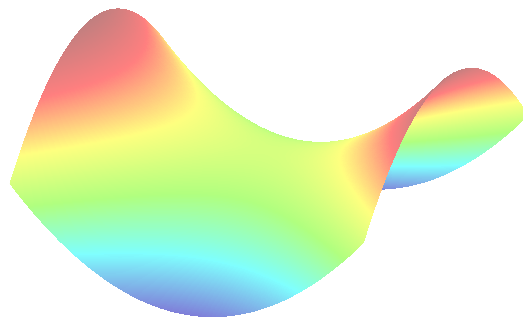


# Appunti di Analisi Matematica II

corso della prof.ssa B.Noris  
Politecnico di Milano



F. Piazza

G. Michieletto

5 ottobre 2022

Gli esami non finiscono mai, amico mio! Così è la vita.

- *Denis Ivanovič Fonvizin*

# Indice

<b>0</b>	<b>Cenni di Analisi I e Algebra Lineare</b>	<b>4</b>
0.1	Regole di integrazione e derivazione . . . . .	4
0.2	Serie numeriche . . . . .	4
0.3	Determinante di una matrice . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>5</b>
1.1	Equazioni differenziali del 1° ordine . . . . .	5
1.1.1	Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine . . . . .	6
1.1.2	EDO a variabili separabili . . . . .	6
1.1.3	Problema di Cauchy . . . . .	7
1.1.4	Come si risolve? . . . . .	7
1.1.5	EDO 1° ordine lineari . . . . .	7
1.1.6	Principio di sovrapposizione . . . . .	8
1.1.7	Esistenza e unicità globale di Cauchy . . . . .	8
1.1.8	Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine . . . . .	8
1.1.9	Equazione di Bernoulli . . . . .	9
1.1.10	Equazione Logistica . . . . .	10
1.2	EDO 2° ordine lineari . . . . .	12
1.2.1	Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee . . . . .	12
1.2.2	Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee . . . . .	13
1.3	Sistemi differenziali lineari . . . . .	14
1.3.1	Risultati teorici . . . . .	14
1.4	Sistemi non omogenei . . . . .	15
1.4.1	Struttura dell'int. gen. dei sistemi non omogenei . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Serie di funzioni</b>	<b>16</b>
2.1	Generalità sulle serie di funzioni . . . . .	16
2.1.1	Convergenza totale di una serie di funzioni . . . . .	17
2.1.1	Conseguenze della convergenza totale . . . . .	18
2.2	serie di potenze . . . . .	18
2.3	serie di Fourier . . . . .	20

# **0 Cenni di Analisi I e Algebra Lineare**

## **0.1 Regole di integrazione e derivazione**

prova

## **0.2 Serie numeriche**

## **0.3 Determinante di una matrice**

s

# 1 Equazioni differenziali

## 1.1 Equazioni differenziali del 1° ordine

**Definizione 1.** Una equazione differenziale o EDO del 1° ordine è una relazione tra una funzione  $y$  e la sua derivata  $y'$  che può essere scritta come

$$y' = f(y)$$

dove  $f$  è una funzione continua su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Esempi:

- Tema d'esame gennaio 2021  
 $y' = t\sqrt{y(t^2) + 1}$  è in forma normale con  $f(t, s) = t\sqrt{s^2 + 1}$ . Il dominio di  $f$  è  $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ .
- $y'_{(t)} = \frac{1}{t}$  con  $t > 0$  diventa  $f(t, s) = \frac{1}{t}$ . **Oss:**  $f$  non dipende esplicitamente da  $s$ . Il dominio di  $f$  è  $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*\}$ , dunque è diviso in due parti. Dovrò quindi risolvere la EDO separatamente nelle due regioni.

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t}, t > 0 \Rightarrow y(t) = \ln(t) + c \\ y'(t) = \frac{1}{t}, t < 0 \Rightarrow y(t) = \ln(-t) + c \end{cases}$$

**Definizione 2.** Si chiama integrale generale l'insieme delle soluzioni.

**Definizione 3.** Si chiama soluzione particolare una specifica soluzione.

Una EDO del 1° ordine ha  $\infty^1$  soluzioni, cioè avrà una costante arbitraria. In modo analogo, una EDO del 2° ordine avrà  $\infty^2$  soluzioni, cioè avrà due costanti arbitrarie.

Esempi:

- integrale generale  $ce^t$  con  $c$  costante arbitraria. Esempi di soluzioni particolari:  $e^t$ ,  $2e^t$ ,  $-e^t$ .
- $z_{(t)} = -1 + \arctan(t)$  con  $t \in \mathbb{R}^*$ . Esempio di soluzione:  $z' = 0 + \frac{1}{1+t^2}$ .

**Oss:** La EDO  $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$  è definita per  $(t, y) \in \text{dom}(f)$

### 1.1.1 Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine

**Definizione 4.** Una soluzione costante di una EDO del 1° ordine è una funzione  $y(t)$  che sia soluzione.

Quando  $y(t) = c$  è soluzione? Sostituisco  $c$  a  $y$ :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \forall t$$

Quindi le soluzioni costanti sono  $y(t) = c$  con  $c$  tale che  $f(t, c) = 0 \forall t$ .

Esempi:

- Eq. Logistica:  $y'(t) = ky(t) - hy^2(t)$   
 $f(t, y) = ky - hy^2$   
 $f(t, c) = 0 \forall t \quad ky - hy^2 = 0 = y(k - hy)$   
Soluzioni costanti:  $y = 0$  o  $y = \frac{k}{h}$
- $y'(t) = te^{y(t)} \quad te^{y(t)} = 0$  non ha soluzione.

### 1.1.2 EDO a variabili separabili

**Definizione 5.** Una EDO del 1° ordine è detta a variabili separabili se è del tipo

$$y' = f(t) \cdot g(y(t))$$

dove  $f$  e  $g$  sono funzioni continue su intervalli  $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$ .

**Esempio**  $y'(t) = \frac{1}{t} \quad h(t) = \frac{1}{t} \quad J_1 = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - 0$

### 1.1.3 Problema di Cauchy

**Definizione 6.** Data una EDO del 1° ordine  $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$  sia  $(t_0, y_0)$  dove la EDO è definita. Cioè  $(t_0, y_0) \in \text{dom}(f)$

Si chiama problema di Cauchy il problema di determinare  $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: il sistema ha una condizione perché è del 1° ordine. La condizione trova la soluzione particolare che passa per  $(t_0, y_0)$ .

### 1.1.4 Come si risolve?

Step:

1. Trova l'integrale generale. ( $\infty^1$  soluzioni dipendenti da 1 parametro)
2. Impongo la condizione  $y(t_0) = y_0$  e la costante  $c$
3. Sostituisco  $c$  in 1.

### Esempi

Aggiungi Esempi

### 1.1.5 EDO 1° ordine lineari

**Definizione 7.** Una EDO del 1° ordine lineare in forma normale è:

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)} + b(t)$$

dove  $a$  e  $b$  sono funzioni continue su un intervallo  $J$  di  $\mathbb{R}$ .

**N.B.**  $J$  è il più grande intervallo di  $\mathbb{R}$  tale che  $a, b \in J$ .

**Definizione 8.** Si chiama EDO omogenea associata

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)}$$

Esempio:

Aggiungi esempi

### 1.1.6 Principio di sovrapposizione

Sia  $a : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su  $J$ .

L'applicazione  $\mathcal{L}(y) = y' - a(t) \cdot y$  è lineare.

Più esplicitamente, dati  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ :

$\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathcal{L}(y_1) + c_2 \mathcal{L}(y_2) \forall y_1, y_2$  funzioni derivabili.

Ancora più esplicitamente: se  $\mathcal{L}(y_1) = b_1$  cioè  $y_1' = a(t)y_1 + b_1$

se  $\mathcal{L}(y_2) = b_2$  cioè  $y_2' = a(t)y_2 + b_2$

allora  $\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 b_1 + c_2 b_2$  cioè  $y_{(t)}' = a(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) + c_1 b_1 + c_2 b_2$

cioè  $(c_1 y_1 + c_2 y_2)' = a(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) + c_1 b_1 + c_2 b_2$

**Oss:**

- Prendo due soluzioni distinte della EDO
  - $y' = a(t)y + b(t)$
- 

### 1.1.7 Esistenza e unicità globale di Cauchy

Siano  $J \subseteq \mathbb{R}$  intervallo e  $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Per ogni  $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  definita su  $J$ .

**Aggiungi parte in blu lezione 16/09/2022**

---

### 1.1.8 Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine

$a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

L'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} + \left( \int e^{-A(x)} b(x) dx + c \right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

dove  $A(t)$  è una primitiva di  $a$ .

#### Dimostrazione 1. da sapere all'esame

- Porto  $ay$  sulla sinistra  
 $y' - ay = b$
- Moltiplico l'equazione per  $e^{-A}$   
 $e^{-A}y' - e^{-A}ay = e^{-A}b$



- *Riconosco*  
 $y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)} = (y(t)e^{-A(t)})'$   
 Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:  
 $(ye^{-A})' = be^{-A}$
- *Integro*  
 $y(t)e^{-A(t)} = \int be^{-A(t)} dt + c$
- *Moltiplico tutto per  $e^{A(t)}$*   
 $y(t) = e^{A(t)} \left( \int be^{-A(t)} dt + c \right)$

### 1.1.9 Equazione di Bernoulli

**Definizione 9.** Si chiamano equazione di Bernoulli le EDO del 1° ordine lineari di forma:

$$y'_{(t)} = k(t)y_{(t)} + h(t)y_{(t)}^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

con  $k, y : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

**Premesse:**

1. Per semplificare ci occupiamo solo di soluzioni  $y \geq 0$
2. nel caso  $\alpha < 1$  accadono fenomeni strani, però la tecnica risolutiva è comunque valida

Procedimento di risoluzione:

1. Cerchiamo le soluzioni costanti (c'è sempre almeno quella nulla)
2. divido per  $y^\alpha$   
 $y'(t) = k(t)y(t) + h(t)$   
 $y'(t) = k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)$
3. Pongo  $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$   
 Quale è l'equazione soddisfatta da  $z$ ?  
 $z'(t) = (1 - \alpha) [k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)]$   
 $z'(t) = (1 - \alpha) k(t)z(t) + (1 - \alpha) h(t)$
4. Risolvo l'equazione lineare in  $z$
5. Torno alla variabile  $y = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

### 1.1.10 Equazione Logistica

$y(t)$  = numero di individui infetti al tempo  $t$

$y : J \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

#### 1° Modello: Malthus (inizio '800)

Il tasso di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

$$y'(t) = ky(t)$$

dove  $k \in \mathbb{R}^+$  è la *tasso di crescita* e  $k$  è il coefficiente di proporzionalità, dato dalla differenza tra tasso di natalità e tasso di mortalità.

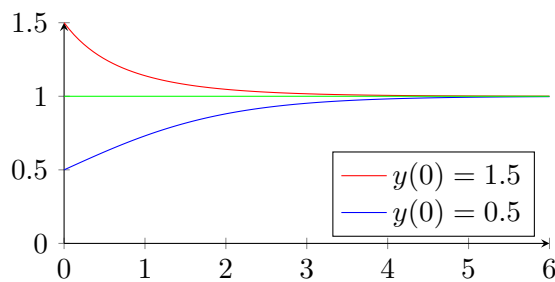
integrale generale:  $y(t) = y(0)e^{kt}$  con  $y(0) > 0$

#### 2° Modello: Verhulst (metà '800)

$$y'(t) = ky(t) - hy(t)^2 \quad \text{con } k, h > 0$$

Il modello prende anche in considerazione la competizione per le risorse al crescere della popolazione.

*Simulazione numerica per  $k = h = 1$*



### Integrale generale dell'Equazione Logistica

Trovo l'integrale generale risolvendo come Bernoulli

1. Soluzioni costanti  $y(t) = 0, \quad y(t) = \frac{k}{h}$

2. Divido per  $y^2$  :  $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = \frac{k}{y(t)} - h$

3. Pongo  $z'(t) = \frac{1}{y(t)} = -\frac{k}{y(t)} + h = -kz(t) + h$  ricavo che  $z'(t) + kz(t) = h$

4.  $z(t) = e^{-\int k} [\int e^{\int k} h dx + c]$

$$= e^{-kt} [h \int e^{kx} dx + c]$$

$$= e^{-kt} [\frac{h}{k} e^{kt} + c]$$

$$= \frac{\frac{h}{k} e^{kt} + c}{e^{kt}}$$

5.  $y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{e^{kt}}{\frac{h}{k} e^{kt} + c} = \frac{ke^{kt}}{he^{kt} + kc}$

possiamo scrivere  $kc = c'$  in quanto costante arbitraria

## 1.2 Equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine lineari

### 1.2.1 Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee

Siano  $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue e  $a \neq 0$  in  $I$ .

L'integrale generale dell'eq. omogenea

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = c_1 y_{01} + c_2 y_{02} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$$

dove  $y_{01}, y_{02}$  sono due soluzioni linearmente indipendenti.

*Oss:* Dire che due soluzioni sono linearmente indipendenti significa che non esiste un coefficiente  $c$  tale che  $c \cdot y_1 = y_2$ , ovvero che non sono una multipla dell'altra.

*Premesse:*

1. Spazio vettoriale  $V = C^2(I)$
2.  $I \subseteq \mathbb{R}$  funzione di 1 variabile  $y(t)$
3.  $C^2(I) = \{y : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{derivabili in } I \text{ e } y' \text{ continua in } I\}$
4.  $C^2(I) = \{y \in C^1(I), \text{derivabili due volte in } I \text{ con } y'' \text{ continua in } I\}$
5.  $C^2(I)$  è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali di somma di funzioni e prodotto di funzione per uno scalare.

#### Dimostrazione 2. da sapere all'esame

- *L'integrale generale dell'omogenea è:*  
 $W = \{y \in V : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0\}$
- *$W$  è un sottospazio vettoriale di  $V \Leftrightarrow$  è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).*
- *Devo dimostrare che  $W$  ha dimensione 2.*
  - i) *Determinare 2 soluzioni lineari indipendenti dell'equazione  $y_{01}, y_{02}$*
  - ii) *Dimostrare che ogni soluzione  $y$  della EDO si scrive come combinazione lineare di  $y_{01}, y_{02}$*

i) Scelgo  $y_{01}$  soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{cases} ay_{01}''(t) + by_{01}'(t) + cy_{01}(t) = 0 \\ y_{01}(0) = 1 \\ y_{01}'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifico che  $y_{01}, y_{02}$  sono soluzioni lineari indipendenti. Se per assurdo fossero una multiplo dell'altra

$$y_{01}(t) = \lambda y_{02}(t) \quad \forall t$$

In particolare, per  $t = 0$  avrei  $y_{01}(0) = \lambda y_{02}(0)$  avrei trovato  $1 = \lambda \cdot 0$  assurdo.

ii) Sia  $y_0(t)$  soluzione dell'EDO, cerco  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tali che  $y_0(t) = c_1 y_{01}(t) + c_2 y_{02}(t)$

$$y_0(t) = c_1 y_{01}(t) + c_2 y_{02}(t) = c_1$$

$$y_0'(t) = c_1 y_{01}'(t) + c_2 y_{02}'(t) = c_2$$

In conclusione la funzione:

$$z(t) = y_0(0) \cdot y_{01}(t) + y_0'(0) \cdot y_{02}(t)$$

risolve lo stesso problema di Cauchy di  $y_0(t)$  e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:

$$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$$

cioè  $y_0(t)$  si scrive come combinazione lineare di  $y_{01}, y_{02}$  con coefficienti  $c_1 = y_0(0)$  e  $c_2 = y_0'(0)$ .

### 1.2.2 Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee

Siano  $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $a \neq 0$  in  $I$

L'integrale generale dell'eq. completa

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

è:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

dove la  $y_0(t)$  è l'integrale dell'eq. omogenea, come nel teorema precedente, e la  $y_p(t)$  è una soluzione particolare dell'eq. completa.

Oss: L'integrale generale di una EDO del secondo ordine lineare non omogenea è quindi uno spazio affine (cioè il traslato di uno spazio vettoriale) di dimensione 2.

**Fine lezione 21/09 c'è una scritta in fondo in rosso che non so cosa sia.**

## 1.3 Sistemi differenziali lineari

Esempio introduttivo  $F = ma$

$$y''(t) = \frac{F}{m}$$

Trasformo in un sistema di due equazioni differenziali di primo ordine:

$y_1(t) = y(t)$ : posizione e  $y_2(t) = y'(t) = y'_1(t)$ : velocità.

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) & \text{la velocità è la derivata della posizione} \\ y'_2(t) = \frac{F}{m} & \text{l'accelerazione è la derivata della velocità} \end{cases}$$

In forma matriciale:

*E mo come la disegno?*

...

In forma compatta:  $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}$$

Esercizi:

*Esercizi qua*

**Definizione 10.** Sistema differenziale lineare è un sistema di equazioni differenziali di primo ordine con coefficienti costanti, cioè:

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$

dove  $A$  è una matrice quadrata di ordine  $n$  e  $\underline{b}$  è un vettore di dimensione  $n$ .

### 1.3.1 Risultati teorici

Come si scrive un problema di Cauchy per un sistema?

*Esempio:*  $y''(t) - 2y'(t) = t$  con  $y(0) = y_0$  e  $y'(0) = v_0$

Trasformo la EDO in sistema

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) \\ y'_2(t) = 2y_2(t) + t \end{cases}$$

Un problema di Cauchy è

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_0 \\ y_2(t_0) &= v_0 \end{aligned} \quad \underline{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

**Definizione 11.** Dato  $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$  con  $A$  matrice quadrata di ordine  $n$  e  $\underline{b}$  vettore di dimensione  $n$  chiamiamo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = A \cdot \underline{y}(t) + \underline{b}(t) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

### *Esempi*

---

*C'è una pagina che non so se è spiegazione o esercizi, ci sono parti scritte in LaTeX e altre a mano.*

\*

\*

*Prosegue poi con i sistemi omogenei.*

---

## 1.4 Sistemi non omogenei

### 1.4.1 Struttura dell'int. gen. dei sistemi non omogenei

*Manca la definizione.*

Praticamente, per risolvere un sistema non omogeneo:

1. Si risolve il sistema omogeneo associato. Cioè determino una matrice Wronskiana  $W(t) = [y_{01}(t) \dots y_{0n}(t)]$   
Integrale generale:  $\underline{y}(t) = W(t) \cdot \underline{c}$ ,  $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$
2. Due possibilità:

- cerco una soluzione particolare con il metodo di somiglianza

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_0(t) + \underline{y}_p(t) = W(t) \cdot \underline{c} + \underline{y}_p(t)$$

- uso  $W(t)$  per trovare direttamente l'integrale generale tramite la formula:

$$\underline{y}(t) = W(t) \left( \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau \right) = W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + W(t) \cdot \underline{c}$$

Confronto le due soluzioni.

Nella prima ho  $W(t) \cdot \underline{c}$  e anche nella seconda, ed è l'integrale generale dell'omogenea.

Quindi  $\underline{y}_p(t) = \underline{y}(t) - W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau$  perché è ciò che resta da uguagliare.

In particolare, se  $A$  è diagonalizzabile reale, allora una matrice Wronskiana è  $W(t) = e^{At}$

$$\underline{y}(t) = e^{At} \left[ \int e^{-At} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + \underline{c} \right]$$

*Osservazioni da aggiungere.*

*Esempio da aggiungere.*

## 2 Serie di funzioni

### 2.1 Generalità sulle serie di funzioni

Esempio: Sviluppi di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

#### **Definizione 12.**

Date delle funzioni  $f : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad n = (0, 1, 2, \dots)$

- La serie di funzioni a termine generale  $f_n(x)$  è la successione delle somme parziali

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Oss: Fissato  $\bar{x} \in J$  si tratta di una serie numerica

- La serie di funzioni converge puntualmente (o semplicemente) nel punto  $\bar{x}_0 \in J$  se la serie numerica di termini generale  $f_n(\bar{x})$  è convergente, cioè se esiste finito il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\bar{x})$$

- Chiamiamo insieme di convergenza puntuale (o semplice) l'insieme  $E \subseteq J$  dei punti  $\bar{x}_0$  in cui la serie di funzioni converge puntualmente.

Nell'insieme  $E$  risulta così definita una nuova funzione, detta somma della serie, che si indica con il simbolo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in E)$$

Significa:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \quad (x \in E)$$

- La serie di funzioni converge assolutamente in  $\bar{x} \in J$  se la serie numerica di termine generale  $f_n(\bar{x})$  converge.

Oss: la convergenza assoluta...

Esempio fondamentale: Serie geometrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$



Oss. Servirà per la serie di potenze:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$   
 insieme convergenza puntuale  $E = (-1, 1) = \{|x| < 1\}$   
 Per  $x \leq -1$  è indeterminata  
 per  $x \geq 1$  è divergente  
 per ...

### Serie di Riemann

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x} = \left(\frac{1}{n}\right)^x$  L'insieme di convergenza puntuale è:  
 $E = (1, \infty) = \{x > 1\}$

La convergenza è anche assoluta in  $E$  perché per  $x \in E \quad |f_n(x)| = f_n(x)$

Se  $x = 1$  è la serie armonica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  che diverge.

---

*Problema:* se le funzioni  $f_n$  sono continue, anche  $f$  lo è? **Segue...**

## 2.1.1 Convergenza totale di una serie di funzioni

*copiare appunti della prof, formule e grafici*

### Definizione 13. Importante

Diciamo che la serie di termine generale  $f_n(x), x \in J$  converge totale in  $I \in J$  se esiste una successione numerica  $a_n$  tale che:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - a_n| = 0 \quad \forall x \in I \quad \forall n$$

$$ii) \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

Oss:

- La nozione di convergenza totale riguarda un intervallo, mai un punto.
- La convergenza totale in  $I$  implica la convergenza assoluta (quindi anche puntuale) in ogni punto di  $I$ .
- **Attenzione:** non vale il viceversa: se una serie converge assolutamente in ogni punto di  $I$  non è detto che converga totalmente in  $I$ .

## inizio lezione 05/10/2022

Oss: Se una serie di funzioni converge totalmente in  $I$  allora converge totalmente in ogni sottoinsieme di  $I$ .

**Esercizio:** Studiare la convergenza totale della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

**Esercizio:** Studiare la convergenza totale della serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

*Appunti su convergenza semplice, assoluta, puntuale, e totale*

### 2.1.1 Conseguenze della convergenza totale

**Definizione 14.** *Continuità della somma*

Siano  $f_n(x)$  funzioni definite su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Se:

- i)  $f_n(x)$  è continua in  $I$  per ogni  $n$
- ii) la serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  converge totalmente in  $I$

Allora la funzione somma  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  è continua in  $I$ .

Oss: in particolare,  $f$  è integrabile in ogni sottoinsieme chiuso e limitato  $[c, d] \subseteq I$

**Definizione 15.** *Integrabilità termine a termine* Nelle stesse ipotesi del teorema precedente  $f$  è integrabile in ogni  $[c, d] \subseteq I$  chiuso e limitato e inoltre:

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d \left( \sum_{n=0}^{\infty} \int_c^d f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_c^d f_n(x) dx \right)$$

Quindi posso scambiare il simbolo di serie e quello di integrale.

Oss: Se  $f_n$  derivabili in  $I$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$  converge totalmente in  $I$  allora  $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$

## 2.2 serie di potenze

**Definizione 16.** *Una serie di potenze è una serie di funzioni della forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Con  $a_n \in \mathbb{R}$  coefficienti della serie

$x_0 \in \mathbb{R}$  centro della serie

*Convenzione:* se  $x = x_0$  e  $n = 0$   $(x_0 - x_0)^0 = 1$ . Quindi, per  $x = x_0$  la serie di potenze diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_0)^n = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)^2 + \cdots = a_0$$

Cioè tutte le serie di potenze convergono almeno nel loro centro  $x = x_0$ .

**fine lezione 05/10/2022**

## 2.3 serie di Fourier