

Laboratorio 2 – Sistemi Lineari

```
// Gruppo:  
// Dellepiane Emanuele - 4876072  
// Manini Filippo - 4798004  
// Miggiano Davide - 4840761
```

Esercizio 1

L'obiettivo del primo esercizio era calcolare la norma ∞ delle seguenti matrici:

$$\bullet \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A = P$, dove P è la matrice di Pascal $n \times n$ definita nel seguente modo:

$$(P)_{ij} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!} \quad i, j = 1, \dots, n \quad \text{con } n = 10$$

- $A = T$, dove T è la matrice tridiagonale $n \times n$ (n = numero di matricola) definita dalle seguenti formule:

$$\begin{aligned} (T)_{i,j} &= 2 \quad \text{se } i = j; \\ (T)_{i,j} &= -1 \quad \text{se } |i - j| = 1 \\ \text{altrimenti } (T)_{i,j} &= 0 \end{aligned}$$

Le norme matriciali hanno diverse proprietà:

- $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|aA\| = |a| \cdot \|A\| \quad \forall A, \forall a \in \mathbb{R}$
- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $\|A*B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

La norma infinito si calcola:

$$\|A\|_{\infty} := \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Norma Infinito delle diverse matrici proposte:

```
davide@davide:~/Uni/ALAN/2-Sistemi$ ./es1  
Scegliere di quali matrici calcolare la norma infinito:  
0-Termina  
1-Matrici inserite dall'utente  
2-Matrice di Pascal 10x10  
3-Matrice Tridiagonale nxn  
1  
  
-----  
Enter no. of rows: 4  
Enter no. of columns: 4  
Enter the values in the matrix:  
Enter A[1][1]: 3  
Enter A[1][2]: 1  
Enter A[1][3]: -1  
Enter A[1][4]: 0  
Enter A[2][1]: 0  
Enter A[2][2]: 7  
Enter A[2][3]: -3  
Enter A[2][4]: 0  
Enter A[3][1]: 0  
Enter A[3][2]: -3  
Enter A[3][3]: 9  
Enter A[3][4]: -2  
Enter A[4][1]: 0  
Enter A[4][2]: 0  
Enter A[4][3]: 4  
Enter A[4][4]: -110  
La norma infinito della matrice A e': 114
```

```
Scegliere di quali matrici calcolare la norma infinito:  
0-Termina  
1-Matrici inserite dall'utente  
2-Matrice di Pascal 10x10  
3-Matrice Tridiagonale nxn  
1  
  
-----  
Enter no. of rows: 4  
Enter no. of columns: 4  
Enter the values in the matrix:  
Enter A[1][1]: 2  
Enter A[1][2]: 4  
Enter A[1][3]: -2  
Enter A[1][4]: 0  
Enter A[2][1]: 1  
Enter A[2][2]: 3  
Enter A[2][3]: 0  
Enter A[2][4]: 1  
Enter A[3][1]: 3  
Enter A[3][2]: -1  
Enter A[3][3]: 1  
Enter A[3][4]: 2  
Enter A[4][1]: 0  
Enter A[4][2]: -1  
Enter A[4][3]: 2  
Enter A[4][4]: 1  
La norma infinito della matrice A e': 8
```

2

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

[illegible]

Esercizio 2

I calcoli vengono svolti in doppia precisione, in C++ linguaggio utilizzato per il programma, abbiamo utilizzato come variabili per gli elementi da calcolare i double.

Come da testo costruiamo le matrici definite al punto 1 con le appropriate funzioni che utilizzano la memoria dinamica.

Matrice A1:

3	1	-1	0
0	7	-3	0
0	-3	9	-2
0	0	4	-10

Matrice A2:

2	4	-2	0
1	3	0	1
3	-1	1	2
0	-1	2	1

Matrice Pascal:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

In matematica, in particolare nella teoria delle matrici e nella combinatoria, la matrice Pascal è una matrice infinita contenente i coefficienti binomiali come suoi elementi. Ci sono tre modi per ottenere questo risultato: come matrice triangolare superiore, matrice triangolare inferiore (matrici triangolari) o matrice simmetrica.

Da https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal_matrix

Un sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{cases}$$

La descrizione per utilizzare al meglio l'algoritmo è tramite una matrice che è proprio quello che abbiamo utilizzato per questo laboratorio

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

A questo punto abbiamo calcolato il prodotto dato dalla matrice $b = A \cdot x^-$ con il risultato abbiamo poi ricavato i **termini noti**

Calcolo termine noto matrice $A1 = 3 \ 4 \ 4 \ -6$

Calcolo termine noto matrice $A_2 = 4 \ 5 \ 5 \ 2$

Calcolo termine noto matrice Pascal = 10 55 220 715 2002 5005 11440 24310 48620 92378

Calcolo termine noto matrice Tridagonale =

```

- Soluzioni Gauss Matrice A1 -
x1 = 1 x2 = 1 x3 = 1 x4 = 1

- Soluzioni Gauss Matrice A2 -
x1 = 1 x2 = 1 x3 = 1 x4 = 1

- Soluzioni Gauss Matrice B -
x1 = 1 x2 = 1 x3 = 1 x4 = 1 x5 = 1 x6 = 1 x7 = 1 x8 = 1 x9 = 1 x10 = 1

- Soluzioni Gauss Matrice C -
x1 = 1 x2 = 1 x3 = 1 x4 = 1 x5 = 1 x6 = 1 x7 = 0.999999 x8 = 0.999999 x9 = 0.999999 x10 = 0.999999 x11 = 0.999999 x12 = 0.999999 x13 = 0.999999 x14 = 0.999999 x15 = 0.999999 x16 = 0.999999 x17
= 0.999999 x18 = 0.999999 x19 = 0.999999 x20 = 0.999999 x21 = 0.999999 x22 = 0.999999 x23 = 0.999999 x24 = 0.999999 x25 = 0.999999 x26 = 0.999999 x27 = 0.999999 x28 = 0.999999 x29 = 0.999999 x30 =
0.999999 x31 = 0.999999 x32 = 0.999999 x33 = 0.999999 x34 = 0.999999 x35 = 0.999999 x36 = 0.999999 x37 = 0.999999 x38 = 0.999999 x39 = 0.999999 x40 = 0.999999 x41 = 0.999999 x42 = 0.999998 x43 = 0.9
99998 x44 = 0.999998 x45 = 0.999998 x46 = 0.999998 x47 = 0.999998 x48 = 0.999998 x49 = 0.999998 x50 = 0.999998 x51 = 0.999998 x52 = 0.999998 x53 = 0.999998 x54 = 0.999999 x55 = 0.999999 x56 = 0.9999
99 x57 = 0.999999 x58 = 0.999999 x59 = 1 x60 = 1 x61 = 1 x62 = 1 x63 = 1 x64 = 1 x65 = 1 x66 = 1 x67 = 1 x68 = 1 x69 = 1 x70 = 1 x71 = 1
davide@davide:~/Uni/ALAN/Errors Sistemi/bin$

```

Scritto il programma di eliminazione Gaussiana per la risoluzione sistema $Ax = b$ tramite Gauss in doppia precisione (double), tenendo presente l'implementazione di una procedura applicabile anche su matrici di dimensioni arbitrarie tramite le funzioni subordinate che manipolano i dati in maniera dinamica.

Il metodo di eliminazione di Gauss è usato in algebra lineare per determinare le soluzioni di un sistema di equazioni lineari, per calcolare il rango o l'inversa di una matrice.

L'algoritmo, attraverso l'applicazione di operazioni elementari dette mosse di Gauss, riduce la matrice in una forma detta a scalini.

La matrice così ridotta permette il calcolo del rango della matrice (che sarà pari al numero di scalini/pivot) nonché la risoluzione del sistema lineare ad essa associato.

Da https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_di_eliminazione_di_Gauss

Esercizio 3

Usando le stesse matrici dell'esercizio 2 andiamo a risolvere il sistema lineare $A\tilde{x} = b + \delta b$

Dove δb è, per ogni termine noto b , il vettore di perturbazioni $\delta b = \|b\|_{\infty} * (-0.01, 0.01, -0.01, \dots, 0.01)^t$

Le soluzioni ottenute, che corrispondono ai rispettivi sistemi lineari con termine noto b e $b + \delta b$, sono:

```

- Soluzioni Gauss Matrice A1 -
x1 = 1
x2 = 1
x3 = 1
x4 = 1

- Soluzioni Gauss Matrice A1 Perturbata -
x1 = 0.924901
x2 = 0.871027
x3 = 0.68573
x4 = 0.664959

```

```

- Soluzioni Gauss Matrice A2 -
x1 = 1
x2 = 1
x3 = 1
x4 = 1

- Soluzioni Gauss Matrice A2 Perturbata -
x1 = -4.725
x2 = 5.42
x3 = 4.14
x4 = -4.51

```

- Soluzioni Gauss Matrice Pascal -

x1 = 1
x2 = 1
x3 = 1
x4 = 1
x5 = 1
x6 = 1
x7 = 1
x8 = 1
x9 = 1
x10 = 1

- Soluzioni Gauss Matrice Pascal Perturbata -

x1 = -69410.6
x2 = 604330
x3 = -2.454e+006
x4 = 5.89586e+006
x5 = -9.1713e+006
x6 = 9.55778e+006
x7 = -6.66797e+006
x8 = 3.00253e+006
x9 = -792020
x10 = 93301.8

- Soluzioni Gauss Matrice Tridiagonale -

x1 = 1	x26 = 0.999999	
x2 = 1	x27 = 0.999999	
x3 = 1	x28 = 0.999999	
x4 = 1	x29 = 0.999999	
x5 = 1	x30 = 0.999999	x51 = 0.999998
x6 = 1	x31 = 0.999999	x52 = 0.999998
x7 = 0.999999	x32 = 0.999999	x53 = 0.999998
x8 = 0.999999	x33 = 0.999999	x54 = 0.999999
x9 = 0.999999	x34 = 0.999999	x55 = 0.999999
x10 = 0.999999	x35 = 0.999999	x56 = 0.999999
x11 = 0.999999	x36 = 0.999999	x57 = 0.999999
x12 = 0.999999	x37 = 0.999999	x58 = 0.999999
x13 = 0.999999	x38 = 0.999999	x59 = 1
x14 = 0.999999	x39 = 0.999999	x60 = 1
x15 = 0.999999	x40 = 0.999999	x61 = 1
x16 = 0.999999	x41 = 0.999999	x62 = 1
x17 = 0.999999	x42 = 0.999998	x63 = 1
x18 = 0.999999	x43 = 0.999998	x64 = 1
x19 = 0.999999	x44 = 0.999998	x65 = 1
x20 = 0.999999	x45 = 0.999998	x66 = 1
x21 = 0.999999	x46 = 0.999998	x67 = 1
x22 = 0.999999	x47 = 0.999998	x68 = 1
x23 = 0.999999	x48 = 0.999998	x69 = 1
x24 = 0.999999	x49 = 0.999998	x70 = 1
x25 = 0.999999	x50 = 0.999998	x71 = 1

- Soluzioni Gauss Matrice Tridiagonale Perturbata -

x1 = 0.510751	x26 = 0.364221	
x2 = 0.0315027	x27 = 0.36823	
x3 = 0.0372541	x28 = 0.391868	
x4 = 0.0596722	x29 = 0.395864	
x5 = 0.0645902	x30 = 0.419514	x51 = 0.699864
x6 = 0.0875082	x31 = 0.423498	x52 = 0.723587
x7 = 0.092093	x32 = 0.447159	x53 = 0.727502
x8 = 0.115249	x33 = 0.451133	x54 = 0.751229
x9 = 0.119655	x34 = 0.474804	x55 = 0.755141
x10 = 0.14295	x35 = 0.478768	x56 = 0.778871
x11 = 0.147245	x36 = 0.502447	x57 = 0.782779
x12 = 0.170631	x37 = 0.506404	x58 = 0.806512
x13 = 0.17485	x38 = 0.530091	x59 = 0.810418
x14 = 0.198301	x39 = 0.534041	x60 = 0.834154
x15 = 0.202465	x40 = 0.557734	x61 = 0.838057
x16 = 0.225963	x41 = 0.561677	x62 = 0.861795
x17 = 0.230085	x42 = 0.585377	x63 = 0.865695
x18 = 0.25362	x43 = 0.589314	x64 = 0.889436
x19 = 0.25771	x44 = 0.613019	x65 = 0.893334
x20 = 0.281273	x45 = 0.616951	x66 = 0.917077
x21 = 0.285337	x46 = 0.640661	x67 = 0.920972
x22 = 0.308924	x47 = 0.644589	x68 = 0.944718
x23 = 0.312966	x48 = 0.668303	x69 = 0.948611
x24 = 0.336574	x49 = 0.672226	x70 = 0.972359
x25 = 0.340598	x50 = 0.695945	x71 = 0.97625