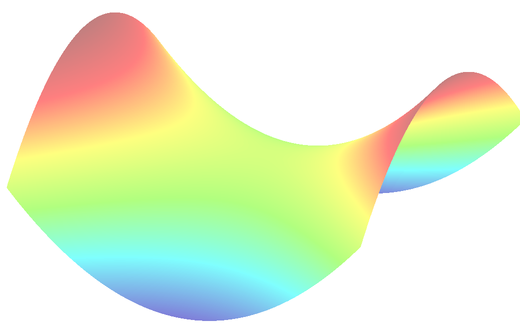
Appunti di Analisi Matematica II

corso della prof.ssa B.Noris
Politecnico di Milano



F. Piazza G. Michieletto

September 28, 2022

Chapter 1

Equazioni differenziali

1.1 Equazioni differenziali del 1° ordine

Definizione 1. *Una equazione differenziale o* EDO *del 1° ordine è una relazione tra una funzione y e la sua derivata y' che può essere scritta come*

$$y' = f(y) \tag{1.1}$$

dove f è una funzione continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Esempi:

- $y' = t\sqrt{y_{(t^2)} + 1}$ è in forma normale con $f(t,s) = t\sqrt{s^2+1}$. Il dominio di f è $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $y'_{(t)} = \frac{1}{t}$ con $t > 0$ diventa $f(t,s) = \frac{1}{t}$. **Oss:** f non dipende esplicitamente da s.
  Il dominio di f è $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*\}$, dunque è diviso in due parti. Dovrò quindi risolvere la EDO nelle due regioni.

Definizione 2. *Si chiama* integrale generale *l'insieme delle soluzioni.*

Definizione 3. *Si chiama* soluzione particolare *una specifica soluzione.*

Una EDO del 1° ordine ha ∞^1, soluzioni, cioè avrà una costante arbitraria. In modo analogo, una EDO del 2° ordine avrà ∞^2 soluzioni, cioè avrà due costanti arbitrarie. Esempi:

- integrale generale ce^t con c costante arbitraria. Esempi di soluzioni particolari: e^t, $2e^t$, $-e^t$.
- $z_{(t)} = -1 + arctan(t)$ con $t \in \mathbb{R}^*$. Esempio di soluzione: $z' = 0 + \frac{1}{1+t^2}$.

Oss: La EDO $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ è definita per $(t,y) \in dom(f)$

Problema di Cauchy

Definizione 4. *Data una EDO del 1° ordine* $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ *sia* (t_0, y_0) *dove la EDO è definita. Cioè* $(t_0, y_0) \in dom(f)$
Si chiama problema di Cauchy *il problema di determinare* $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *che soddisfa:*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: il sistema ha una condizione perché è del 1° ordine. La condizione trova la soluzione particolare che passa per (t_0, y_0).

Come si risolve?

Step:

1. Trova l'integrale generale. (∞^1 soluzioni dipendenti da 1 parametro)
2. Impongo la condizione $y(t_0) = y_0$ e la costante c
3. Sostituisco c in 1.

Esempi

Aggiungi Esempi

EDO 1° ordine lineari

Definizione 5. *Una EDO del 1° ordine lineare in forma normale è:*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)} + b(t) \tag{1.2}$$

dove a e b sono funzioni continue su un intervallo J di $\mathbb{R}$.
N.B. *J è il più grande intervallo di $\mathbb{R}$ tale che $a, b \in J$.*

Definizione 6. *Si chiama EDO omogenea associata*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)} \tag{1.3}$$

Esempio:
esempio

Principio di sovrapposizione

prova