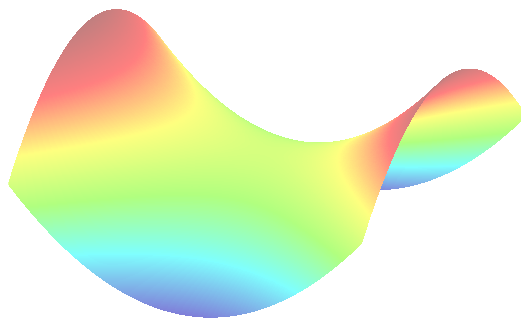


Appunti di Analisi Matematica II
corso della prof.ssa B.Noris
Politecnico di Milano



F. Piazza G. Michieletto

30 settembre 2022

Gli esami non finiscono mai, amico mio! Così è la vita.

- *Denis Ivanovič Fonvizin*

Indice

0	Cenni di Analisi I e Algebra Lineare	5
0.1	Regole di integrazione e derivazione	5
0.2	Serie numeriche	5
0.3	Determinante di una matrice	5
1	Equazioni differenziali	7
1.1	Equazioni differenziali del 1° ordine	7
1.1.1	Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine	8
1.1.2	EDO a variabili separabili	8
1.1.3	Problema di Cauchy	9
1.1.4	Come si risolve?	9
1.1.5	EDO 1° ordine lineari	9
1.1.6	Principio di sovrapposizione	10
1.1.7	Esistenza e unicità globale di Cauchy	10
1.1.8	Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine . .	10
1.1.9	Equazione di Bernoulli	11
1.1.10	Equazione Logistica	12
1.2	EDO 2° ordine lineari	14
1.2.1	Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee	14
1.2.2	Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee	15
1.3	Sistemi differenziali lineari	16
1.3.1	Risultati teorici	16
1.4	Sistemi non omogenei	17
1.4.1	Struttura dell'int. gen. dei sistemi non omogenei	17
2	Serie di funzioni	19
2.1	Generalità sulle serie di funzioni	19
2.1.1	Convergenza totale di una serie di funzioni	20
2.2	serie di potenze	21
2.3	serie di Fourier	21

Capitolo 0

Cenni di Analisi I e Algebra Lineare

0.1 Regole di integrazione e derivazione

0.2 Serie numeriche

0.3 Determinante di una matrice

Capitolo 1

Equazioni differenziali

1.1 Equazioni differenziali del 1° ordine

Definizione 1. Una equazione differenziale o EDO del 1° ordine è una relazione tra una funzione y e la sua derivata y' che può essere scritta come

$$y' = f(y)$$

dove f è una funzione continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Esempi:

- Tema d'esame gennaio 2021

$y' = t\sqrt{y(t^2) + 1}$ è in forma normale con $f(t, s) = t\sqrt{s^2 + 1}$. Il dominio di f è $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

- $y'_{(t)} = \frac{1}{t}$ con $t > 0$ diventa $f(t, s) = \frac{1}{t}$. **Oss:** f non dipende esplicitamente da s .

Il dominio di f è $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*\}$, dunque è diviso in due parti. Dovrò quindi risolvere la EDO separatamente nelle due regioni.

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{1}{t}, t > 0 \Rightarrow y(t) = \ln(t) + c \\ y'(0) = \frac{1}{t}, t < 0 \Rightarrow y(t) = \ln(-t) + c \end{cases}$$

Definizione 2. Si chiama integrale generale l'insieme delle soluzioni.

Definizione 3. Si chiama soluzione particolare una specifica soluzione.

Una EDO del 1° ordine ha ∞^1 , soluzioni, cioè avrà una costante arbitraria. In modo analogo, una EDO del 2° ordine avrà ∞^2 soluzioni, cioè avrà due costanti arbitrarie. Esempi:

- integrale generale ce^t con c costante arbitraria. Esempi di soluzioni particolari: e^t , $2e^t$, $-e^t$.
- $z(t) = -1 + \arctan(t)$ con $t \in \mathbb{R}^*$. Esempio di soluzione: $z' = 0 + \frac{1}{1+t^2}$.

Oss: La EDO $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ è definita per $(t, y) \in \text{dom}(f)$

1.1.1 Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine

Definizione 4. Una soluzione costante di una EDO del 1° ordine è una funzione $y(t)$ che sia soluzione.

Quando $y(t) = c$ è soluzione? Sostituisco c a y :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \forall t$$

Quindi le soluzioni costanti sono $y(t) = c$ con c tale che $f(t, c) = 0 \forall t$.

Esempi:

- Eq. Logistica: $y'(t) = ky(t) - hy^2(t)$
 $f(t, y) = ky - hy^2$
 $f(t, c) = 0 \forall t \quad ky - hy^2 = 0 = y(k - hy)$
 Soluzioni costanti: $y = 0$ o $y = \frac{k}{h}$
- $y'(t) = te^{y(t)} \quad te^{y(t)} = 0$ non ha soluzione.

1.1.2 EDO a variabili separabili

Definizione 5. Una EDO del 1° ordine è detta a variabili separabili se è del tipo

$$y' = f(t) \cdot g(y(t))$$

dove f e g sono funzioni continue su intervalli $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Da integrare con gli appunti della professoressa.
Lezione del 14/09/2022

1.1.3 Problema di Cauchy

Definizione 6. Data una EDO del 1° ordine $y'(t) = f(t, y(t))$ sia (t_0, y_0) dove la EDO è definita. Cioè $(t_0, y_0) \in \text{dom}(f)$. Si chiama problema di Cauchy il problema di determinare $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: il sistema ha una condizione perché è del 1° ordine. La condizione trova la soluzione particolare che passa per (t_0, y_0) .

1.1.4 Come si risolve?

Step:

1. Trova l'integrale generale. (∞^1 soluzioni dipendenti da 1 parametro)
2. Impongo la condizione $y(t_0) = y_0$ e la costante c
3. Sostituisco c in 1.

Esempi

Aggiungi Esempi

1.1.5 EDO 1° ordine lineari

Definizione 7. Una EDO del 1° ordine lineare in forma normale è:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

dove a e b sono funzioni continue su un intervallo J di \mathbb{R} .

N.B. J è il più grande intervallo di \mathbb{R} tale che $a, b \in J$.

Definizione 8. Si chiama EDO omogenea associata

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

Esempio:

Aggiungi esempi

1.1.6 Principio di sovrapposizione

Sia $a : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su J .

L'applicazione $\mathcal{L}(y) = y' - a(t) \cdot y$ è lineare.

Più esplicitamente, dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathcal{L}(y_1) + c_2 \mathcal{L}(y_2) \forall y_1, y_2$ funzioni derivabili.

Ancora più esplicitamente: se $\mathcal{L}(y_1) = b_1$ cioè $y_1' = a(t)y_1 + b_1$

se $\mathcal{L}(y_2) = b_2$ cioè $y_2' = a(t)y_2 + b_2$

allora $\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 b_1 + c_2 b_2$ cioè $y_{(t)}' = a(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) + c_1 b_1 + c_2 b_2$

cioè $(c_1 y_1 + c_2 y_2)' = a(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) + c_1 b_1 + c_2 b_2$

Oss:

- Prendo due soluzioni distinte della EDO
- $y' = a(t)y + b(t)$

1.1.7 Esistenza e unicità globale di Cauchy

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Per ogni $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ definita su J .

Aggiungi parte in blu lezione 16/09/2022

1.1.8 Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine

$a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

L'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} + \left(\int e^{-A(x)} b(x) dx + c \right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a .

Dimostrazione 1. da sapere all'esame

- Porto ay sulla sinistra
 $y' - ay = b$
- Moltiplico l'equazione per e^{-A}
 $e^{-A}y' - e^{-A}ay = e^{-A}b$

- *Riconosco*
 $y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)} = (y(t)e^{-A(t)})'$
 Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:
 $(ye^{-A})' = be^{-A}$
- *Integro*
 $y(t)e^{-A(t)} = \int be^{-A(t)} dt + c$
- *Moltiplico tutto per $e^{A(t)}$*
 $y(t) = e^{A(t)} \left(\int be^{-A(t)} dt + c \right)$

1.1.9 Equazione di Bernoulli

Definizione 9. Si chiamano equazione di Bernoulli le EDO del 1° ordine lineari di forma:

$$y'_{(t)} = k(t)y_{(t)} + h(t)y_{(t)}^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

con $k, y : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Premesse:

1. Per semplificare ci occupiamo solo di soluzioni $y \geq 0$
2. nel caso $\alpha < 1$ accadono fenomeni strani, però la tecnica risolutiva è comunque valida

Procedimento di risoluzione:

1. Cerchiamo le soluzioni costanti (c'è sempre almeno quella nulla)
2. divido per y^α
 $y'(t) = k(t)y(t) + h(t)$
 $y'(t) = k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)$
3. Pongo $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$
 Quale è l'equazione soddisfatta da z ?
 $z'(t) = (1 - \alpha) [k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)]$
 $z'(t) = (1 - \alpha) k(t)z(t) + (1 - \alpha) h(t)$
4. Risolvo l'equazione lineare in z
5. Torno alla variabile $y = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

1.1.10 Equazione Logistica

$y(t)$ = numero di individui infetti al tempo t

$y : J \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

1° Modello: Malthus (inizio '800)

Il tasso di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

$$y'(t) = ky(t)$$

dove $k \in \mathbb{R}^+$ è la *tasso di crescita* e k è il coefficiente di proporzionalità, dato dalla differenza tra tasso di natalità e tasso di mortalità.

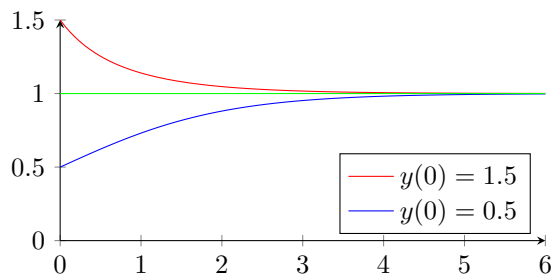
integrale generale: $y(t) = y(0)e^{kt}$ con $y(0) > 0$

2° Modello: Verhulst (metà '800)

$$y'(t) = ky(t) - hy(t)^2 \quad \text{con } k, h > 0$$

Il modello prende anche in considerazione la competizione per le risorse al crescere della popolazione.

Simulazione numerica per $k = h = 1$



Integrale generale dell'Equazione Logistica

Trovo l'integrale generale risolvendo come Bernoulli

1. Soluzioni costanti $y(t) = 0, \quad y(t) = \frac{k}{h}$
2. Divido per y^2 : $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = \frac{k}{y(t)} - h$
3. Pongo $z'(t) = \frac{1}{y(t)} = -\frac{k}{y(t)} + h = -kz(t) + h$ ricavo che $z'(t) + kz(t) = h$
4. $z(t) = e^{-\int k} [\int e^{\int k} h dx + c]$

$$= e^{-kt} [h \int e^{kx} dx + c]$$

$$= e^{-kt} [\frac{h}{k} e^{kt} + c]$$

$$= \frac{\frac{h}{k} e^{kt} + c}{e^{kt}}$$
5. $y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{e^{kt}}{\frac{h}{k} e^{kt} + c} = \frac{ke^{kt}}{he^{kt} + kc}$
possiamo scrivere $kc = c'$ in quanto costante arbitraria

1.2 Equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine lineari

1.2.1 Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee

Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e $a \neq 0$ in I .

L'integrale generale dell'eq. omogenea

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1} + c_2 y_{0_2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$$

dove y_{0_1}, y_{0_2} sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Oss: Dire che due soluzioni sono linearmente indipendenti significa che non esiste un coefficiente c tale che $c \cdot y_1 = y_2$, ovvero che non sono una multipla dell'altra.

Premesse:

1. Spazio vettoriale $V = C^2(I)$
2. $I \subseteq \mathbb{R}$ funzione di 1 variabile $y(t)$
3. $C^2(I) = \{y : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{derivabili in } I \text{ e } y' \text{ continua in } I\}$
4. $C^2(I) = \{y \in C^1(I), \text{derivabili due volte in } I \text{ con } y'' \text{ continua in } I\}$
5. $C^2(I)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali di somma di funzioni e prodotto di funzione per uno scalare.

Dimostrazione 2. da sapere all'esame

- *L'integrale generale dell'omogenea è:*
 $W = \{y \in V : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0\}$
- *W è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow$ è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).*
- *Devo dimostrare che W ha dimensione 2.*
 - i) *Determinare 2 soluzioni lineari indipendenti dell'equazione y_{0_1}, y_{0_2}*
 - ii) *Dimostrare che ogni soluzione y della EDO si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2}*

i) Scelgo y_{0_1} soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{cases} ay_{0_1}''(t) + by_{0_1}'(t) + cy_{0_1}(t) = 0 \\ y_{0_1}(0) = 1 \\ y_{0_1}'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifico che y_{0_1}, y_{0_2} sono soluzioni lineari indipendenti. Se per assurdo fossero una multiplo dell'altra

$$y_{0_1}(t) = \lambda y_{0_2}(t) \quad \forall t$$

In particolare, per $t = 0$ avrei $y_{0_1}(0) = \lambda y_{0_2}(0)$ avrei trovato $1 = \lambda \cdot 0$ assurdo.

ii) Sia $y_0(t)$ soluzione dell'EDO, cerco $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t)$

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t) = c_1$$

$$y_0'(t) = c_1 y_{0_1}'(t) + c_2 y_{0_2}'(t) = c_2$$

In conclusione la funzione:

$$z(t) = y_0(0) \cdot y_{0_1}(t) + y_0'(0) \cdot y_{0_2}(t)$$

risolve lo stesso problema di Cauchy di $y_0(t)$ e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:

$$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$$

cioè $y_0(t)$ si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2} con coefficienti $c_1 = y_0(0)$ e $c_2 = y_0'(0)$.

1.2.2 Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee

Siano $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ in I

L'integrale generale dell'eq. completa

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

è:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

dove la $y_0(t)$ è l'integrale dell'eq. omogenea, come nel teorema precedente, e la $y_p(t)$ è una soluzione particolare dell'eq. completa.

Oss: L'integrale generale di una EDO del secondo ordine lineare non omogenea è quindi uno spazio affine (cioè il traslato di uno spazio vettoriale) di dimensione 2.

Fine lezione 21/09 c'è una scritta in fondo in rosso che non so cosa sia.

1.3 Sistemi differenziali lineari

Esempio introduttivo $F = ma$

$$y''(t) = \frac{F}{m}$$

Trasformo in un sistema di due equazioni differenziali di primo ordine:
 $y_1(t) = y(t)$: posizione e $y_2(t) = y'(t) = y'_1(t)$: velocità.

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) & \text{la velocità è la derivata della posizione} \\ y'_2(t) = \frac{F}{m} & \text{l'accelerazione è la derivata della velocità} \end{cases}$$

In forma matriciale:

E mo come la disegno?

...

In forma compatta: $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}$$

Esercizi:

Esercizi qua

Definizione 10. Sistema differenziale lineare è un sistema di equazioni differenziali di primo ordine con coefficienti costanti, cioè:

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$

dove A è una matrice quadrata di ordine n e \underline{b} è un vettore di dimensione n .

1.3.1 Risultati teorici

Come si scrive un problema di Cauchy per un sistema?

Esempio: $y''(t) - 2y'(t) = t$ con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$

Trasformo la EDO in sistema

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) \\ y'_2(t) = 2y_2(t) + t \end{cases}$$

Un problema di Cauchy è

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_0 \\ y_2(t_0) &= v_0 \end{aligned} \quad \underline{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Definizione 11. Dato $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$ con A matrice quadrata di ordine n e \underline{b} vettore di dimensione n chiamiamo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = A \cdot \underline{y}(t) + \underline{b}(t) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Esempi

C'è una pagina che non so se è spiegazione o esercizi, ci sono parti scritte in LaTeX e altre a mano.

*

*

Prosegue poi con i sistemi omogenei.

1.4 Sistemi non omogenei

1.4.1 Struttura dell'int. gen. dei sistemi non omogenei

Manca la definizione.

Praticamente, per risolvere un sistema non omogeneo:

1. Si risolve il sistema omogeneo associato. Cioè determino una matrice Wronskiana $W(t) = [y_{01}(t) \dots y_{0n}(t)]$
Integrale generale: $\underline{y}(t) = W(t) \cdot \underline{c}$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$

2. Due possibilità:

- cerco una soluzione particolare con il metodo di somiglianza
 $\underline{y}(t) = \underline{y}_0(t) + \underline{y}_p(t) = W(t) \cdot \underline{c} + \underline{y}_p(t)$
- uso $W(t)$ per trovare direttamente l'integrale generale tramite la formula:
 $\underline{y}(t) = W(t) \left(\int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau \right) = W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + W(t) \cdot \underline{c}$
Confronto le due soluzioni.
Nella prima ho $W(t) \cdot \underline{c}$ e anche nella seconda, ed è l'integrale generale dell'omogenea.
Quindi $\underline{y}_p(t) = \underline{y}(t) - W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau$ perché è ciò che resta da uguagliare.
In particolare, se A è diagonalizzabile reale, allora una matrice Wronskiana è $W(t) = e^{At}$
 $\underline{y}(t) = e^{At} \left[\int e^{-At} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + \underline{c} \right]$
Osservazioni da aggiungere.
Esempio da aggiungere.

Capitolo 2

Serie di funzioni

2.1 Generalità sulle serie di funzioni

Esempio: Sviluppi di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Definizione 12.

Date delle funzioni $f : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad n = (0, 1, 2, \dots)$

- La serie di funzioni a termine generale $f_n(x)$ è la successione delle somme parziali

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Oss: Fissato $\bar{x} \in J$ si tratta di una serie numerica

- La serie di funzioni converge puntualmente (o semplicemente) nel punto $\bar{x}_0 \in J$ se la serie numerica di termini generale $f_n(\bar{x})$ è convergente, cioè se esiste finito il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\bar{x})$$

- Chiamiamo insieme di convergenza puntuale (o semplice) l'insieme $E \subseteq J$ dei punti \bar{x}_0 in cui la serie di funzioni converge puntualmente. Nell'insieme E risulta così definita una nuova funzione, detta somma della serie, che si indica con il simbolo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in E)$$

Significa:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \quad (x \in E)$$

- La serie di funzioni converge assolutamente in $\bar{x} \in J$ se la serie numerica di termine generale $f_n(\bar{x})$ converge.
Oss: la convergenza assoluta...

Esempio fondamentale: Serie geometrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Oss. Servirà per la serie di potenze: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$
insieme convergenza puntuale $E = (-1, 1) = \{|x| < 1\}$

Per $x \leq -1$ è indeterminata

per $x \geq 1$ è divergente

per ...

Serie di Riemann

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = \left(\frac{1}{n}\right)^x$ L'insieme di convergenza puntuale è:
 $E = (1, \infty) = \{x > 1\}$

La convergenza è anche assoluta in E perché per $x \in E$ $|f_n(x)| = f_n(x)$

Se $x = 1$ è la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.

Problema: se le funzioni f_n sono continue, anche f lo è? **Segue...**

2.1.1 Convergenza totale di una serie di funzioni

copiare appunti della prof, formule e grafici

Definizione 13. Importante

Diciamo che la serie di termine generale $f_n(x), x \in J$ converge totale in $I \in J$ se esiste una successione numerica a_n tale che:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - a_n| = 0 \quad \forall x \in I \quad \forall n$$

$$ii) \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

Oss:

- La nozione di convergenza totale riguarda un intervallo, mai un punto.
- La convergenza totale in I implica la convergenza assoluta (quindi anche puntuale) in ogni punto di I .
- **Attenzione:** non vale il viceversa: se una serie converge assolutamente in ogni punto di I non è detto che converga totalmente in I .

2.2 serie di potenze

2.3 serie di Fourier

