Appunti di Analisi Matematica II

corso della prof.ssa B.Noris
Politecnico di Milano

F. Piazza

21 ottobre 2022

Gli esami non finiscono mai, amico mio! Così è la vita.

- *Denis Ivanovič Fonvizin*

Indice

0 Cenni di Analisi I e Algebra Lineare

0.1 Regole di integrazione e derivazione

0.2 Serie numeriche

0.3 Determinante di una matrice

1 Equazioni differenziali

1.1 Equazioni differenziali del 1° ordine

Definizione 1. *Una equazione differenziale o* EDO *del 1° ordine è una relazione tra una funzione y e la sua derivata y' che può essere scritta come*

$$y' = f(y)$$

dove f è una funzione continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Esempi:

- *Tema d'esame gennaio 2021*
  $y' = t\sqrt{y_{(t^2)} + 1}$ è in forma normale con $f(t,s) = t\sqrt{s^2+1}$. Il dominio di f è $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

- $y'_{(t)} = \frac{1}{t}$ con $t > 0$ diventa $f(t,s) = \frac{1}{t}$. **Oss:** f non dipende esplicitamente da s. Il dominio di f è $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*\}$, dunque è diviso in due parti. Dovrò quindi risolvere la EDO separatamente nelle due regioni.

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{1}{t}, t > 0 \Rightarrow y(t) = ln(t) + c \\ y'(0) = \frac{1}{t}, t < 0 \Rightarrow y(t) = ln(-t) + c \end{cases}$$

Definizione 2. *Si chiama* integrale generale *l'insieme delle soluzioni.*

Definizione 3. *Si chiama* soluzione particolare *una specifica soluzione.*

Una EDO del 1° ordine ha ∞^1, soluzioni, cioè avrà una costante arbitraria. In modo analogo, una EDO del 2° ordine avrà ∞^2 soluzioni, cioè avrà due costanti arbitrarie. Esempi:

- integrale generale ce^t con c costante arbitraria. Esempi di soluzioni particolari: e^t, $2e^t$, $-e^t$.

- $z_{(t)} = -1 + arctan(t)$ con $t \in \mathbb{R}^*$. Esempio di soluzione: $z' = 0 + \frac{1}{1+t^2}$.

Oss: La EDO $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ è definita per $(t,y) \in dom(f)$

1.1.1 Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine

Definizione 4. *Una soluzione costante di una EDO del 1° ordine è una funzione $y(t)$ che sia soluzione.*

Quando $y(t) = c$ è soluzione? Sostituisco c a y:

$$y'(t) = f(t, y(t))\forall t$$

Quindi le soluzioni costanti sono $y(t) = c$ con c tale che $f(t, c) = 0\forall t$.

Esempi:

- Eq. Logistica: $y'(t) = ky(t) - hy^2(t)$
  $f(t, y) = ky - hy^2$
  $f(t, c) = 0\forall t \quad ky - hy^2 = 0 = y(k - hy)$
  Soluzioni costanti: $y = 0$ o $y = \frac{k}{h}$
- $y'(t) = te^{y(t)} \quad te^{y(t)} = 0$ non ha soluzione.

1.1.2 EDO a variabili separabili

Definizione 5. *Una EDO del 1° ordine è detta* a variabili separabili *se è del tipo*

$$y' = f(t) \cdot g(y(t))$$

dove f e g sono funzioni continue su intervalli $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Esempio $y'(t) = \frac{1}{t}$ $h(t) = \frac{1}{t}$ $j_1 = (-\infty, 0)U(0, \infty) = \mathbb{R}$-0

1.1.3 Problema di Cauchy

Definizione 6. *Data una EDO del 1° ordine* $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ *sia* (t_0, y_0) *dove la EDO è definita. Cioè* $(t_0, y_0) \in dom(f)$
Si chiama problema di Cauchy *il problema di determinare* $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *che soddisfa:*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: il sistema ha una condizione perché è del 1° ordine. La condizione trova la soluzione particolare che passa per (t_0, y_0).

1.1.4 Come si risolve?

Step:

1. Trova l'integrale generale. (∞^1 soluzioni dipendenti da 1 parametro)
2. Impongo la condizione $y(t_0) = y_0$ e la costante c
3. Sostituisco c in 1.

Esempi

Aggiungi Esempi

1.1.5 EDO 1° ordine lineari

Definizione 7. *Una EDO del 1° ordine lineare in forma normale è:*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)} + b(t)$$

dove a *e* b *sono funzioni continue su un intervallo* J *di* $\mathbb{R}$.
N.B. J *è il più grande intervallo di* $\mathbb{R}$ *tale che* $a, b \in J$.

Definizione 8. *Si chiama EDO omogenea associata*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)}$$

Esempio:
Aggiungi esempi

1.1.6 Principio di sovrapposizione

Sia $a : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su J.
L'applicazione $\mathcal{L}(y) = y' - a(t) \cdot y$ è lineare.

Più esplicitamente, dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:
$\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathcal{L}(y_1) + c_2\mathcal{L}(y_2) \forall y_1, y_2$ funzioni derivabili.

Ancora più esplicitamente: se $\mathcal{L}(y_1) = b_1$ cioè $y_1' = a(t)y_1 + b_1$
se $\mathcal{L}(y_2) = b_2$ cioè $y_2' = a(t)y_2 + b_2$
allora $\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1b_1 + c_2b_2$ cioè $y'_{(t)} = a(t)(c_1y_1 + c_2y_2) + c_1b_1 + c_2b_2$
cioè $(c_1y_1 + c_2y_2)' = a(t)(c_1y_1 + c_2y_2) + c_1b_1 + c_2b_2$
Oss:

- Prendo due soluzioni distinde della EDO
- $y' = a(t)y + b(t)$

1.1.7 Esistenza e unicità globale di Cauchy

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a, b : J \to \mathbb{R}$ continue.
Per ogni $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $y : J \to \mathbb{R}$ definita su J.
Aggiungi parte in blu lezione 16/09/2022

1.1.8 Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine

$a, b : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$
L'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} + \left(\int e^{-A(x)} b(x) dx + c \right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a.

Dimostrazione 1. da sapere all'esame

- *Porto ay sulla sinistra*
  $y' - ay = b$
- *Moltiplico l'equazione per* e^{-A}
  $e^{-A}y' - e^{-A}ay = e^{-A}b$

- *Riconosco*
  $y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)} = \left(y(t)e^{-A(t)}\right)$
  Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:
  $(ye^{-A})' = be^{-A}$

- *Integro*
  $y(t)e^{-A(t)} = \int be^{-A(t)}dt + c$

- *Moltiplico tutto per* $e^{A(t)}$
  $y(t) = e^{A(t)}\left(\int be^{-A(t)}dt + c\right)$

1.1.9 Equazione di Bernoulli

Definizione 9. *Si chiamano* equazione di Bernoulli *le EDO del 1° ordine lineari di forma:*

$$y'_{(t)} = k(t)y_{(t)} + h(t)y^{\alpha}_{(t)} \quad \forall\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

con $k, y : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Premesse:

1. Per semplificare ci occupiamo solo di soluzioni $y \geq 0$
2. nel caso $\alpha < 1$ accadono fenomeni strani, però la tecnica risolutiva è comunque valida

Procedimento di risoluzione:

1. Cerchiamo le soluzioni costanti (c'è sempre almeno quella nulla)
2. divido per y^{α}
   $y'(t) = k(t)y(t) + h(t)$
   $y'(t) = k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)$
3. Pongo $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$
   Quale è l'equazione soddisfatta da z?
   $z'(t) = (1-\alpha)\left[k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)\right]$
   $z'(t) = (1-\alpha)\,k(t)z(t) + (1-\alpha)\,h(t)$
4. Risolvo l'equazione lineare in z
5. Torno alla variabile $y = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

1.1.10 Equazione Logistica

$y(t) =$ numero di individui infetti al tempo t
$y : J \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

1° Modello: Malthus (inizio '800)
Il tasso di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

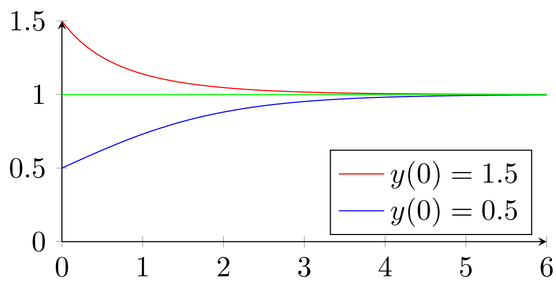
$$y'(t) = ky(t)$$

dove $k \in \mathbb{R}^+$ è la *tasso di crescita* e k è il coefficiente di proporzionalità, dato dalla differenza tra tasso di natalità e tasso di mortalità.
integrale generale: $y(t) = y(0)e^{kt}$conc > 0

2° Modello: Verhulst (metà '800)

$$y'(t) = ky(t) - hy(t)^2 \quad \text{con } k, h > 0$$

Il modello prende anche in considerazione la competizione per le risorse al crescere della popolazione.
Simulazione numerica per $k = h = 1$



Integrale generale dell'Equazione Logistica
Trovo l'integrale generale risolvendo come Bernoulli

1. Soluzioni costanti $y(t) = 0, \quad y(t) = \frac{k}{h}$
2. Divido per y^2 : $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = \frac{k}{y(t)} - h$
3. Pongo $z'(t) = \frac{1}{y(t)} = -\frac{k}{y(t)} + h = -kz(t) + h$ ricavo che $z'(t) + kz(t) = h$
4. $z(t) = e^{-\int k}[\int e^{\int k} h dx + c]$

   $= e^{-kt}[h \int e^{kx} dx + c]$

   $= e^{-kt}[\frac{h}{k} e^{kt} + c]$

   $= \frac{\frac{h}{k} e^{kt} + c}{e^{kt}}$
5. $y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{e^{kt}}{\frac{h}{k} e^{kt} + c} = \frac{ke^{kt}}{he^{kt} + kc}$
   possiamo scrivere $kc = c'$ in quanto costante arbitraria

1.2 Equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine lineari

1.2.1 Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee

Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue e $a \neq 0$ in I.
L'integrale generale dell'eq. omogenea

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1} + c_2 y_{0_2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$$

dove y_{0_1}, y_{0_2} sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Oss: Dire che due soluzioni sono linearmente indipendenti significa che non esiste un coefficiente c tale che $c \cdot y_1 = y_2$, ovvero che non sono una multipla dell'altra.
Premesse:

1. Spazio vettoriale $V = C^2(I)$
2. $I \subseteq \mathbb{R}$ funzione di 1 variabile $y(t)$
3. $C^2(I) = \{y : I \to \mathbb{R}$, derivabili in I e y' continua in $I\}$
4. $C^2(I) = \{y \in C^1(I)$, derivabili due volte in I con y'' continua in $I\}$
5. $C^2(I)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali di somma di funzioni e prodotto di funzione per uno scalare.

Dimostrazione 2. da sapere all'esame

- *L'integrale generale dell'omogenea è:*
  $W = \{y \in V : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0\}$
- *W è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow$ è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).*
- *Devo dimostrare che W ha dimensione 2.*
  - *i) Determinare 2 soluzioni lineari indipendenti dell'equazione y_{0_1}, y_{0_2}*
  - *ii) Dimostrare che ogni soluzione y della EDO si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2}*

i) Scelgo y_{0_1} soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{cases} ay''_{0_1}(t) + by'_{0_1}(t) + cy_{0_1}(t) = 0 \\ y_{0_1}(0) = 1 \\ y'_{0_1}(0) = 0 \end{cases}$$

Verifico che y_{0_1}, y_{0_2} sono soluzioni lineari indipendenti. Se per assurdo fossero una multiplo dell'altra
$y_{0_1}(t) = \lambda y_{0_2}(t) \quad \forall t$
In particolare, per $t = 0$ avrei $y_{0_1}(0) = \lambda y_{0_2}(0)$ avrei trovato $1 = \lambda \cdot 0$ assurdo.

ii) Sia $y_0(t)$ soluzione dell'EDO, cerco $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t)$
$y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t) = c_1$
$y'_0(t) = c_1 y'_{0_1}(t) + c_2 y'_{0_2}(t) = c_2$

In conclusione la funzione:
$z(t) = y_0(0) \cdot y_{0_1}(t) + y'_0(0) \cdot y_{0_2}(t)$
risolve lo stesso problema di Cauchy di $y_0(t)$ e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:
$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$
cioè $y_0(t)$ si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2} con coefficienti $c_1 = y_0(0)$ e $c_2 = y'_0(0)$.

1.2.2 Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee

Siano $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ in I
L'integrale generale dell'eq. completa

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

è:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

dove la $y_0(t)$ è l'integrale dell'eq. omogenea, come nel teorema precedente, e la $y_p(t)$ è una soluzione particolare dell'eq. compleata.

Oss: L'integrale generale di una EDO del secondo ordine lineare non omogenea è quindi uno spazio affine (cioè il translato di uno spazio vettoriale) di dimensione 2.

Fine lezione 21/09 c'è una scritta in fondo in rosso che non so cosa sia.

1.3 Sistemi differenziali lineari

Esempio introduttivo $F = ma$

$$y''(t) = \frac{F}{m}$$

Trasformo in un sistema di due equazioni differenziali di primo ordine:
$y_1(t) = y(t)$: posizione e $y_2(t) = y'(t) = y_1'(t)$: velocità.

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & \text{la velocità è la derivata della posizione} \\ y_2'(t) = \frac{F}{m} & \text{l'accelerazione è la derivata della velocità} \end{cases}$$

In forma matriciale:

E mo come la disegno?

...

In forma compatta: $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}$$

Esercizi:

Esercizi qua

Definizione 10. Sistema differenziale lineare *è un sistema di equazioni differenziali di primo ordine con coefficienti costanti, cioè:*

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$

dove A è una matrice quadrata di ordine n e $\underline{b}$ è un vettore di dimensione n.

1.3.1 Risultati teorici

Come si scrive un problema di Cauchy per un sistema?
Esempio: $y''(t) - 2y'(t) = t$ con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$
Trasformo la EDO in sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + t \end{cases}$$

Un problema di Cauchy è

$$\begin{matrix} y_1(t_0) = y_0 \\ y_2(t_0) = v_0 \end{matrix} \qquad \underline{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Definizione 11. *Dato* $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$ *con* A *matrice quadrata di ordine* n *e* $\underline{b}$ *vettore di dimensione* n
chiamiamo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = A \cdot y(t) + \underline{b}(t) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Esempi

C'è una pagina che non so se è spiegazione o esercizi, ci sono parti scritte in LaTeX e altre a mano.
***
***
Prosegue poi con i sistemi omogenei.

1.4 Sistemi non omogenei

1.4.1 Struttura dell'int. gen. dei sistemi non omogenei

Manca la definizione.

Praticamente, per risolvere un sistema non omogeneo:

1. Si risolve il sistema omogeneo associato. Cioè determino una matrice Wronskiana $W(t) = [y_{0_1}(t) \dots y_{0_n}(t)]$
   Integrale generale: $\underline{y}(t) = W(t) \cdot \underline{c}, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n$

2. Due possibilità:
   - cerco una soluzione particolare con il metodo di somiglianza
     $\underline{y}(t) = \underline{y}_0(t) + \underline{y}_p(t) = W(t) \cdot \underline{c} + \underline{y}_p(t)$
   - uso $W(t)$ per trovare direttamente l'integrale generale tramite la formula:
     $\underline{y}(t) = W(t) \left(\int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) \right) = W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + W(t) \cdot \underline{c}$ Confronto le due soluzioni.
     Nella prima ho $W(t) \cdot \underline{c}$ e anche nella seconda, ed è l'integrale generale dell'omogenea.
     Quindi $y_p(t) = \underline{y}(t) - W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau$ perché è ciò che resta da uguagliare.
     In particolare, se A è diagonalizzabile reale, allora una matrice Wronskiana è $W(t) = e^{At}$
     $\underline{y}(t) = e^{At} \left[\int e^{-At} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + \underline{c} \right]$
     Osservazioni da aggiungere.
     Esempio da aggiungere.

2 Serie di funzioni

2.1 Generalità sulle serie di funzioni

Esempio: Sviluppi di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Definizione 12.
Date delle funzioni $f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad n = (0, 1, 2, \dots)$

- *La serie di funzioni a termine generale* $f_n(x)$ *è la successione delle somme parziali*
  $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$
  Oss: *Fissato* $\overline{x} \in J$ *si tratta di una serie numerica*

- *La serie di funzioni converge puntualmente (o semplicemente) nel punto* $\overline{x}_0 \in J$ *se la serie numerica di termini generale* $f_n(\overline{x})$ *è convergente, cioè se esiste finito il limite:*
  $\lim_{n\to\infty} S_n(\overline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\overline{x})$

- *Chiamiamo insieme di convergenza puntuale (o semplice) l'insieme* $E \subseteq J$ *dei punti* $\overline{x}_0$ *in cui la serie di funzioni converge puntualmente.*
  Nell'insieme E *risulta così definita una nuova funzione, detta somma della serie, che si indica con il simbolo:*
  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in E)$
  Significa:
  $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_k(x) \quad (x \in E)$

- *La serie di funzioni converge assolutamente in* $\overline{x} \in J$ *se la serie numerica di termine generale* $f_n(\overline{x})$ *converge.*
  Oss: *la convergenza assoluta...*

Esempio fondamentale: Serie geometrica.
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

*Oss.*Servirà per la serie di potenze: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$
insieme convergenza puntuale $E = (-1, 1) = \{|x| < 1\}$
Per $x \leq -1$ è indeterminata
per $x \geq 1$ è divergente
per ...

Serie di Riemann
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ $\quad f_n(x) = \frac{1}{n^x} = \left(\frac{1}{n}\right)^x$ L'insieme di convergenza puntuale è:
$E = (1, \infty) = \{x > 1\}$
La convergenza è anche assoluta in E perché per $x \in E$ $\quad |f_n(x)| = f_n(x)$

Se $x = 1$ è la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.

Problema: se le funzioni f_n sono continue, anche f lo è? **Segue...**

2.1.1 Convergenza totale di una serie di funzioni

copiare appunti della prof, formule e grafici

Definizione 13. *Importante*
Diciamo che la serie di termine generale $f_n(x), x \in J$ converge totale in $I \in J$ se esiste una successione numerica a_n tale che:

i) $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - a_n| = 0 \quad \forall x \in I \quad \forall n$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

Oss:

- La nozione di convergenza totale riguarda un intervallo, mai un punto.
- La convergenta totale in I implica la convergenza assoluta (quindi anche puntuale) in ogni punto di I.
- **Attenzione:** non vale il viceversa: se una serie converge assolutamente in ogni punto di I non è detto che converga totalmente in I.

inizio lezione 05/10/2022

Oss: Se una serie di funzioni converge totalmente in I allora converge totalmente in ogni sottoinsieme di I.
Esercizio: Studiare la convergenza totale della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

Esercizio: Studiare la convergenza totale della serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Appunti su convergenza semplice, assoluta, puntuale, e totale

2.1.1 Conseguenze della convergenza totale

Teorema 1. *Continuità della somma*
Siano $f_n(x)$ funzioni definite su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se:

i) $f_n(x)$ è continua in I per ogni n

ii) la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente in I

Allora la funzione somma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è continua in I.
Oss: *in particolare, f è integrabile in ogni sottoinsieme chiuso e limitato $[c, d] \subseteq I$*

Teorema 2. *Integrabilità termine a termine*
Nelle stesse ipotesi del teorema precedente f è integrabile in ogni $[c, d] \subseteq I$ chiuso e limitato e inoltre:

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_c^d f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_c^d f_n(x)dx \right)$$

Quindi posso scambiare il simbolo di serie e quello di integrale.

Oss: Se $f(n)$ derivabili in I e $\sum^{\infty} f'_n$ converge totalmente in I allora $(\sum^{\infty} f_n(x))' = \sum^{\infty} f'_n(x)$

2.2 serie di potenze

Definizione 14. *Una serie di potenze è una serie di funzioni della forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

Con $a_n \in \mathbb{R}$ coefficienti della serie
$x_0 \in \mathbb{R}$ centro della serie

Convenzione: se $x = x_0$ e $n = 0$ $(x_0 - x_0)^0 = 1$. Quindi, per $x = x_0$ la serie di potenze diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_0)^n = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)^2 + \cdots = a_0$$

Cioè tutte le serie di potenze convergono almeno nel loro centro $x = x_0$.

inizio lezione 07/10/2022

ripasso convergenza totale
integra

- vedremo in dettaglio che la serie esponenziale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad a_n = \frac{1}{n!}$ ha come insieme di convergenza $\mathbb{R}$
  la serie *mettiserie* converge rapidamente. Criterio del rapporto $l = lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim n \to \infty \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

- la serie logaritmica $ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ $\quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ha come insieme di convergenza $E = (-1, 1)$

Teorema 3. *Raggio di convergenza*
La serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ si verifica sempre una delle tre:

1. *raggio di convergenza nullo: la serie converge solo nel suo centro $x = x_0$*
2. *raggio di convergenza infinito: la serie converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$*
3. *raggio di convergenza $0 < R < +\infty$: esiste $R > 0$ tale che:*
   - *la serie converge assolutamente $\forall x$ tale che $|x - x_0| < R$*
   - *la serie non converge per $|x - x_0| > R$*

Oss: *in $|x_0 + R|$ e $|x_0 - R|$ potrebbe convergere o no, va studiato a parte in ogni esercizio.*

Teorema 4. *Calcolo del raggio di convergenza*
Data una serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

i) se il limite esiste.
$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

allora la serie di potenze ha raggio di convergenza R.

ii) *se esiste il limite* $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ *allora la serie di potenze ha raggio di convergenza R.*

Dimostrazione 3. da sapere all'esame
La serie di potenze converge assolutamente nel punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ *se e solo se* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\overline{x} - x_0|^n$ *converge.*

- *se il criterio del rapporto è applicabile, ho convergenze se e solo se* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1 \Leftrightarrow |\overline{x} - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$
- *se il criterio della radice è applicabile, la serie converge se e solo se* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} < 1$ ***manca roba***

Teorema 5. *Data una serie di potenze avente raggio di convergenza* $0 < R \leq +\infty$ *si ha:*

i) *se* $R = +\infty$ *la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato* $[c, d]$

ii) *se* $0 < R < +\infty$ *la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso* $[c, d] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$

Teorema 6. *Data una serie di potenze reale* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *avente raggio di convergenza* $0 < R < +\infty$*, per ogni* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *vale la formula di integrazione termine a termine:*

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

La serie di potenze integrata $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ *converge per* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*.*

Osservazione Importante: Se la serie di potenze iniziale converge in $x_0 - R$ (o $x_0 + R$) posso integrare termine a termine fino a $x_0 - R$ (o $x_0 + R$).

...

Teorema 7. *Derivabilità termine a termine per serie di potenze reali*
Data una serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *avente raggio di convergenza* $0 < R < +\infty$, *per ogni* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *vale la formula di derivazione termine a termine.*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1}$$

e la serie di potenze derivata ha raggio di convergenza R.
Si può iterare per ottenere serie derivate di ogni ordine, tutte con raggio di convergenza R.

Conseguenza: la somma di una serie di potenze è derivabile ad ogni ordine.
Oss: la serie derivata ha ancora raggio di convergenza R, ma il comportamente ai bordi $x_0 \pm R$ può variare rispetto alla serie inerziale.

2.3 Lezione del 12/10/2022

Definizione 15. *Una funzione di una variabile reale* f *è detta analitica reale nell'intevallo non vuoto* (a,b) *se è somma di una serie di potenze in* (a,b), *cioè se esistono* $x_0 \in (a,b), a_n \in \mathbb{R}$ *e tale che:*
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *per ogni* $x \in (a,b)$.

Se f è analitica in (a,b):

- Qual è la regolarità minima di f?
  Risposta: f derivabile ad ogni ordine in (a,b).

- Chi sono i coefficienti a_n?
  Risposta: $f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0$
  $f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} = a_1$
  $f''(x_0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) (x-x_0)^{n-2} = 2a_2$
  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Teorema 8. Funzioni analitiche reali
Se f *è analitica reale nell'intervallo non vuoto* (a,b) *allora è derivabile ad ogni ordine in* (a,b) *e per ogni* $x_0 \in (a,b)$ *è sviluppabile in serie di Taylor. Cioè:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad x \in (a,b)$$

Inoltre, detto R il raggio di convergenza della serie, l'identità è verificata per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Serie esponenziale

La funzione e^x è analitica in $\mathbb{R}$ (non dimostriamo)
La sua serie di Taylor con $x_0 = 0$ è:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

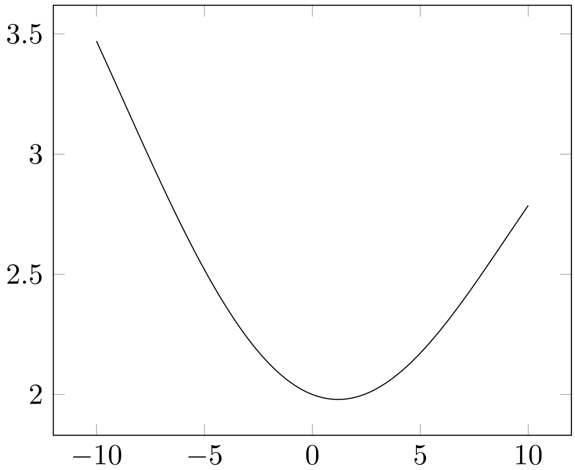
Il raggio di convergenza è $R = +\infty$

oss: Non tutte le funzioni derivabili ad ogni ordine in un intervallo sono analitiche in quell'intervallo. [es. BCFTV II.4]

2.4 serie di Fourier

Segnale sonoro periodico:

$$f(x) = 3\cos(x) - \sin(2x) - \cos(10x)$$



Per trasmettere il segnale basta comunicare i coefficienti:

integra

Lezione del 14/10/2022

Funzioni periodiche, polinomi e serie trigonometriche
Ricordiamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo T se $f(x) = f(x+T)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Oss:

- Non ci sono ipotesi di regolarità su f.
- Se f è periodica di periodo T allora è anche periodica di periodo $2T, 3T, 4T \cdots$
- Se f è periodica di periodo T ed è pari (rispettivamente dispari) sul suo periodo, allora è anche pari (rispettivamente dispari) su $\mathbb{R}$.

Definizione 16. *Chiamiamo armoniche n-esime le funzioni:*

$$\cos(nx), \sin(nx) \qquad x \in \mathbb{R} n = 1, 2, 3, \cdots$$

Ogni armonica n-esima è periodica di periodo $\frac{2\pi}{n}$.

Oss: Tutte le armoniche n-esime sono anche periodiche di periodo 2π
Caso speciale: $n = 0$ la funzione costante 1.

2.4.1 Formule di ortogonalità

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ \pi & \text{se } n = k \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ \pi & \text{se } n = k \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)dx = 0$$

Definizione 17. *Un polinomio trigonometrico di ordine n è una combinazione lineare di armoniche n-esime con $n = 0, 1, 2, \cdots, m$, cioè:*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \; a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}$$

Oss:

- un polinomio trigonometrico è periodico di periodo 2π
- la somma, differenza, prodotto di due polinomi trigonometrici è ancora un polinomio trigonometrico.

Definizione 18. *Una serie trigonometrica è:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Con $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$

Ogni polinomio trigonometrico è 2π-periodico, quindi la somma di una serie trigonometrica è 2π-periodica.
Per questo motivo supporremo sempre che la funzione che vogliamo decomporre sia 2π-periodica.

Derivando termine a termine una serie trigonometrica si può perdere regolarità. Questo differenzia le serie trigonometriche dalle serie di potenze, che sono sempre derivabili ad ogni ordine dentro il raggio di convergenza.

Teorema 9. *Convergenza totale di una serie trigonometrica*
Data la serie trigonometrica $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$ allora la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.
In particolare, la funzione somma è continua in $\mathbb{R}$ e posso integrare termine a

termine in ogni sottoinsieme limitato.

ii) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (|a_n| + |b_n|) = +\infty$ *allora la funzione somma è derivabile in* $\mathbb{R}$ *e posso derivare termine a termine.*

Oss: ci interesseranno anche le serie di Fourier che non convergono totalmente in $\mathbb{R}$, cioè tali che $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = +\infty$ Infatti se il segnale periodico $f(x)$ che voglio comporre non è continuo su $\mathbb{R}$ allora la convergenza della serie trigonometrica non può essere totale in $\mathbb{R}$.

2.4.2 Costruzione della serie di Fourier di una funzione periodica

Teorema 10. *Calcolo dei coefficienti di Fourier*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 2\pi$ *una funzione periodica e somma di una serie trigonometrica*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Supponiamo inoltre di poter integrare termine a termine. Allora:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)dx$$

Dimostrazione 4. da sapere all'esame

- *Integro* f *in* $(-\pi, \pi)$, *uso integrazione temrine a termine e formula di ortogonalità:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx$$

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi a_0$$

- *Per trovare a_n, moltiplico f per $\cos nx$, integro in $(-\pi, \pi)$, uso l'integrabilità termine a termine ele formule di ortogonalità:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \cos(nx)dx$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)dx$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = a_n \pi$$

- *Per trovare b_n, moltiplico per* $\sin(nx)$

Piano di lavoro: data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica integrabile in $[-\pi, \pi]$:

1. Calcolo i coefficienti a_0, a_n, b_n con le formule trovate nel teorema precedente
2. Con questi coefficienti costruisco la serie trigonometrica
3. Studio la convergenza della serie trigonometrica e, in particolare cerco di stabilire se la somma coincide con f in ogni punto

Definizione 19. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, integrabile in $[-\pi, \pi]$.*

- *Chiamiamo coefficenti di Fourier di f i valori a_0, a_n, b_n definiti nel teorema precedente*
- *polinomio di Fourier di f di ordine m il polinomio trigonometrico*

$$F_m(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- *Serie di Fourier di f la serie trigonometrica*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \lim_{m\to\infty} F_m(x)$$

Importantissimo *per gli esercizi:*

- se f è pari, si sviluppa in soli coseni, cioè $b_n = 0$ per ogni n.
- se f è dispari, si sviluppa in soli seni, cioè $a_n = 0$ per ogni n.

Lezione del 19/10/2022

Esempio: dente di sega
$f(x) = x$
per $x \in (-\pi, \pi]$ Essendo f dispari:

- si sviluppa in soli seni, cioè $a_0 = a_n = 0 \quad \forall n$
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx = -2\frac{(-1)^n}{n}$

La serie di Fourier di f è:

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$$

Esempio: Tenda
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica e
$f(x) = (x-\pi)^2$ per $x \in (0, 2\pi]$
f pari, quindi:

- $b_n = 0 \quad \forall n$
- $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\cos nx dx$

Quindi:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n =$$

2.4.1 Convergenza della seride di Fourier

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, integrabile in $[-\pi, \pi]$:

Definizione 20. *Data $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ se esiste un numero finito di punti $x_0, x_1, \cdots, x_n$ in $[-\pi, \pi]$ tali che f e derivabile in $(x_i, x_{i+1}) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$ ed esistono finiti i limiti:*

$$\lim_{x \to x_i^-} f'(x) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$\lim_{x \to x_i^+} f'(x) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$$

Oss: Se f è periodica e regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$, allora:

- f è regolare a tratti in qualunque intervallo limitato.

- Si avrà anche che f è continua in $(x_i, x_{i+1}) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$. ed esistono finiti i limiti:
$$\lim_{x \to x_i^-} f(x) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$$
$$\lim_{x \to x_i^+} f(x) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$$
- f è integrabile su qualunque intervallo limitato.
- **Facoltativo:** BCFTV, esercizio $II.12$. La sua serie di Fourier è integrabile termine a termine.

Teorema 11. *Della convergenza puntuale delle serie di Fourier*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$.
Allora la serie di Fourier di f converge puntualmente $\forall \mathbb{R}$ e inoltre

$$\lim_{m \to +\infty} F_m(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{s \to x^+} f(s) + \lim_{s \to x^-} f(s) \right]$$

Parafrasando: la serie di F converge puntualmente alla media tra $f(x^+)$ e $f(x^-)$.
In particolare:
$$f \text{continua in } x \Longrightarrow \lim_{m \to +\infty} F_m(x) = f(x)$$

Teorema 12. *Convergenza totale della serie di Fourier*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$.
Se inoltre f è continua in tutto $\mathbb{R}$, allora la serie di Fourier di f converge totalmente a f in tutto $\mathbb{R}$.

2.5 Lezione del 21/10/2022

Ripasso
tde 16/02/2021

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in (0, \pi] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f regolare a tratti, quindi al serie di Fourier converge $\forall x$
Funzione somma $S(x) = \lim_{x \to +\infty} F_m(x)$
Se f è continua in x, allora $S(x) = f(x)$
Nei punti dove f è discontinua, cioè $x = 2k\pi$,

$$S(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{s \to x^+} f(s) + \lim_{s \to x^-} f(s) \right) = 0 = f(x)$$

Conclusione: $S(x) = f(x)\ \forall x$
Riguardo la convergenza totale:

In ogni intervallo dove S è discontinua, la convergenza non può essere totale

---

Teorema 13. *Convergenza in media quadratica*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$.
Allora:

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (F_m(x) - f(x))^2 \, dx = 0$$

Spiegazione: si può dimostrare che la convergenza media quadratica implica:

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

L'area sottesa al grafico di F_m^2 converge all'area sottesa al grafico di f^2 (per $m \to +\infty$)