

Studio sistema

Classificazione

- 1. Numero di input e output: SISO, MISO, SIMO, MIMO
- 2. Strettamente proprio: $y(t) = g(x(t), t)$ ovvero non compare u null'uscita.
- 3. Proprio: $y(t) = g(u(t), t)$
- 4. Tempo invariante (stazionario): $y(t) = g(u(t))$ non dipende da t . Altrimenti tempo variante.
- 5. Lineare: combinazioni lineari di u e x . No esponeziali, prodotti o funzioni. altrimenti non lineare.
- 6. Dinamico: dipende da x . Ha ordine n numero di \dot{x}_n . Altrimenti statico.
- 7. Ordine: numero / dimensione ingressi.

Sistemi a tempo continuo

Ovvero nella forma $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$.

Equilibrio

Cerco y_e punto di equilibrio dato u_e ingresso.

- 1. Pongo le derivate a zero. $\dot{x} = 0$
- 2. Risolvo il sistema lineare. Trovo x_1, x_2, \dots, x_n
- 3. Sostituisco nelle equazioni di output.

Trovo y_e punto di equilibrio.

Linearizzazione

Scrivere equazione del sistema linearizzato attorno a un punto di equilibrio dato: (\bar{x}, \bar{u})

Scrivo il sistema in forma matriciale. Avrò A, B, C, D dove A è $n \times n$, B è $n \times m$, C è $p \times n$ e D è $p \times m$. In genere $p = m = 1$:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}$$

Avrò quindi:

$$\begin{cases} \delta \bar{x} = A \delta \bar{x} + B \delta u \\ \delta \bar{y} = C \delta \bar{x} + D \delta u \end{cases}$$

Studio stabilità

A partire dal sistema linearizzato. Studio autovalori di A . Se hanno tutti parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile.

Funzione di trasferimento

Due modi per trovarla:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Oppure:

Sostituisco le derivate \dot{x}_i con sX_i e risolvo il sistema lineare: $y = G(s)u$.

Il sistema si risolve in genere per sostituzione.

NB: (se c'è un α) se serve valutare oss. e ragg. bisogna controllare gli autovalori positivi e cercare di eliminarli (semplificare numeratore e denominatore).

Studio ossevabilità e raggiungibilità

Osservabilità:

$$M_O = [[C][A \cdot C][A^2 \cdot C] \dots [A^{n-1} \cdot C]]^T$$

(in verticale)

Se il determinante di M_O è diverso da zero, il sistema è ossevabile.

Raggiungibilità:

$$M_R = [[B][A \cdot B][A^2 \cdot B] \dots [A^{n-1} \cdot B]]$$

Se il determinante di M_R è diverso da zero, il sistema è raggiungibile. Per entrambi, se il n. poli = ordine, allora il sistema è ossevabile e raggiungibile.

Guadagno statico

Studia stabilità. Se as. stabile, il guadagno statico è il rapporto tra l'uscita e l'ingresso a regime, ovvero il $G(s)$ in $y = G(s)u$.

Calcolo risposta analitica (modi)

Risposta libera significa $u = 0$. L'esercizio da uno stato $x(0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- 1. Calcolo autovalori di A .
- 2. Calcolo autovettori di A .
- 3. Calcolo $x(t) = \sum_{i=1}^n x_i e^{\lambda_i t} v_i$ ovvero la somma dei modi.
- 4. Calcolo $y(t) = Cx(t)$.

Sistemi a tempo discreto

Ovvero nella forma $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), y(k) = Cx(k) + Du(k)$.

Equilibrio

Cerco y_e punto di equilibrio dato u_e ingresso.

- 1. Pongo $x(k+1) = x(k)$
- 2. Risolvo il sistema lineare. Trovo x_1, x_2, \dots, x_n
- 3. Sostituisco nelle equazioni di output.

Trovo y_e punto di equilibrio.

Studio stabilità

A partire dal sistema linearizzato. Studio autovalori di A . Se hanno tutti parte reale < 1 , il sistema è asintoticamente stabile.

Linearizzazione

Scrivere equazione del sistema linearizzato attorno a un punto di equilibrio dato: (\bar{x}, \bar{u})

Scrivo il sistema in forma matriciale. Avrò A, B, C, D dove A è $n \times n$, B è $n \times m$, C è $p \times n$ e D è $p \times m$. In genere $p = m = 1$:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}$$

Avrò quindi:

$$\begin{cases} \delta x(k+1) = A \delta x + B \delta u \\ \delta y = C \delta x + D \delta u \end{cases}$$

Calcolo movimento libero uscita (modi)

Movimento libero significa $u = 0$. L'esercizio da uno stato $x(0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- 1. Calcolo autovalori di A .
- 2. Calcolo autovettori di A .
- 3. Calcolo $x(t) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i^k v_i$ ovvero la somma dei modi.
- 4. Calcolo $y(t) = Cx(t)$.

Associare grafico al sistema

- 1. $Re(\lambda) = 0$ oscillazioni costanti.
- 2. $Re(\lambda) > 0$ diverge.
- 3. $Re(\lambda) < 0$ converge quindi studio tempo dominante e assestamento (vedi andamento qualitativo).

Il numeratore influenza l'ampiezza della risposta.

- 1. poli reali negativi: risposta smorzata esponenzialmente.
- 2. poli complessi coniugati: oscillazioni smorzate.
- 3. Poli puramente immaginari: oscillazioni non smorzate.
- 4. Poli reali positivi: risposta crescente esponenzialmente.

Risposta analitica a impulso unitario (Heaviside)

Dato un $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ con $N(s)$ e $D(s)$ polinomi.

- 1. Sviluppo di $G(s)$ in fratti semplici: (NB i poli uguali appaiono una volta per ogni molteplicità)

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{(s - \lambda_i)}$$

- 2. Calcolo i P_i : Sostituisco $s = \lambda_i$ in $\frac{N(s)}{Q(s)}$ dove $Q(s)$ è il polinomio che rimane dopo aver rimosso il termine $(s - \lambda_i)$ da $D(s)$.
- 3. Se non si può calcolare come sopra, eguaglio $\sum_{i=1}^n P_i \cdot Q_i(s) = N(s)$ e risolvo il sistema lineare e sostituisco s tale che sia diverso da tutti i λ_i .
- 4. Sostituisco i P_i in $G(s)$.
- 5. Calcolo la trasformata inversa di $G(s)$, ovvero i termini del tipo $\frac{P_i}{s - \lambda_i} \rightarrow P_i \cdot e^{\lambda_i t}$.

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\lambda_i t} \right) sca(t)$$

Schemi a blocchi

Serie: $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$

Parallelo: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

Retroazione negativa: $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$

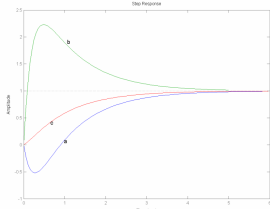
Retroazione positiva: $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}$

Per lo studio di stabilità, si possono ignorare i blocchi in retroazione.

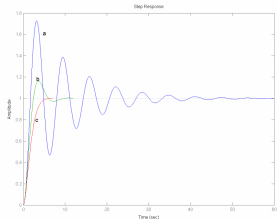
Andamento qualitativo

Data una funzione di trasferimento $G(s)$
Il polo dominante è quello con la parte reale maggiore.
NB se negativo, il polo dominante ha il valore assoluto minore.

- 1. valore finale: $y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)$
- 2. valore iniziale: $y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot G(s)$
- 3. derivata iniziale: $\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \cdot G(s)$
- 4. tempo dominante: $\tau = \left| \frac{1}{\Re(\lambda)} \right|$ dove λ è il polo dominante.
- 5. tempo di assestamento: al 99% è 5τ (sarebbe 4.6τ), al 95% è 3τ .
- 6. Sovraelongazione percentuale: $S\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \frac{Max - y_{\infty}}{y_{\infty}} \cdot 100$
Ovvero il punto di massimo in che percentuale sfiora il valore finale.
- 7. Se $\mu = e^{-k s}$ allora il ritardo $\tau_r = k$, quindi nel disegno la funzione parte da k .
- 8. Studio gli zeri:
 - a) zero positivo



- b) zero negativo più vicino all'origine del piano complesso rispetto ai poli
- c) zero negativo più lontano dall'origine del piano complesso rispetto ai poli
- 9. Se ho poli complessi coniugati, studio $\xi = \frac{\Re(\lambda)}{\sqrt{\lambda\bar{\lambda}}}$
 - a) $\xi < 0.5$
 - b) $\xi = 0.5$
 - c) $\xi > 0.5$



Disegno il grafico con multipli di τ su asse x i valori di y su asse y .
Se chiede andamento qualitativo a sca allora i valori finali e iniziali devono essere moltiplicati per $\frac{1}{s}$. Se Ram allora per $\frac{1}{s^2}$.
Margine di fase: $\varphi_m = 180 + \arg(L(j\omega_{\pi}))$ (distanza da -180°).
 ω_c è il punto in cui il modulo di $L(j\omega)$ passa per $0dB$.

Disegno diagrammi di Bode

Viene fornita una funzione di trasferimento $G(s)$.

- 1. trasformo la funzione nella forma: $G(s) = \frac{\mu}{s^m} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (s+z_i)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)}$
- 2. trovo zeri, poli e μ guadagno statico.
- 3. Per il diagramma di modulo:
 - Popolo gli assi: in generale l'ordine di grandezza del primo polo o zero lo colloco nella terza decade. Su asse y metto α_{dB} poco sopra la metà.
 - Tipo di funzione: 0 se $m = 0$, 1 se $m = 1$, 2 se $m \geq 2$.
 - Posizione iniziale: $\alpha_{dB} = 20 \log_{10}(\mu)$.

- metto un punto in (λ_1, α_{dB}) con λ_1 polo o zero più piccolo.
- Traccio una retta con pendenza $20 \cdot m$ dB/decade verso sinistra.
- Proseguo verso destra e ogni polo o zero mi fa cambiare pendenza. Se zero sale, se polo scende.
- 4. Per il diagramma di fase:
 - Copio asse x da sopra, asse y centro il valore di φ .
 - fase iniziale $\varphi = -m \cdot 90 + k$ con $k = -180$ se $\mu < 0$, $k = 0$ altrimenti.
 - Traccio una retta orizzontale fino al primo polo o zero.
 - Ogni polo o zero mi fa cambiare di 90 gradi. Se z^+ scende, se p^+ sale, se z^- sale, se p^- scende.
 - Traccio curva reale approssimata. (per Nyquist) NB: se smorzamento $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ allora sui cambi di modulo la funzione reale ha un picco di risonanza. (ovvero sfiora)

P.S.: Se c'è complesso coniugato, i due poli sono la radice del coefficiente di s^0

Disegno diagrammi di Nyquist

Diagramma polare. L'esercizio fornisce una funzione di trasferimento $G(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (s+z_i)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)}$.

Regole di tracciamento, dato diagramma di Bode:

- Se $g = 0$ allora il punto di partenza è $(\mu, 0)$.
- Se $g < 0$ allora il punto di partenza è l'origine.
- Se $g > 0$ allora il punto di partenza è l'infinito.
- La funzione abbandona l'asse reale sempre ortogonalmente.
- Se numero di poli - numero di zeri > 0 allora il punto di arrivo è l'origine.

Per disegnare il diagramma, utilizzo la fase di Bode come angolo e il modulo come raggio (coordinate polari).

Criteri di stabilità

Dato un sistema. Se bisogna scegliere, si fa Nyquist.

Criterio di Nyquist

Il sistema è asintoticamente stabile se $N = P$ con P numero di poli a parte reale positiva e N numero di giri antiorari del diagramma di Nyquist. Studio stabilità \forall intervallo di $\frac{-1}{k}$ e poi passo a k .

Esempio: $-0,5 < -\frac{1}{k} < 0 \Rightarrow k > 2$

Criterio di Bode

Condizioni per poter applicare il criterio di Bode:

- 1. Numero di poli a parte reale positiva è zero.
- 2. ω_c è unica ovvero passa una sola volta per $0dB$.
- 3. La funzione di trasferimento è strettamente propria.

Se è applicabile, il sistema è asintoticamente stabile se $\mu > 0$ e $\varphi_m > 0$.

Risposta in frequenza / transitorio esaurito

Margine di guadagno: $MG = \frac{1}{|L(j\omega_{\pi})|}$
Trasformo $u(t)$ in $y(t)$: i numeri diventano coeff. di u e $\kappa \sin(\alpha t + \beta)$ diventa $\kappa |G(j\omega)| \sin(\alpha t + \beta + \arg(G(j\omega)))$. Analogamente per \cos .

Posso calcolare $|G(j\omega)|$ oppure prenderlo dal diagramma di Bode $10^{\frac{val}{20}}$
Attenzione a sovraelongazione.

Regolatore

L'esercizio fornisce una funzione di trasferimento $G(s)$ con uno schema di controllo e delle specifiche.
Ogni specifica mi da un vincolo su $G(s)$.

Studio vincoli

- Attenuazione ampiezza $n(t) = \sin(\omega_n \cdot t)$ inferiore a $-15dB$. $|L(j\omega)| < -15dB$.
- Attenuazione ampiezza $d(t) = \sin(\omega_d \cdot t)$ inferiore a $-15dB$. $|L(j\omega)| > 15dB$.
- Banda passante in anello chiuso $B > 10rad/s$. $\omega_c > 10$.
- Ampiezza segnale $y(t)$ a fronte di ingressi $d(t) = 5\sin(\omega_d \cdot t)$ inferiore a 0.1. $|S(j\omega)| \cdot 5 < 0.1$ ovvero $|L(j\omega)| > 50dB$.
- Margine di fase superiore a 60° . $\varphi_m > 60^\circ$.
- Attenuazione $w(t) = \sin(\omega_w \cdot t)$ superiore a $-3dB$ $[0, 20]$. $\omega_b \geq 20 \Rightarrow \omega_c > 20$.
- $|e(t)| < 0.11$ a trans.es.a fronte di $w(t) = (6 + 6\sin(\omega_w \cdot t))sca(t)$ e $n(t) = \frac{2}{6}\cos(\omega_n \cdot t)sca(t)$ e $\omega_n \geq 1$
 - 1. $6|S(j\omega)| < 0.1 \Rightarrow \frac{6}{|L(j\omega)|} < 0.1 \Rightarrow |L(j\omega)| > 60dB$
 - 2. $\frac{2}{6}|F(j\omega)| < 0.01 \Rightarrow \frac{2}{6}|L(j\omega)| < 0.01 \Rightarrow |L(j\omega)| > \frac{3}{100}dB$
- Sovraelongazione percentuale nella risposta a scalino inferiore al 25%
 $S\% < 25\% \Rightarrow e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 0.25$.
 $\xi\pi > \ln(0.25) \cdot \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \xi > \frac{\ln(0.25)}{\sqrt{\pi^2 + |\ln(0.25)|^2}} \simeq 0.404$
 $\varphi_m > 40^\circ$.
- Se ho un vincolo del tipo $|e_{\infty}| = Ram(t)$ o $|e_{\infty}| = sca(t)$ allora l'ordine di $L(s)$ è $g + 1$.
- Tempo di assestamento inferiore a 2 unità di tempo.
Se $\varphi_m > 75^\circ$ allora $\frac{1}{\omega_c} < 2$ quindi $\omega_c > 0.5$.
Se $\varphi_m \leq 75^\circ$ allora $\frac{1}{\omega_c \cdot \xi} < 2$ quindi $\omega_c > \frac{0.5}{\xi}$ dato che $\xi = \frac{\varphi_m}{100}$ allora $\omega_c = 0.8$.

| $ e_{\infty} $ | $\frac{A}{S}$ | $\frac{A}{S^2}$ | $\frac{A}{S^3}$ |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $g = 0$ | $\frac{A}{1+u}$ | ∞ | ∞ |
| $g = 1$ | 0 | $\frac{A}{u}$ | ∞ |
| $g = 2$ | 0 | 0 | $\frac{A}{u}$ |

- **NB** se ho due vincoli su e_{∞} ma uno è sca e l'altro è ram , allora ignoro la sca .
- $|e_{\infty}| \leq 0.5$ con $w(t) = 8Par(t)$
 $\frac{8}{u} < 0.5$ quindi $u > 16$ e $g = 2$.
- $|e_{\infty}| \leq 0.5$ con $w(t) = 8Sca(t)$
 $\frac{8}{1+u} < 0.5$ quindi $u > 15$ e $g = 0$.
- $|e_{\infty}| \leq 0.5$ con $w(t) = 8Ram(t)$
 $\frac{8}{u} < 0.5$ quindi $u > 16$ e $g = 1$.
- $|e_{\infty}| = 0$ allora $g + 1$.

Progetto per inversione

- 1. Sul diagramma di Bode, disegno i vincoli ottenuti dalle specifiche.
- 2. Scelgo una $L(s)$ che rispetti i vincoli (disegnandola sul diagramma).
- 3. Calcolo $R(s) = L(s) \cdot G(s)^{-1}$.