Analisi 2

Equazioni differenziabili a variabili separabili

$y' = -2xy^2$

1. Cerco soluzioni costanti: $y' = 0 \Rightarrow -2xy^2 = 0 \Rightarrow y = 0$
2. Separo le variabili: $\frac{y'}{y^2} = -2x \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int -2xdx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -2\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = \frac{1}{x^2+c}$

Equazioni differenziali lineari

$y' + 2y = e^x$

1. Cerco soluzioni costanti: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$
2. Moltiplico l'equazione originale per il fattore integrante: $\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$. Il lato sinistro diventa una derivata di un prodotto: $\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x)$ che diventa $\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + C$
3. Isolo la variabile y: $y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx + C\right)$

Risolvere e^{tM}

1. Calcolo autovalori di M: λ_1, λ_2
2. Calcolo autovettori di M: v_1, v_2
3. Costruisco la matrice $S = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ e la matrice diagonale $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ e la matrice S^{-1}.
4. $e^{tM} = Se^{t\Lambda}S^{-1}$
5. Per problema di Cauchy omogeneo: $y(t) = e^{tM}y(0)$
6. Per problema di Cauchy non omogeneo: $y(t) = e^{tM}y(0) + e^{tM}\int_0^t e^{-sM}Q(s)ds$

Problemi di Cauchy

Es: Risolvi il problema di Cauchy: $y'(t) = y^2(t)$ con $y(0) = -1$

1. Ricavo le soluzioni costanti: $y'(t) = 0 \Rightarrow y^2(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$
2. Separo le variabilie: $\frac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + c$
3. Usando la 2° eq. del sistema ricavo c: $y(0) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{-1} = 0 + c \Rightarrow c = 1$
4. ottengo la soluzione: $y(t) = \frac{-1}{t+1}$

Equazioni di Bernoulli

Es: trova una soluzione generale dell'equazione di Bernoulli
$y' = e^t y + y^{10}$. $[y = 0]$
La forma generale è: $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ con $\alpha \neq 1$
$y = 0$ è soluzione costante.

1. dividere per y^α: $\frac{y'}{y^{10}} = e^t y^{-9} + 1$
2. introduco $Z(x) = y^{1-\alpha} = y^{-9}$. Riscrivendo in funzione di Z, l'eq sarà lineare.
3. Derivo Z e sostituisco: $Z' = -9y^{-10}y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{9}Z'y^{10}$
   $\frac{-9Z'y^{10}}{y^{10}} = e^t Z + 1 \Rightarrow Z' = \frac{-e^t Z}{9} - \frac{1}{9}$
   Allora $a(x) = -\frac{-e^t}{9}$ e $b(x) = \frac{1}{9}$
4. Ottenuta l'eq. lineare sirolvo come sopra separando le variabili.

EDO II

1. Scrivo polimio caratteristico: Es: $y'' - 5y' - 6y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$
2. Calcolo Δ e i valori di λ_1 e λ_2 e omogenea y_{omo}
   - $\Delta > 0 \Rightarrow \quad y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$
   - $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \quad y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_2 x}$
   - $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda = m \pm ni \Rightarrow \quad y(x) = e^{mx}[c_1\cos(nx) + c_2\sin(nx)]$
3. Calcolo la soluzione particolare y_p
   Es: $y'' + 9y = sin(3t)$
   - Scrivo y_p basandomi su y_{omo}:
     $y_p = [A\cos(3t) + B\sin(3t)] \cdot t$
     NB: Visto che $sin(3t)$ è già soluzione dell'omogenea, aggiungo t
   - Calcolo y_p' e y_p'':
     $y_p' = Acos(3t) + Bsin(3t) + t(-3Asin(3t) + 3Bcos(3t))$
     $y_p'' = -3Asin(3t) + 3Bcos(3t) - (-3Asin(3t) + 3Bcos(3t)) + t(-9Acos(3t) - 9Bsin(3t))$
   - L'eq è $y_p'' + 9y = sin(3t)$: sostituisco y_p: $y_p'' + 9y_p = -6Asin(3t) + 6Bcos(3t) + 9Atcos(3t) + 9Btsin(3t) = sin(3t)$
   - Svolgo i calcoli e ottengo A e B: $A = -\frac{1}{6}$ e $B = 0$
   - Sostiuisco A e B in y_p e ottengo la soluzione completa: $y_p(t) = -\frac{1}{6}t\cos(3t)$
   - Scrivo la soluzione finale: $y = y_{omo} + y_p$

Sistemi di EDO

Metodo 1: sostituzione

Metodo 2: matriciale

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

1. Ricavo A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
2. Calcolo det(A-λI): $det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$
3. Ricavo autovalori: $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$ quindi $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$
4. Calcolo gli autovettori associati:
   $$\lambda_1 = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 2x_2$$
   analogo per $\lambda_2 = -1$: $x_1 = -x_2$
5. Ottengo la soluzione: $y(t) = W(t) \cdot \underline{c}$ con $W(t)$ matrice wronskiana e $\underline{c}$ vettore delle costanti.
   Quindi $\underline{y}(t) = c_1\mu_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mu_2e^{\lambda_2 t}$ con μ_1 e μ_2 autovettori.
   Quindi $\underline{y}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5t}$

Serie

Telescopica: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ con $a_n = b_{(n+1)} - b_n$
Geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$ converge.
Geometrica complessa $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ se $|z| < 1$ converge.
Posso ridurre una telescopica a una geometrica con $n = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n - \frac{2}{3}^0 - \frac{2}{3}^1$$

Bata sottrarre $b^0, b^1, \ldots, b^{n_0-1}$

Serie di potenze

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ e R. di conv.
Es: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n} = \sum \frac{1}{2^n} \cdot x^n$

1. Calcolo il raggio di convergenza:
   (a) $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
   (b) $R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$
2. Dato R studio le frontiere dell'insieme di convergenza:
   $x \in (-2, 2)$
   $x = -2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2^n}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} -1^n$ oscilla, quindi non converge.
   $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = +\infty$ diverge.
   Dato che diverge in entrambi i casi escludo le frontiere: $I = (-2, 2)$

Dunque converge semplicemente e non totalmente.
Esercizio serie di potenze con serie geometrica:
$\frac{1}{1+x^4} = \sum(-x^4)^n$
Moltiplico per 2x: $\frac{2x}{1+x^4} = \sum 2x(-x^4)^n = 2\sum(-1)^n x^{4n+1}$
Integro: $\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \sum 2(-1)^n \int x^{4n+1}dx = \sum(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}$

Convergenza

- Convergenza in media quadratica: f periodica e regolare a tratti
- Convergenza puntuale: $x \neq \pi + 2k\pi$ dove è f è continua
- Convergenza totale: f è continua (non è unica condizione) Serie di potenze su intervallo chiuso converge totalmente.
  NB: Totale implica puntuale e media quadratica.
- Sia $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie con $a_n \geq 0$, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_{n+1} \leq a_n$ per $n \geq n_0$, allora per il criterio di Leibniz, la serie converge.
- Se la serie di Fourier ha derivata prima continua ed è limitata in un intervallo allora converge totalmente.
- Se ho serie geometrica con numeratore contentente sin o cos e il denominatore è una potenza di n allora la serie converge totalmente.
- Una serie di potenze ha convergenza totale in ogni intervallo chiuso contenuto nell'insieme di convergenza.
- Una SDF converge totalmente se $\sum(|a_n| + |b_n|) < \infty$ converge

Serie di Fourier

1. La serie generale è $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k k cos(kx) + b_k sin(kx))$ su $\mathbb{I} = [-\pi, \pi]$
2. Si calcola $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
3. Si calcola $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx$
4. Si calcola $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx$

NB:

- Se la funzione è pari allora $b_k = 0$, se è dispari allora $a_k = 0$
- Se la funzione è pari si può trasformare: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$. Al posto di π potrebbe esserci $\frac{\pi}{2}$. La stessa trasformazione vale anche per a_k.
- Se la serie di Fourier è di una funzione a tratti bisogna valutare ogni intervallo.
- Somma della serie di Fourier: $F(x) = lim_{m\to\infty} F_m(x)$

Curve

- Chiusa? Verificare se la funzione è uguale agli estremi. Es: $r(t) = (t^2, t^2+1, cos(t))$ con $t \in [-\pi, \pi] \Rightarrow r(-\pi) = r(\pi)$
- Regolare? se la derivata prima è sempre diversa da 0. Es: $r'(t) = (2t, 2t, -\sin(t))$ se $t = 0 \Rightarrow r'(0) = 0$ non è regolare.
- Lunghezza: $\int_a^b \|r'(t)\| dt$. Es: $\|r'(t)\| = \sqrt{9sin^2(t)cos^4(t) + 9cos^2(t)sin^4(t)}$ la lunghezza è $\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\| dt = 6$
- Versore tangente $T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$
- Versore ortogonale: inverto le componenti e cambio il segno di una rispetto al versore tangente.

Curve di livello

Disegna una curva di livello 3 della funzione $f(x,y) = e^{x^2+y}$
Scrivo $e^{x^2+y} = 3$. (3 è il valore del livello)

Integrali curvilinei

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt$$

Es: $\delta(x,y,z) = \frac{x^2|y|}{\sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \frac{9}{4}y^2}}$, $\mathbb{I} = [0,2]$, $r(\theta) = (3cos(\theta), 2sin(\theta), 1)$, $\|r'(\theta)\| = \sqrt{9sin^2(\theta) + 4cos^2(\theta)}$

1. Calcolo $\delta(r(\theta))$: sostituisco le x di $r(\theta)$: $\delta(r(\theta)) = \frac{9cos^2(\theta)|2sin(\theta)|}{\sqrt{\frac{4}{9}9cos^2(\theta) + \frac{9}{4}4sin^2(\theta)}}$
2. Calcolo l'integrale: $\int \delta(r(\theta)) \|r'(\theta)\| = \int_0^2 9(cos(\theta))^2 2|sin(\theta)|d\theta = 24$

Dominio

Tipologie:

- Limitato: si può inscrivere in un cerchio
- Illimitato: non si può inscrivere in un cerchio
- Aperto: Tutta la frontiera non appartiene al dominio
- Chiuso: Tutta la frontiera appartiene al dominio
- Né aperto né chiuso: la frontiera appartiene solo in parte al dominio
- Connesso: dati due punti all'interno del dominio, posso collegarli senza uscire dal dominio

Limiti

Limiti notevoli:

- $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \Leftrightarrow sin(z)_{(z\to 0)} \sim z$
- $\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1 \Leftrightarrow e^z - 1_{(z\to 0)} \sim z$
- $\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1 \Leftrightarrow \log(1+z)_{(z\to 0)} \sim z$
- $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\frac{1}{2}z^2} = 1 \Leftrightarrow (1-\cos z)_{(z\to 0)} \sim \frac{1}{2}z^2$
- $\lim_{z\to 0} \frac{(1+z)-1}{\alpha^z} = 1 \Leftrightarrow (1+z)^\alpha - 1_{(z\to 0)} \sim \alpha z$

Risoluzione di limiti:

1. Controllo se posso usare limiti notevoli
2. Converto in coordinate polari (NB: il limite diventarà $\rho \to 0$)

Es:

$$lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x^2y}{\sqrt{2x^2+y^2}} = lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{2x^2+y^2}}$$

$$= lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 cos^2(\theta)\rho sin(\theta)}{\sqrt{2\rho^2 cos^2(\theta) + \rho^2 sin^2(\theta)}} = lim_{\rho\to 0} \frac{\rho cos^2(\theta) sin(\theta)}{\sqrt{2cos^2(\theta) + sin^2(\theta)}} = 0$$

Differenziabilità

- f è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{D}(f)$ se $lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), h\rangle}{\|h\|} = 0$, quindi se esiste il gradiente $\nabla f(x_0)$
- Differenziabilità implica derivabilità
- $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$
- Teorema gradiente: $\frac{\delta f}{\delta \underline{v}}(P) = \langle \underline{v} \cdot \nabla f(P)\rangle$ dove $\frac{\delta f}{\delta \underline{v}}$ è la derivata direzionale di f lungo $\underline{v}$ versore, P punto.
  Es: $f(x,y) = x^2y^3$ $P(2,3)$
  1. Controllo se $f(x,y)$ è continua.
  2. Calcolo derivate parziali: $f_x = 2xy^3$ e $f_y = 3x^2y^2$
  3. Calcolo gradiente: $\nabla(2,3) = (4\cdot 3^3, 12\cdot 3^2)$
  4. Calcolo derivata direzionale: $\frac{\delta f}{\delta \underline{v}}(2,3) = \langle(108,108)\cdot(cos(\alpha), sin(\alpha))\rangle = 108(cos(\alpha) + sin(\alpha))$. NB: Se non ho $\underline{v}$ allora pongo $(cos(\alpha), sin(\alpha))$
- Teorema ortogonalità gradiente: Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile, allora $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = 0$ per ogni vettore $\mathbf{v}$ tangente alla curva di livello di f in $\mathbf{x}$.
- Posso calcolare la pendenza: (retta tangente)
  - Pendenza minima: $f_{\min} = -\|\nabla f(x_0,y_0)\|$
  - Direzione minima: $v_{\min} = -\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$
  - Pendenza massima: $f_{\max} = \|\nabla f(x_0,y_0)\|$
  - Direzione massima: $v_{\max} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$

Estremi liberi

(calcolo estremi relativi)
$f(x,y) = 2x^2 + y^3 - 3x^2 - 3y$ con $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$

1. Studio il ∇ e lo pongo $= 0$
   $$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$
2. I punti sono tutte le possibili coppie che risolvono il sistema: $A(0,-1), B(0,1), C(1,-1), D(1,1)$
3. Creo la H_F e calcolo il det.
   $$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow det(H_f) = 36y(2x-1)$$
4. Studio det per ogni punto: $det(H_A) = \ldots$
   (a) $det > 0$ e $f_{xx} > 0 \Rightarrow$ minimo
   (b) $det > 0$ e $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ massimo
   (c) $det < 0 \Rightarrow$ punto di sella
5. Se $det = 0$
   - Studio segno: $Sgn(f(x,y) - f(x_0,y_0))$ dati $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$: $sgn(f(x,y)) = sgn(2x^2 - 3xy^2 + y^4)$
   - $2x^2 - 3xy^2 + y^4 \geq 0$
   - Faccio disegno qualitativo
   - Studio disegno. In questo caso intorno all'origine ho $+$ e $-$ quindi è un punto di sella.

Estremi vincolati

$z = f(x,y) = x^3 - xy^2$

1. Scrivo e disegno le restrizioni:
   - Restrizione di f su OA: $\begin{cases} f(x,0) = x^3 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$
   - Restrizione di f su AB: $\begin{cases} f(1,y) = 1 - y^2 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$
   - Restrizione di f su BC: $\begin{cases} f(x,1) = x^3 - x \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$
   - Restrizione di f su OC: $\begin{cases} f(0,y) \to 0 \quad \text{Linea di livello} \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$
2. Trovo i candidati: $MAX: A(1,0)$ e $MIN: D(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$
3. Se avessi più candidati dovrei vedere il valore di f nei punti candidati e confrontarli.

Metodo comodo

(moltiplicatori di Lagrange)
Vincolo: $x^2+y^2=1$, funzione $f(x,y)=e^{x^2-y}$

1. Scrivo il sistema composto da $f_x=\lambda V$ e $f_y=\lambda V$

$$\begin{cases} 2xe^{x^2-y}=2\lambda x \\ -e^{x^2-y}=2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

2. Risolvo il sistema e scrivo i punti

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad P_1,P_2,P_3,P_4$$

3. Studio $f(P_i)$ e scrivo MAX e MIN: $maxf=e^{\frac{5}{4}}$ e $minf=e^{-1}$

Integrali

Primitive notevoli:

- $\int 1dx = x+c$
- $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k}+c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)}+c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \qquad \forall n \neq -1$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \cos(nx)dx = \frac{1}{n}sin(nx)$
- $\int \sin(nx)dx = -\frac{1}{n}cos(nx)$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \arccos x + c$

Integrazione per parti: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
Integrazione per sostituzione: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$ con $u=g(x)$ e $du=g'(x)dx$. Cambiano anche gli estremi di integrazione da a a $g(a)$, uguale per b.
Per le derivate vale la regola del quozionte:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

integrali tripli

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ con
$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 2\}$

1. Studio il vincolo Ω disegnandolo: è un tetraedro con vertici in $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,2)$
2. Devo scomporre il vincolo per ottenere i limiti di integrazione: $0\leq x\leq 2$, $0\leq y\leq 2-x$, $0\leq z\leq 2-x-y$. nei vincoli degli integrali più esterni non devono apparire le variabili degli integrali più interni.
3. Calcolo l'integrale: $\int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} f(x,y,z)dzdydx$
$\iint \left(\int_0^{2-x-y} xzdz\right) dxdy$
4. ottengo un integrale doppio che posso risolvere analogaente a come ho fatto sopra.

NB se passo a coordinate polarie o sferiche, l'integrale doppio diventa:

$$\iint g(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta \qquad \begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

Varie

Prodotto tra matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot e+b\cdot g & a\cdot f+b\cdot h \\ c\cdot e+d\cdot g & c\cdot f+d\cdot h \end{pmatrix}$$

Calcolo autovalori:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

Calcolo autovettori:

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

Formule duplicazione:
$sin(2\alpha)=2sin(\alpha)cos(\alpha)$
$cos(2\alpha)=cos^2(\alpha)-sin^2(\alpha)$
$cos(2\alpha)=1-2sin^2(\alpha)$
$cos(2\alpha)=2cos^2(\alpha)-1$
Identità di Parseval:
$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$
Equazione piano tangente a funzione $f(x,y)$ in (x_0,y_0):
$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
$=\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)+f(x_0,y_0)$
Matrice hessiana:
$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
Rotore:
$\nabla\times\underline{v}$ con $\underline{v}$ vettore direzione.
Rotore nullo implica che il campo è conservativo.
Per un campo vettoriale $\mathbf{F}=(F_1,F_2,F_3)$ in $\mathbb{R}^3$, la divergenza è definita come: $\operatorname{div}\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$
Dove $\nabla\cdot$ rappresenta l'operatore divergenza, che applicato a $\mathbf{F}$ somma le derivate parziali delle componenti del campo rispetto alle loro rispettive variabili.
Sviluppo in serie di Mac Laurin:
$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
Serie di Taylor funzione di due variabili del secondo ordine:
$f(x,y)\approx f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\frac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2+f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$
Scala degli infiniti:
Per $x\to\infty$:
$\log(x)<x\approx kx<x^2<x^3<e^x<e^{x^2}<x!<x^x$
Per $x\to 0$:
$x^x<x!<e^{-x^2}<e^{-x}<x^3<x^2<x\approx kx<\log(x)$
Teorema di Schwarz:
Ordine derivate parziali è irrilevante: $f_{xy}=f_{yx}$
Teorema di Weierstrass:
Ogni funzione continua su un intervallo chiuso è limitata e raggiunge il massimo e il minimo.
Esistenza e unicità locale di soluzione di un problema di Cauchy:
Siano $f:A\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$, con A aperto in $\mathbb{R}^n$; $(t_0,y^0)\in A$, con $t_0\in\mathbb{R}^n$ e $y^0\in\mathbb{R}$ $K:=[t_0-r,t_0+r]\times\overline{B}_b(y^0)$ un compatto contenuto in A.
Allora se f continua in A e le derivate parziali di f rispetto a y_i sono continue in A, allora esiste $\delta>0$ e esiste un'unica soluzione al problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_0)=y^0 \end{cases} \qquad \forall t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$$

Esempio integrazione serie geometrica:

$$arctan(x^2)=\int\frac{2x}{1+x^4}dx=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\int x^{4n+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{4n+2}$$

Prodotto vettoriale tra due vettori:
$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)i-(a_1b_3-a_3b_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$
Prodotto scalare tra due vettori:
$\underline{a}\cdot\underline{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

Teorema 1. ***Teorema Formula risolutiva per EDO lineari 1° ordine***
$a,b:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad y'(t)=a(t)y(t)+b(t)$
L'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(t)=e^{A(t)}+\left(\int e^{-A(x)}b(x)dx+c\right) \qquad \forall c\in\mathbb{R}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a.

Dimostrazione 1. da sapere all'esame

- *Porto ay sulla sinistra*
$y'-ay=b$
- *Moltiplico l'equazione per e^{-A}*
$e^{-A}y'-e^{-A}ay=e^{-A}b$
- *Riconosco*
$y'(t)e^{-A(t)}-a(t)y(t)e^{-A(t)}=\left(y(t)e^{-A(t)}\right)$
Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:
$(ye^{-A})'=be^{-A}$
- *Integro*
$y(t)e^{-A(t)}=\int be^{-A(t)}dt+c$
- *Moltiplico tutto per $e^{A(t)}$*
$y(t)=e^{A(t)}\left(\int be^{-A(t)}dt+c\right)$

Teorema 2. ***Teorema di struttura dell'integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee***
Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue e $a \neq 0$ in I.
L'integrale generale dell'eq omogenea

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = c_1 y_{0_1} + c_2 y_{0_2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$$

dove y_{0_1}, y_{0_2} sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Dimostrazione 2. da sapere all'esame

- *L'integrale generale dell'omogenea è:*
  $W = \{y \in V : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0\}$
- *W è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow$ è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).*
- *Devo dimostrare che W ha dimensione 2.*
  - i) *Determinare 2 soluzioni lineari indipendenti dell'equazione y_{0_1}, y_{0_2}*
  - ii) *Dimostrare che ogni soluzione y della EDO si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2}*
  - i) *Scelgo y_{0_1} soluzione del problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} ay''_{0_1}(t) + by'_{0_1}(t) + cy_{0_1}(t) = 0 \\ y_{0_1}(0) = 1 \\ y'_{0_1}(0) = 0 \end{cases}$$

Verifico che y_{0_1}, y_{0_2} sono soluzioni lineari indipendenti. Se per assurdo fossero una multiplo dell'altra
$y_{0_1}(t) = \lambda y_{0_2}(t) \quad \forall t$
In particolare, per $t = 0$ avrei $y_{0_1}(0) = \lambda y_{0_2}(0)$ avrei trovato $1 = \lambda \cdot 0$ assurdo.

  - ii) *Sia $y_0(t)$ soluzione dell'EDO, cerco $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t)$*
$y_0(t) = c_1 y_{0_1}(t) + c_2 y_{0_2}(t) = c_1$
$y'_0(t) = c_1 y'_{0_1}(t) + c_2 y'_{0_2}(t) = c_2$

In conclusione la funzione:
$z(t) = y_0(0) \cdot y_{0_1}(t) + y'_0(0) \cdot y_{0_2}(t)$
risolve lo stesso problema di Cauchy di $y_0(t)$ e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:
$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$
cioè $y_0(t)$ si scrive come combinazione lineare di y_{0_1}, y_{0_2} con coefficienti $c_1 = y_0(0)$ e $c_2 = y'_0(0)$.

Teorema 3. ***Calcolo del raggio di convergenza***
Data una serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

i) *se il limite esiste.*
$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$
allora la serie di potenze ha raggio di convergenza R.

ii) *se esiste il limite $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ allora la serie di potenze ha raggio di convergenza R.*

Dimostrazione 3. da sapere all'esame
La serie di potenze converge assolutamente nel punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se e solo se
$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\overline{x} - x_0|^n$ converge.

- *se il criterio del rapporto è applicabile, ho convergenze se e solo se*
  $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1 \Leftrightarrow |\overline{x} - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$
- *se il criterio della radice è applicabile, la serie converge se e solo se*
  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} < 1$ *e non converge se* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} > 1$
  infatti, $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} < 1 \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} (|a_n| \cdot |\overline{x} - x_0|^n)^{\frac{1}{n}} < 1 \Leftrightarrow |\overline{x} - x_0| \cdot lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \Leftrightarrow |\overline{x} - x_0| < \frac{1}{lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$

Teorema 4. ***Calcolo dei coefficienti di Fourier***
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 2\pi$ una funzione periodica e somma di una serie trigonometrica

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Supponiamo inoltre di poter integrare termine a termine. Allora:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Dimostrazione 4. da sapere all'esame

- *Integro f in $(-\pi, \pi)$, uso integrazione termine a termine e formula di ortogonalità:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx$$

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi a_0$$

- *Per trovare a_n, moltiplico f per $\cos nx$, integro in $(-\pi, \pi)$, uso l'integrabilità termine a termine ele formule di ortogonalità:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\right) \cos(nx)dx$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = a_n \pi$$

- *Per trovare b_n, moltiplico per $\sin(nx)$*

Criterio di Leibniz: una serie del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge se a_k è decrescente.
Piano tangente: $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
Formula Taylor ordine n: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$
Resto di Peano: $R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$
Resto di Lagrange: $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ NB: c è cost incogn
Derivata direzionale: $D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$ prodotto scalare
Derivate e int utili:
$\frac{\delta}{\delta x} ncos(kx^m) = -kmnx^{m-1} sin(kx^m)$
$\frac{\delta}{\delta x} nx^j cos(kx^m) = nx^{j-1} cos(kx^m) - kmx^m sin(kx^m)$
$\frac{\delta}{\delta x} x^j e^{mx} = x^{j-1} e^{mx}(j + mx)$
$\int x^j e^{mx} dx = \frac{e^{mx}(mx-1)}{m^2} + c$
$\frac{\delta}{\delta x} log(x + k) = \frac{1}{x+k}$
$\int log(x + k) = (k + x)log(x + k) - x + c$

Teorema 5. ***Invarianza della lunghezza di una curva per riparametrizzazioni***
$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e $\underline{r}:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una curva regolare avente sostegno γ.
underline$[v]:[c,d] \to \mathbb{R}^3$, $\underline{v}(s) = \underline{r}(\phi(s))$ è una parametrizzazione equivalente con sostegno δ.
Allora: lunghezza(γ) = lunghezza(δ)

Dimostrazione 5. da sapere all'esame
lunghezza$(\gamma) := \int_a^b \|\underline{r}'(t)\|\,dt$
lunghezza$(\delta) := \int_c^d \|\underline{v}'(s)\|\,ds$

$$\left\|\underline{v}'(s)\right\| = \left\|\underline{r}'(\phi(s))\right\| \cdot \left|\phi'(s)\right|$$

Quindi lunghezza$(\delta) = \int_c^d \|\underline{r}'(\phi(s))\| \cdot |\phi'(s)|\,ds$
Posso definizione di parametrizzazione eqauivalente, ϕ è biunivoca, cioè sempre crescente o sempre decrescente. Supponiamo $\phi'(s) > 0$ per ogni $s \in [c,d]$.
Allora lunghezza$(\delta) = \int_c^d \|\underline{r}'(\phi(s))\| \cdot \phi'(s)ds$.
Cambio di variabile nell'integrale $t = \phi(s)$ e $dt = \phi'(s)ds$

$$\int_a^b \left\|\underline{r}'(t)\right\| dt = \text{lunghezza}(\gamma)$$

Teorema 6. ***Differenziabile implica continua***
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$ e $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0$.
Allora f è continua in $\underline{x}_0$.

Dimostrazione 6. da sapere all'esame
Dobbiamo dimostrare che: $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$
Essendo f differenziabile in $\underline{x}_0$:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$
$$|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| = |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)|$$

disuguaglianza triangolare: $\leq |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle| + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$

Cauchy-Schwarz: $\leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\| + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$

Quindi:
$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x})| = 0$$
cioè
$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

Teorema 7. ***Formula del gradiente***
$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$ e $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0$.
Allora f ammette derivate direnzionali in ogni direzione $\underline{v}$ e inoltre
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle$$

Dimostrazione 7. da sapere all'esame
Devo dimostrare che
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle$$
Scelgo $\underline{h} = t\underline{v}$ nella definizione di differenziabilità:
$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), t\underline{v} \rangle + o(\|t\underline{v}\|)$$
Divido per t e faccio il limite $t \to 0$:
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle$$

Teorema 8. ***ortogonalità del gradiente alle curve di livello*** *ovvero direzione di crescita nulla*
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$ e $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile in A.
L'insieme di livello I_k è il sostegno di una curva regolare $\underline{r}$.
Allora:
$$\langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = 0 \quad \forall t$$

Dimostrazione 8. da sapere all'esame
Per ipotesi I_k coincide con il sostegno della curva regolare $\underline{r}(t)$, cioè:
$$I_k = \{\underline{r}(t), t \in J\}$$
In particolare $f(\underline{r}(t)) = k$ per ogni $t \in J$.
Chiamo $F: J \to \mathbb{R}$ la funzione composta $F(t) = f(\underline{r}(t)) = f \circ \underline{r}(t)$.
Da un lato $F(t) = k \quad \forall t \Rightarrow F'(t) = 0 \quad \forall t$.
D'altro lato, per il teorema di derivazione della funzione composta:
$$F'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle \longrightarrow \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = 0$$

Teorema 9. ***Classificazione dei punti critici: Criterio della matrice Hessiana***
$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C^2(A)$.
$\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ punto critico di f allora.
Denotiamo q la fomra quadratica indotta da $H_f(\underline{x}_0)$, cioè:
$$q(h_1, h_2) = (h_1, h_2) \cdot H_f(\underline{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$
Allora:

i) Se q è definita positiva allora $\underline{x}_0$ è punto di minimo.
ii) Se q è definita negativa allora $\underline{x}_0$ è punto di massimo.
iii) Se q è indefinita allora $\underline{x}_0$ è punto di sella.

Oss: Se q è indefinita il criterio della matrice Hessiana non da informazioni.

Dimostrazione 9. da sapere all'esame
Essendo $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$, la formula di Taylor al secondo ordine diventa
$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{2}q(\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2)$$

i) Se q è definita positiva, cioè $q(\underline{h}) > 0 \quad \forall \underline{h}$
- $f(\underline{x}_0 + \underline{h}) > f(\underline{x}_0) + o(\|\underline{h}\|^2)$
- *in una palletta $f(\underline{x}_0 + \underline{h}) > f(\underline{x}_0)$*
- *$\underline{x}_0$ è punto di minimo locale*

ii) Se q è definita negativa, cioè $q(\underline{h}) < 0 \quad \forall \underline{h}$
- $f(\underline{x}_0 + \underline{h}) < f(\underline{x}_0) + o(\|\underline{h}\|^2)$

iii) Se q è indefinita, cioè $\exists \underline{h}_p, \underline{h}_n$ t.c. $q(\underline{h}_p) > 0$ e $q(\underline{h}_n) < 0$
- $f(\underline{x}_0 + \underline{h}_p) > f(\underline{x}_0) + o(\left\|\underline{h}_p\right\|^2)$
- $f(\underline{x}_0 + \underline{h}_n) < f(\underline{x}_0) + o(\|\underline{h}_n\|^2)$
- *$\underline{x}_0$ è punto di sella*

Teorema 10. ***la trasf. in coordinate sferiche***
$$\begin{cases} T_1(r,\phi,\theta) = r\sin\phi\cos\theta \\ T_2(r,\phi,\theta) = r\sin\phi\sin\theta \\ T_3(r,\phi,\theta) = r\cos\phi \end{cases} \qquad \text{con } \phi \in (0,\pi) \text{ e } \theta \in [0, 2\pi)$$
Ha determinante Jacobiano:
$$detJ(r,\phi,\theta) = r^2\sin\phi \quad (\text{sempre} > 0)$$

Dimostrazione 10. da sapere all'esame
$$J(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial r} & \frac{\partial T_1}{\partial \phi} & \frac{\partial T_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_2}{\partial r} & \frac{\partial T_2}{\partial \phi} & \frac{\partial T_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_3}{\partial r} & \frac{\partial T_3}{\partial \phi} & \frac{\partial T_3}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{pmatrix}$$
Sviluppo il determinante sull'ultima riga:
$$detJ(r,\phi,\theta) = \cos\phi\left[r^2\cos\phi\sin\phi\cos^2\theta + r^2\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta\right] + r\sin\phi\left[r\sin^2\phi\cos^2\theta + r\sin^2\phi\sin^2\theta\right]$$
$$= \cos\phi \cdot \cos^2\phi\sin\phi + r^2\sin^2\phi\sin\phi$$
$$= r^2\sin\phi$$

Oss: È un cambio di variabili ammissibile nell'integrale perché (T_1, T_2, T_3) di classe C^1 e biunivoca tra gli aperti e inoltre $detJ(r,\phi,\theta) \neq 0 \quad \forall (r,\phi,\theta)$