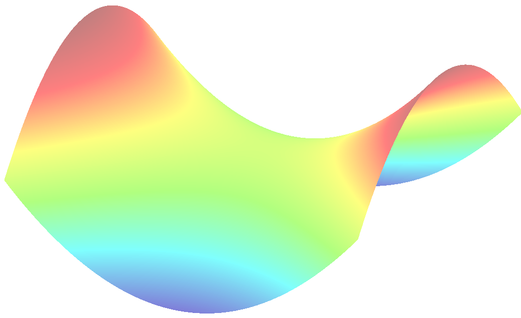
Appunti di Analisi Matematica II

corso della prof.ssa B.Noris
Politecnico di Milano



F. Piazza

30 novembre 2022

Gli esami non finiscono mai, amico mio! Così è la vita.

- *Denis Ivanovič Fonvizin*

Indice

0 Cenni di Analisi I e Algebra Lineare

0.1 Regole di integrazione e derivazione

0.2 Serie numeriche

0.3 Determinante di una matrice

1 Equazioni differenziali

1.1 Equazioni differenziali del 1° ordine

Definizione 1. *Una equazione differenziale o* EDO *del 1° ordine è una relazione tra una funzione y e la sua derivata y' che può essere scritta come*

$$y' = f(y) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in \mathbb{D} \equiv \mathbb{R}$$

dove f è una funzione continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Esempi:

- *Tema d'esame gennaio 2021*
  $y' = t\sqrt{y_{(t^2)} + 1}$ è in forma normale con $f(t, s) = t\sqrt{s^2 + 1}$. Il dominio di f è $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.
- $y'_{(t)} = \frac{1}{t}$ con $t > 0$ diventa $f(t, s) = \frac{1}{t}$. **Oss:** f non dipende esplicitamente da s.
  Il dominio di f è $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*\}$, dunque è diviso in due parti. Dovrò quindi risolvere la EDO separatamente nelle due regioni.

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{1}{t}, t > 0 \Rightarrow y(t) = ln(t) + c \\ y'(0) = \frac{1}{t}, t < 0 \Rightarrow y(t) = ln(-t) + c \end{cases}$$

Definizione 2. *Si chiama* integrale generale *l'insieme delle soluzioni dell'EDO omogenea associata.*

Definizione 3. *Si chiama* soluzione particolare *una specifica soluzione.*

Una EDO del 1° ordine ha ∞^1, soluzioni, cioè avrà una costante arbitraria. In modo analogo, una EDO del 2° ordine avrà ∞^2 soluzioni, cioè avrà due costanti arbitrarie. Esempi:

- integrale generale ce^t con c costante arbitraria. Esempi di soluzioni particolari: e^t, $2e^t$, $-e^t$.
- $z_{(t)} = -1 + arctan(t)$ con $t \in \mathbb{R}^*$. Esempio di soluzione: $z' = 0 + \frac{1}{1+t^2}$.

Oss: La EDO $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ è definita per $(t, y) \in dom(f)$

1.1.1 Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine

Definizione 4. *Una soluzione costante di una EDO del 1° ordine è una funzione $y(t)$ che sia soluzione.*

Quando $y(t) = c$ è soluzione? Sostituisco c a y:

$$y'(t) = f(t, y(t))\forall t$$

Quindi <u>le soluzioni costanti sono</u> $y(t) = c$ <u>con c tale che</u> $f(t, c) = 0\forall t$.

Esempi:

- Eq. Logistica: $y'(t) = ky(t) - hy^2(t)$
  $f(t, y) = ky - hy^2$
  $f(t, c) = 0 \forall t \quad ky - hy^2 = 0 = y(k - hy)$
  Soluzioni costanti: $y = 0$ o $y = \frac{k}{h}$

- $y'(t) = te^{y(t)} \quad te^{y(t)} = 0$ non ha soluzione.

1.1.2 EDO a variabili separabili

Definizione 5. *Una EDO del 1° ordine è detta* a variabili separabili *se è del tipo*

$$y' = f(t) \cdot g(y(t))$$

dove f e g sono funzioni continue su intervalli $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Esempio $y'(t) = \frac{1}{t} \;\; h(t) = \frac{1}{t} \;\; j_1 = (-\infty, 0)U(0, \infty) = \mathbb{R}$-0

1.1.3 Problema di Cauchy

Definizione 6. *Data una EDO del 1° ordine $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ sia (t_0, y_0) dove la EDO è definita. Cioè $(t_0, y_0) \in dom(f)$*
Si chiama problema di Cauchy *il problema di determinare $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa:*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: il sistema ha una condizione perché è del 1° ordine. La condizione trova la soluzione particolare che passa per (t_0, y_0).

1.1.4 Risolvere il problema di Cauchy

Step:

1. Trova l'integrale generale. (∞^1 soluzioni dipendenti da 1 parametro)
2. Impongo la condizione $y(t_0) = y_0$ e trovo la costante c
3. Sostituisco c in 1.

1.1.5 EDO 1° ordine lineari

Definizione 7. *Una EDO del 1° ordine lineare in forma normale è:*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)} + b(t)$$

dove a e b sono funzioni continue su un intervallo J di $\mathbb{R}$.
N.B. *J è il più grande intervallo di $\mathbb{R}$ tale che $a, b \in J$.*

Definizione 8. *Si chiama EDO omogenea associata*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)}$$

1.1.6 Principio di sovrapposizione

Sia $a : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su J.
L'applicazione $\mathcal{L}(y) = y' - a(t) \cdot y$ è lineare.

Più esplicitamente, dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:
$\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathcal{L}(y_1) + c_2 \mathcal{L}(y_2) \forall y_1, y_2$ funzioni derivabili.

Ancora più esplicitamente: se $\mathcal{L}(y_1) = b_1$ cioè $y_1' = a(t)y_1 + b_1$
se $\mathcal{L}(y_2) = b_2$ cioè $y_2' = a(t)y_2 + b_2$
allora $\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 b_1 + c_2 b_2$ cioè $y'_{(t)} = a(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) + c_1 b_1 + c_2 b_2$
cioè $(c_1 y_1 + c_2 y_2)' = a(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) + c_1 b_1 + c_2 b_2$
Oss:

- Prendo due soluzioni distinde della EDO
- $y' = a(t)y + b(t)$

1.1.7 Esistenza e unicità globale di Cauchy

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a, b : J \to \mathbb{R}$ continue.
Per ogni $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $y : J \to \mathbb{R}$ definita su J.

1.1.8 Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine

$a, b : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$
L'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} + \left(\int e^{-A(x)} b(x) dx + c \right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a.

Dimostrazione 1. da sapere all'esame

- *Porto ay sulla sinistra*
  $y' - ay = b$
- *Moltiplico l'equazione per* e^{-A}
  $e^{-A}y' - e^{-A}ay = e^{-A}b$
- *Riconosco*
  $y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)} = \left(y(t)e^{-A(t)}\right)$

Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:
$(ye^{-A})' = be^{-A}$

- *Integro*
  $y(t)e^{-A(t)} = \int be^{-A(t)}dt + c$

- *Moltiplico tutto per* $e^{A(t)}$
  $y(t) = e^{A(t)} \left(\int be^{-A(t)}dt + c \right)$

1.1.9 Equazione di Bernoulli

Definizione 9. *Si chiamano* equazione di Bernoulli *le EDO del 1° ordine lineari di forma:*

$$y'_{(t)} = k(t)y_{(t)} + h(t)y^{\alpha}_{(t)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

con $k, y : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Premesse:

1. Per semplificare ci occupiamo solo di soluzioni $y \geq 0$
2. nel caso $\alpha < 1$ accadono fenomeni strani, però la tecnica risolutiva è comunque valida

Procedimento di risoluzione:

1. Cerchiamo le soluzioni costanti (c'è sempre almeno quella nulla)
2. divido per y^{α}
   $y'(t) = k(t)y(t) + h(t)$
   $y'(t) = k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)$
3. Pongo $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$
   Quale è l'equazione soddisfatta da z?
   $z'(t) = (1-\alpha)\left[k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)\right]$
   $z'(t) = (1-\alpha)\,k(t)z(t) + (1-\alpha)\,h(t)$
4. Risolvo l'equazione lineare in z
5. Torno alla variabile $y = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

1.1.10 Equazione Logistica

$y(t) =$ numero di individui infetti al tempo t
$y : J \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

1° Modello: Malthus (inizio '800)
Il tasso di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

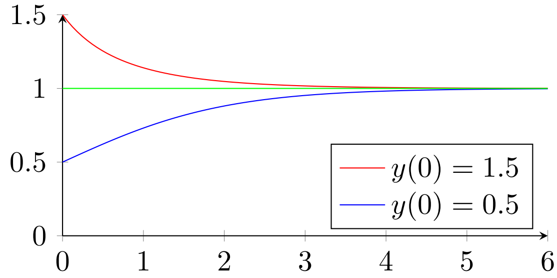
$$y'(t) = ky(t)$$

dove $k \in \mathbb{R}^+$ è la *tasso di crescita* e k è il coefficiente di proporzionalità, dato dalla differenza tra tasso di natalità e tasso di mortalità.
integrale generale: $y(t) = y(0)e^{kt}$ con $c > 0$

2° Modello: Verhulst (metà '800)

$$y'(t) = ky(t) - hy(t)^2 \quad \text{con } k, h > 0$$

Il modello prende anche in considerazione la competizione per le risorse al crescere della popolazione.
Simulazione numerica per $k = h = 1$



1.2 Equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine lineari

1.2.1 Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee

Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue e $a \neq 0$ in I.
L'integrale generale dell'eq. omogenea

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1} + c_2 y_{0_2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$$

dove y_{0_1}, y_{0_2} sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Oss: Dire che due soluzioni sono linearmente indipendenti significa che non esiste un coefficiente c tale che $c \cdot y_1 = y_2$, ovvero che non sono una multipla dell'altra.
Premesse:

1. Spazio vettoriale $V = C^2(I)$
2. $I \subseteq \mathbb{R}$ funzione di 1 variabile $y(t)$
3. $C^2(I) = \{y : I \to \mathbb{R}$, derivabili in I e y' continua in $I\}$
4. $C^2(I) = \{y \in C^1(I)$, derivabili due volte in I con y'' continua in $I\}$
5. $C^2(I)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali di somma di funzioni e prodotto di funzione per uno scalare.

Dimostrazione 2. da sapere all'esame

- *L'integrale generale dell'omogenea è:*
  $W = \{y \in V : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0\}$
- *W è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow$ è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).*
- *Devo dimostrare che W ha dimensione 2.*
  - *i) Determinare 2 soluzioni lineari indipendenti dell'equazione* y_{0_1}, y_{0_2}
  - *ii) Dimostrare che ogni soluzione y della EDO si scrive come combinazione lineare di* y_{0_1}, y_{0_2}

i) *Scelgo* y_{0_1} *soluzione del problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} ay''_{0_1}(t) + by'_{0_1}(t) + cy_{0_1}(t) = 0 \\ y_{0_1}(0) = 1 \\ y'_{0_1}(0) = 0 \end{cases}$$

Verifico che y_{0_1}, y_{0_2} *sono soluzioni lineari indipendenti. Se per assurdo fossero una multiplo dell'altra*
$y_{0_1}(t) = \lambda y_{0_2}(t) \quad \forall t$
In particolare, per $t = 0$ *avrei* $y_{0_1}(0) = \lambda y_{0_2}(0)$ *avrei trovato* $1 = \lambda \cdot 0$ *assurdo.*

ii) *Sia* $y_0(t)$ *soluzione dell'EDO, cerco* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *tali che* $y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t)$
$y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t) = c_1$
$y'_0(t) = c_1 y'_{0_1}(t) + c_2 y'_{0_2}(t) = c_2$

In conclusione la funzione:
$z(t) = y_0(0) \cdot y_{0_1}(t) + y'_0(0) \cdot y_{0_2}(t)$
risolve lo stesso problema di Cauchy di $y_0(t)$ *e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:*
$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$
cioè $y_0(t)$ *si scrive come combinazione lineare di* y_{0_1}, y_{0_2} *con coefficienti* $c_1 = y_0(0)$ *e* $c_2 = y'_0(0)$.

1.2.2 Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee

Siano $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ in I
L'integrale generale dell'eq. completa

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

è:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

dove la $y_0(t)$ è l'integrale dell'eq. omogenea, come nel teorema precedente, e la $y_p(t)$ è una soluzione particolare dell'eq. compleata.

Oss: L'integrale generale di una EDO del secondo ordine lineare non omogenea è quindi uno spazio affine (cioè il translato di uno spazio vettoriale) di dimensione 2.

1.3 Sistemi differenziali lineari

Esempio introduttivo $F = ma$

$$y''(t) = \frac{F}{m}$$

Trasformo in un sistema di due equazioni differenziali di primo ordine:
$y_1(t) = y(t)$: posizione e $y_2(t) = y'(t) = y'_1(t)$: velocità.

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) & \text{la velocità è la derivata della posizione} \\ y'_2(t) = \frac{F}{m} & \text{l'accelerazione è la derivata della velocità} \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) \\ y'_2(t) = \frac{F}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}$$

In forma compatta: $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}$$

Definizione 10. Sistema differenziale lineare *è un sistema di equazioni differenziali di primo ordine con coefficienti costanti, cioè:*

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$

dove A è una matrice quadrata di ordine n e $\underline{b}$ è un vettore di dimensione n.

1.3.1 Risultati teorici

Come si scrive un problema di Cauchy per un sistema?
Esempio: $y''(t) - 2y'(t) = t$ con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$
Trasformo la EDO in sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + t \end{cases}$$

Un problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y_1(t_0) = y_0 \\ y_2(t_0) = v_0 \end{cases} \qquad \underline{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Definizione 11. *Dato $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$ con A matrice quadrata di ordine n e $\underline{b}$ vettore di dimensione n*
chiamiamo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = A \cdot \underline{y}(t) + \underline{b}(t) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

1.4 Sistemi omogenei

Teorema 1. *Struttura dell'integrale generale di un sistema omogeneo*
Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. L'integrale generale del sistema differenziale omogeneo:

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t)$$

è uno spazio vettoriale di dimensione n, cioè generato da n soluzioni linearmente indipendenti:

$$\underline{y}_{0_1}(t), \cdots, \underline{y}_{0_n}(t)$$

Cioè integrale generale: $\underline{y}(t) = c_1\underline{y}_{0_1}(t) + \cdots + c_n\underline{y}_{0_n}(t)$ con $c_i \in \mathbb{R}$.

Definizione 12. *Dato un sistema differenziale lineare $n \times n$ omogeneo, chiamo sistema fondamentale di soluzioni una famiglia di n soluzioni linearimente indipendenti. $\underline{y}_{0_1}(t), \cdots, \underline{y}_{0_n}(t)$ sono* *una base dello spazio delle soluzioni.*

1.4.1 Determinante Wronskiano

Supponiamo di conoscere n soluzioni $\underline{y}_{0_1}, \cdots, \underline{y}_{0_n}$ di un sistema differenziale lineare omogeneo $n \times n$.

Teorema 2. *Sistema fondamentale* $\Leftrightarrow$ *esisete* t_0 *tale che* $\det \underline{y}_{0_1}(t_0) \cdots \underline{y}_{0_n}(t_0) \neq 0$.

Definizione 13. *Si chiama matrice Wronskiana la matrice di funzioni ottenuta affiancando un sistema fondamentale di soluzioni:*

$$W(t) = (\underline{y}_{0_1}(t), \cdots, \underline{y}_{0_n}(t))$$

Oss:

- La matrice Wronskiana non è univocamente definita
- esiste t_0 tale che $\det W(t_0) \neq 0$
- Con la notazione $W(t)$ possiamo riscrivere in modo compatto l'integrale generale del sistema omogeneo $\underline{y}_0(t) = W(t) \cdot \underline{c}$

1.5 Sistemi non omogenei

1.5.1 Struttura dell'int. gen. dei sistemi non omogenei

Manca la definizione.

Praticamente, per risolvere un sistema non omogeneo:

1. Si risolve il sistema omogeneo associato. Cioè determino una matrice Wronskiana $W(t) = [y_{0_1}(t) \dots y_{0_n}(t)]$
   Integrale generale: $\underline{y}(t) = W(t) \cdot \underline{c}, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n$
2. Due possibilità:
   - cerco una soluzione particolare con il metodo di somiglianza
     $\underline{y}(t) = \underline{y}_0(t) + \underline{y}_p(t) = W(t) \cdot \underline{c} + \underline{y}_p(t)$
   - uso $W(t)$ per trovare direttamente l'integrale generale tramite la formula:
     $\underline{y}(t) = W(t) \left(\int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) \right) = W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + W(t) \cdot \underline{c}$ Confronto le due soluzioni.
     Nella prima ho $W(t) \cdot \underline{c}$ e anche nella seconda, ed è l'integrale generale dell'omogenea.
     Quindi $y_p(t) = \underline{y}(t) - W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau$ perché è ciò che resta da uguagliare.
     In particolare, se A è diagonalizzabile reale, allora una matrice Wronskiana è $W(t) = e^{At}$
     $\underline{y}(t) = e^{At} \left[\int e^{-At} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + \underline{c} \right]$
     Osservazioni da aggiungere.
     Esempio da aggiungere.

2 Serie di funzioni

2.1 Generalità sulle serie di funzioni

Esempio: Sviluppi di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Definizione 14.
Date delle funzioni $f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad n = (0, 1, 2, \dots)$

- *La serie di funzioni a termine generale* $f_n(x)$ *è la successione delle somme parziali* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$
  Oss: *Fissato* $\overline{x} \in J$ *si tratta di una serie numerica*

- *La serie di funzioni converge puntualmente (o semplicemente) nel punto* $\overline{x}_0 \in J$ *se la serie numerica di termini generale* $f_n(\overline{x})$ *è convergente, cioè se esiste finito il limite:* $\lim_{n\to\infty} S_n(\overline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\overline{x})$

- *Chiamiamo insieme di convergenza puntuale (o semplice) l'insieme* $E \subseteq J$ *dei punti* $\overline{x}_0$ *in cui la serie di funzioni converge puntualmente.*
  Nell'insieme E *risulta così definita una nuova funzione, detta somma della serie, che si indica con il simbolo:*
  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in E)$
  Significa:
  $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_k(x) \quad (x \in E)$

- *La serie di funzioni converge assolutamente in* $\overline{x} \in J$ *se la serie numerica di termine generale* $f_n(\overline{x})$ *converge.*
  Oss: *la convergenza assoluta...*

Esempio fondamentale: Serie geometrica.
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
*Oss.*Servirà per la serie di potenze: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$
insieme convergenza puntuale $E = (-1, 1) = \{|x| < 1\}$
Per $x \leq -1$ è indeterminata
per $x \geq 1$ è divergente
per ...

Serie di Riemann
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad f_n(x) = \frac{1}{n^x} = \left(\frac{1}{n}\right)^x$ L'insieme di convergenza puntuale è:
$E = (1, \infty) = \{x > 1\}$
La convergenza è anche assoluta in E perché per $x \in E \qquad |f_n(x)| = f_n(x)$

Se $x = 1$ è la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.

Problema: se le funzioni f_n sono continue, anche f lo è? **Segue...**

2.1.1 Convergenza totale di una serie di funzioni

copiare appunti della prof, formule e grafici

Definizione 15. *Importante*
Diciamo che la serie di termine generale $f_n(x), x \in J$ converge totale in $I \in J$ se esiste una successione numerica a_n tale che:

i) $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - a_n| = 0 \quad \forall x \in I \quad \forall n$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

Oss:

- La nozione di convergenza totale riguarda un intervallo, mai un punto.
- La convergenta totale in I implica la convergenza assoluta (quindi anche puntuale) in ogni punto di I.
- **Attenzione:** non vale il viceversa: se una serie converge assolutamente in ogni punto di I non è detto che converga totalmente in I.

inizio lezione 05/10/2022

Oss: Se una serie di funzioni converge totalmente in I allora converge totalmente in ogni sottoinsieme di I.
Esercizio: Studiare la convergenza totale della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

Esercizio: Studiare la convergenza totale della serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Appunti su convergenza semplice, assoluta, puntuale, e totale

2.1.1 Conseguenze della convergenza totale

Teorema 3. *Continuità della somma*
Siano $f_n(x)$ funzioni definite su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se:

i) *$f_n(x)$ è continua in I per ogni n*

ii) *la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente in I*

Allora la funzione somma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è continua in I.
Oss: *in particolare, f è integrabile in ogni sottoinsieme chiuso e limitato $[c, d] \subseteq I$*

Teorema 4. *Integrabilità termine a termine*
Nelle stesse ipotesi del teorema precedente f è integrabile in ogni $[c, d] \subseteq I$ chiuso e limitato e inoltre:

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_c^d f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_c^d f_n(x)dx \right)$$

Quindi posso scambiare il simbolo di serie e quello di integrale.

Oss: Se $f(n)$ derivabili in I e $\sum^{\infty} f'_n$ converge totalmente in I allora $(\sum^{\infty} f_n(x))' = \sum^{\infty} f'_n(x)$

2.2 serie di potenze

Definizione 16. *Una serie di potenze è una serie di funzioni della forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Con $a_n \in \mathbb{R}$ coefficienti della serie
$x_0 \in \mathbb{R}$ centro della serie

Convenzione: se $x = x_0$ e $n = 0$ $(x_0 - x_0)^0 = 1$. Quindi, per $x = x_0$ la serie di potenze diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_0)^n = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)^2 + \dots = a_0$$

Cioè tutte le serie di potenze convergono almeno nel loro centro $x = x_0$.

inizio lezione 07/10/2022

ripasso convergenza totale
integra

- vedremo in dettaglio che la serie esponenziale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad a_n = \frac{1}{n!}$ ha come insieme di convergenza $\mathbb{R}$
  la serie *mettiserie* converge rapidamente. Criterio del rapporto $l = lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim n \to \infty \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

- la serie logaritmica $ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ha come insieme di convergenza $E = (-1, 1)$

Teorema 5. *Raggio di convergenza*
La serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ si verifica sempre una delle tre:

1. *raggio di convergenza nullo: la serie converge solo nel suo centro $x = x_0$*

2. *raggio di convergenza infinito: la serie converge assolutamente* $\forall x \in \mathbb{R}$

3. *raggio di convergenza* $0 < R < +\infty$*: esiste* $R > 0$ *tale che:*
   - *la serie converge assolutamente* $\forall x$ *tale che* $|x - x_0| < R$
   - *la serie non converge per* $|x - x_0| > R$

Oss: *in* $|x_0 + R|$ *e* $|x_0 - R|$ *potrebbe convergere o no, va studiato a parte in ogni esercizio.*

Teorema 6. *Calcolo del raggio di convergenza*
Data una serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

i) se il limite esiste.
$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$
allora la serie di potenze ha raggio di convergenza R.

ii) se esiste il limite $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ *allora la serie di potenze ha raggio di convergenza R.*

Dimostrazione 3. da sapere all'esame
La serie di potenze converge assolutamente nel punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ *se e solo se* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\overline{x} - x_0|^n$ *converge.*

- *se il criterio del rapporto è applicabile, ho convergenze se e solo se* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1 \Leftrightarrow |\overline{x} - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$

- *se il criterio della radice è applicabile, la serie converge se e solo se* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} < 1$ ***manca roba***

Teorema 7. *Data una serie di potenze avente raggio di convergenza* $0 < R \leq +\infty$ *si ha:*

i) se $R = +\infty$ *la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato* $[c, d]$

ii) se $0 < R < +\infty$ *la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso* $[c, d] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$

Teorema 8. *Data una serie di potenze reale* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *avente raggio di convergenza* $0 < R < +\infty$*, per ogni* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *vale la formula di integrazione termine a termine:*

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

La serie di potenze integrata $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ *converge per* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Osservazione Importante: Se la serie di potenze iniziale converge in $x_0 - R$ (o $x_0 + R$) posso integrare termine a termine fino a $x_0 - R$ (o $x_0 + R$).

...

Teorema 9. *Derivabilità termine a termine per serie di potenze reali*
Data una serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *avente raggio di convergenza* $0 < R < +\infty$, *per ogni* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *vale la formula di derivazione termine a termine.*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1}$$

e la serie di potenze derivata ha raggio di convergenza R.
Si può iterare per ottenere serie derivate di ogni ordine, tutte con raggio di convergenza R.

Conseguenza: la somma di una serie di potenze è derivabile ad ogni ordine.
Oss: la serie derivata ha ancora raggio di convergenza R, ma il comportamente ai bordi $x_0 \pm R$ può variare rispetto alla serie inerziale.

2.3 Lezione del 12/10/2022

Definizione 17. *Una funzione di una variabile reale* f *è detta analitica reale nell'intevallo non vuoto* (a,b) *se è somma di una serie di potenze in* (a,b), *cioè se esistono* $x_0 \in (a,b), a_n \in \mathbb{R}$ *e tale che:*
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *per ogni* $x \in (a,b)$.

Se f è analitica in (a,b):

- Qual è la regolarità minima di f?
  Risposta: f derivabile ad ogni ordine in (a,b).
- Chi sono i coefficienti a_n?
  Risposta: $f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0$
  $f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} = a_1$
  $f''(x_0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) (x-x_0)^{n-2} = 2a_2$
  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Teorema 10. Funzioni analitiche reali
Se f *è analitica reale nell'intervallo non vuoto* (a,b) *allora è derivabile ad ogni ordine in* (a,b) *e per ogni* $x_0 \in (a,b)$ *è sviluppabile in serie di Taylor. Cioè:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad x \in (a,b)$$

Inoltre, detto R *il raggio di convergenza della serie, l'identità è verificata per ogni* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Serie esponenziale

La funzione e^x è analitica in $\mathbb{R}$ (non dimostriamo)
La sua serie di Taylor con $x_0 = 0$ è:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

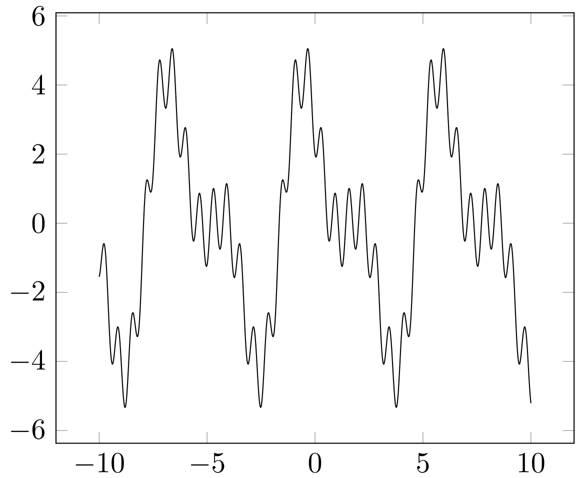
Il raggio di convergenza è $R = +\infty$

oss: Non tutte le funzioni derivabili ad ogni ordine in un intervallo sono analitiche in quell'intervallo. [es. BCFTV II.4]

2.4 serie di Fourier

Segnale sonoro periodico:

$$f(x) = 3\cos(x) - \sin(2x) - \cos(10x)$$



Per trasmettere il segnale basta comunicare i coefficienti:

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$\cdots$	$n=10$	$\cdots$
coeff. di $\cos(nx)$	0	3	0	0	$\cdots$	-1	$\cdots$
coeff. di $\sin(nx)$	0	0	-1	0	$\cdots$	0	$\cdots$

manca grafico
Decomposizione di taylor non adatta perché:

1. decomporre segnali non regolari
2. individuare le frequenze alte

La teoria di Taylor permette di decomporre un segnale periodico (non necessariamente regolare) nella combinazione lineare di infinite funzioni trigonometriche:

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Lezione del 14/10/2022

Funzioni periodiche, polinomi e serie trigonometriche
Ricordiamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo T se $f(x) = f(x+T)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Oss:

- Non ci sono ipotesi di regolarità su f.
- Se f è periodica di periodo T allora è anche periodica di periodo $2T, 3T, 4T \cdots$
- Se f è periodica di periodo T ed è pari (rispettivamente dispari) sul suo periodo, allora è anche pari (rispettivamente dispari) su $\mathbb{R}$.

Definizione 18. *Chiamiamo armoniche n-esime le funzioni:*

$$\cos(nx), \sin(nx) \qquad x \in \mathbb{R} n = 1, 2, 3, \cdots$$

Ogni armonica n-esima è periodica di periodo $\frac{2\pi}{n}$.

Oss: Tutte le armoniche n-esime sono anche periodiche di periodo 2π
Caso speciale: $n = 0$ la funzione costante 1.

2.4.1 Formule di ortogonalità

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ \pi & \text{se } n = k \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ \pi & \text{se } n = k \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)dx = 0$$

Definizione 19. *Un polinomio trigonometrico di ordine n è una combinazione lineare di armoniche n-esime con $n = 0, 1, 2, \cdots, m$, cioè:*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \; a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}$$

Oss:

- un polinomio trigonometrico è periodico di periodo 2π
- la somma, differenza, prodotto di due polinomi trigonometrici è ancora un polinomio trigonometrico.

Definizione 20. *Una serie trigonometrica è:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Con $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$

Ogni polinomio trigonometrico è 2π-periodico, quindi la somma di una serie trigonometrica è 2π-periodica.
Per questo motivo supporremo sempre che la funzione che vogliamo decomporre sia 2π-periodica.

Derivando termine a termine una serie trigonometrica si può perdere regolarità. Questo differenzia le serie trigonometriche dalle serie di potenze, che sono sempre derivabili ad ogni ordine dentro il raggio di convergenza.

Teorema 11. *Convergenza totale di una serie trigonometrica*
Data la serie trigonometrica $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$ allora la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.

In particolare, la funzione somma è continua in $\mathbb{R}$ e posso integrare termine a termine in ogni sottoinsieme limitato.

ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (|a_n| + |b_n|) = +\infty$ allora la funzione somma è derivabile in $\mathbb{R}$ e posso derivare termine a termine.

Oss: ci interesseranno anche le serie di Fourier che non convergono totalmente in $\mathbb{R}$, cioè tali che $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = +\infty$ Infatti se il segnale periodico $f(x)$ che voglio comporre non è continuo su $\mathbb{R}$ allora la convergenza della serie trigonometrica non può essere totale in $\mathbb{R}$.

2.4.2 Costruzione della serie di Fourier di una funzione periodica

Teorema 12. *Calcolo dei coefficienti di Fourier*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 2\pi$ una funzione periodica e somma di una serie trigonometrica

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Supponiamo inoltre di poter integrare termine a termine. Allora:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Dimostrazione 4. da sapere all'esame

- *Integro f in $(-\pi, \pi)$, uso integrazione temrine a termine e formula di ortogonalità:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx$$

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi a_0$$

- *Per trovare a_n, moltiplico f per $\cos nx$, integro in $(-\pi, \pi)$, uso l'integrabilità termine a termine ele formule di ortogonalità:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \cos(nx)dx$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)dx$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = a_n\pi$$

- *Per trovare* b_n*, moltiplico per* $\sin(nx)$

Piano di lavoro: data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica integrabile in $[-\pi, \pi]$:

1. Calcolo i coefficienti a_0, a_n, b_n con le formule trovate nel teorema precedente
2. Con questi coefficienti costruisco la serie trigonometrica
3. Studio la convergenza della serie trigonometrica e, in particolare cerco di stabilire se la somma coincide con f in ogni punto

Definizione 21. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* 2π*-periodica, integrabile in* $[-\pi, \pi]$*.*

- *Chiamiamo coefficenti di Fourier di* f *i valori* a_0, a_n, b_n *definiti nel teorema precedente*
- *polinomio di Fourier di* f *di ordine* m *il polinomio trigonometrico*

$$F_m(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- *Serie di Fourier di* f *la serie trigonometrica*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \lim_{m\to\infty} F_m(x)$$

Importantissimo *per gli esercizi:*

- se f è pari, si sviluppa in soli coseni, cioè $b_n = 0$ per ogni n.
- se f è dispari, si sviluppa in soli seni, cioè $a_n = 0$ per ogni n.

Lezione del 19/10/2022

Esempio: dente di sega
$f(x) = x$
per $x \in (-\pi, \pi]$ Essendo f dispari:

- si sviluppa in soli seni, cioè $a_0 = a_n = 0 \quad \forall n$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx = -2\frac{(-1)^n}{n}$

La serie di Fourier di f è:

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$$

Esempio: Tenda
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica e
$f(x) = (x - \pi)^2$ per $x \in (0, 2\pi]$
f pari, quindi:

- $b_n = 0 \quad \forall n$

- $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x-\pi)^2 \cos nx dx$

Quindi:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (x-\pi)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n =$$

2.4.1 Convergenza della seride di Fourier

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, integrabile in $[-\pi, \pi]$:

Definizione 22. *Data $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ se esiste un numero finito di punti $x_0, x_1, \cdots, x_n$ in $[-\pi, \pi]$ tali che f e derivabile in $(x_i, x_{i+1}) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$ ed esistono finiti i limiti:*

$$\lim_{x \to x_i^-} f'(x) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$\lim_{x \to x_i^+} f'(x) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$$

Oss: Se f è periodica e regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$, allora:

- f è regolare a tratti in qualunque intervallo limitato.
- Si avrà anche che f è continua in $(x_i, x_{i+1}) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$. ed esistono finiti i limiti:

$$\lim_{x \to x_i^-} f(x) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$\lim_{x \to x_i^+} f(x) \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$$

- f è integrabile su qualunque intervallo limitato.
- **Facoltativo:** BCFTV, esercizio $II.12$. La sua serie di Fourier è integrabile termine a termine.

Teorema 13. *Della convergenza puntuale delle serie di Fourier*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$.
Allora la serie di Fourier di f converge puntualmente $\forall \mathbb{R}$ e inoltre

$$\lim_{m \to +\infty} F_m(x) = \frac{1}{2}\left[\lim_{s \to x^+} f(s) + \lim_{s \to x^-} f(s)\right]$$

Parafrasando: la serie di F converge puntualmente alla media tra $f(x^+)$ e $f(x^-)$.
In particolare:

$$f \text{continua in } x \Longrightarrow \lim_{m \to +\infty} F_m(x) = f(x)$$

Teorema 14. *Convergenza totale della serie di Fourier*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$.
Se inoltre f è continua in tutto $\mathbb{R}$, allora la serie di Fourier di f converge totalmente a f in tutto $\mathbb{R}$.

Lezione del 21/10/2022

Ripasso
tde 16/02/2021

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in (0, \pi] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f regolare a tratti, quindi al serie di Fourier converge $\forall x$
Funzione somma $S(x) = \lim_{x \to +\infty} F_m(x)$
Se f è continua in x, allora $S(x) = f(x)$
Nei punti dove f è discontinua, cioè $x = 2k\pi$,

$$S(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{s \to x^+} f(s) + \lim_{s \to x^-} f(s) \right) = 0 = f(x)$$

Conclusione: $S(x) = f(x)\ \forall x$
Riguardo la convergenza totale:

In ogni intervallo dove S è discontinua, la convergenza non può essere totale

Teorema 15. *Convergenza in media quadratica*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$.
Allora:

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (F_m(x) - f(x))^2 \, dx = 0$$

Spiegazione: si può dimostrare che la convergenza media quadratica implica:

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

L'area sottesa al grafico di F_m^2 converge all'area sottesa al grafico di f^2 (per $m \to +\infty$)

Oss:

- Nuovo tipo di convergenza. È in realtà la convergenza più naturale. Infatti, si ha convergenza in media quadratica per qualunque funzione f 2π-periodica, tale che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < +\infty$$

- $lim_{m \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (F_m(x) - f(x))^2 \, dx = 0 \implies lim_{m \to +\infty} \int_{c}^{d} (F_m(x) - f(x))^2 \, dx = 0$ per ogni intervallo limitato $[c, d]$

Calcoliamo $\int_{-\pi}^{\pi} F_m^2$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_m^2 dx = \pi \left(2a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n^2 + b_n^2 \right)$$

Teorema 16. *Identità di Bessel-Parseval*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, 2π-periodica, regolare a tratti in* $[-\pi, \pi]$*.*
Allora:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 2a_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

2.4.1 Cenni: forma esponenziale - non in programma

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Sostituisco x con nx e ottengo:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{e} \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{inx}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) + e^{-inx}\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)\right)$$

Razionalizzo e ottengo:

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{inx} \frac{a_n - ib_n}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-inx} \frac{a_n + ib_n}{2}\right)$$

Nella seconda cambio indice $n = -k$ e ottengo:

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{inx} \frac{a_n - ib_n}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{ikx} \frac{a_k + ib_k}{2}\right)$$

Rinomino i coefficienti in c_0, c_n, c_k e ottengo:

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{inx} \frac{c_n}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{ikx} \frac{c_k}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

3 Spazio $\mathbb{R}^n$

3.1 Cenni di topologia in $\mathbb{R}^n$

Definizione 23. *Chiamiamo palla (o intorno sferico) in $\mathbb{R}^n$ di centro $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ l'insieme:*

$$B(\underline{x}_0) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < r\}$$

Definizione 24. *Dati un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ e un punto $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$:*

- *$\underline{x}$ è di frontiera (o bordo) per E se:*

$$\forall r > 0 \text{ si ha che } \begin{cases} B_r(\underline{x}_0) \cap E \neq \emptyset \\ B_r(\underline{x}_0) \cap E^c \neq 0 \end{cases}$$

  ***NB** i punti di frontiera possono appartenere all'insieme E o no.*

- *$\underline{x}$ è interno a E se: appartiene a E e esiste $r > 0$ tale che $B_r(\underline{x}_0) \subset E$.*
  O, equivalentemente, se $\underline{x}$ appartiene a E ma non è di frontiera.

- *$\underline{x}$ è esterno a E se: non appartiene a E e esiste $r > 0$ tale che $B_r(\underline{x}_0) \subset E^c$.*
  O, equivalentemente, se $\underline{x}$ è interno a E^c.

Esempio:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{xy} sinxy}{x^2 + y^2}$$

Dominio di definizione: $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0), xy \geq 0\big\}$

Definizione 25. *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice:*

- *Aperto se* $\forall \underline{x}_0 \in E$ si ha che $\underline{x}$ è un punto interno a E
- *Chiuso se $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ è aperto.*

Oss: Esistono insiemi né aperti né chiusi.
Oss: $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono aperti e chiusi.

Definizione 26. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è detto limitato esiste $R > 0$ tale che $E \subset B_R(0)$. Altrimenti si dice illimitato.*

3.2 Curve in nel piano e nello spazio

Definizione 27. *Una curva nello spazio è definita da:*

- *Tre funzioni* <u>*continue*</u>

$$t \in I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix} = \underline{r}(t) \in \mathbb{R}^3$$

  è la parametrizzazione della curva.

- *l'immagine dell'intervallo I tramite $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3)$, cioè:*

$$y = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = r_1(t), x_2 = r_2(t), x_3 = r_3(t) \text{ per qualche } t \in I\right\}$$

  è il sostegno della curva

Oss: Come caso particolare, quando $r_3(t) = 0$ per ogni $t \in I$, si ha una curva nel piano.

Oss: il sostegno è univocamente determinato dalla parametrizzazione.
Il viceversa non è vero: esistono infinite parametrizzazioni associate al medesimo sostegno.

Def informale: due parametrizzazioni si dicono equivalenti se hanno il medesimo sostegno percorso lo stesso numero di volte (eventualmente in senso inverso).

Definizione 28. *Due parametrizzazioni (continue) $\underline{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ e $\underline{s}(t) : J \to \mathbb{R}$ si dicono equivalenti se esiste: $\phi(s) : J \to I$ continua e biunivoca tale che:*

$$\underline{v}(s) = \underline{r}(\phi(s)) = \underline{r} \circ \phi(s) : J \to \mathbb{R}^3$$

3.2.1 Curve regolari, versore tangente

Introduzione informale:
Data una curva parametrica è molto facile calcolare in ogni punto la direzione tangente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}$$

per ogni t, la direzione tangente alla curva nel punto $\underline{r}(t)$ è:

$$\begin{pmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \end{pmatrix}$$

Definizione 29. *Una curva si dice regolare se ammette una parametrizzazione*

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}$$

Tale che:

i) r_1, r_2, r_3 *son funzioni di classe C^1 su I.*

$ii)$ $\underline{r}'(t) = \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \\ r_3'(t) \end{pmatrix} \neq 0$ *per ogni* $t \in I$. *(questo assicura che è sempre la tangente)*

Oss: Richiediamo che il vettore non sia nullo, ma alcuen componenti possono essere 0, basta che non lo siano tutte.

Definizione 30. *Data una curva regolare,* $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^3$ *definiamo* $\forall t \in I$ *il versore tangente:*

$$\underline{T}(t) = \frac{\underline{r}'(t)}{\|\underline{r}'(t)\|}$$

Il versore tangente ha:

- *direzione parallela alla retta tangente ala curva nel punto* $\underline{r}(t)$
- *norma unitaria, cioè* $\|\underline{T}(t)\| = 1 \ \forall t \in I$
- *verso concorde con il verso di percorrenza della curva*

Più esplicitamente:

$$\underline{r}'(t) = \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\left\|\underline{r}'(t)\right\| = \sqrt{r_1'(t)^2 + r_2'(t)^2}$$

$$\underline{T}(t) = \begin{pmatrix} \frac{r_1'(t)}{\|\underline{r}(t)\|} \\ \frac{r_2'(t)}{\|\underline{r}(t)\|} \\ \frac{r_3'(t)}{\|\underline{r}(t)\|} \end{pmatrix}$$

3.2.2 Lunghezza di una curva

Idea: spezzettando la curva in archi progressivamente più piccoli, questi saranno quasi uguali al segmento relativo. Sommando le lunghezze dei segmenti si ottiene una stima della lunghezza della curva, che convergerà alla lunghezza vera e propria della curva quando la lunghezza dei segmenti tende a zero.

Definizione 31. ***Lunghezza di una curva regolare***
Data una curva regolare $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *la parametrizzazione di una curva regolare avente sostegno* γ*. Allora*

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \left\|\underline{r}'(t)\right\| dt$$

Teorema 17. *Invarianza della lunghezza di una curva per riparametrizzazioni*
$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *la parametrizzazione di una curva regolare avente sostegno* γ*.*
$underline[v] : [c, d] \to \mathbb{R}^3$, $\underline{v}(s) = \underline{r}(\phi(s))$ *è una parametrizzazione equivalente con sostegno* δ*.*
Allora: lunghezza$(\gamma) =$ *lunghezza*(δ)

Dimostrazione 5. .
lunghezza$(\gamma) := \int_a^b \|\underline{r}'(t)\|\, dt$
lunghezza$(\delta) := \int_c^d \|\underline{v}'(s)\|\, ds$

$$\underline{v}'(s) = \left\|\underline{r}'(\phi(s))\right\| \cdot \left|\phi'(s)\right|$$

Quindi lunghezza$(\delta) = \int_c^d \|\underline{r}'(\phi(s))\| \cdot |\phi'(s)|\, ds$
Posso definizione di parametrizzazione eqauivalente, ϕ è biunivoca, cioè sempre crescente o sempre decrescente. Supponiamo $\phi'(s) > 0$ per ogni $s \in [c,d]$.
Allora lunghezza$(\delta) = \int_c^d \|\underline{r}'(\phi(s))\| \cdot \phi'(s) ds$.
Cambio di variabile nell'integrale $t = \phi(s)$ e $dt = \phi'(s)ds$

$$\int_a^b \left\|\underline{r}'(t)\right\| dt = \text{lunghezza}(\gamma)$$

Oss: essendo $r_1(t), r_2(t), r_3(t) \in C^1([a,b])$ e $v_1(s), v_2(s), v_3(s) \in C^1([c,d])$ e $\underline{v} = \underline{r} \circ \phi$ allora $\phi : [c,d] \to [a,b]$ di classe C^1.

Definizione 32. *Si dice regolare a tratti una curva $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^3$ tale che:*

i) $\underline{r}$ continua in I

ii) ad eccezione di un numero finito di valori $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$ la curva è regolare.

Lunghezza di una curva regolare a tratti:

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^{t_1} \left\|\underline{r}'(t)\right\| dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\|\underline{r}'(t)\right\| dt + \cdots \int_{t_n}^{b} \left\|\underline{r}'(t)\right\| dt$$

3.2.3 Integrale curvilineo

Supponiamo che una curva regoalre (o regolare a tratti)

$$\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

Rappresenti un filo avente densità di massa

$$\delta(t), \quad \text{con} \quad \delta(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

massa del filo:

$$M = \int_a^b \delta(t) \left\|\underline{r}'(t)\right\| dt$$

Definizione 33. *$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e $\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una curva regolare avente sostegno γ.*
$f(\underline{r}(t))$ continua, $t \in [a,b]$.
L'integrale continuo di f lungo γ, che si indica $\int_\gamma f ds$ si calcola tramite la formula

$$\int_a^b f(\underline{r}(t)) \left\|\underline{r}'(t)\right\| dt$$

Oss:

- il simbolo $\int_\gamma f ds$ è solo un simbolo
- Anche quando $f(\underline{r}(t)) \leq 0$ l'integrale curvilineo ha comunque senso (interpretazione diversa)
- Se γ è regolare a tratti allora l'integrale curvilineo è definito come la somma degli integrali curvilinei dei tratti di γ.

Lezione 02/11/2022

3.3 Limiti e continuità per funzioni di 2 variabili

Esempi introduttivi

- Probabilità: X, Y variabili aleatorie, la funzione di dimostrazione congiunta $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$
- Economia: la funzione di utilità descrive i panieri preferiti dal consumatore, ad esempio Cobb-Douglas $u(x, y) = x_1^\alpha x_2^\beta$
- Fisica: dato un corpo solido $A \subseteq \mathbb{R}^3$ la temperatura nel punto $(x, y, z) \in A$ al tempo $t \geq 0$ è $u(x, y, z, t)$
- Fisica: n punti nel piano $\overline{P}_i = (x_i, y_i)$ di massa m_i il momento di inerzia rispetto al generico punto $P = (x, y)$ è $I(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \left[(x - \overline{x}_i)^2 + (y - \overline{y}_i)^2\right]$

Definizione 34. $A \subseteq \mathbb{R}^2$
Una funzione di due variabili a valori reali $f : A \to \mathbb{R}$ è una relazione che associa ad ogni $(x, y) \in A$ un valore reale.

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Chiamiamo insieme (o dominio) di definizione il più grande insieme su cui la f è definita.

Grafico(f) $= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, z = f(x, y)\right\}$

Per ogni $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello di f al livello k

$$I_k = \{(x, y) \in A \mid f(x, y) = k\}$$

Integrale curvilineo di $f(x, y)$ lungo una curva piana

$$\int_\gamma f(x, y) ds = \text{area sottesa a } f(\underline{r}(t)) \text{ con segno}$$

3.3.1 Limiti di funzioni di 2 variabili

Definizione 35. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$ e $f : A \setminus \{\underline{x}_0 \to \mathbb{R}\}$*
Diciamo che f tende al limite $l \in \mathbb{R}$ per $\underline{x}$ che tende a $\underline{x}_0$ e scriviamo

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $\underline{x} \in B_\delta(\underline{x}_0) \setminus \{\underline{x}_0\}$ allora $|f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$.

Oss:

- $\underline{x}_0 \in B_\delta(\underline{x}_0) \setminus \{\underline{x}_0\} \Leftrightarrow$ distanza$(\underline{x}, \underline{x}_0) < \delta$
- si esclude il punto $\underline{x}_0$ nel quale f potrebbe non essere definita

Non esistenza del limite

Conclusione: per stabilire che un limite 2D non esiste

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x})$$

non esiste, è sufficiente esibire due cammini che arrivano in $\underline{x}_0$ tali che i limiti 1D di f nei due cammini siano diversi.
Tali cammini possono essere rette o altre curve.

Calcolo dei limiti con coordinate polari

Oss: Può essere necessario uno step 0 se f non è quozione ti polinomi:
Step 0: applico un limite notevole per ottenere una quozione di polinomi.

3.3.2 Continuità

Definizione 36. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto,* $\underline{x}_0 \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$
Diciamo che f *è continua in* $\underline{x}_0$ *se*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

f *è continua in* A *se è continua in* $\underline{x}_0$ *per ogni* $\underline{x}_0 \in A$.

Nota: Tutte le funzioni elementari in una variabile sono continue sul loro dominio di definizione. Dovremo quindi verificare la continuità tramite la definizione solo per le funzioni definite per casi.

4 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Esempi:

- Funzione di utilità di Cobb-Douglas. Massimizzare $f(x, y) = \sqrt{xy}$ con il vincolo di budget $x + y = 2$.
- Staccionata di lunghezza p, recinto rettangolare. Massimizzare l'area recintata.

4.1 Derivabilità e differenziabilità

4.1.1 Derivate parziali e gradiente

Definizione 37. *$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $(x_0, y_0) \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$*
Le derivate parziali di f in (x_0, y_0) sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Purché i limiti esistano finiti.
Se esistono entrambe le derivate parziali di f in (x_0, y_0), diciamo che f è derivabile in (x_0, y_0). In tale caso, le derivare si organizzano in un vettore che prende il nome di gradiente.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Sapendo che f è derivabile nel punto $\underline{x}_0$, come calcolo $\nabla f(\underline{x}_0)$?
Applicando le usuali regole di derivazione a ciascuna variabile separatamente (considerando l'altra variabile come fosse costante)

Ci sono solo due casi nei quali è necessario ricorrere alla definizione per stabilire se f è derivabile e per il calolo delle derivate parziali:

1. f è definita per casi, cioè
$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ f(x, y) & \text{in } \underline{x}_0 \end{cases}$$
Calcolo $\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}_0)$ tramite la definizione.
Se entrambi i limiti esistono finiti, f è derivabile in $\underline{x}_0$ e ho ottenuto $\nabla f(\underline{x}_0)$. Altrimenti, f non è derivabile in $\underline{x}_0$.

2. nella definizione di f compare t^α con $\alpha \in (0, 1)$ oppure $|t^\alpha|$ con $\alpha \in (0, 1]$ per qualche $t = g(x, y)$.
Devo usare la definizione $\forall (x, y)$ tali che $g(x, y) = 0$.

In tutti gli altri casi posso concludere che f è derivabile senza ricorrere alla definizione.

N.B. f derivabile in $\underline{x}_0$ non implica f continua in $\underline{x}_0$.

4.1.2 Differenziabilità e piano tangente

Definizione 38. *$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$*
Diciamo che f è differenziabile in $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ se

(i) f è derivabile in $\underline{x}_0$

(ii) $f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle + R(\underline{h})$ con $R(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|)$ cioè $\lim_{\underline{h} \to (0,0)} \frac{R(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = 0$.

Lezione 21/11/22

Esplicito: $\underline{x}_0 = (x_0, y0) \qquad \underline{h} = (h_1, h_2)$

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) h_2$$

$$\lim_{\underline{h} \to (0,0)} \frac{R(h)}{\|\underline{h}\|} = \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{R(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

Scrittura equivalente: ponendo $\underline{x} = \underline{x} + \underline{h}$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

Definizione 39. *Se f è defferenziabile in $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$, il piano tangente al grafico di f in $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ è*

$$z = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle$$

Esplicitamente:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Come stabilire se f è differenziabile in $\underline{x}_0$?

Definizione 40. *$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile.*
Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in A, diciamo che f è di classe C^1 in A e scriviamo $f \in C^1(A)$.

Teorema 18. ***del differenziale totale***
$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f \in C^1(A)$ allora f è differenziabile in ogni punto di A.

Ci sono solo due casi in cui devo usare la definizione, gli stessi visti per la derivabilità.
La definizione richiede di verificare il limite di 2 variabili:

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \frac{R(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = \lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} = 0$$

Teorema 19. ***Differenziabile implica continua***
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0$.
Allora f è continua in $\underline{x}_0$.

Dimostrazione 6. da sapere all'esame
Dobbiamo dimostrare che: $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$
Essendo f *differenziabile in* $\underline{x}_0$*:*

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$
$$|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| = |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)|$$

Manca il passaggio che non riesco a capire

Quindi:

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x})| = 0$$

cioè

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

4.1.1 Altre proprietà delle funzioni differenziabili

Derivate direzionali e formula del gradiente

Definizione 41. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto,* $\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$.
$\underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *di norma unitaria, cioè* $\|\underline{v}\| = 1$.
La derivata direnzionale di f *in* $\underline{x}_0$ *nella direzione individuata da* $\underline{v}$ *è*

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Se il limite esiste finito.

Oss: le derivate parziali sono casi particolari di derivate direzionali.

Teorema 20. *Formula del gradiente*
$A \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto,* $\underline{x}_0 \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *differenziabile in* $\underline{x}_0$.
Allora f *ammette derivate direnzionali in ogni direzione* $\underline{v}$ *e inoltre*

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle$$

Dimostrazione 7. da sapere all'esame
Devo dimostrare che
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle$$
Scelgo $\underline{h} = t\underline{v}$ *nella definizione di differenziabilità:*

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), t\underline{v} \rangle + o(\|t\underline{v}\|)$$

Divido per t e faccio il limite $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle + 0$$

Derivata della composta

1° CASO (più importante): derivata della restrizione di una funzione di 2 variabili a una curva piana. La restrizione di f a $\underline{r}$ è la funizone composta $F(t) = (f \circ \underline{r})(t) = f(\underline{r}(t)) = f(r_1(t), r_2(t))$.
$F : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lezione 16-11-22

Direzione di crescita massima, minima e nulla

Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle \stackrel{?}{=} 0$$

Cioè se $\nabla f(\underline{x}_0) \neq 0$ allora la derivata direzionale di f in $\underline{x}_0$ è nulla nella direzione ortogonale a $\nabla f(\underline{x}_0)$.

Teorema 21. ***ortogonalità del gradiente alle curve di livello*** *ovvero direzione di crescita nulla*
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in A. L'insieme di livello I_k è il sostegno di una curva regolare $\underline{r}$.
Allora:

$$\langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = 0 \quad \forall t$$

Spiegazione: questo teorema dice 2 cose:

i) se $\nabla f(\underline{x}_0) \neq 0$ allora $\nabla f(\underline{x}_0) \perp$ curva di livello passante per $\underline{x}_0$.

ii) grazie alla formula del gradiente:

$$0 = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{r}(t)) \quad \text{con } \underline{v} = \underline{r}'(t)$$

cioè la derivata direnzionale di f nella direzione tangente alla curva di livello è nulla.

Dimostrazione 8. *Per ipotesi I_k coincide con il sostegno della curva regolare $\underline{r}(t)$, cioè:*

$$I_k = \{\underline{x}(t), t \in J\}$$

In particolare $f(\underline{r}(t)) = k$ per ogni $t \in J$.
Chiamo $F : J \to \mathbb{R}$ la funzione composta $F(t) = f(\underline{r}(t)) = f \circ \underline{r}(t)$.
Da un lato $F(t) = k \quad \forall t \Rightarrow F'(t) = 0 \quad \forall t$.
D'altro lato, per il teorema di derivazione della funzione composta

$$F'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle \longrightarrow \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = 0$$

Teorema 22. ***direzioni di massima e minima crescita***
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in A. $\nabla f(\underline{x}_0) \neq 0$.
Allora:

i) $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ *di norma unitaria si ha:*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) \right| \leq \| \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle \|$$

ii) *detti* $\underline{v}_{\max} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$ *e* $\underline{v}_{\min} = -\underline{v}_{\max}$ *si ha:*

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_{\max}}(\underline{x}_0) = \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{v}_{\min}}(\underline{x}_0) = - \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$$

4.2 Ottimizzazione libera

Derivate seconde e matrice Hessiana.

Definizione 42. *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile.*
Se le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sono a loro volta derivabili in A, definiamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$

Si organizzano in una matrice detta Hessiana:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Definizione 43. *Se f è derivabile due volte in A e tutte le derivate parziali seconde sono continue in A, diciamo che f è di classe C^2 in A: $f \in C^2(A)$.*

Dovrei verificare "a mano" se f sia di classe C^2 o meno nei casi seguenti:

- f definita per casi
- compare t^α con $\alpha \in (0, 2)$ o $|t^\alpha|$ con $\alpha \in (0, 2]$

In tutti gli altri casi f è automaticamente di classe C^2 sul suo dominio di definizione, quindi non serve verificare.

Teorema 23. ***di Schwarz*** *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 allora:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$$

Cioè $H_f(x, y)$ è una matrice simmetrica $\forall (x, y) \in A$.

Posso quindi associare una forma quadratica e calcolarne il segno.

Definizione 44. *Sia $f \in C^2(A)$. Chiamiamo forma quadratica indotta da $H_f(x,y)$:*

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad q(h_1,h_2) = (h_1,h_2) \cdot H_f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, H_f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle$$

Formula di Taylor al 2° ordine

Teorema 24. ***Formula di Taylor al 2° ordine***
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^2(A)$ allora per ogni $x_0 \in A$:

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle \underline{h}, H_f(\underline{x}_0)\underline{h} \rangle + o(\|\underline{h}\|^2)$$

Ponendo $\underline{x}_0 + h = \underline{x}$:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle \underline{x} - \underline{x}_0, H_f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2)$$

4.2.1 Introduzione all'ottimizzazione 3D

Definizione 45. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ sottoinsieme qualunque, $f : A \to \mathbb{R}$.*
Un punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice:

- *punto di massimo globale (o assoluto) per f in A se $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$. Il valore di $f(x_0,y_0)$ è detto (valore di) massimo globale o assoluto.*
- *Punto di massimo locale (o relativo) per f in A se $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \cap A$. Il valore di $f(x_0,y_0)$ è detto (valore di) massimo locale o relativo.*

Analogamente minimo invertendo le disuguaglianze.

Oss:

- I punti di massimo appartengono all'insieme A e possono essere interni o di frontiera.
- Il valore di max assoluto è unico, ma potrebbe essere assunto in più punti.

Definizione 46. *Se (x_0,y_0) è un punto di max o di min per f in A allora è detto punto di estremo per f in A.*

Teorema 25. ***di Weierstrass*** *$A \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato, $f : A \to \mathbb{R}$ continua.*
Allora f assume i valori di massimo e minimo assoluto, cioè esistono:

- *$(x_m, y_m) \in A$ punto di minimo assoluto.*
- *$(x_M, y_M) \in A$ punto di massimo assoluto.*

Cioè:

$$f(x_m,y_m) \leq f(x,y) \leq f(x_M,y_M) \quad \forall (x,y) \in A$$

4.2.2 Ottimizzazione libera

Cioè su un insieme aperto si applica Fermat, ma non Weierstrass.

Teorema 26. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$.*
Se (x_0, y_0) è un punto di estremo per f e se f e se f è derivabile in (x_0, y_0) allora:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$$

Definizione 47. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in $(x_0, y_0) \in A$.*
Se $\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$ allora (x_0, y_0) è detto punto critico o punto stazionario per f.

Quindi secondo il teorema di Fermat se un punto è estremale allora è anche critico.

Definizione 48. *Un punto critico di f che non è estremale per f è detto punto di sella.*

In pratica i punti estremali di una funzione f in un insieme A aperta:

1. se f è derivabile in tutto A: determino i punti critici di f in A e poi stabilisco quali sono di massimo, minimo, sella.
2. Se f ha punti di non derivabilità li includo tra i candidati.

Oss: Se f è anche differenziabile in (x_0, y_0) punto critico allora:

1. il piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è orizzontale:
$$z = f(x_0, y_0)$$
2. $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\underline{v}\| = 1$, si ha:
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) = 0$$

4.2.3 Classificazione dei punti critici

Teorema 27. ***Criterio della matrice Hessiana***
$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C^2(A)$.
$\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ punto critico di f allora.
Denotiamo q la fomra quadratica indotta da $H_f(\underline{x}_0)$, cioè:

$$q(h_1, h_2) = (h_1, h_2) \cdot H_f(\underline{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Allora:

i) Se q è definita positiva allora $\underline{x}_0$ è punto di minimo.

ii) Se q è definita negativa allora $\underline{x}_0$ è punto di massimo.

iii) Se q è indefinita allora $\underline{x}_0$ è punto di sella.

Oss: Se q è indefinita il criterio della matrice Hessiana non da informazioni.

Dimostrazione 9. *Essendo* $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$*, la formula di Taylor al secondo ordine diventa*

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{2}q(\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2)$$

i) Se q *è definita positiva, cioè* $q(\underline{h}) > 0 \quad \forall \underline{h}$

Da finire

Come applicare il criterio della matrice Hessiana

i) $\det H_f(\underline{x}_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ allora minimo.

ii) $\det H_f(\underline{x}_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ allora massimo.

iii) $\det H_f(\underline{x}_0) < 0$ allora punto di sella.

iv) $\det H_f(\underline{x}_0) = 0$ allora il criterio non si applica.

Lezione 23-11-22

Cosa fare quando $\det H_f(\underline{x}_0) = 0$ con $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$ e $\underline{x}_0 \in A$ aperto?
Ciop il criterio dell'Hessiana non da informaizoni.

INDAGINE DIRETTA (O STUDIO LOCALE)
Altra tecnica: studio del segno di f attorno al punto candidato.

CONVESSITÀ E CONCAVITÀ

Definizione 49. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $f \in C^2(A)$ *è convessa in* $\mathbb{R}^2$ *se* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $H_f(x, y)$ *è definita positiva o semidefinita positiva.*

Oss: Simile alla dimenzione 1.

Ottimizazione per funzioni convesse
Sia f $C^2(A)$ convessa. Se $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ è un punto critico di f allora $\underline{x}_0$ è punto di minimo assoluto.

Definizione 50. $f \in C^2(A)$ *è concava se* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *si ha* $H_f(x, y)$ *è definita negativa o semidefinita negativa.*
In questo caso $\underline{x}_0$ *è punto di massimo assoluto.*

4.3 Ottimizzazione vincolata

Se cerco i punti estremanti di f in un insieme non aperto non è sufficiente applicare il teorema di Fermat nella parte interna dell'insieme perché potrebbero esserci estremanti anche sul bordo.
STRATEGIA:

0 se A è chiuso e limitato e f è continua, allora uso Weierstrass

1 applico Fermat nell'insieme aperto $A\setminus$ bordo di A.

2 cerco eventuali punti estremanti di f sul bordo di A.

4.3.1 Vincoli di uguaglianza

in questa sezione vogliamo determianre i massimi e imini di $f(x,y)$ quando (x,y) verifica una condizione aggiuntiva della forma

$$F(x,y) = 0$$

Definizione 51. *Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f, F \in C^2(A)$.*
Poniamo

$$z = (x,y) \in A : F(x,y) = 0$$

Un punto $(x_0, y_0) \in z$ si dice:

- *Punto di massimo relativo (o locale) per f vincolato a z se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in B_\delta((x_0,y_0)) \cap z$$

- *Punto di massimo assoluto per f vincolato a z se*

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in z$$

- *analogamente min*
- *punto di estremo vincolato un max vincolato o un min vincolato.*

Lezione 25-11-2022

Il metodo di sostituzione non è applicabile il vincolo non è esplicitabile. Es: $xy = \ln y + \sqrt{x}$
Inoltre, ci sono casi in cui è possibile sostituire, ma bisogna prestare attenzione.

METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE
Introduzione informale: Così come il teorema di Fermat fornice i candidati punti di estrempo libero, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange fornisce i candidati punti di estremo vincolato.
Tra i candidati di estremo vincolato seleziono max e min assoluti vincolati confrontoando i valori di f.

Teorema 28. ***Metodo dei moltiplicatori di Langrange***
$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f, F \in C^1(A)$.
Sia $\underline{x}_0$ un punto di estremo vincolato per f sul vincolo:

$$z = (x,y) \in A : F(x,y) = 0$$

Supponiamo inoltre che $\nabla F(\underline{x}_0) \neq 0$.
Allora esiste un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, detto moltiplicatore di Lagrange, tale che

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \lambda_0 \nabla F(\underline{x}_0)$$

Oss: Scriviamo le condizioni:

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \lambda_0 \nabla F(\underline{x}_0) \quad \text{e} \quad (x_0, y_0) \in z$$

In modo più esplicito:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Sistema non lineare di tre equazioni nelle tre incognite (x_0, y_0, λ_0).

In pratica: i punti candidati sono le soluzioni di:

$$\begin{cases} \nabla F(\underline{x}_0) = \underline{0} \\ F(\underline{x}_0) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \nabla f(\underline{x}_0) = \lambda_0 \nabla F(\underline{x}_0) \\ F(\underline{x}_0) = 0 \end{cases}$$

Oss: il valore $\lambda_0 = 0$ è ammissibile.

TABELLA DA INSERIRE

Definizione 52. *Si definisce Lagrangiana la funzione*

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y)$$

Con $(x, y) \in A$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Oss:
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -F(x, y)$
Quindi il sistema dei moltiplicatori di Lagrange si può scrivere come:

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda_0) = \underline{0}$$

5 Calcolo integrale per funzioni di più variabili

Esempi introduttivi:

- Data una lamina piana $D \subseteq \mathbb{R}^2$ avente densità di massa $\rho(x, y) \geq 0 \Longrightarrow \iint_D \rho(x, y)\, dxdy$ è la massa della lamina.
  Momento d'inerzia rispetto all'asse z:
  $$\iint_D \rho(x, y)(x^2 + y^2)\, dxdy$$
- Date 2 variabile aleatorie continue X, Y, la densità congiunta $f_{X,Y}(x, y)$ è tale che probabilità evento A:
  $$A = P[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y)\, dxdy$$

5.1 Integrali doppi

5.1.1 Regioni semplici

Definizione 53. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *è detta regione y-semplice se:*

$$D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

Con $[a, b]$ limitato, $g_1 \leq g_2$ continue in $[a, b]$.

Lezione 30-11-2022

Definizione 54. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *è detta regione x-semplice se:*

$$D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

Con $[c, d]$ limitato, $h_1 \leq h_2$ continue in $[c, d]$.

Esistono insiemi che sono sia x-semplici che y-semplici.
Es:
Cerchio chiuso
$$D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2$$
Triangoli, quadrati, ecc.

Oss: Come calcolo l'area di una regione y-semplice?

$$\text{Area}(D) = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))dx$$

Teorema 29. ***Integrabilitàà funzioni continue***
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *una regione semplice e* $f : D \to \mathbb{R}$ *continua in* D.
Allora f *è integrabile in* D *se.*

6 Esercizi