Filippo Manini Matricola: 4798004

Relazione Metodo Montecarlo per la stima della traccia di una matrice semidefinita positiva

TESTO:
Genera una matrice 300x300 B con B_{ij} campionato uniformemente nell'intervallo [0,1].
La matrice $A = B^T B$ è semidefinita positiva.
Calcola $||A||^2_F$ e Tr(A) dalle definizioni.
Usa *MonteCarloTrace* per stimare 100 volte Tr(A) con M=5,10,25 e 100.
Costruisci un istogramma con le stime ottenute e commenta il significato delle posizioni nell'istogramma occupate da Tr(A) e Tr(A) $\pm \sigma_M$ (usando per σ_M uno dei 100 valori calcolati per ogni M).
Confronta σ^2_M con $2\,||A||^2_F/M$.

ESECUZIONE:
g++ -std=c++17 MCTrace.cpp

FUNZIONAMENTO:
Si crea una matrice 300x300 vuota tramite la funzione *createMatrix(…)* e campionata uniformemente nell'intervallo [0,1] tramite la funzione *campionamento(…)*.

Creazione della matrice trasposta tramite la funzione *trasposta(…)* e si va poi a moltiplicare tramite la funzione *prodottoMatrix(…)* per la matrice di partenza cosi da ottenere la matrice A.

Si calcola la traccia della matrice A tramite la funzione *traccia(…)* basata sulla seguente formula:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})$$

quindi andando a sommare gli elementi della diagonale

Si calcola la norma di Frobenius $||A||^2_F$ tramite la funzione *normaFrobenius(...)* basata sulla seguente formula:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_{ir}^2}$$

dove la radice quadrata viene eliminata dal fatto che si eleva alla 2

```
----------------------------------
traccia Tr(A) matrice A  = 30024.7
matrice A norma di Frobenius (||A||_F)^2 = 509450412
----------------------------------
```

Si passa poi all’esecuzione della funzione MonteCarloTrace(…) basata sul seguente pseudocodice:

Input: $\mathbf{A}$, matrice $n \times n$ semi-definita positiva e M, numeri di campioni
Output: $\langle X \rangle_M$, stima di $\mathrm{Tr}(\mathbf{A})$ e σ_M^2, varianza campionaria della stima

---

$\bar{X}_0 = 0$
`for` $m = 1, \ldots, M$
1. campiona $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_n] \in \mathbb{R}^n$ vettore di Rademacher
2. ottieni $X_m = \mathbf{u}^\top \mathbf{A}\mathbf{u}$ dall’oracolo
3. $\langle X \rangle_m = \langle X \rangle_{m-1} + (X_m - \langle X \rangle_{m-1})/m$

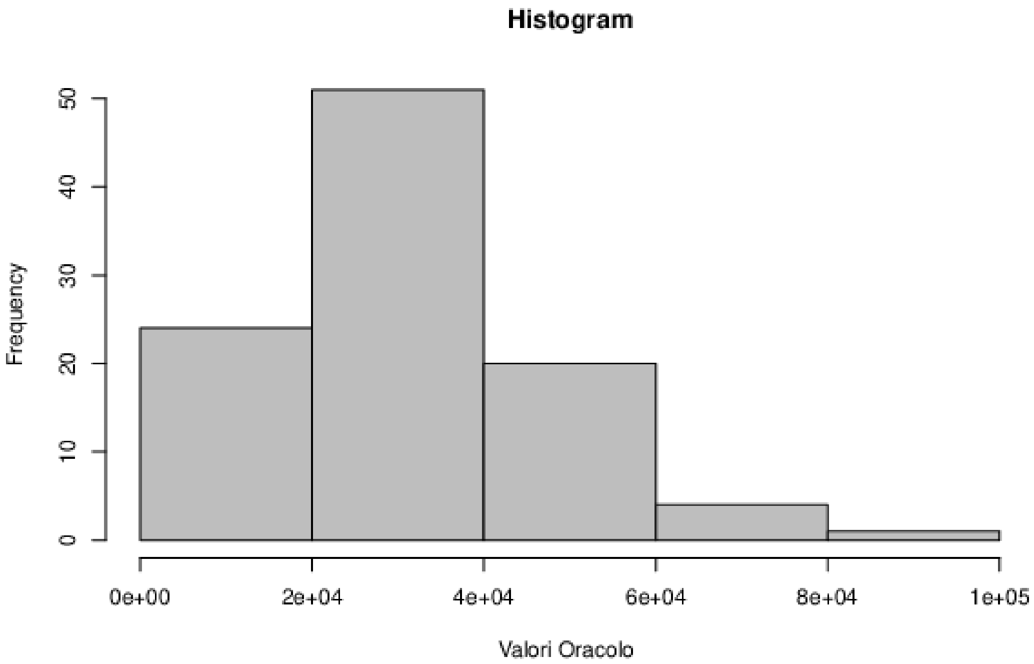
$\sigma_M^2 = \sum_{m=1}^{M} (X_m - \langle X \rangle_M)^2/(M-1)$

---

1. per ogni ciclo si va a campionare un vettore di Rademacher tramite le funzioni precedentemente presentate: *createMatrix(…)* e una apposita per il vettore *campionamentoRademacher(…)*.
   Il vettore di Rademacher è formato da valori nell'intervallo [-1,1]
2. otteniamo il valore dall’oracolo dato da $u^T Au$
3. sommiamo a x[m-1] la differenza tra il valore dell’oracolo in posizione corrente e quello precedente dividendo per m

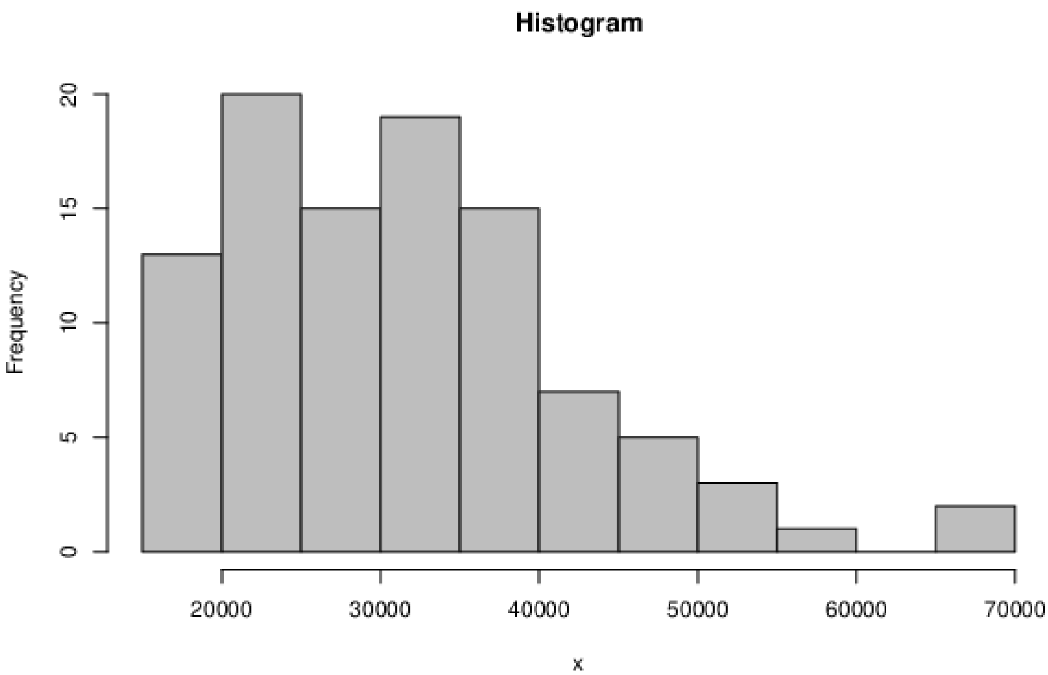
i valori per ogni run della stima di Tr(A) e varianza vengono poi salvati in appositi vector.

GRAFICI:
bin = M



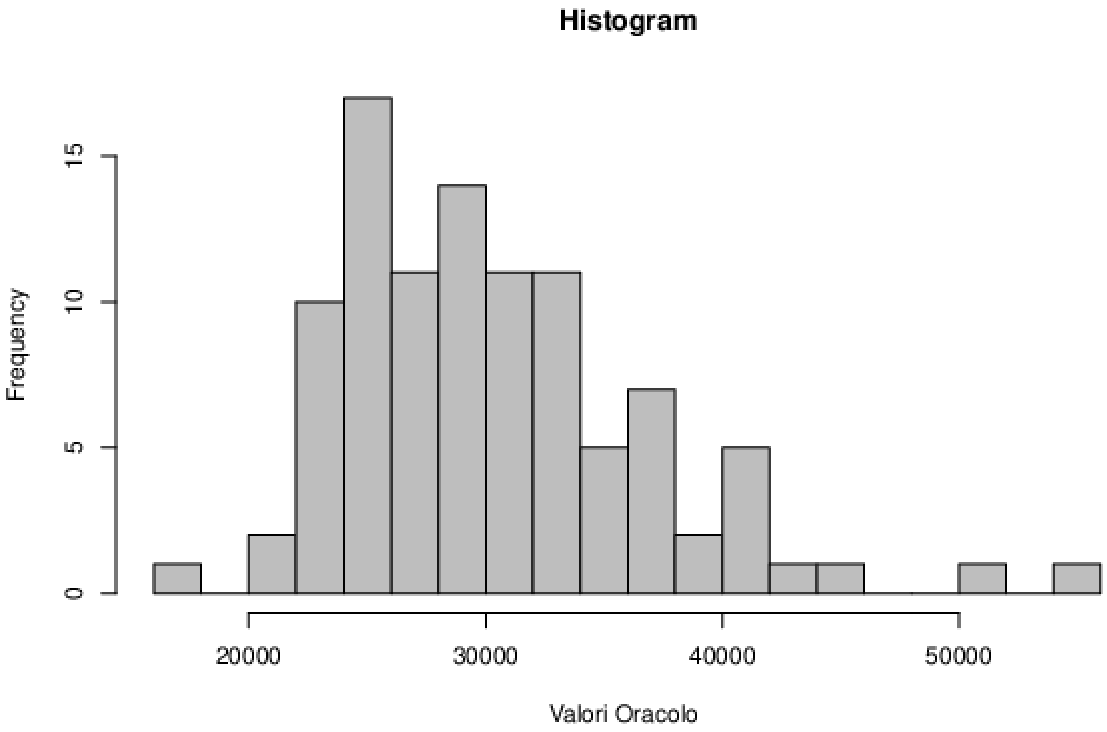

```
M = 5
stima di traccia Tr(A): 30909
79% dei valori della varianza e' <= 2*||A||/M
        2*||A||/M: 2.0378e+008
-----------------------------------
```

con valore σ_M = 29265.1



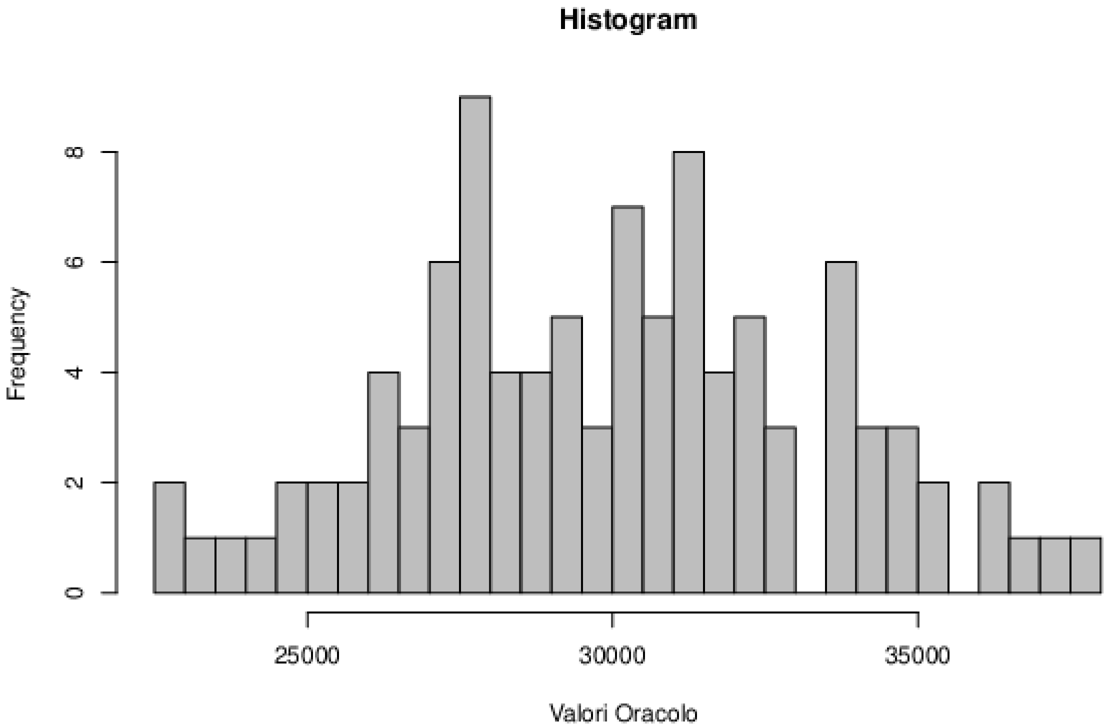

```
M = 10
stima di traccia Tr(A): 31466
81% dei valori della varianza e' <= 2*||A||/M
        2*||A||/M: 1.0189e+008
-----------------------------------
```

con valore σ_M = 27990.4




```
M = 25
stima di traccia Tr(A): 30270
87% dei valori della varianza e' <= 2*||A||/M
       2*||A||/M: 4.0756e+007
----------------------------------
```

con valore σ_M = 24438




```
M = 100
stima di traccia Tr(A): 29967
90% dei valori della varianza e' <= 2*||A||/M
       2*||A||/M: 1.0189e+007
----------------------------------
```

con valore σ_M = 22959

pero ogni M=5,10,25 e 100 Confronto σ^2_M con $2\,||A||^2_F/M$, seguendo la seguente disuguaglianza:

$$Var(\langle X\rangle_M) = \frac{4}{M}\sum_{i=1}^{n}\sum_{r\le i} A_{ir}^2 \le \frac{2}{M}\|\mathbf{A}\|_F^2 \quad \text{con} \quad \|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_{ir}^2}$$

ricordando che noi nella vita reale non possiamo utilizzare questa formula di varianza ma quella implementata e illustrata in precedenza.

Tenendo conto della legge dei grandi numeri al crescere di M la probabilità della stima della traccia ottenuta come media campionaria si discosti per più di ϵ dal valore vero diventa arbitrariamente piccola.
La disuguaglianza di Chebyshev evince che M dipende da $1/\epsilon^2$
Nel caso in cui la precisione fosse alta, il numero di M esperimenti potrebbe risultare molto grande.

Tramite i dati raccolti possiamo concludere che la precisione della stima della traccia Tr(A), $<X>_M$ cresce all'aumentare del numero M di esperimenti ed è controllata dal quadrato della norma di Frobenius della matrice.
Si nota anche che in questo caso la percentuale del numero di valori prodotti dal calcolo della varianza all'aumentare di M esperimenti, sempre più valori rispettano la disuguaglianza.