Appunti di Analisi Matematica II

corso della prof.ssa B.Noris
Politecnico di Milano

F. Piazza G. Michieletto

4 ottobre 2022

Gli esami non finiscono mai, amico mio! Così è la vita.

- *Denis Ivanovič Fonvizin*

Se 'ni mondo esistesse un po' di bene...

- *Pietro Pacciani*

Indice

Capitolo 0

Cenni di Analisi I e Algebra Lineare

0.1 Regole di integrazione e derivazione

0.2 Serie numeriche

0.3 Determinante di una matrice

Capitolo 1

Equazioni differenziali

1.1 Equazioni differenziali del 1° ordine

Definizione 1. *Una equazione differenziale o* EDO *del 1° ordine è una relazione tra una funzione y e la sua derivata y' che può essere scritta come*

$$y' = f(y)$$

dove f è una funzione continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Esempi:

- *Tema d'esame gennaio 2021*
  $y' = t\sqrt{y_{(t^2)} + 1}$ è in forma normale con $f(t,s) = t\sqrt{s^2+1}$. Il dominio di f è $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

- $y'_{(t)} = \frac{1}{t}$ con $t > 0$ diventa $f(t,s) = \frac{1}{t}$. **Oss:** f non dipende esplicitamente da s.
  Il dominio di f è $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*\}$, dunque è diviso in due parti. Dovrò quindi risolvere la EDO separatamente nelle due regioni.

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{1}{t}, t > 0 \Rightarrow y(t) = ln(t) + c \\ y'(0) = \frac{1}{t}, t < 0 \Rightarrow y(t) = ln(-t) + c \end{cases}$$

Definizione 2. *Si chiama* integrale generale *l'insieme delle soluzioni.*

Definizione 3. *Si chiama* soluzione particolare *una specifica soluzione.*

Una EDO del 1° ordine ha ∞^1, soluzioni, cioè avrà una costante arbitraria. In modo analogo, una EDO del 2° ordine avrà ∞^2 soluzioni, cioè avrà due costanti arbitrarie. Esempi:

- integrale generale ce^t con c costante arbitraria. Esempi di soluzioni particolari: e^t, $2e^t$, $-e^t$.
- $z_{(t)} = -1 + arctan(t)$ con $t \in \mathbb{R}^*$. Esempio di soluzione: $z' = 0 + \frac{1}{1+t^2}$.

Oss: La EDO $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ è definita per $(t, y) \in dom(f)$

1.1.1 Soluzioni costanti di EDO del 1° ordine

Definizione 4. *Una soluzione costante di una EDO del 1° ordine è una funzione $y(t)$ che sia soluzione.*

Quando $y(t) = c$ è soluzione? Sostituisco c a y:

$$y'(t) = f(t, y(t))\forall t$$

Quindi le soluzioni costanti sono $y(t) = c$ con c tale che $f(t, c) = 0\forall t$.

Esempi:

- Eq. Logistica: $y'(t) = ky(t) - hy^2(t)$
  $f(t, y) = ky - hy^2$
  $f(t, c) = 0\forall t \quad ky - hy^2 = 0 = y(k - hy)$
  Soluzioni costanti: $y = 0$ o $y = \frac{k}{h}$
- $y'(t) = te^{y(t)} \quad te^{y(t)} = 0$ non ha soluzione.

1.1.2 EDO a variabili separabili

Definizione 5. *Una EDO del 1° ordine è detta* a variabili separabili *se è del tipo*

$$y' = f(t) \cdot g(y(t))$$

dove f e g sono funzioni continue su intervalli $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Esempio

$$y'(t) = \frac{1}{t} \quad h(t) = \frac{1}{t} \quad j_1 = (-\infty, 0)U(0, \infty) = \mathbb{R}\text{-}0$$

1.1.3 Problema di Cauchy

Definizione 6. *Data una EDO del 1° ordine* $y'_{(t)} = f(t, y_{(t)})$ *sia* (t_0, y_0) *dove la EDO è definita. Cioè* $(t_0, y_0) \in dom(f)$
Si chiama problema di Cauchy *il problema di determinare* $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *che soddisfa:*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: il sistema ha una condizione perché è del 1° ordine. La condizione trova la soluzione particolare che passa per (t_0, y_0).

1.1.4 Come si risolve?

Step:

1. Trova l'integrale generale. (∞^1 soluzioni dipendenti da 1 parametro)
2. Impongo la condizione $y(t_0) = y_0$ e la costante c
3. Sostituisco c in 1.

Esempi

Aggiungi Esempi

1.1.5 EDO 1° ordine lineari

Definizione 7. *Una EDO del 1° ordine lineare in forma normale è:*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)} + b(t)$$

dove a *e* b *sono funzioni continue su un intervallo* J *di* $\mathbb{R}$.
N.B. J *è il più grande intervallo di* $\mathbb{R}$ *tale che* $a, b \in J$.

Definizione 8. *Si chiama EDO omogenea associata*

$$y'_{(t)} = a(t)y_{(t)}$$

Esempio:
Aggiungi esempi

1.1.6 Principio di sovrapposizione

Sia $a : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su J.
L'applicazione $\mathcal{L}(y) = y' - a(t) \cdot y$ è lineare.

Più esplicitamente, dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:
$\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathcal{L}(y_1) + c_2\mathcal{L}(y_2) \forall y_1, y_2$ funzioni derivabili.

Ancora più esplicitamente: se $\mathcal{L}(y_1) = b_1$ cioè $y_1' = a(t)y_1 + b_1$
se $\mathcal{L}(y_2) = b_2$ cioè $y_2' = a(t)y_2 + b_2$
allora $\mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1b_1 + c_2b_2$ cioè $y'_{(t)} = a(t)(c_1y_1 + c_2y_2) + c_1b_1 + c_2b_2$
cioè $(c_1y_1 + c_2y_2)' = a(t)(c_1y_1 + c_2y_2) + c_1b_1 + c_2b_2$
Oss:

- Prendo due soluzioni distinde della EDO
- $y' = a(t)y + b(t)$

1.1.7 Esistenza e unicità globale di Cauchy

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a, b : J \to \mathbb{R}$ continue.
Per ogni $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $y : J \to \mathbb{R}$ definita su J.
Aggiungi parte in blu lezione 16/09/2022

1.1.8 Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine

$a, b : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$
L'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} + \left(\int e^{-A(x)} b(x)dx + c \right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a.

Dimostrazione 1. da sapere all'esame

- *Porto ay sulla sinistra*
  $y' - ay = b$
- *Moltiplico l'equazione per* e^{-A}
  $e^{-A}y' - e^{-A}ay = e^{-A}b$

- *Riconosco*
  $y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)} = \left(y(t)e^{-A(t)}\right)$
  Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:
  $(ye^{-A})' = be^{-A}$

- *Integro*
  $y(t)e^{-A(t)} = \int be^{-A(t)}dt + c$

- *Moltiplico tutto per* $e^{A(t)}$
  $y(t) = e^{A(t)} \left(\int be^{-A(t)}dt + c\right)$

1.1.9 Equazione di Bernoulli

Definizione 9. *Si chiamano* equazione di Bernoulli *le EDO del 1° ordine lineari di forma:*

$$y'_{(t)} = k(t)y_{(t)} + h(t)y^{\alpha}_{(t)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

con $k, y : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Premesse:

1. Per semplificare ci occupiamo solo di soluzioni $y \geq 0$
2. nel caso $\alpha < 1$ accadono fenomeni strani, però la tecnica risolutiva è comunque valida

Procedimento di risoluzione:

1. Cerchiamo le soluzioni costanti (c'è sempre almeno quella nulla)
2. divido per y^{α}
   $y'(t) = k(t)y(t) + h(t)$
   $y'(t) = k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)$
3. Pongo $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$
   Quale è l'equazione soddisfatta da z?
   $z'(t) = (1 - \alpha) \left[k(t)y(t)^{1-\alpha} + h(t)\right]$
   $z'(t) = (1 - \alpha) k(t)z(t) + (1 - \alpha) h(t)$
4. Risolvo l'equazione lineare in z
5. Torno alla variabile $y = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

1.1.10 Equazione Logistica

$y(t)$ = numero di individui infetti al tempo t
$y : J \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

1° Modello: Malthus (inizio '800)
Il tasso di crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

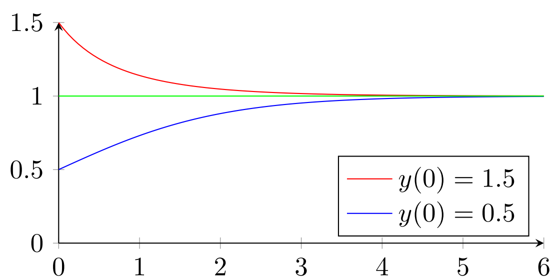
$$y'(t) = ky(t)$$

dove $k \in \mathbb{R}^+$ è la *tasso di crescita* e k è il coefficiente di proporzionalità, dato dalla differenza tra tasso di natalità e tasso di mortalità.
integrale generale: $y(t) = y(0)e^{kt} \mathrm{con} c > 0$

2° Modello: Verhulst (metà '800)

$$y'(t) = ky(t) - hy(t)^2 \quad \text{con } k, h > 0$$

Il modello prende anche in considerazione la competizione per le risorse al crescere della popolazione.
Simulazione numerica per $k = h = 1$



1.2 Equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine lineari

1.2.1 Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee

Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue e $a \neq 0$ in I.
L'integrale generale dell'eq. omogenea

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1} + c_2 y_{0_2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$$

dove y_{0_1}, y_{0_2} sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Oss: Dire che due soluzioni sono linearmente indipendenti significa che non esiste un coefficiente c tale che $c \cdot y_1 = y_2$, ovvero che non sono una multipla dell'altra.
Premesse:

1. Spazio vettoriale $V = C^2(I)$
2. $I \subseteq \mathbb{R}$ funzione di 1 variabile $y(t)$
3. $C^2(I) = \{y : I \to \mathbb{R}$, derivabili in I e y' continua in $I\}$
4. $C^2(I) = \{y \in C^1(I)$, derivabili due volte in I con y'' continua in $I\}$
5. $C^2(I)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali di somma di funzioni e prodotto di funzione per uno scalare.

Dimostrazione 2. da sapere all'esame

- *L'integrale generale dell'omogenea è:*
  $W = \{y \in V : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0\}$
- *W è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow$ è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).*
- *Devo dimostrare che W ha dimensione 2.*

  i) Determinare 2 soluzioni lineari indipendenti dell'equazione y_{0_1}, y_{0_2}

  ii) Dimostrare che ogni soluzione y della EDO si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2}

i) *Scelgo* y_{0_1} *soluzione del problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} ay''_{0_1}(t) + by'_{0_1}(t) + cy_{0_1}(t) = 0 \\ y_{0_1}(0) = 1 \\ y'_{0_1}(0) = 0 \end{cases}$$

Verifico che y_{0_1}, y_{0_2} *sono soluzioni lineari indipendenti. Se per assurdo fossero una multiplo dell'altra*
$y_{0_1}(t) = \lambda y_{0_2}(t) \quad \forall t$
In particolare, per $t = 0$ *avrei* $y_{0_1}(0) = \lambda y_{0_2}(0)$ *avrei trovato* $1 = \lambda \cdot 0$ *assurdo.*

ii) *Sia* $y_0(t)$ *soluzione dell'EDO, cerco* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *tali che* $y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t)$
$y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t) = c_1$
$y'_0(t) = c_1 y'_{0_1}(t) + c_2 y'_{0_2}(t) = c_2$

In conclusione la funzione:
$z(t) = y_0(0) \cdot y_{0_1}(t) + y'_0(0) \cdot y_{0_2}(t)$
risolve lo stesso problema di Cauchy di $y_0(t)$ *e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:*
$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$
cioè $y_0(t)$ *si scrive come combinazione lineare di* y_{0_1}, y_{0_2} *con coefficienti* $c_1 = y_0(0)$ *e* $c_2 = y'_0(0)$.

1.2.2 Struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari non omogenee

Siano $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ in I
L'integrale generale dell'eq. completa

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

è:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

dove la $y_0(t)$ è l'integrale dell'eq. omogenea, come nel teorema precedente, e la $y_p(t)$ è una soluzione particolare dell'eq. compleata.

Oss: L'integrale generale di una EDO del secondo ordine lineare non omogenea è quindi uno spazio affine (cioè il translato di uno spazio vettoriale) di dimensione 2.

Fine lezione 21/09 c'è una scritta in fondo in rosso che non so cosa sia.

1.3 Sistemi differenziali lineari

Esempio introduttivo $F = ma$

$$y''(t) = \frac{F}{m}$$

Trasformo in un sistema di due equazioni differenziali di primo ordine:
$y_1(t) = y(t)$: posizione e $y_2(t) = y'(t) = y_1'(t)$: velocità.

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & \text{la velocità è la derivata della posizione} \\ y_2'(t) = \frac{F}{m} & \text{l'accelerazione è la derivata della velocità} \end{cases}$$

In forma matriciale:

E mo come la disegno?

...

In forma compatta: $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}$$

Esercizi:

Esercizi qua

Definizione 10. Sistema differenziale lineare *è un sistema di equazioni differenziali di primo ordine con coefficienti costanti, cioè:*

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$

dove A è una matrice quadrata di ordine n e $\underline{b}$ è un vettore di dimensione n.

1.3.1 Risultati teorici

Come si scrive un problema di Cauchy per un sistema?
Esempio: $y''(t) - 2y'(t) = t$ con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$
Trasformo la EDO in sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + t \end{cases}$$

Un problema di Cauchy è

$$\begin{matrix} y_1(t_0) = y_0 \\ y_2(t_0) = v_0 \end{matrix} \qquad \underline{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Definizione 11. *Dato* $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$ *con* A *matrice quadrata di ordine* n *e* $\underline{b}$ *vettore di dimensione* n
chiamiamo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = A \cdot y(t) + \underline{b}(t) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Esempi

C'è una pagina che non so se è spiegazione o esercizi, ci sono parti scritte in LaTeX e altre a mano.
****
****
Prosegue poi con i sistemi omogenei.

1.4 Sistemi non omogenei

1.4.1 Struttura dell'int. gen. dei sistemi non omogenei

Manca la definizione.

Praticamente, per risolvere un sistema non omogeneo:

1. Si risolve il sistema omogeneo associato. Cioè determino una matrice Wronskiana $W(t) = [y_{0_1}(t) \dots y_{0_n}(t)]$
   Integrale generale: $\underline{y}(t) = W(t) \cdot \underline{c}, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n$

2. Due possibilità:

   - cerco una soluzione particolare con il metodo di somiglianza
     $\underline{y}(t) = \underline{y}_0(t) + \underline{y}_p(t) = W(t) \cdot \underline{c} + \underline{y}_p(t)$
   - uso $W(t)$ per trovare direttamente l'integrale generale tramite la formula:
     $\underline{y}(t) = W(t) \left(\int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) \right) = W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + W(t) \cdot \underline{c}$
     Confronto le due soluzioni.
     Nella prima ho $W(t) \cdot \underline{c}$ e anche nella seconda, ed è l'integrale generale dell'omogenea.
     Quindi $y_p(t) = \underline{y}(t) - W(t) \int [W(\tau)]^{-1} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau$ perché è ciò che resta da uguagliare.
     In particolare, se A è diagonalizzabile reale, allora una matrice Wronskiana è $W(t) = e^{At}$
     $\underline{y}(t) = e^{At} \left[\int e^{-At} \cdot \underline{b}(\tau) d\tau + \underline{c} \right]$
     Osservazioni da aggiungere.
     Esempio da aggiungere.

Capitolo 2

Serie di funzioni

2.1 Generalità sulle serie di funzioni

Esempio: Sviluppi di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Definizione 12.
Date delle funzioni $f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad n = (0, 1, 2, \dots)$

- *La serie di funzioni a termine generale* $f_n(x)$ *è la successione delle somme parziali*
  $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$
  Oss: *Fissato* $\overline{x} \in J$ *si tratta di una serie numerica*

- *La serie di funzioni converge puntualmente (o semplicemente) nel punto* $\overline{x}_0 \in J$ *se la serie numerica di termini generale* $f_n(\overline{x})$ *è convergente, cioè se esiste finito il limite:*
  $\lim_{n\to\infty} S_n(\overline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\overline{x})$

- *Chiamiamo insieme di convergenza puntuale (o semplice) l'insieme* $E \subseteq J$ *dei punti* $\overline{x}_0$ *in cui la serie di funzioni converge puntualmente. Nell'insieme* E *risulta così definita una nuova funzione, detta somma della serie, che si indica con il simbolo:*
  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in E)$
  Significa:
  $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_k(x) \quad (x \in E)$

- *La serie di funzioni converge assolutamente in $\overline{x} \in J$ se la serie numerica di termine generale $f_n(\overline{x})$ converge.*
  Oss: *la convergenza assoluta...*

Esempio fondamentale: Serie geometrica.
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
*Oss.*Servirà per la serie di potenze: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$
insieme convergenza puntuale $E = (-1, 1) = \{|x| < 1\}$
Per $x \leq -1$ è indeterminata
per $x \geq 1$ è divergente
per ...

Serie di Riemann
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ $\quad f_n(x) = \frac{1}{n^x} = \left(\frac{1}{n}\right)^x$ L'insieme di convergenza puntuale è:
$E = (1, \infty) = \{x > 1\}$
La convergenza è anche assoluta in E perché per $x \in E \qquad |f_n(x)| = f_n(x)$

Se $x = 1$ è la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.

Problema: se le funzioni f_n sono continue, anche f lo è? **Segue...**

2.1.1 Convergenza totale di una serie di funzioni

copiare appunti della prof, formule e grafici

Definizione 13. *Importante*
Diciamo che la serie di termine generale $f_n(x), x \in J$ converge totale in $I \in J$ se esiste una successione numerica a_n tale che:

i) $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - a_n| = 0 \quad \forall x \in I \quad \forall n$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

Oss:

- La nozione di convergenza totale riguarda un intervallo, mai un punto.
- La convergenta totale in I implica la convergenza assoluta (quindi anche puntuale) in ogni punto di I.
- **Attenzione:** non vale il viceversa: se una serie converge assolutamente in ogni punto di I non è detto che converga totalmente in I.

2.2 serie di potenze

2.3 serie di Fourier