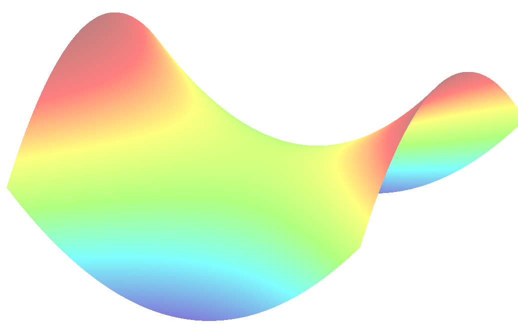
Appunti di Analisi Matematica II

corso della prof.ssa B.Noris

Politecnico di Milano



F. Piazza G. Michieletto

September 29, 2022

Chapter 1

Equazioni differenziali

1.1 Equazioni differenziali del 1° ordine

Definizione 1. *Una equazione differenziale o* EDO *del 1° ordine è una relazione tra una funzione y e la sua derivata y' che può essere scritta come*

$$y' = f(y) \tag{1.1}$$

dove f è una funzione continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Esempi:

- *Tema d'esame gennaio 2021*
  $y' = t\sqrt{y_{(t^2)} + 1}$ è in forma normale con $f(t, s) = t\sqrt{s^2 + 1}$. Il dominio di f è $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.
- $y'_{(t)} = \frac{1}{t}$ con $t > 0$ diventa $f(t, s) = \frac{1}{t}$. **Oss:** f non dipende esplicitamente da s.
  Il dominio di f è $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*\}$, dunque è diviso in due parti. Dovrò quindi risolvere la EDO separatamente nelle due regioni.

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{1}{t}, t > 0 \Rightarrow y(t) = ln(t) + c \\ y'(0) = \frac{1}{t}, t < 0 \Rightarrow y(t) = ln(-t) + c \end{cases}$$

Definizione 2. *Si chiama* integrale generale *l'insieme delle soluzioni.*

Definizione 3. *Si chiama* soluzione particolare *una specifica soluzione.*

Una EDO del 1° ordine ha ∞^1, soluzioni, cioè avrà una costante arbitraria. In modo analogo, una EDO del 2° ordine avrà ∞^2 soluzioni, cioè avrà due costanti arbitrarie. Esempi:

- integrale generale ce^t con c costante arbitraria. Esempi di soluzioni particolari: e^t, $2e^t$, $-e^t$.
- $z_{(t)} = -1 + arctan(t)$ con $t \in \mathbb{R}^*$. Esempio di soluzione: $z' = 0 + \frac{1}{1+t^2}$.

Oss: La EDO $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ è definita per $(t, y) \in dom(f)$

Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine

Definizione 4. *Una soluzione costante di una EDO del 1° ordine è una funzione $y(t)$ che sia soluzione.*

Quando $y(t) = c$ è soluzione? Sostituisco c a y:

$$y'(t) = f(t, y(t))\forall t \tag{1.2}$$

Quindi le soluzioni costanti sono $y(t) = c$ con c tale che $f(t, c) = 0 \forall t$.

Esempi:

- Eq. Logistica: $y'(t) = ky(t) - hy^2(t)$
  $f(t, y) = ky - hy^2$
  $f(t, c) = 0\forall t \quad ky - hy^2 = 0 = y(k - hy)$
  Soluzioni costanti: $y = 0$ o $y = \frac{k}{h}$
- $y'(t) = te^{y(t)} \quad te^{y(t)} = 0$ non ha soluzione.

EDO a variabili separabili

Definizione 5. *Una EDO del 1° ordine è detta* a variabili separabili *se è del tipo*

$$y' = f(t) \cdot g(y(t)) \tag{1.3}$$

dove f e g sono funzioni continue su intervalli $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Da integrare con gli appunti della professoressa.
Lezione del 14/09/2022

Problema di Cauchy

Definizione 6. *Data una EDO del 1° ordine* $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ *sia* (t_0, y_0) *dove la EDO è definita. Cioè* $(t_0, y_0) \in dom(f)$
Si chiama problema di Cauchy *il problema di determinare* $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *che soddisfa:*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: il sistema ha una condizione perché è del 1° ordine. La condizione trova la soluzione particolare che passa per (t_0, y_0).

Come si risolve?

Step:

1. Trova l'integrale generale. (∞^1 soluzioni dipendenti da 1 parametro)
2. Impongo la condizione $y(t_0) = y_0$ e la costante c
3. Sostituisco c in 1.

Esempi

Aggiungi Esempi

EDO 1° ordine lineari

Definizione 7. *Una EDO del 1° ordine lineare in forma normale è:*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)} + b(t) \tag{1.4}$$

dove a *e* b *sono funzioni continue su un intervallo* J *di* $\mathbb{R}$.
N.B. J *è il più grande intervallo di* $\mathbb{R}$ *tale che* $a, b \in J$.

Definizione 8. *Si chiama EDO omogenea associata*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)} \tag{1.5}$$

Esempio:
Aggiungi esempi

Principio di sovrapposizione

Sia $a : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su J.
L'applicazione $\mathcal{L}(y) = y' - a(t) \cdot y$ è lineare.

Più esplicitamente, dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:
$\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathcal{L}(y_1) + c_2\mathcal{L}(y_2) \forall y_1, y_2$ funzioni derivabili.

Ancora più esplicitamente: se $\mathcal{L}(y_1) = b_1$ cioè $y_1' = a(t)y_1 + b_1$
se $\mathcal{L}(y_2) = b_2$ cioè $y_2' = a(t)y_2 + b_2$
allora $\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1b_1 + c_2b_2$ cioè $y'_{(t)} = a(t)(c_1y_1 + c_2y_2) + c_1b_1 + c_2b_2$
cioè $(c_1y_1 + c_2y_2)' = a(t)(c_1y_1 + c_2y_2) + c_1b_1 + c_2b_2$
Oss:

- Prendo due soluzioni distinde della EDO
- $y' = a(t)y + b(t)$

Esistenza e unicità globale di Cauchy

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a, b : J \to \mathbb{R}$ continue.
Per ogni $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

ha una soluzione unica $y : J \to \mathbb{R}$ definita su J.
Aggiungi parte in blu lezione 16/09/2022

Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine

$a, b : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$
L'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} + \left(\int e^{-A(x)} b(x) dx + c \right) \quad \forall c \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a.

Dimostrazione 1. da sapere all'esame

- *Porto ay sulla sinistra*
  $y' - ay = b$
- *Moltiplico l'equazione per* e^{-A}
  $e^{-A}y' - e^{-A}ay = e^{-A}b$

- *Riconosco*
  $y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)} = \left(y(t)e^{-A(t)}\right)$
  Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:
  $(ye^{-A})' = be^{-A}$
- *Integro*
  $y(t)e^{-A(t)} = \int be^{-A(t)}dt + c$
- *Moltiplico tutto per* $e^{A(t)}$
  $y(t) = e^{A(t)} \left(\int be^{-A(t)}dt + c\right)$

Equazione di Bernoulli

Definizione 9. *Si chiamano* equazione di Bernoulli *le EDO del 1° ordine lineari di forma:*

$$y'_{(t)} = k(t)y_{(t)} + h(t)y^{\alpha}_{(t)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \tag{1.8}$$

con $k, y : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Premesse:

1. Per semplificare ci occupiamo solo di soluzioni $y \geq 0$
2. nel caso $\alpha < 1$ accadono fenomeni strani, però la tecnica risolutiva è comunque valida

Procedimento di risoluzione:

1. Cerchiamo le soluzioni costanti (c'è sempre almeno quella nulla)
2. divido per y^{α}
   $y'(t) = k(t)y(t) + h(t)$
   $y'(t) = k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)$
3. Pongo $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$
   Quale è l'equazione soddisfatta da z?
   $z'(t) = (1-\alpha)\left[k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)\right]$
   $z'(t) = (1-\alpha)\,k(t)z(t) + (1-\alpha)\,h(t)$
4. Risolvo l'equazione lineare in z
5. Torno alla variabile $y = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Equazione Logistica

$y(t) =$ numero di individui infetti al tempo t
$y : J \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

1° Modello: Malthus (inizio '800)
Il tasso di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

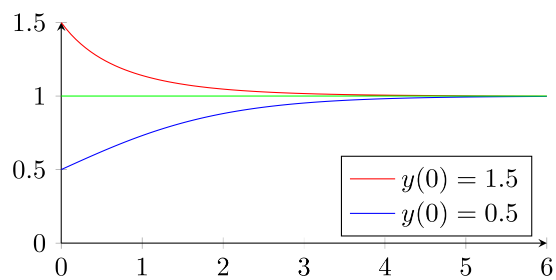
$$y'(t) = ky(t) \tag{1.9}$$

dove $k \in \mathbb{R}^+$ è la *tasso di crescita* e k è il coefficiente di proporzionalità, dato dalla differenza tra tasso di natalità e tasso di mortalità.
integrale generale: $y(t) = y(0)e^{kt}$con$c > 0$

2° Modello: Verhulst (metà '800)

$$y'(t) = ky(t) - hy(t)^2 \quad \text{con } k, h > 0 \tag{1.10}$$

Il modello prende anche in considerazione la competizione per le risorse al crescere della popolazione.
Simulazione numerica per $k = h = 1$



Integrale generale dell'Equazione Logistica
Trovo l'integrale generale risolvendo come Bernoulli

1. Soluzioni costanti $y(t) = 0, \quad y(t) = \frac{k}{h}$
2. Divido per y^2 : $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = \frac{k}{y(t)} - h$
3. Pongo $z'(t) = \frac{1}{y(t)} = -\frac{k}{y(t)} + h = -kz(t) + h$ ricavo che $z'(t) + kz(t) = h$
4. $z(t) = e^{-\int k}[\int e^{\int k} h dx + c]$

   $= e^{-kt}[h \int e^{kx} dx + c]$

   $= e^{-kt}[\frac{h}{k} e^{kt} + c]$

   $= \frac{\frac{h}{k} e^{kt} + c}{e^{kt}}$
5. $y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{e^{kt}}{\frac{h}{k} e^{kt} + c} = \frac{ke^{kt}}{he^{kt} + kc}$
   possiamo scrivere $kc = c'$ in quanto costante arbitraria

1.2 Equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine lineari

Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee

Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue e $a \neq 0$ in I.
L'integrale generale dell'eq. omogenea

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \tag{1.11}$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1} + c_2 y_{0_2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n \tag{1.12}$$

dove y_{0_1}, y_{0_2} sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Oss: Dire che due soluzioni sono linearmente indipendenti significa che non esiste un coefficiente c tale che $c \cdot y_1 = y_2$, ovvero che non sono una multipla dell'altra.
Premesse:

1. Spazio vettoriale $V = C^2(I)$
2. $I \subseteq \mathbb{R}$ funzione di 1 variabile $y(t)$
3. $C^2(I) = \{y : I \to \mathbb{R}$, derivabili in I e y' continua in $I\}$
4. $C^2(I) = \{y \in C^1(I)$, derivabili due volte in I con y'' continua in $I\}$
5. $C^2(I)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali di somma di funzioni e prodotto di funzione per uno scalare.

Dimostrazione 2. da sapere all'esame

- *L'integrale generale dell'omogenea è:*
  $W = \{y \in V : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0\}$
- *W è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow$ è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).*
- *Devo dimostrare che W ha dimensione 2.*

  i) Determinare 2 soluzioni lineari indipendenti dell'equazione y_{0_1}, y_{0_2}

  ii) Dimostrare che ogni soluzione y della EDO si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2}

  i) Scelgo y_{0_1} soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{cases} ay''_{0_1}(t) + by'_{0_1}(t) + cy_{0_1}(t) = 0 \\ y_{0_1}(0) = 1 \\ y'_{0_1}(0) = 0 \end{cases}$$

Verifico che y_{0_1}, y_{0_2} sono soluzioni lineari indipendenti. Se per assurdo fossero una multiplo dell'altra
$y_{0_1}(t) = \lambda y_{0_2}(t) \quad \forall t$
In particolare, per $t = 0$ avrei $y_{0_1}(0) = \lambda y_{0_2}(0)$ avrei trovato $1 = \lambda \cdot 0$ assurdo.

ii) Sia $y_0(t)$ soluzione dell'EDO, cerco $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t)$
$y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t) = c_1$
$y'_0(t) = c_1 y'_{0_1}(t) + c_2 y'_{0_2}(t) = c_2$

In conclusione la funzione:
$z(t) = y_0(0) \cdot y_{0_1}(t) + y'_0(0) \cdot y_{0_2}(t)$
risolve lo stesso problema di Cauchy di $y_0(t)$ e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:
$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$
cioè $y_0(t)$ si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2} con coefficienti $c_1 = y_0(0)$ e $c_2 = y'_0(0)$.

Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee

Siano $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ in I
L'integrale generale dell'eq. completa

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \tag{1.13}$$

è:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \tag{1.14}$$

dove la $y_0(t)$ è l'integrale dell'eq. omogenea, come nel teorema precedente, e la $y_p(t)$ è una soluzione particolare dell'eq. compleata.

Oss: L'integrale generale di una EDO del secondo ordine lineare non omogenea è quindi uno spazio affine (cioè il translato di uno spazio vettoriale) di dimensione 2.

Fine lezione 21/09 c'è una scritta in fondo in rosso che non so cosa sia.

1.3 Sistemi differenziali lineari