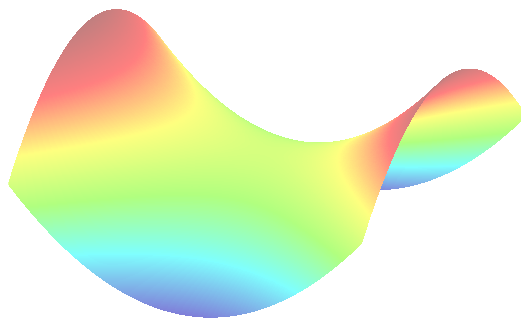


Appunti di Analisi Matematica II
corso della prof.ssa B.Noris
Politecnico di Milano



F. Piazza G. Michieletto

30 settembre 2022

Gli esami non finiscono mai, amico mio! Così è la vita.

- *Denis Ivanovič Fonvizin*

Indice

0	Cenni di Analisi I e Algebra Lineare	5
0.1	Regole di integrazione e derivazione	5
1	Equazioni differenziali	7
1.1	Equazioni differenziali del 1° ordine	7
1.1.1	Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine	8
1.1.2	EDO a variabili separabili	8
1.1.3	Problema di Cauchy	9
1.1.4	Come si risolve?	9
1.1.5	EDO 1° ordine lineari	9
1.1.6	Principio di sovrapposizione	10
1.1.7	Esistenza e unicità globale di Cauchy	10
1.1.8	Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine . .	10
1.1.9	Equazione di Bernoulli	11
1.1.10	Equazione Logistica	12
1.2	EDO 2° ordine lineari	14
1.2.1	Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee	14
1.2.2	Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee	15
1.3	Sistemi differenziali lineari	16
1.3.1	Risultati teorici	16
2		19

Capitolo 0

Cenni di Analisi I e Algebra Lineare

0.1 Regole di integrazione e derivazione

Capitolo 1

Equazioni differenziali

1.1 Equazioni differenziali del 1° ordine

Definizione 1. Una equazione differenziale o EDO del 1° ordine è una relazione tra una funzione y e la sua derivata y' che può essere scritta come

$$y' = f(y)$$

dove f è una funzione continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Esempi:

- Tema d'esame gennaio 2021

$y' = t\sqrt{y(t^2) + 1}$ è in forma normale con $f(t, s) = t\sqrt{s^2 + 1}$. Il dominio di f è $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

- $y'_{(t)} = \frac{1}{t}$ con $t > 0$ diventa $f(t, s) = \frac{1}{t}$. **Oss:** f non dipende esplicitamente da s .

Il dominio di f è $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*\}$, dunque è diviso in due parti. Dovrò quindi risolvere la EDO separatamente nelle due regioni.

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{1}{t}, t > 0 \Rightarrow y(t) = \ln(t) + c \\ y'(0) = \frac{1}{t}, t < 0 \Rightarrow y(t) = \ln(-t) + c \end{cases}$$

Definizione 2. Si chiama integrale generale l'insieme delle soluzioni.

Definizione 3. Si chiama soluzione particolare una specifica soluzione.

Una EDO del 1° ordine ha ∞^1 soluzioni, cioè avrà una costante arbitraria. In modo analogo, una EDO del 2° ordine avrà ∞^2 soluzioni, cioè avrà due costanti arbitrarie. Esempi:

- integrale generale ce^t con c costante arbitraria. Esempi di soluzioni particolari: e^t , $2e^t$, $-e^t$.
- $z_{(t)} = -1 + \arctan(t)$ con $t \in \mathbb{R}^*$. Esempio di soluzione: $z' = 0 + \frac{1}{1+t^2}$.

Oss: La EDO $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ è definita per $(t, y) \in \text{dom}(f)$

1.1.1 Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine

Definizione 4. Una soluzione costante di una EDO del 1° ordine è una funzione $y(t)$ che sia soluzione.

Quando $y(t) = c$ è soluzione? Sostituisco c a y :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \forall t$$

Quindi le soluzioni costanti sono $y(t) = c$ con c tale che $f(t, c) = 0 \forall t$.

Esempi:

- Eq. Logistica: $y'(t) = ky(t) - hy^2(t)$
 $f(t, y) = ky - hy^2$
 $f(t, c) = 0 \forall t \quad ky - hy^2 = 0 = y(k - hy)$
 Soluzioni costanti: $y = 0$ o $y = \frac{k}{h}$
- $y'(t) = te^{y(t)} \quad te^{y(t)} = 0$ non ha soluzione.

1.1.2 EDO a variabili separabili

Definizione 5. Una EDO del 1° ordine è detta a variabili separabili se è del tipo

$$y' = f(t) \cdot g(y(t))$$

dove f e g sono funzioni continue su intervalli $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$.

**Da integrare con gli appunti della professoressa.
Lezione del 14/09/2022**

1.1.3 Problema di Cauchy

Definizione 6. Data una EDO del 1° ordine $y'(t) = f(t, y(t))$ sia (t_0, y_0) dove la EDO è definita. Cioè $(t_0, y_0) \in \text{dom}(f)$. Si chiama problema di Cauchy il problema di determinare $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: il sistema ha una condizione perché è del 1° ordine. La condizione trova la soluzione particolare che passa per (t_0, y_0) .

1.1.4 Come si risolve?

Step:

1. Trova l'integrale generale. (∞^1 soluzioni dipendenti da 1 parametro)
2. Impongo la condizione $y(t_0) = y_0$ e la costante c
3. Sostituisco c in 1.

Esempi

Aggiungi Esempi

1.1.5 EDO 1° ordine lineari

Definizione 7. Una EDO del 1° ordine lineare in forma normale è:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

dove a e b sono funzioni continue su un intervallo J di \mathbb{R} .

N.B. J è il più grande intervallo di \mathbb{R} tale che $a, b \in J$.

Definizione 8. Si chiama EDO omogenea associata

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

Esempio:

Aggiungi esempi

1.1.6 Principio di sovrapposizione

Sia $a : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su J .

L'applicazione $\mathcal{L}(y) = y' - a(t) \cdot y$ è lineare.

Più esplicitamente, dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathcal{L}(y_1) + c_2 \mathcal{L}(y_2) \forall y_1, y_2$ funzioni derivabili.

Ancora più esplicitamente: se $\mathcal{L}(y_1) = b_1$ cioè $y_1' = a(t)y_1 + b_1$

se $\mathcal{L}(y_2) = b_2$ cioè $y_2' = a(t)y_2 + b_2$

allora $\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 b_1 + c_2 b_2$ cioè $y_{(t)}' = a(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) + c_1 b_1 + c_2 b_2$

cioè $(c_1 y_1 + c_2 y_2)' = a(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) + c_1 b_1 + c_2 b_2$

Oss:

- Prendo due soluzioni distinte della EDO
- $y' = a(t)y + b(t)$

1.1.7 Esistenza e unicità globale di Cauchy

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Per ogni $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ definita su J .

Aggiungi parte in blu lezione 16/09/2022

1.1.8 Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine

$a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

L'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} + \left(\int e^{-A(x)} b(x) dx + c \right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a .

Dimostrazione 1. da sapere all'esame

- Porto ay sulla sinistra
 $y' - ay = b$
- Moltiplico l'equazione per e^{-A}
 $e^{-A}y' - e^{-A}ay = e^{-A}b$

- *Riconosco*
 $y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)} = (y(t)e^{-A(t)})'$
Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:
 $(ye^{-A})' = be^{-A}$
- *Integro*
 $y(t)e^{-A(t)} = \int be^{-A(t)} dt + c$
- *Moltiplico tutto per $e^{A(t)}$*
 $y(t) = e^{A(t)} \left(\int be^{-A(t)} dt + c \right)$

1.1.9 Equazione di Bernoulli

Definizione 9. Si chiamano equazione di Bernoulli le EDO del 1° ordine lineari di forma:

$$y'_{(t)} = k(t)y_{(t)} + h(t)y_{(t)}^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

con $k, y : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Premesse:

1. Per semplificare ci occupiamo solo di soluzioni $y \geq 0$
2. nel caso $\alpha < 1$ accadono fenomeni strani, però la tecnica risolutiva è comunque valida

Procedimento di risoluzione:

1. Cerchiamo le soluzioni costanti (c'è sempre almeno quella nulla)
2. divido per y^α
 $y'(t) = k(t)y(t) + h(t)$
 $y'(t) = k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)$
3. Pongo $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$
 Quale è l'equazione soddisfatta da z ?
 $z'(t) = (1 - \alpha) [k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)]$
 $z'(t) = (1 - \alpha) k(t)z(t) + (1 - \alpha) h(t)$
4. Risolvo l'equazione lineare in z
5. Torno alla variabile $y = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

1.1.10 Equazione Logistica

$y(t)$ = numero di individui infetti al tempo t

$y : J \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

1° Modello: Malthus (inizio '800)

Il tasso di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

$$y'(t) = ky(t)$$

dove $k \in \mathbb{R}^+$ è la *tasso di crescita* e k è il coefficiente di proporzionalità, dato dalla differenza tra tasso di natalità e tasso di mortalità.

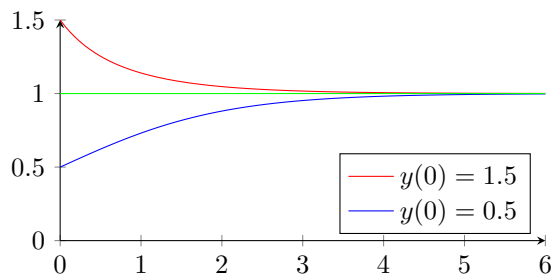
integrale generale: $y(t) = y(0)e^{kt}$ con $y(0) > 0$

2° Modello: Verhulst (metà '800)

$$y'(t) = ky(t) - hy(t)^2 \quad \text{con } k, h > 0$$

Il modello prende anche in considerazione la competizione per le risorse al crescere della popolazione.

Simulazione numerica per $k = h = 1$



Integrale generale dell'Equazione Logistica

Trovo l'integrale generale risolvendo come Bernoulli

1. Soluzioni costanti $y(t) = 0, \quad y(t) = \frac{k}{h}$
2. Divido per y^2 : $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = \frac{k}{y(t)} - h$
3. Pongo $z'(t) = \frac{1}{y(t)} = -\frac{k}{y(t)} + h = -kz(t) + h$ ricavo che $z'(t) + kz(t) = h$
4. $z(t) = e^{-\int k} [\int e^{\int k} h dx + c]$

$$= e^{-kt} [h \int e^{kx} dx + c]$$

$$= e^{-kt} [\frac{h}{k} e^{kt} + c]$$

$$= \frac{\frac{h}{k} e^{kt} + c}{e^{kt}}$$
5. $y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{e^{kt}}{\frac{h}{k} e^{kt} + c} = \frac{ke^{kt}}{he^{kt} + kc}$
possiamo scrivere $kc = c'$ in quanto costante arbitraria

1.2 Equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine lineari

1.2.1 Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee

Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e $a \neq 0$ in I .

L'integrale generale dell'eq. omogenea

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1} + c_2 y_{0_2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$$

dove y_{0_1}, y_{0_2} sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Oss: Dire che due soluzioni sono linearmente indipendenti significa che non esiste un coefficiente c tale che $c \cdot y_1 = y_2$, ovvero che non sono una multipla dell'altra.

Premesse:

1. Spazio vettoriale $V = C^2(I)$
2. $I \subseteq \mathbb{R}$ funzione di 1 variabile $y(t)$
3. $C^2(I) = \{y : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{derivabili in } I \text{ e } y' \text{ continua in } I\}$
4. $C^2(I) = \{y \in C^1(I), \text{derivabili due volte in } I \text{ con } y'' \text{ continua in } I\}$
5. $C^2(I)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali di somma di funzioni e prodotto di funzione per uno scalare.

Dimostrazione 2. da sapere all'esame

- *L'integrale generale dell'omogenea è:*
 $W = \{y \in V : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0\}$
- *W è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow$ è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).*
- *Devo dimostrare che W ha dimensione 2.*
 - i) *Determinare 2 soluzioni lineari indipendenti dell'equazione y_{0_1}, y_{0_2}*
 - ii) *Dimostrare che ogni soluzione y della EDO si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2}*

i) Scelgo y_{0_1} soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{cases} ay''_{0_1}(t) + by'_{0_1}(t) + cy_{0_1}(t) = 0 \\ y_{0_1}(0) = 1 \\ y'_{0_1}(0) = 0 \end{cases}$$

Verifico che y_{0_1}, y_{0_2} sono soluzioni lineari indipendenti. Se per assurdo fossero una multiplo dell'altra

$$y_{0_1}(t) = \lambda y_{0_2}(t) \quad \forall t$$

In particolare, per $t = 0$ avrei $y_{0_1}(0) = \lambda y_{0_2}(0)$ avrei trovato $1 = \lambda \cdot 0$ assurdo.

ii) Sia $y_0(t)$ soluzione dell'EDO, cerco $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t)$

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t) = c_1$$

$$y'_0(t) = c_1 y'_{0_1}(t) + c_2 y'_{0_2}(t) = c_2$$

In conclusione la funzione:

$$z(t) = y_0(0) \cdot y_{0_1}(t) + y'_0(0) \cdot y_{0_2}(t)$$

risolve lo stesso problema di Cauchy di $y_0(t)$ e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:

$$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$$

cioè $y_0(t)$ si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2} con coefficienti $c_1 = y_0(0)$ e $c_2 = y'_0(0)$.

1.2.2 Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee

Siano $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ in I

L'integrale generale dell'eq. completa

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

è:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

dove la $y_0(t)$ è l'integrale dell'eq. omogenea, come nel teorema precedente, e la $y_p(t)$ è una soluzione particolare dell'eq. completa.

Oss: L'integrale generale di una EDO del secondo ordine lineare non omogenea è quindi uno spazio affine (cioè il traslato di uno spazio vettoriale) di dimensione 2.

Fine lezione 21/09 c'è una scritta in fondo in rosso che non so cosa sia.

1.3 Sistemi differenziali lineari

Esempio introduttivo $F = ma$

$$y''(t) = \frac{F}{m}$$

Trasformo in un sistema di due equazioni differenziali di primo ordine:
 $y_1(t) = y(t)$: posizione e $y_2(t) = y'(t) = y'_1(t)$: velocità.

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) & \text{la velocità è la derivata della posizione} \\ y'_2(t) = \frac{F}{m} & \text{l'accelerazione è la derivata della velocità} \end{cases}$$

In forma matriciale:

E mo come la disegno?

...

In forma compatta: $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}$$

Esercizi:

Esercizi qua

Definizione 10. Sistema differenziale lineare è un sistema di equazioni differenziali di primo ordine con coefficienti costanti, cioè:

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$

dove A è una matrice quadrata di ordine n e \underline{b} è un vettore di dimensione n .

1.3.1 Risultati teorici

Come si scrive un problema di Cauchy per un sistema?

Esempio: $y''(t) - 2y'(t) = t$ con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$

Trasformo la EDO in sistema

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) \\ y'_2(t) = 2y_2(t) + t \end{cases}$$

Un problema di Cauchy è

$$\begin{matrix} y_1(t_0) = y_0 \\ y_2(t_0) = v_0 \end{matrix} \quad \underline{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Definizione 11. Dato $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$ con A matrice quadrata di ordine n e \underline{b} vettore di dimensione n chiamiamo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = A \cdot \underline{y}(t) + \underline{b}(t) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Esempi

*C'è una pagina che non so se è spiegazione o esercizi, ci sono parti scritte in LaTeX e altra a mano.
Prosegue poi con i sistemi omogenei.*

Capitolo 2