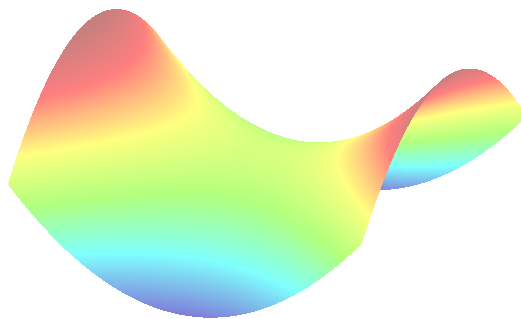


Appunti di Analisi Matematica II  
corso della prof.ssa B.Noris  
Politecnico di Milano



F. Piazza      G. Michieletto

September 29, 2022



# Chapter 1

## Equazioni differenziali

### 1.1 Equazioni differenziali del 1° ordine

**Definizione 1.** Una equazione differenziale o EDO del 1° ordine è una relazione tra una funzione  $y$  e la sua derivata  $y'$  che può essere scritta come

$$y' = f(y) \quad (1.1)$$

dove  $f$  è una funzione continua su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Esempi:

- Tema d'esame gennaio 2021  
 $y' = t\sqrt{y(t^2) + 1}$  è in forma normale con  $f(t, s) = t\sqrt{s^2 + 1}$ . Il dominio di  $f$  è  $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ .
- $y'_{(t)} = \frac{1}{t}$  con  $t > 0$  diventa  $f(t, s) = \frac{1}{t}$ . **Oss:**  $f$  non dipende esplicitamente da  $s$ .  
Il dominio di  $f$  è  $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*\}$ , dunque è diviso in due parti. Dovrò quindi risolvere la EDO separatamente nelle due regioni.

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{1}{t}, t > 0 \Rightarrow y(t) = \ln(t) + c \\ y'(0) = \frac{1}{t}, t < 0 \Rightarrow y(t) = \ln(-t) + c \end{cases}$$

---

**Definizione 2.** Si chiama integrale generale l'insieme delle soluzioni.

**Definizione 3.** Si chiama soluzione particolare una specifica soluzione.

Una EDO del 1° ordine ha  $\infty^1$  soluzioni, cioè avrà una costante arbitraria. In modo analogo, una EDO del 2° ordine avrà  $\infty^2$  soluzioni, cioè avrà due costanti arbitrarie. Esempi:

- integrale generale  $ce^t$  con  $c$  costante arbitraria. Esempi di soluzioni particolari:  $e^t, 2e^t, -e^t$ .
- $z_{(t)} = -1 + \arctan(t)$  con  $t \in \mathbb{R}^*$ . Esempio di soluzione:  $z' = 0 + \frac{1}{1+t^2}$ .

**Oss:** La EDO  $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$  è definita per  $(t, y) \in \text{dom}(f)$

## Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine

**Definizione 4.** Una soluzione costante di una EDO del 1° ordine è una funzione  $y(t)$  che sia soluzione.

Quando  $y(t) = c$  è soluzione? Sostituisco  $c$  a  $y$ :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \forall t \quad (1.2)$$

Quindi le soluzioni costanti sono  $y(t) = c$  con  $c$  tale che  $f(t, c) = 0 \forall t$ .

Esempi:

- Eq. Logistica:  $y'(t) = ky(t) - hy^2(t)$   
 $f(t, y) = ky - hy^2$   
 $f(t, c) = 0 \forall t \quad ky - hy^2 = 0 = y(k - hy)$   
 Soluzioni costanti:  $y = 0$  o  $y = \frac{k}{h}$
- $y'(t) = te^{y(t)} \quad te^{y(t)} = 0$  non ha soluzione.

## EDO a variabili separabili

**Definizione 5.** Una EDO del 1° ordine è detta a variabili separabili se è del tipo

$$y' = f(t) \cdot g(y(t)) \quad (1.3)$$

dove  $f$  e  $g$  sono funzioni continue su intervalli  $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$ .

**Da integrare con gli appunti della professoressa.  
Lezione del 14/09/2022**

## Problema di Cauchy

**Definizione 6.** Data una EDO del 1° ordine  $y'(t) = f(t, y(t))$  sia  $(t_0, y_0)$  dove la EDO è definita. Cioè  $(t_0, y_0) \in \text{dom}(f)$   
 Si chiama problema di Cauchy il problema di determinare  $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: il sistema ha una condizione perché è del 1° ordine. La condizione trova la soluzione particolare che passa per  $(t_0, y_0)$ .

## Come si risolve?

Step:

1. Trova l'integrale generale. ( $\infty^1$  soluzioni dipendenti da 1 parametro)
2. Impongo la condizione  $y(t_0) = y_0$  e la costante  $c$
3. Sostituisco  $c$  in 1.

**Esempi**

Aggiungi Esempi

---

**EDO 1° ordine lineari**

**Definizione 7.** Una EDO del 1° ordine lineare in forma normale è:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad (1.4)$$

dove  $a$  e  $b$  sono funzioni continue su un intervallo  $J$  di  $\mathbb{R}$ .

**N.B.**  $J$  è il più grande intervallo di  $\mathbb{R}$  tale che  $a, b \in J$ .

**Definizione 8.** Si chiama EDO omogenea associata

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (1.5)$$

Esempio:

Aggiungi esempi

---

**Principio di sovrapposizione**

Sia  $a : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su  $J$ .

L'applicazione  $\mathcal{L}(y) = y' - a(t) \cdot y$  è lineare.

Più esplicitamente, dati  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ :

$\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathcal{L}(y_1) + c_2\mathcal{L}(y_2) \forall y_1, y_2$  funzioni derivabili.

Ancora più esplicitamente: se  $\mathcal{L}(y_1) = b_1$  cioè  $y'_1 = a(t)y_1 + b_1$

se  $\mathcal{L}(y_2) = b_2$  cioè  $y'_2 = a(t)y_2 + b_2$

allora  $\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1b_1 + c_2b_2$  cioè  $y'_{(t)} = a(t)(c_1y_1 + c_2y_2) + c_1b_1 + c_2b_2$

cioè  $(c_1y_1 + c_2y_2)' = a(t)(c_1y_1 + c_2y_2) + c_1b_1 + c_2b_2$

**Oss:**

- Prendo due soluzioni distinte della EDO **Recupera le osservazioni**
- 

**Esistenza e unicità globale di Cauchy**

Siano  $J \subseteq \mathbb{R}$  intervallo e  $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Per ogni  $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

ha una soluzione unica  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  definita su  $J$ .

**Aggiungi parte in blu lezione 16/09/2022**

---

**Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine**

$$a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

L'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} + \left( \int e^{-A(x)} b(x) dx + c \right) \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

dove  $A(t)$  è una primitiva di  $a$ .

**Dim. 1 - da sapere all'esame**

- Porto  $ay$  sulla sinistra

$$y' - ay = b$$

- Moltiplico l'equazione per  $e^{-A}$

$$e^{-A}y' - e^{-A}ay = e^{-A}b$$

- Riconosco

$$y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)} = (y(t)e^{-A(t)})'$$

Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:

$$(ye^{-A})' = be^{-A}$$

- Integro

$$y(t)e^{-A(t)} = \int be^{-A(t)} dt + c$$

- Moltiplico tutto per  $e^{A(t)}$

$$y(t) = e^{A(t)} \left( \int be^{-A(t)} dt + c \right)$$


---

**Equazione di Bernoulli**

**Definizione 9.** Si chiamano equazione di Bernoulli le EDO del 1° ordine lineari di forma:

$$y'_{(t)} = k(t)y_{(t)} + h(t)y_{(t)}^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \quad (1.8)$$

con  $k, y : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

**Premesse:**

1. Per semplificare ci occupiamo solo di soluzioni  $y \geq 0$
2. nel caso  $\alpha < 1$  accadono fenomeni strani, però la tecnica risolutiva è comunque valida

Procedimento di risoluzione:

1. Cerchiamo le soluzioni costanti (c'è sempre almeno quella nulla)

2. divido per  $y^\alpha$

$$y'(t) = k(t)y(t) + h(t)$$

$$y'(t) = k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)$$

3. Pongo  $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$

Quale è l'equazione soddisfatta da  $z$ ?

$$z'(t) = (1 - \alpha) [k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)]$$

$$z'(t) = (1 - \alpha) k(t)z(t) + (1 - \alpha) h(t)$$

4. Risolvo l'equazione lineare in  $z$

5. Torno alla variabile  $y = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

## Equazione Logistica

$y(t)$  = numero di individui infetti al tempo  $t$

$y : J \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

### 1° Modello: Malthus (inizio '800)

Il tasso di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

$$y'(t) = ky(t) \quad (1.9)$$

dove  $k \in \mathbb{R}^+$  è la *tasso di crescita* e  $k$  è il coefficiente di proporzionalità, dato dalla differenza tra tasso di natalità e tasso di mortalità.

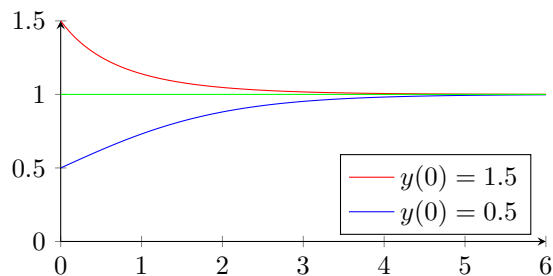
integrale generale:  $y(t) = y(0)e^{kt}$  con  $y(0) > 0$

### 2° Modello: Verhulst (metà '800)

$$y'(t) = ky(t) - hy(t)^2 \quad \text{con } k, h > 0 \quad (1.10)$$

Il modello prende anche in considerazione la competizione per le risorse al crescere della popolazione.

*Simulazione numerica per  $k = h = 1$*



## 1.2 Equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine lineari

### Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee

Siano  $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue e  $a \neq 0$  in  $I$ .  
L'integrale generale dell'eq. omogenea

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \quad (1.11)$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = c_1 y_{01} + c_2 y_{02} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n \quad (1.12)$$

dove  $y_{01}, y_{02}$  sono due soluzioni linearmente indipendenti.

*Oss:* Dire che due soluzioni sono linearmente indipendenti significa che non esiste un coefficiente  $c$  tale che  $c \cdot y_1 = y_2$ , ovvero che non sono una multipla dell'altra.

*Premesse:*

1. Spazio vettoriale  $V = C^2(I)$
2.  $I \subseteq \mathbb{R}$  funzione di 1 variabile  $y(t)$
3.  $C^2(I) = \{y : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{derivabili in } I \text{ e } y' \text{ continua in } I\}$
4.  $C^2(I) = \{y \in C^1(I), \text{derivabili due volte in } I \text{ con } y'' \text{ continua in } I\}$
5.  $C^2(I)$  è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali di somma di funzioni e prodotto di funzione per uno scalare.

#### *Dim. 2 - da sapere all'esame*

- L'integrale generale dell'omogenea è:  
 $W = \{y \in V : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0\}$
- $W$  è un sottospazio vettoriale di  $V \Leftrightarrow$  è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).
- Devo dimostrare che  $W$  ha dimensione 2.
  - i) Determinare 2 soluzioni lineari indipendenti dell'equazione  $y_{01}, y_{02}$
  - ii) Dimostrare che ogni soluzione  $y$  della EDO si scrive come combinazione lineare di  $y_{01}, y_{02}$



i) Scelgo  $y_{0_1}$  soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{cases} ay_{0_1}''(t) + by_{0_1}'(t) + cy_{0_1}(t) = 0 \\ y_{0_1}(0) = 1 \\ y_{0_1}'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifico che  $y_{0_1}, y_{0_2}$  sono soluzioni lineari indipendenti. Se per assurdo fossero una multiplo dell'altra

$$y_{0_1}(t) = \lambda y_{0_2}(t) \quad \forall t$$

In particolare, per  $t = 0$  avrei  $y_{0_1}(0) = \lambda y_{0_2}(0)$  avrei trovato  $1 = \lambda \cdot 0$  assurdo.

ii) Sia  $y_0(t)$  soluzione dell'EDO, cerco  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tali che  $y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t)$

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t) = c_1$$

$$y_0'(t) = c_1 y_{0_1}'(t) + c_2 y_{0_2}'(t) = c_2$$

In conclusione la funzione:

$$z(t) = y_0(0) \cdot y_{0_1}(t) + y_0'(0) \cdot y_{0_2}(t)$$

risolve lo stesso problema di Cauchy di  $y_0(t)$  e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:

$$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$$

cioè  $y_0(t)$  si scrive come combinazione lineare di  $y_{0_1}, y_{0_2}$  con coefficienti  $c_1 = y_0(0)$  e  $c_2 = y_0'(0)$ .

### Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee

Siano  $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $a \neq 0$  in  $I$

L'integrale generale dell'eq. completa

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad (1.13)$$

è:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \quad (1.14)$$

dove la  $y_0(t)$  è l'integrale dell'eq. omogenea, come nel teorema precedente, e la  $y_p(t)$  è una soluzione particolare dell'eq. completa.

*Oss:* L'integrale generale di una EDO del secondo ordine lineare non omogenea è quindi uno spazio affine (cioè il traslato di uno spazio vettoriale) di dimensione 2.

**Fine lezione 21/09 c'è una scritta in fondo in rosso che non so cosa sia.**

## 1.3 Sistemi differenziali lineari