L'INDIPENDENZA DELLA MEDIA E VARIANZA CAMPIONARIE IN UNA DISTRIBUZIONE NORMALE, ATTRAVERSO DUE DISTINTE VIE: TEOREMA DI DALY E TEOREMA DI COCHRAN

FILIPPO MARIA MASI, 833659

1. Esercizio : dimostrare la proprietà della Normale

La distribuzione Normale ha una caratteristica che la distingue dalle altre distribuzioni note. Infatti considerando un vettore casuale $(X_1, X_2, ..., X_n)$ composto da variabili casuali indipendenti identicamente distribuite come una $N(0,1)$, la media campionaria di esse, definita come: $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, e la loro varianza campionaria: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$, sono indipendenti.

L'Esercizio della Relazione richiede la dimostrazione dell'indipendenza tra le due statistiche campionarie e troverà la soluzione attraverso l'impiego di due vie differenti.

Inizialmente verrà provata l'indipendenza grazie all'applicazione di `trasformazioni ortogonali` e del `teorema di Daly`; nella seconda soluzione, la prova è ottenuta dall'utilizzo di `forme quadratiche` e del `teorema di Cochran`.

2. Procedimenti e Soluzioni

2.1. **Primo Metodo.**

Come primo passo, si esibisce una definizione di distribuzione Normale Multivariata che servirà poi per dimostrare una sua proprietà importante.

Def NormaleMultivariata

Il vettore casuale n-dimensionale $\boldsymbol{X}$ *è normale se e solo se, per ogni vettore* $n-$*dimensionale* $\boldsymbol{a}$, *la variabile casuale (unidimensionale)* $\boldsymbol{a'X}$ *è normale.*

La notazione $\boldsymbol{X} \in N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ sarà usata nell'elaborato per denotare che $\boldsymbol{X}$ ha una distribuzione normale multivariata n-dimensionale con media $\boldsymbol{\mu}$ e varianza $\boldsymbol{\Sigma}$, con $n \in N$.

Ora si può procedere con il seguente teorema:

Theorem 2.1. *Sia* $\boldsymbol{X} \in N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *e* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{BX} + \boldsymbol{b}$,
allora $\boldsymbol{Y} \in N_n(\boldsymbol{B\mu} + b, \boldsymbol{B\Sigma B'})$.

Proof. Dalla definizione sopra esposta si nota che basta mostrare che $\boldsymbol{a'Y}$ sia normale $\forall \boldsymbol{a}$ vettore n-dimensionale.

$$\boldsymbol{a'Y} = \boldsymbol{a'BX} + \boldsymbol{a'b} = (\boldsymbol{B'a})'\boldsymbol{X} + \boldsymbol{a'b} = \boldsymbol{c'X} + d, \tag{2.1}$$

dove $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B'a}$ e $d = \boldsymbol{a'b}$. Dal momento che $\boldsymbol{c'X}$ è normale $\forall \boldsymbol{c}$ secondo la definizione, e d è una costante, ne consegue che $\boldsymbol{a'Y}$ è normale.

Infine:

$$E[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{B}E[\boldsymbol{X}] + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B\mu} + \boldsymbol{b},$$

e

Cov[$\boldsymbol{Y}$] = E[($\boldsymbol{Y}$ - E[$\boldsymbol{Y}$])($\boldsymbol{Y}$ - E[$\boldsymbol{Y}$])'] = E[$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})$'$\boldsymbol{B}$'] = $\boldsymbol{B}$ E[$(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})$'$\boldsymbol{B}$'] = $\boldsymbol{B\Lambda B'}$. (2.2)

□

Questo esito mostra che nell'applicare una trasformazione lineare ad un vettore normale, la normalità si mantiene.

Inoltre è possibile effettuare una trasformazione lineare ad un vettore normale in modo tale che il nuovo abbia componenti indipendenti. In particolare, qualsiasi trasformazione ortogonale di

Received by the editors 7/10/2020.
Relazione di Probabilità Applicata.

un vettore normale le cui componenti hanno varianza comune, produce un nuovo vettore casuale normale con componenti indipendenti. Come mostrato nel seguente risultato:

Theorem 2.2. *Sia* $\boldsymbol{X} \in N_n(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I})$*, dove* $\sigma^2 > 0$*, e sia* C *una matrice ortogonale. Si ponga* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CX}$*. Allora* $\boldsymbol{Y} \in N_n(C\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ *e* $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sono variabili casuali indipendenti.*

Proof. Dal Teorema 2.1 segue che $\boldsymbol{Y} \in N_n(\boldsymbol{C\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I})$.

Infatti per il Teorema, la matrice varianze covarianze è data dal prodotto matriciale tra $\boldsymbol{C}\sigma^2\boldsymbol{IC'}$, ma grazie all'ipotesi di ortogonalità di $\boldsymbol{C}$ si ha:

$$\sigma^2\boldsymbol{CIC'} = \sigma^2\boldsymbol{CC'} = \sigma^2\boldsymbol{I}.$$

Le componenti di $\boldsymbol{Y}$ risultano perciò Normali e incorrelate, condizione necessaria e sufficiente per la loro indipendenza. □

Quest'ultima proprietà dà il seguito al teorema che permette di dimostrare il risultato richiesto nell'esercizio:

Theorem 2.3 (Teorema di Daly)**.** *Sia* $\boldsymbol{X} \in N_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ *e sia* $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$*. Supponiamo che* $g(\boldsymbol{x})$ *sia una trasformazione invariante rispetto alla traslazione (cioè,* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$*,* $g(\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{1}) = g(\boldsymbol{x})$ *per ogni a), allora* $\bar{X}_n$ *e* $g(\boldsymbol{X})$ *sono indipendenti.*

Proof. Per procedere con un cambio di variabile, si definisce una matrice ortogonale $\boldsymbol{C}$ tale che la sua prima riga abbia tutti gli elementi uguali a $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Sia così $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CX}$. Per costruzione si ha $Y_1 = \sqrt{n}\cdot\bar{X}_n$, e per il teorema 2.2 $\boldsymbol{Y} \in N_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$. Inoltre considerando la partizione di $\boldsymbol{Y}$ nei due elementi (Y_1) e $(Y_2, Y_3, ..., Y_n)$ per il teorema, essi risultano indipendenti. L'invarianza della funzione $g(\cdot)$ alle traslazioni implica che essa stia nell'iperpiano $(n-1)$-dimensionale $x_1 + x_2 + ... + x_n = costante$ sul quale $\bar{X}_n$ è costante. Per questo motivo la funzione dipende solo dagli elementi $Y_2, Y_3, ..., Y_n$ e dunque è indipendente da Y_1 e di conseguenza anche da $\bar{X}_n$. □

2.1.1. *Prima Soluzione.* Riconsiderando il vettore casuale di componenti normali standard dell'esercizio, illustrato nella prima Sezione, si osservi che esso si distribuisce come una Normale n-dimensionale, di media il vettore nullo e come matrice varianze e covarianze l'identità, ovvero:

$$(X_1, X_2, ..., X_n) = \boldsymbol{X} \in N_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}).$$

Questo implica che ad esso si può applicare il Teorema di Daly ed affermare che: poichè la varianza campionaria è una funzione delle osservazioni invariante rispetto alla traslazione, essa è indipendente dalla media campionaria.

La tesi iniziale è stata provata e l'obbiettivo dell'esercizio raggiunto.

2.2. **Secondo Metodo.** Per ottenere il risultato desiderato con un secondo procedimento, si parte dalla seguente partizione:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 + n\bar{X}_n^{\ 2} \tag{2.3}$$

dove le X_i costituiscono le n variabili Normali presentate nella prima sezione e $\bar{X}_n$ la loro media campionaria.

Si noti che il primo addendo del lato destro della equazione 2.3 è uguale a $(n-1)S^2$ (dove S^2 è la loro varianza campionaria), per questo motivo è sufficiente mostrare l'indipendenza dei due addendi a destra dell'uguale per provare il risultato ricercato nell'esercizio.

Per procedere nel seguente modo è doveroso esibire il Teorema 2.4 utile per la dimostrazione del Teorema di Cochran.

Theorem 2.4. *Considerati* $x_1, x_2, ..., x_n$ *numeri reali, supponiamo che* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ *possa essere diviso in una somma di forme quadratiche definite non negative, cioè che:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = Q_1 + Q_2 + \ + Q_k,$$

dove $Q_i = \boldsymbol{x'A_ix}$ *e* $Rank(\boldsymbol{A}_i) = r_i$ *per* $i = 1, 2, ...k$. *Se* $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, *allora esiste una matrice ortogonale* $\boldsymbol{C}$ *tale che, con* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Cy}$, *abbiamo che:*

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{r_1}^2, \\
Q_2 &= y_{r_1+1}^2 + y_{r_1+2}^2 + \ + y_{r_1+r_2}^2, \\
&. \\
&. \\
&. \\
Q_k &= y_{n-r_k+1}^2 + y_{n-r_k+2}^2 + \ + y_n^2.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Dimostrazione. Se K = 2 si ha che:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \boldsymbol{x'A_1x} + \boldsymbol{x'A_2x} = (Q_1 + Q_2), \tag{2.5}$$

dove $\boldsymbol{A}_1$ e $\boldsymbol{A}_2$ sono matrici definite non negative con ranghi r_1 e r_2 rispettivamente e $r_1 + r_2 = n$ per ipotesi.

Poiché $\boldsymbol{A}_1$ è definita non negativa, esiste una matrice ortogonale $\boldsymbol{C}$ tale che $\boldsymbol{C'A_1C} = \boldsymbol{D}$, dove $\boldsymbol{D}$ è una matrice diagonale, con gli elementi sulla stessa diagonale $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ che sono gli autovalori di $\boldsymbol{A_1}$.

Poiché $rank(A_1) = r_1$, ci sono r_1 valori tra i λ positivi e $n - r_1$ valori nulli.

Supponiamo, senza limitazioni, che $\lambda_i > 0$ per $i = 1, 2, ..., r_1$ e che $\lambda_{r_1+1} = \lambda_{r_1+2} = ... = \lambda_n = 0$, e poniamo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Cy}$. Quindi:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i \cdot y_i^2 + \boldsymbol{y'C'A_2Cy}$$

O equivalentemente:

$$\sum_{i=1}^{r_1} (1 - \lambda_i) \cdot y_i^2 + \sum_{i=r_1+1}^{n} y_i^2 = \boldsymbol{y'C'A_2Cy}. \tag{2.6}$$

Poiché il rango del lato destro di 2.6 è $r_2 = n - r_1$, ne segue che $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{r_1} = 1$, il che dimostra:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{r_1} y_i^2 \ e \ Q_2 = \sum_{i=r_1+1}^{n} y_i^2 \tag{2.7}$$

□

Mostrato questo risultato, è dunque ora possibile provare il Teorema necessario per la prova dell'indipendenza ricercata nell'esercizio:

Theorem 2.5 (Teorema di Cochran)**.** *Siano* $X_1, X_2, ..., X_n$ *v.c. indipendenti e identicampente distribuite come* $N(0, \sigma^2)$ *e che* $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = Q_1 + Q_2 + \ + Q_k$,

dove $Q_1, ...Q_k$ *sono forme quadratiche definite non negative delle variabili* $X_1, ...X_n$, *tali che* $Q_i = \boldsymbol{X'AX}$, $i = 1, .., k$.

Sia poi $rank(\boldsymbol{A_i}) = r_i$, $i = 1, ..., k$.

Se $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$, *allora:*

(a)$Q_1, ...Q_k$ *sono indipendenti;*

(b)$Q_i \in \sigma^2\chi^2(r_i), i = 1, ..., k$.

Proof. Dal Teorema 2.4 segue che $\exists \boldsymbol{C}$, ortogonale, tale che $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ e valgano :

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_{r_1}^2, \\
Q_2 &= Y_{r_1+1}^2 + Y_{r_1+2}^2 + \;\; + Y_{r_1+r_2}^2, \\
&. \\
&. \\
&. \\
Q_k &= Y_{n-r_k+1}^2 + Y_{n-r_k+2}^2 + \;\; + Y_n^2.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Poichè dal Teorema 2.2 $Y_1, ..., Y_n$ sono indipendenti e distribuiti come una $N(0, \sigma^2)$ e, poichè ogni Y_j^2, con $j = 1, ..., n$, si presenta esattamente in una sola Q_i, con $i = 1, ..., k$, entrambe le tesi sono dimostrate. □

2.2.1. *Seconda soluzione.* Riconsiderando la partizione 2.3 delle v.c. iniziali, si noti che il primo elemento $A_1 = (n-1)S^2$ e il secondo $A_2 = n \cdot \bar{X}_n^2$ sono forme quadratiche la cui somma dà $\sum_{i=1}^n X_i^2$. Per il Teorema di Cochran A_1 e A_2 sono dunque indipendenti, e di conseguenza anche S^2 e $\bar{X}_n$.

La dimostrazione richiesta dall'esercizio è stata nuovamente provata, con utilizzo di tecniche diverse, l'obbiettivo è stato raggiunto. In più: $A_1 = (n-1)S^2 \in \sigma^2\chi^2(n-1)$, che si traduce nel seguente risultato molto rilevante a fini applicativi (vedi Sezione finale):

$$W = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \tag{2.9}$$

3. Applicazione risultato ottenuto

Il risultato ottenuto si rivela di grande importanza quando, da un campione $(X_1, ..., X_n)$ di v.c. indipendenti e identicamente distribuiti come una Normale con media μ e varianza σ^2 ignota, si vuole risolvere un test di verifica d'ipotesi sul valore atteso:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Infatti, dati gli stimatori S^2 e $\bar{X}$ per σ^2 e μ, grazie all'indipendenza provata, è possibile ottenere la seguente Statistica Test, che non dipende dall'ignota σ^2:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{W}}\sqrt{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \mid H_0 \sim t_{n-1}, \tag{3.1}$$

dove W è data dalla formula 2.9 e $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

Infine grazie alla T nell'equazione, si può ricavare anche un intervallo di confidenza per μ mediante i quantili della distribuzione T di student.

Relazione di Probabilità Applicata