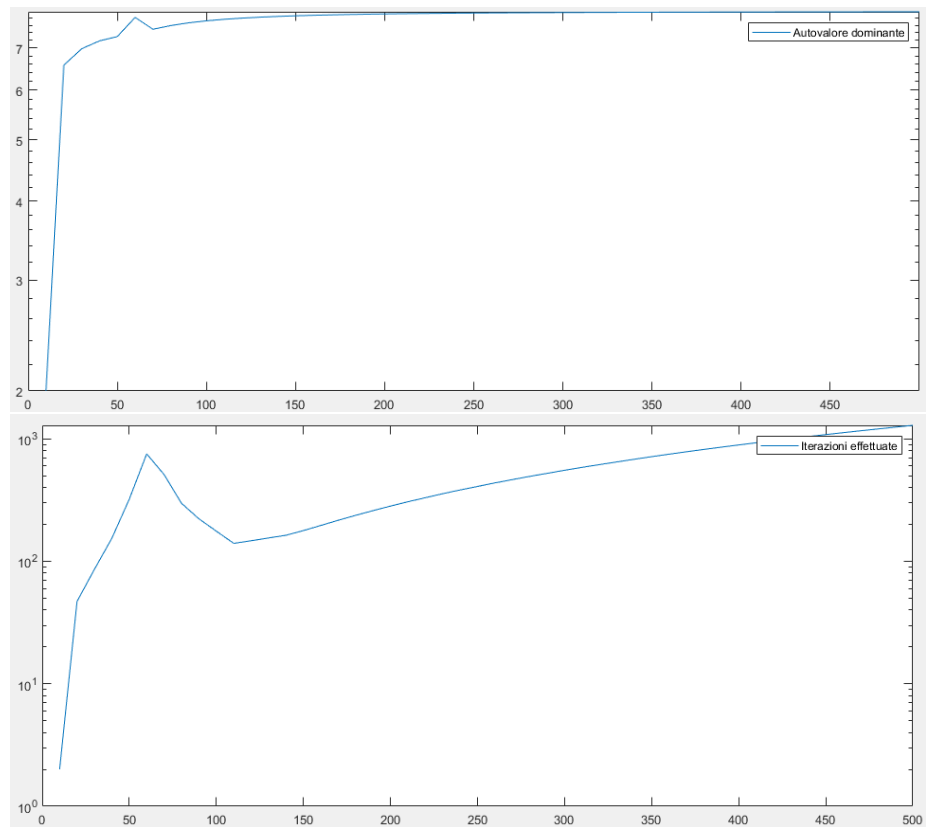
metodo delle potenze

```
1 function [l1,q,k] = potenze(A,tol,itmax)
2 % [f1,q,k] = potenze(A,tol,itmax,u)
3 % parametri
4 % A-> matrice
5 % tol->tolleranza
6 % itmax-> numero massimo di iterazioni
7 % funzione che implementa il metodo delle potenze per calcolare
8 % l'autovalore dominante e il corrispettivo autovettore avendo
9 % come vettore di partenza u=(1,...,1)T,
10 [m,n]=size(A);
11 if m~=n,error('dati inconsistenti'),end
12 if nargin<=2
13     if nargin<=1
14         tol=1e-6;
15     else
16         if tol>= 0.1 || tol<=0, error('tolleranza non valida');end
17     end
18     itmax = ceil (- log10 ( tol))*n*n;
19 end
20 u = ones(n, 1);
21 l1=0;
22 for k = 1: itmax
23     q=u/norm(u);
24     u=A*q;
25     l0=(q'*u)/(q'*q);
26     err=abs(l0-l1);
27     l1=l0;
28     if err<=tol*(abs(l1)),break,end
29 end
30 if err>tol*(abs(l1)),error('convergenza non ottenuta');end
31 return
```

```

1  tol=10e-10;
2  j=1;
3  res = zeros (1,50) ;
4  iter = zeros (1,50) ;
5  for N = 10:10:500
6      B = -1* ones (N ,5);
7      B (: ,3) = B (: ,3) *( -4);
8      A = spdiags (B , [-9 -1 0 1 9] , N, N);
9      [l1 , x1 , k] = potenzecount (A, tol);
10     res (1,j) = l1 ;
11     iter (1,j) = k;
12     j = j+1;
13 end
14 figure
15 semilogy (10:10:500 , res (:));
16 legend('Autovalore dominante');
17 figure
18 semilogy (10:10:500 , iter (:));
19 legend('Iterazioni effettuate');

```



6.3 Esercizio 26

Descrizione: Scrivere una function che implementi efficientemente un metodo iterativo, per risolvere un sistema lineare, definito da un generico splitting della matrice dei coefficienti.

Soluzione:

Splitting generico

```
1 function x = splitting(b,A,Msolve,tol)
2 % x= splitting(b,A,Msolve,tol)
3 % parametri
4 % b -> vettore colonna dei termini noti
5 % A -> Matrice passata
6 % Msolve -> funzione di Jacobi o di GaussSaider
7 % tol -> tolleranza
8 % la funzione calcola il sistema lineare Ax=b utilizzando un generico
9 % splitting che viene passato tramite il parametro Msolve
10
11 [n,m]=size(A);
12 if(n~=m || n~=length(b)),error('dati inconsistenti'),end
13 itmax=ceil(-log10(tol))*m;
14 x=zeros(n,1);
15 tolb=tol*norm(b,inf);
16 for i=1:itmax
17     r=A*x-b;
18     nr=norm(r,inf);
19     if nr<=tolb,break,end
20     u=Msolve(r,A);
21     x=x-u;
22 end
23 if nr>tolb,error('tolleranza non raggiunta'),end
24 return
```

6.4 Esercizio 27

Descrizione: Scrivere le function ausiliarie, per la function del precedente esercizio, che implementano i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel.

Soluzione:

il metodo di Jacobi

```
1 function y = Jacobi(x,A)
2 % y = Jacobi(x,A)
3 % parametri
4 % x -> colonna vettore dei termini noti
5 % A -> matrice nxn
6 % funzione per la risoluzione tramite Jacobi del sistema
7 D=diag(A);
8 y=x./D;
9 return
```

il metodo di GaussSeidel

```
1 function y = GaussSeidel(x,A)
2 % y = GaussSeidel(x,A)
3 % parametri
4 % x -> colonna vettore dei termini noti
5 % A -> matrice nxn
6 % funzione per la risoluzione tramite GaussSeidel del sistema
7 n=length(x);
8 y=x;
9 for i=1:n
10     y(i)=y(i)/A(i,i);
11     y(i+1:n)=y(i+1:n)-y(i)*A(i+1:n,i);
12 end
13 return
```

6.5 Esercizio 28

Descrizione: Con riferimento alla matrice A_N definita in (1), risolvere il sistema lineare $A_N x = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$ con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, per $N = 10 : 10 : 500$, partendo dalla approssimazione nulla della soluzione, ed imponendo la norma del residuo sia minore di 10^{-8} . Utilizzare, a tale fine, la function dell'esercizio 26, scrivendo function ausiliare adhoc (vedi esercizio 27) che sfruttino convenientemente la struttura di sparsità (nota) della matrice A_N . Graficare il numero delle iterazioni richieste dai due metodi iterativi, rispetto ad N , per soddisfare il criterio di arresto prefissato. Soluzione:

```

1 function [x, i]=splitting(b, matvec, msolve, tol)
2 % [m,i]=splitting(b, matvec, msolve, tol)
3 % parametri in ingresso
4 % b -> vettore dei termini noti
5 % matvec -> funzione per creare la matrice ad-hoc per esercizio 25
6 % msolve -> funzione per risolvere il sistema lineare
7 % tol -> tolleranza desiderata
8 % Funzione per la risoluzione ad-hoc di un sistema lineare con splitting di
9 % Jacobi o Gauss-Seidel
10 n = length(b);
11 itmax = ceil(-log10(tol))*(n*n);
12 x=zeros(n,1);
13 tolb=tol*norm(b,inf);
14 for i=1:itmax
15     r=matvec(x)-b;
16     nr=norm(r,inf);
17     if nr <= tolb
18         break;
19     end
20     u=msolve(r);
21     x=x-u;
22 end
23 if nr>tolb
24     fprintf('Convergenza non raggiunta'); end
25 return

1 function y = matvec (x)
2 % y = matvec (x)
3 % parametri in ingresso
4 % x -> vettore da moltiplicare con la matrice A dell' es 25
5 % Metodo che ritorna il prodotto tra la
6 % matrice A dell' es 25 ed il vettore x.
7 y = x *4;
8 y(9 : end) = y(9 : end) - x(1 : end - 8);
9 y(2 : end) = y(2 : end) - x(1 : end - 1);

```

```

10 y(1 : end - 1) = y(1 : end - 1) - x(2 : end);
11 y(1 : end - 8) = y(1 : end - 8) - x(9 : end);
12 return

1 function y=jacobi(x)
2 % y=jacobi(x)
3 % parametri in ingresso
4 % x -> vettore dei tetramini noti
5 % Risolve un sistema diagonale per la matrice dell'esercizio 25
6 y=x./4;
7 return

1 function y=gaussSeidel(x)
2 % y=gaussSeidel(x)
3 % parametri in ingresso
4 % x -> vettore dei termini noti
5 % Risolve un sistema triangolare inferiore
6 % per la matrice dell'esercizio 25
7 n=length(x);
8 y=x;
9 y(1)=y(1)/4;
10 for i=2:n
11     y(i)=(y(i)+y(i-1))/4;
12 end
13 for i=9:n
14     y(i)=(y(i)+y(i-1))/4;
15 end
16 return

1 tol = 10^-8;
2 iter = zeros(50, 3);
3 for n = 10:10:500
4     b = ones(n,1);
5     iter(n/10,1) = n;
6     [x,i] = splitting(b, @matvec, @jacobi, tol);
7     iter(n/10,2) = i;
8     [x,i] = splitting(b, @matvec, @gaussSeidel, tol);
9     iter(n/10,3) = i;
10 end
11 figure
12 semilogy((10:10:500), iter(:,2));
13 legend('Jacobi interactions');
14 figure
15 semilogy((10:10:500), iter(:,3));
16 legend('GaussSeidel interactions');

```

