# Studio sistema

## Classificazione

1. Numero di input e output: SISO, MISO, SIMO, MIMO
2. Strettamente proprio: $y(t) = g(x(t), t)$ovvero non compare $u$ null'uscita.
3. Proprio: $y(t) = g(u(t), t)$
4. Tempo invariante (stazionario): $y(t) = g(u(t))$ non dipende da $t$. Altrimenti tempo variante.
5. Lineare: combinazioni lineari di $u$ e $x$. No esponeziali, prodotti o funzioni. altrimenti non lineare.
6. Dinamico: dipende da $x$. Ha ordine $n$ numero di $\dot{x}_n$. Altrimenti statico.
7. Ordine: numero / dimensione ingressi.

## Sistemi a tempo continuo

Ovvero nella forma $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$.

### Equilibrio

Cerco $y_e$ punto di equilibrio dato $u_e$ ingresso.

1. Pongo le derivate a zero. $\dot{x} = 0$
2. Risolvo il sistema lineare. Trovo $x_1, x_2, \dots, x_n$
3. Sostituisco nelle equazioni di output.

Trovo $y_e$ punto di equilibrio.

### Linearizzazione

Scrivere equazione del sistema linearizzato attorno a un punto di equilibrio dato: $(\overline{x}, \overline{u})$
Scrivo il sistema in forma matriciale. Avrò $A, B, C, D$ dove $A$ è $n \times n$, $B$ è $n \times m$, $C$ è $p \times n$ e $D$ è $p \times m$. In genere $p = m = 1$:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(\overline{x},\overline{u})} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{(\overline{x},\overline{u})} \quad C = \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(\overline{x},\overline{u})} \quad D = \frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{(\overline{x},\overline{u})}$$

Avrò quindi:

$$\begin{cases} \delta\overline{x} = A\delta\overline{x} + B\delta u \\ \delta\overline{y} = C\delta\overline{x} + D\delta u \end{cases}$$

### Studio stabilità

A partire dal sistema linearizzato. Studio autovalori di $A$. Se hanno tutti parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile.

### Funzione di trasferimento

Due modi per trovarla:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Oppure:
Sostituisco le derivate $\dot{x}_i$ con $sX_i$ e risolvo il sistema lineare: $y = G(s)u$.
Il sistema si risolve in genere per sostituzione.
NB: (se c'è un $\alpha$) se serve valutare oss. e ragg. bisogna controllare gli autovalori positivi e cercare di eliminarli (semplificare numeratore e denominatore).

### Studio ossevabilità e raggiungibilità

Osservabilità:

$$M_O = \left[[C][A \cdot C][A^2 \cdot C] \cdots [A^{n-1} \cdot C]\right]^T$$

(in verticale)
Se il determinante di $M_O$ è diverso da zero, il sistema è ossevabile.
Raggiungibilità:

$$M_R = \left[[B][A \cdot B][A^2 \cdot B] \cdots [A^{n-1} \cdot B]\right]$$

Se il determinante di $M_R$ è diverso da zero, il sistema è raggiungibile.
Per entrambi, se il n. poli = ordine, allora il sistema è ossevabile e raggiungibile.

### Guadagno statico

Studia stabilità. Se as. stabile, il guadagno statico è il rapporto tra l'uscita e l'ingresso a regime, ovvero il $G(s)$ in $y = G(s)u$.

### Calcolo risposta analitica (modi)

Risposta libera significa $u = 0$. L'esercizio da uno stato $x(0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1. Calcolo autovalori di $A$.
2. Calcolo autovettori di $A$.
3. Calcolo $x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{\lambda_i t} v_i$ ovvero la somma dei modi.
4. Calcolo $y(t) = Cx(t)$.

## Sistemi a tempo discreto

Ovvero nella forma $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, $y(k) = Cx(k) + Du(k)$.

### Equilibrio

Cerco $y_e$ punto di equilibrio dato $u_e$ ingresso.

1. Pongo $x(k+1) = x(k)$
2. Risolvo il sistema lineare. Trovo $x_1, x_2, \dots, x_n$
3. Sostituisco nelle equazioni di output.

Trovo $y_e$ punto di equilibrio.

### Studio stabilità

A partire dal sistema linearizzato. Studio autovalori di $A$. Se hanno tutti parte reale $< 1$, il sistema è asintoticamente stabile.

### Linearizzazione

Scrivere equazione del sistema linearizzato attorno a un punto di equilibrio dato: $(\overline{x}, \overline{u})$
Scrivo il sistema in forma matriciale. Avrò $A, B, C, D$ dove $A$ è $n \times n$, $B$ è $n \times m$, $C$ è $p \times n$ e $D$ è $p \times m$. In genere $p = m = 1$:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(\overline{x},\overline{u})} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{(\overline{x},\overline{u})} \quad C = \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(\overline{x},\overline{u})} \quad D = \frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{(\overline{x},\overline{u})}$$

Avrò quindi:

$$\begin{cases} \delta x(k+1) = A\delta x + B\delta u \\ \delta y = C\delta x + D\delta u \end{cases}$$

### Calcolo movimento libero uscita (modi)

Movimento libero significa $u = 0$. L'esercizio da uno stato $x(0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1. Calcolo autovalori di $A$.
2. Calcolo autovettori di $A$.
3. Calcolo $x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^k v_i$ ovvero la somma dei modi.
4. Calcolo $y(t) = Cx(t)$.

## Associare grafico al sistema

1. $Re(\lambda) = 0$ oscillazioni costanti.
2. $Re(\lambda) > 0$ diverge.
3. $Re(\lambda) < 0$ converge quindi studio tempo dominante e assestamento (vedi andamento qualitativo).

Il numeratore influenza l'ampiezza della risposta.

1. poli reali negativi: risposta smorzata esponenzialmente.
2. poli complessi coniugati: oscillazioni smorzate.
3. Poli puramente immaginari: oscillazioni non smorzate.
4. Poli reali positivi: risposta crescente esponenzialmente.

## Risposta analitica a impulso unitario (Heaviside)

Dato un $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ con $N(s)$ e $D(s)$ polinomi.

1. Sviluppo di $G(s)$ in fratti semplici: (NB i poli uguali appaiono una volta per ogni molteplicità)
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{(s - \lambda_i)}$$
2. Calcolo i $P_i$: Sostituisco $s = \lambda_i$ in $\frac{N(s)}{Q(s)}$ dove $Q(s)$ è il polinomio che rimane dopo aver rimosso il termine $(s - \lambda_i)$ da $D(s)$.
3. Se non si può calcolare come sopra, eguaglio $\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot Q_i(s) = N(s)$ e risolvo il sistema lineare e sostituisco $s$ tale che sia diverso da tutti i $\lambda_i$.
4. Sostituisco i $P_i$ in $G(s)$.
5. Calcolo la trasformata inversa di $G(s)$, ovvero i termini del tipo $\frac{P_i}{s-\lambda_i} \to P_i \cdot e^{\lambda_i t}$.

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot e^{\lambda_i t}\right) sca(t)$$

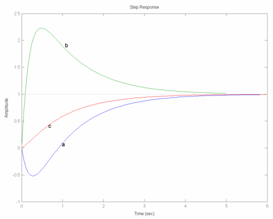
## Schemi a blocchi

Serie: $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$
Parallelo: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$
Retroazione negativa: $G(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$
Retroazione positiva: $G(s) = \frac{G_1(s)}{1-G_1(s)G_2(s)}$
Per lo studio di stabilità, si possono ignorare i blocchi in retroazione.

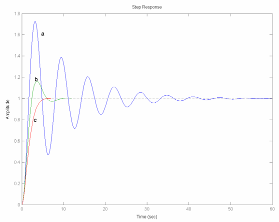
# Andamento qualitativo

Data una funzione di trasferimento $G(s)$
Il polo dominante è quello con la parte reale maggiore.
NB se negativo, il polo dominante ha il valore assoluto minore.

1. valore finale: $y_\infty = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s)$
2. valore iniziale: $y(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot G(s)$
3. derivata iniziale: $\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 \cdot G(s)$
4. tempo dominante: $\tau = \left|\frac{1}{\Re(\lambda)}\right|$ dove $\lambda$ è il polo dominante.
5. tempo di assestamento: al 99% è $5\tau$ (sarebbe $4.6\tau$), al 95% è $3\tau$.
6. Sovraelongazione percentuale: $S\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \frac{Max - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100$
   Ovvero il punto di massimo in che percentuale sfora il valore finale.
7. Se $\mu = e^{-ks}$ allora il ritardo $\tau_r = k$, quindi nel disegno la funzione parte da $k$.
8. Studio gli zeri:
   a) zero positivo
   b) zero negativo più vicino all'origine del piano complesso rispetto ai poli
   c) zero negativo più lontano dall'origine del piano complesso rispetto ai poli




9. Se ho poli complessi coniugati, studio $\xi = \frac{\Re(\lambda)}{|\lambda|}$
   a) $\xi < 0.5$
   b) $\xi = 0.5$
   c) $\xi > 0.5$




Disegno il grafico con multipli di $\tau$ su asse $x$ i valori di $y$ su asse $y$.
Se chiede andamento qualitativo a $sca$ allora i valori finali e iniziali devono essere moltiplicati per $\frac{1}{s}$. Se $Ram$ allora per $\frac{1}{s^2}$.

# Disegno diagrammi di Bode

Viene fornita una funzione di trasferimento $G(s)$.

1. trasformo la funzione nella forma: $G(s) = \frac{\mu}{s^m} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$
2. trovo zeri, poli e $\mu$ guadagno statico.
3. Per il diagramma di modulo:
   - Popolo gli assi: in generale l'ordine di grandezza del primo polo o zero lo colloco nella terza decade. Su asse $y$ metto $\alpha_{dB}$ poco sopra la metà.
   - Tipo di funzione: 0 se $m = 0$, 1 se $m = 1$, 2 se $m \geq 2$.
   - Posizione iniziale: $\alpha_{dB} = 20\log_{10}(\mu)$.
   - metto un punto in $(\lambda_1, \alpha_{dB})$ con $\lambda_1$ polo o zero più piccolo.
   - Traccio una retta con pendenza $20 \cdot m$ dB/decade verso sinistra.
   - Proseguo verso destra e ogni polo o zero mi fa cambiare pendenza. Se zero sale, se polo scende.
4. Per il diagramma di fase:
   - Copio asse $x$ da sopra, asse $y$ centro il valore di $\varphi$.
   - fase iniziale $\varphi = -m \cdot 90 + k$ con $k = -180$ se $\mu < 0$, $k = 0$ altrimenti.
   - Traccio una retta orizzontale fino al primo polo o zero.
   - Ogni polo o zero mi fa cambiare di 90 gradi. Se $z^+$ scende, se $p^+$ sale, se $z^-$ sale, se $p^-$ scende.
   - Traccio curva reale approssimata. (per Nyquist) NB: se smorzamento $\xi < \frac{1}{sqrt2}$ allora sui cambi di modulo la funzione reale ha un picco di risonanza. (ovvero sfora)

P.S.: Se c'è complesso coniugato, i due poli sono la radice del coefficiente di $s^0$

# Disegno diagrammi di Nyquist

Diagramma polare. L'esercizio fornisce una funzione di trasferimento $G(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$.
Regole di tracciamento:

- Costruzione di Bode.
- Se $g = 0$ allora il punto di partenza è $(\mu, 0)$.
- Se $g < 0$ allora il punto di partenza è l'origine.
- Se $g > 0$ allora il punto di partenza è l'infinito.
- La funzione abbandona l'asse reale sempre ortogonalmente.
- Se numero di poli - numero di zeri $> 0$ allora il punto di arrivo è l'origine.

Per disegnare il diagramma, utilizzo la fase di Bode come angolo e il modulo come raggio (coordinate polari).

# Criteri di stabilità

Dato un sistema. Se bisogna scegliere, si fa Nyquist.

## Criterio di Nyquist

Il sistema è asintoticamente stabile se $N = P$ con $N$ numero di poli a parte reale positiva e $P$ numero di giri antiorari del diagramma di Nyquist. Studio stabilità $\forall$ intervallo di $\frac{-1}{k}$ e poi passo a $k$.
Esempio: $-0,5 < -\frac{1}{k} < 0 \Rightarrow k > 2$

## Criterio di Bode

Condizioni per poter applicare il criterio di Bode:

1. Numero di poli a parte reale positiva è zero.
2. $w_c$ è unica ovvero passa una sola volta per $0dB$.
3. La funzione di trasferimento è strettamente propria.

Se è applicabile, il sistema è asintoticamente stabile se $\mu > 0$ e $\varphi_m > 0$.

# Risposta in frequenza

Margine di guadagno: $MG = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$
Margine di fase: $\varphi_m = 180 + \arg(L(j\omega_\pi))$
Il margine di fase è quanti gradi mancano a $-180°$.
$\omega_c$ è il punto in cui il modulo di $L(j\omega)$ passa per $0dB$.
Si può calcolare dal diagramma di Bode:
$|L(j\omega)| = 0dB$ e $\arg(L(j\omega)) = -180°$.

# Regolatore

L'esercizio fornisce una funzione di trasferimento $G(s)$ con uno schema di controllo e delle specifiche.
Ogni specifica mi da un vincolo su $G(s)$.

## Studio vincoli

- Attenuazione ampiezza $n(t) = sin(\omega_n \cdot t)$ inferiore a $-15dB$.
  $|L(j\omega)| < -15dB$.
- Attenuazione ampiezza $d(t) = sin(\omega_d \cdot t)$ inferiore a $-15dB$.
  $|L(j\omega)| > 15dB$.
- Banda passante in anello chiuso $B > 10rad/s$.
  $\omega_c > 10$.
- Ampiezza segnale $y(t)$ a fronte di ingressi $d(t) = 5sin(\omega_d \cdot t)$ inferiore a 0.1.
  $|S(j\omega)| \cdot 5 < 0.1$ ovvero $|L(j\omega)| > 50dB$.
- Margine di fase superiore a 60°.
  $\varphi_m > 60°$.
- Attenuazione $w(t) = sin(\omega_w \cdot t)$ superiore a $-3dB$ $[0, 20]$.
  $\omega_b \geq 20 \Rightarrow \omega_c > 20$.
- $|e(t)| < 0.11$ a trans.es.a fronte di $w(t) = (6 + 6sin(\omega_w \cdot t))sca(t)$ e $n(t) = \frac{2}{6}cos(\omega_n \cdot t)sca(t)$ e $\omega_n \geq 1$
  1. $6|S(j\omega)| < 0.1 \Rightarrow \frac{6}{|L(j\omega)|} < 0.1 \Rightarrow |L(j\omega)| > 60dB$
  2. $\frac{2}{6}|F(j\omega)| < 0.01 \Rightarrow \frac{2}{6}|L(j\omega)| < 0.01 \Rightarrow |L(j\omega)| > \frac{3}{100}dB$
- Sovraelongazione percentuale nella risposta a scalino inferiore al 25%
  $S\% < 25\% \Rightarrow e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 0.25$.
  $\xi\pi > ln(0.25) \cdot \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \xi > \frac{ln(0.25)}{\sqrt{\pi^2 + |ln(0.25)|^2}} \simeq 0.404$
  $\varphi_m > 40°$.
- Se ho un vincolo del tipo $|e_\infty| = Ram(t)$ o $|e_\infty| = sca(t)$ allora l'ordine di $L(s)$ è $g + 1$.
- Tempo di assestamento inferiore a 2 unità di tempo.
  Se $\varphi_m > 75°$ allora $\frac{1}{\omega_c} < 2$ quindi $\omega_c > 0.5$.
  Se $\varphi_m \leq 75°$ allora $\frac{1}{\omega_c \cdot \xi} < 2$ quindi $\omega_c > \frac{0.5}{\xi}$ dato che $\xi = \frac{\varphi_m}{100}$ allora $\omega_c = 0.8$.

| $\lvert e_\infty \rvert$ | $\frac{A}{S}$ | $\frac{A}{S^2}$ | $\frac{A}{S^3}$ |
|---|---|---|---|
| $g = 0$ | $\frac{A}{1+u}$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $g = 1$ | 0 | $\frac{A}{u}$ | $\infty$ |
| $g = 2$ | 0 | 0 | $\frac{A}{u}$ |

- **NB** se ho due vincoli su $e_\infty$ ma uno è $sca$ e l'altro è $ram$, allora ignoro il $sca$.
- $|e_\infty| \leq 0.5$ con $w(t) = 8Par(t)$
  $\frac{8}{u} < 0.5$ quindi $u > 16$ e $g = 2$.
- $|e_\infty| \leq 0.5$ con $w(t) = 8Sca(t)$
  $\frac{8}{1+u} < 0.5$ quindi $u > 15$ e $g = 0$.
- $|e_\infty| \leq 0.5$ con $w(t) = 8Ram(t)$
  $\frac{8}{u} < 0.5$ quindi $u > 16$ e $g = 1$.
- $|e_\infty| = 0$ allora $g + 1$.

## Progetto per inversione

1. Sul diagramma di Bode, disegno i vincoli ottenui dalle specifiche.
2. Scelgo una $L(s)$ che rispetti i vincoli (disegnandola sul diagramma).
3. Calcolo $R(s) = L(s) \cdot G(s)^{-1}$.