

TESINA DI AUTOMATICA

EVOLUZIONE DELLA CRESCITA DI UNA PIANTA

Sottogruppo I:

- Niccolò Pisciotta: niccolo.pisciotta@studenti.unipd.it
- Filippo Isoni: filippo.isoni@studenti.unipd.it
- Giada Helmi: giada.helmi@studenti.unipd.it
- Arianna Grandini: arianna.grandini@studenti.unipd.it

Sottogruppo II:

- Simone Tovo: simone.tovo.2@studenti.unipd.it
- Francesco Mosca: francesco.mosca.6@studenti.unipd.it
- Filippo Schiabel: filippo.schiabel@studenti.unipd.it
- Jessica Elena Serea: jessicaelena.serea@studenti.unipd.it

Problema

Si vuole studiare l'evoluzione in altezza di una pianta, in funzione di due variabili di stato (altezza e umidità del suolo) e di un ingresso (irrigazione fornita). Il sistema proposto è un sistema di equazioni differenziali non lineari che cerca di modellizzare il problema catturandone le dinamiche fondamentali e introducendo notevoli semplificazioni: variabili quali temperatura, intensità luminosa, specie vegetale, non vengono ad esempio considerati. Dopo aver evidenziato i limiti del modello, si procede alla formulazione del problema.

Un modello di stato (puramente teorico) per descrivere l'evoluzione in altezza di una generica pianta, che può raggiungere un'altezza massima H_{max} , è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_2 \left(1 - \frac{x_1}{H_{max}}\right) - k_2 x_1 \\ \dot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_4 x_1 x_2 + k_5 u \\ y = x_1 \end{cases}$$

- Variabili di Stato:
 - $x_1(t)$: Altezza della pianta (cm).
 - $x_2(t)$: Umidità del suolo (%).
- Ingresso $\rightarrow u(t)$: Portata d'acqua fornita (L/h).
- Uscita $\rightarrow y(t)$: Altezza della pianta (cm).

Il sistema è descritto dalle seguenti equazioni non lineari:

Crescita della pianta x_1 : proporzionale all'umidità del suolo x_2 , diminuisce man mano che l'altezza x_1 si avvicina al limite massimo H_{max} .

$$\dot{x}_1 = k_1 x_2 \left(1 - \frac{x_1}{H_{max}}\right) - k_2 x_1$$

- $k_1 = 0.0055 \frac{\text{cm}}{\% h}$: costante di crescita legata alla disponibilità di acqua.
- $k_2 = 0.001 \frac{1}{h}$: tasso di riduzione della crescita proporzionale all'altezza. All'aumentare della altezza la pianta ha bisogno di un maggior numero di risorse per crescere perciò si avvicina più lentamente alla H_{max} .
- H_{max} : altezza massima teorica della pianta.

Dinamica dell'umidità del suolo x_2 : si riduce per evaporazione ($-k_3 x_2$) e per il consumo idrico della pianta ($-k_4 x_1 x_2$), mentre aumenta grazie all'irrigazione controllata ($k_5 u$).

$$\dot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_4 x_1 x_2 + k_5 u$$

- $k_3 = \frac{0.2\%}{h}$: tasso di evaporazione naturale del suolo (proporzionale all'umidità stessa).
- $k_4 = \frac{0.01 \%}{h \text{ cm}}$: coefficiente di assorbimento idrico da parte della pianta, dipendente dall'altezza x_1 .
- $k_5 = \frac{1\%}{L}$: coefficiente che rappresenta l'effetto dell'irrigazione sull'umidità del suolo.

Ipotesi del modello:

1. Si suppone l'umidità dell'aria costante e che essa contribuisca marginalmente alla dinamica del sistema.
2. La crescita della pianta dipende direttamente dall'umidità del suolo, ma la pianta assorbe quantità d'acqua variabili in base alla sua altezza x_1 .

Semplificazione:

Per mantenere il sistema più semplice e gestibile dal punto di vista analitico e computazionale è ragionevole eliminare la dipendenza da x_2 nel termine $-k_4x_1x_2$. Questa modifica presuppone che il tasso di assorbimento dell'acqua da parte della pianta dipenda esclusivamente dall'altezza x_1 e non direttamente dall'umidità x_2 . In tal modo si riduce la complessità della relazione tra le variabili di stato. Con questa modifica, la nuova equazione della dinamica dell'umidità del suolo diventa.

$$\dot{x}_2 = -k_3x_2 - k_4x_1 + k_5u$$

Problema A

Considerando il modello di stato semplificato sopra indicato:

- 1. Determinare il punto di equilibrio.**

Si calcolino i punti di equilibrio corrispondenti a uscita di equilibrio $\bar{y} = 80\text{cm}$ dato $H_{max}= 100\text{ cm}$.

- 2. Linearizzazione del sistema**

Fissato il punto di equilibrio appena determinato:

- Si linearizzi il sistema attorno al punto di equilibrio.
- Si discuta la stabilità semplice e asintotica del sistema lineare ottenuto e del punto di equilibrio considerato.
- Si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema linearizzato e se ne discuta la BIBO stabilità.

- 3. Evoluzione del sistema allontanandosi dal punto di equilibrio**

Confrontare l'uscita del sistema linearizzato con quella originale, a seguito di una perturbazione delle condizioni iniziali (corrispondenti al punto di equilibrio), cioè un incremento del 5% dell'umidità del suolo (si intende un 5% relativo al valore di equilibrio calcolato, non un aumento del 5% in maniera assoluta). Spiegare i risultati alla luce dei punti precedenti.

Problema B

Si vuole regolare la temperatura in modo che raggiunga un valore che favorisca la crescita della pianta. Sapendo che la dinamica della temperatura nella serra è descritta da un sistema che è rappresentato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{5}{(600s + 1)}$$

Si progetti la funzione di trasferimento di un controllore PID che garantisca:

- A. Il sistema a catena chiusa sia di tipo 1
- B. $|e_r| \leq 0,1$, dove e_r è l'errore a regime in risposta a un riferimento $y_0(t)$ a rampa unitaria.
- C. $t_r \leq t_r^* := 30\text{ min}$, dove t_r è il tempo di salita della risposta indiciale del sistema a catena chiusa.

D. $M_p \leq M_p^* := 20\%$, dove M_p è la sovraelongazione della risposta indiciale del sistema a catena chiusa.

Risoluzione

Problema A

1. Determinare il punto di equilibrio.

Innanzitutto, vogliamo determinare i punti di equilibrio \bar{x}_1, \bar{x}_2 per cui $\bar{y} = 80\text{cm}$. Analizzando il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_2 \left(1 - \frac{x_1}{H_{max}}\right) - k_2 x_1 \\ \dot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_4 x_1 x_2 + k_5 u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Dalla terza equazione ricaviamo $\bar{x}_1 = y = 80\text{ cm}$. Sostituendo questo risultato ed isolando x_2 nella prima equazione otteniamo:

$$\bar{x}_2 = \frac{k_2 x_1}{k_1 \left(1 - \frac{x_1}{H_{max}}\right)} = 72,72\%$$

Infine, dalla seconda equazione possiamo trovare il valore dell'uscita di equilibrio:

$$\bar{u} = \frac{k_3 x_2 + k_4 x_1 x_2}{k_5} = 15,344\text{ cm}$$

2. Linearizzazione del sistema

- Procediamo a linearizzare il sistema attorno al punto di equilibrio. Sapendo che:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = A \delta_x + b \delta_u \\ \dot{\delta}_y = c \delta_x + d \delta_u \end{cases}$$

Dove A, b, C, d sono definiti nel seguente modo:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big| (\bar{x}, \bar{u}) \quad b = \frac{\partial f}{\partial u} \Big| (\bar{x}, \bar{u}) \quad c = \frac{\partial h}{\partial x} \Big| (\bar{x}, \bar{u}) \quad d = \frac{\partial h}{\partial u} \Big| (\bar{x}, \bar{u})$$

Otteniamo:

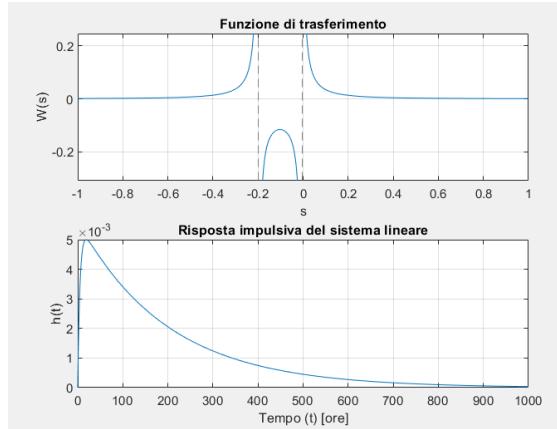
$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = \begin{bmatrix} -\frac{k_1 x_2}{H_{max}} - k_2 & k_1 \left(1 - \frac{x_1}{H_{max}}\right) \\ -k_4 & -k_3 \end{bmatrix} \delta_x + \begin{bmatrix} 0 \\ k_5 \end{bmatrix} \delta_u \\ \dot{\delta}_y = [1 \ 0] \delta_x + [0] \delta_u \end{cases}$$

- Sostituendo con i valori proposti dal problema, possiamo poi calcolare gli autovalori di A. Questo passaggio è stato svolto attraverso script MATLAB (riportato dopo la trattazione), dal quale abbiamo ottenuto due autovalori: $\lambda_1 = -0.0051$ e $\lambda_2 = -0.1999$. Entrambi gli autovalori sono a parte reale negativa, per cui possiamo affermare che il sistema linearizzato è asintoticamente e semplicemente stabile, e conseguentemente anche quello originario.

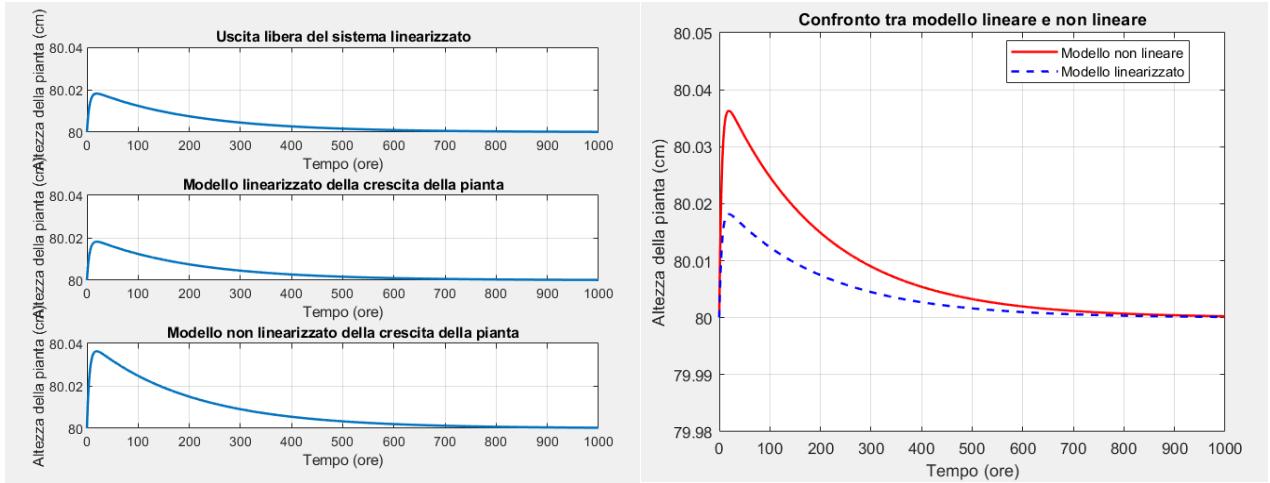
- La funzione di trasferimento $W(s)$ viene definita come: $W(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$. Svolgendo i calcoli, si ricava:

$$W(s) = \frac{1100}{1000000s^2 + 205000s + 1011}$$

Otteniamo conferma della BIBO stabilità della funzione di trasferimento, che avremmo potuto dedurre immediatamente dalla stabilità asintotica del punto di equilibrio. Infatti, si verifica attraverso il criterio di Cartesio che il denominatore è di Hurwitz. Vengono riportate di seguito i grafici in tempo e in frequenza della risposta impulsiva.



3. Questo punto è stato risolto simulando il sistema tramite script Matlab.



Confrontando l'uscita del modello linearizzato con quella del modello originario, a seguito di una perturbazione del 5% dell'umidità rispetto al punto di equilibrio, possiamo osservare che in entrambi il sistema ritorna al punto di equilibrio $\bar{y} = 80\text{cm}$. Questo comportamento è il risultato della stabilità asintotica del sistema.

Nelle fasi iniziali, subito dopo la perturbazione, si osserva una differenza tra le traiettorie dei due modelli: il modello non linearizzato, essendo una rappresentazione più veritiera del sistema, rappresenta in maniera più precisa le dinamiche del processo, incluse eventuali variazioni non lineari. Il modello linearizzato, invece, fornisce un'approssimazione valida solo in un intorno del punto di equilibrio. Con il passare del tempo, tuttavia, entrambe le uscite convergono verso lo stesso punto di equilibrio. Da quanto descritto si può dedurre che, nonostante le differenze iniziali, il modello linearizzato riesce a fornire una buona approssimazione del comportamento del sistema per perturbazioni relativamente piccole.

In conclusione, il modello non linearizzato è più accurato nel rappresentare le dinamiche del sistema reale, specialmente quando si è lontani dall'equilibrio, mentre il modello linearizzato si rivela uno strumento utile per analisi più semplici e predittive in prossimità del punto di equilibrio. Entrambi i modelli, comunque, riproducono la stabilità del sistema e la sua capacità di tornare all'equilibrio dopo una lieve perturbazione.

Script MATLAB

```

1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 %% Parametri iniziali
6 k1=0.0055; k2=0.001; k3=0.2; k4=0.01; k5=1; H=100; % Costanti
7 y0=80; % uscita di equilibrio
8 incr=0.05; % incremento percentuale dell'umidità
9
10 x1=y0; x2=k2*x1/(k1*(1-x1/H));
11 x=[x1 x2]; % Stato iniziale all'equilibrio: [altezza, umidità]
12 u=(k4*x1+k3*x2)/k5; % Ingresso iniziale (acqua fornita)
13
14 % Parametri del sistema lineare
15 A=[-k1*x2/H -k2 k1*(1-x1/H); -k4 -k3];
16 B=[0; k5];
17 C=[1 0];
18
19 % Calcolo degli autovalori del sistema lineare
20 eigenvalues=eig(A);
21
22 % Visualizza autovalori
23 fprintf('Autovalori del sistema lineare:\n');
24 disp(eigenvalues);
25
26
27 %% Funzione di trasferimento, risposta impulsiva, uscita
28 syms s t
29 W(s)=c*inv(s*eye(2)-A)*B; % Funzione di trasferimento
30 h(t)=ilaplace(W, s, t); % Risposta impulsiva
31
32 % Visualizza le espressioni
33 fprintf('Funzione di trasferimento W(s):\n');
34 disp(W);
35 fprintf('Risposta impulsiva h(t):\n');
36 disp(vpa(h));
37
38 % Grafici della funzione di trasferimento e della risposta impulsiva
39 figure;
40 subplot(211);
41 fplot(W, [-1, 1]);
42 grid on;
43 xlabel('s'); ylabel('W(s)');
44 title('Funzione di trasferimento');
45 subplot(212);
46 fplot(h, [0, 1000]);
47 grid on;
48 xlabel('Tempo (t) [ore]'); ylabel('h(t)');
49 title('Risposta impulsiva del sistema lineare');
50
51 % Calcolo uscita del sistema linearizzato
52 % Vogliamo calcolare l'evoluzione del sistema allontanandosi dal punto di
53 % equilibrio
54 x = [x1,(1+incr)*x2]; Dx = [0;incr*x2]; Du = 0;
55
56 % Poichè l'ingresso è costante, non c'è uscita forzata
57 Dy_l = C*expm(A.*t)*Dx;
58 y_an = simplify(Dy_l + y0); % Traslo del punto di equilibrio

```

```

59
60
61 %% Simulazioni
62 % Sempre per x = [x1,(1+incr)*x2]
63
64 % Tempo di simulazione
65 delt=0.01; % Passo temporale
66 time=0:delt:1000; % Intervallo temporale (ore)
67 N=length(time); % Numero di iterazioni
68
69 % Preallocazioni di memoria
70 y_nonlin=zeros(N, 1); Dy = zeros(N, 1);
71
72 % Modello linearizzato
73 for i = 1:N
74     dDx = A*Dx+B*Du;
75     Dx = Dx + dDx*delt;
76     Dy(i) = Dx(1);
77 end
78 y_lin = Dy + y0;
79
80 % Modello non linearizzato
81 for i = 1:N
82     dx1=k1*x(2)*(1-x(1)/H)-k2*x(1); % Dinamica altezza
83     dx2=-k3*x(2)-k4*x(1)+k5*u; % Dinamica umidità
84     dx=[dx1; dx2]; % Vettore dinamiche
85
86     % Aggiornamento dello stato
87     x=x+dx*delt;
88     y_nonlin(i)=x(1); % Salva l'altezza corrente
89 end
90
91 %% Grafici e confronto
92
93 figure
94 subplot(311)
95 fplot(y_an, [0,1000], 'LineWidth', 1.5)
96 grid on; ylim([80, 80.04]);
97 ylabel('Altezza della pianta (cm)'); xlabel('Tempo (ore)');
98 title('Uscita libera del sistema linearizzato');
99
100 subplot(312)
101 plot(time, y_lin, 'LineWidth', 1.5);
102 grid on; ylim([80, 80.04]);
103 xlabel('Tempo (ore)'); ylabel('Altezza della pianta (cm)');
104 title('Modello linearizzato della crescita della pianta');
105
106 subplot(313)
107 plot(time, y_nonlin, 'LineWidth', 1.5);
108 grid on;
109 xlabel('Tempo (ore)'); ylabel('Altezza della pianta (cm)');
110 title('Modello non linearizzato della crescita della pianta');
111
112
113 % Grafico comparativo
114 figure
115 plot(time, y_nonlin, 'r-', 'LineWidth', 1.5); hold on
116 plot(time, y_lin, 'b--', 'LineWidth', 1.5)
117 grid on;
118 legend('Modello non lineare', 'Modello linearizzato', 'Location', 'best');
119 ylim([79.98,80.05])
120 xlabel('Tempo (ore)'); ylabel('Altezza della pianta (cm)');
121 title('Confronto tra modello lineare e non lineare');
122
```

Problema B

La risoluzione del problema B consiste nell'utilizzare la sintesi di Bode per trovare la funzione di trasferimento di $C(s)$, considerando la funzione di trasferimento $G(s)$ già nota:

$$G(s) = \frac{5}{(600s + 1)}$$

Si vuole progettare $C(s)$ usando la sintesi di Bode in modo che:

A. Il sistema a catena chiusa sia di tipo 1

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Affinché il sistema sia di tipo 1 bisogna avere $K_I \neq 0$. Di conseguenza la specifica è soddisfatta per la presenza del polo in zero.

B. $|e_r| \leq 0,1$ dove e_r è l'errore a regime in risposta a un riferimento $y_0(t)$ a rampa unitaria.

$C(s)$ nella forma di Bode è:

$$C(s) = \frac{K_I}{s}(1 + T_I s + T_D \cdot T_I s^2)$$

Dunque, $H(s)$ risulta:

$$H(s) = G(s)C(s) = \frac{K_I}{s}(1 + T_I s + T_D \cdot T_I s^2)G(s) = \frac{K_I G(0)}{s}(1 + T_I s + T_D \cdot T_I s^2) \frac{G(s)}{G(0)}$$

Si definisce: $H_1(s) = s \cdot H(s)$

ed essendo il tipo uguale all'ordine del segnale di riferimento si ha:

$$e_r = \frac{1}{H_1(0)}$$

Con $H_1(0) = K_I G(0)$

Perciò $K_I = \frac{1}{e_r^* G(0)} = 2$

C. $t_r \leq t_r^* := 30$ min, dove t_r è il tempo di salita della risposta indiciale del sistema a catena chiusa.

D. $M_p \leq M_p^* := 20\%$, dove M_p è la sovraelongazione della risposta indiciale del sistema a catena chiusa.

Riscriviamo $H(s)$ come il prodotto tra una funzione di trasferimento nota $G_1(s) = \frac{K_I G(s)}{s}$ e una funzione di trasferimento da progettare $C_1(s) = 1 + T_I s + T_D \cdot T_I s^2$

Da C e D si ha:

$$w_A^* = \frac{2}{t_r^*} = 0.0667 \text{ rad/min}$$

$$m_\varphi \geq m_\varphi^* = 1.04 \cdot 0.8 M_p^* = 0.88 \text{ rad}$$

La pulsazione di attraversamento è la pulsazione per cui il diagramma di Bode del modulo della catena di azione diretta attraversa l'asse delle ascisse, cioè la pulsazione per cui

$$|H(jw_A^*)| = |G_1(jw_A^*)C_1(jw_A^*)| = 1$$

Dunque:

$$M = |C(jw_A^*)| = \frac{1}{|G_1(jw_A^*)|} = \frac{|jw_A^*| |(600jw_A^* + 1)|}{2 \cdot 5} = 0.2667$$

Inoltre, il margine di fase è definito nel seguente modo:

$$m_\varphi = \pi + \arg[H(jw_A^*)] = \pi + \arg[G_1(jw_A^*)C_1(jw_A^*)] \geq m_\varphi^*$$

Si trova:

$$\varphi = \arg[C_1(jw_A^*)] = m_\varphi^* - \pi - \arg[G_1(jw_A^*)] = 0.88 - \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan(600w_A^*) = 0.855 \text{ rad}$$

Per progettare il controllore si deve imporre: $C(jw_A^*) = 1 + T_I j w_A^* - T_D \cdot T_I w_A^{*2} = M e^{\varphi j}$.

$$T_I = \frac{1}{w_A^*} M \sin(\varphi) = 3.0192 \text{ min}$$

$$T_D = \frac{1}{w_A^*} \frac{1 - M \cos(\varphi)}{M \sin(\varphi)} = 61.477 \text{ min}$$

Si ottiene la seguente funzione di trasferimento del controllore:

$$C(s) = \frac{2}{s} (1 + 3.0192 s + 61.477 \cdot 3.0192 s^2) = \frac{371.22 s^2 + 6.0384 s + 2}{s}$$

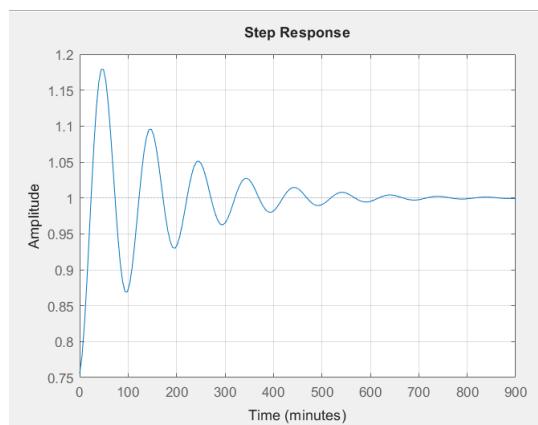
La funzione di trasferimento del relativo sistema a catena chiusa è:

$$W(s) = \frac{1856 s^2 + 30.19 s + 10}{2456 s^2 + 31.19 s + 10}$$

I valori effettivi del tempo di salita e della massima sovraelongazione della risposta indiciale del sistema a catena chiusa di funzione di trasferimento W(s) sono:

$$t_r = 16.1487 \text{ min} \quad M_p = 17.8916\%.$$

Il grafico della risposta indiciale del sistema a catena chiusa è:



Script MATLAB

```
1      clear all
2      close all
3      clc
4
5      %% Risoluzione del problema
6      % aumento tr e diminuisco Mp finchè le specifiche
7      % di partenza non sono soddisfatte
8
9      tr = 30;
10     wa = 2/tr;
11     Mp = 0.2;
12     mp = 1.04 - 0.8*Mp;
13     KI= 2;
14
15     M = 1/abs((5* KI)/(1j*wa*(1j*wa*600 + 1)));
16     phi = mp - pi + angle(1j*wa)+ angle(1j*wa*600+1);
17
18     TI = (M*sin(phi))/(wa);
19     TD = (1-M*cos(phi))/(M*sin(phi)*wa);
20
21     N= [KI*TI*TD*5 KI*TI*5 KI*5];
22     D= [600 1 0];
23     H= tf(N,D, 'TimeUnit', 'minutes');
24
25     W = feedback(H,1);
26
27     % Mostra i parametri della risposta indiciale
28     stepinfo(W,"SettlingTimeThreshold",0.01)
29
30     % Disegna la risposta indiciale
31     figure()
32     step(W)
33     savefig('compito4.fig')
34     grid
35
36     %% Visualizzo le funzioni di trasferimento
37
38     Nc=[KI*TI*TD KI*TI KI];
39     Dc= [1 0];
40     C= tf(Nc,Dc, 'TimeUnit', 'minutes')
41
42     Ng= [5];
43     Dg= [600 1];
44     G= tf(Ng,Dg, 'TimeUnit', 'minutes')
45
46     Nh= conv(Ng,Nc);
47     Dh= conv(Dg,Dc);
48     H= tf(Nh,Dh, 'TimeUnit', 'minutes')
49
50     W= feedback(H, 1);
51     W= tf(W)
```

Valutazioni

Il sottogruppo II ha affrontato il problema A in modo metodico e ha dimostrato una solida comprensione dei temi proposti. L'analisi è stata condotta in modo accurato, sono stati identificati i punti di equilibrio ed è stata discussa correttamente la stabilità del sistema.

Studiando l'evoluzione dell'uscita del sistema a seguito di una perturbazione dell'umidità dell'ambiente, si può notare una leggera diminuzione dell'altezza che può essere fisicamente giustificabile: la pianta si è adattata a un cambiamento, in questo caso alla variazione della disponibilità di acqua, che può portare ad una riduzione temporanea del turgore cellulare, con conseguente 'contrazione' dell'altezza della pianta, la quale risulta meno idratata e rigida.

Per quanto riguarda il problema B, la progettazione del sistema di controllo è stata eseguita tenendo conto delle specifiche di prestazione e l'uso di simulazioni numeriche ha permesso di validare i risultati ottenuti teoricamente, dunque la soluzione proposta risulta corretta.

La divisione del lavoro tra i membri del gruppo ha permesso di affrontare in modo efficiente le diverse fasi dei problemi, producendo una risoluzione chiara e ordinata, oltre che corretta.