Pianificazione di servizi medici domiciliari

Metodi quantitativi per la gestione del rischio

Scaramozzino Filippo 312856,

Longo Maria Antonietta 308756

January 5, 2024

Politecnico di Torino

Analizziamo un problema di pianificazione di servizi medici che vengono effettuati a casa dei pazienti.
Il servizio medico offerto direttamente dalle aziende private alle persone è chiamato Home Health Care (HHC).
Le decisioni first-stage sono il tipo di servizio e la capacità mentre la decisione second-stage è l'allocazione delle risorse per le cure domiciliari.
Il nostro obiettivo è massimizzare il profitto scegliendo i tipi di servizio e la capacità dei tipi di servizio per ogni centro HHC, avendo incertezza sulla domanda, che si può manifestare in termini di tipo di servizio richiesto e di livello di domanda per un determinato servizio.

Table of Contents

- ▶ Notazione e parametri
- ▶ Modello base e formulazione MILP
- ▶ Modello a due stadi robusto con distanza di Mahalanobis
- ▶ Analisi di sensitività
- ▶ Soluzione esatta con decomposizione di Benders
- ▶ Algoritmo formale
- ▶ Personalization
- ▶ Summary

INSIEMI

- $[I]$ insieme di indici degli HCC, $i \in [I]$
- $[J]$ insieme di indici di zona dei clienti, $j \in [J]$
- $[L]$ insieme di indici del tipo di servizio prestato, $l \in [L]$
- $[K]$ insieme di indici della tipologia di staff, $k \in [K]$

VARIABILI DECISIONALI

- $x_{il} \in \{0, 1\}$ decisione di autorizzazione del servizio l per il centro i
- s_{jk} decisione di capacità del servizio: quanti impiegati di tipo k per il cento i
- y_{ijlk} decisione di allocazione di risorsa: ore di servizio prestate per tipologia di staff k nel centro i per il tipo servizio l nella zona j del cliente

PARAMETRI

- d_{jl} domanda per il servizio di tipo l nella zona j
- V_{ik} ore di servizio impiegate dal tipo di staff k necessarie per il servizio l
- r_{ijk} guadagno per unità oraria dato dal tipo di staff k nel centro i per la zona j
- p_{jlk} costo di penalità per unità oraria di domanda non soddisfatta dal tipo di staff k nella zona j per il servizio l
- c_l costo dell'autorizzazione per la licenza di servizio di tipo l
- a_k costo fisso di assunzione del personale di tipo k
- q_k capacità unitaria delle ore di servizio del personale di tipo k
- $\underline{s}_{lk}$ numero minimo di personale di tipo k per il servizio l
- B_{ki} numero massimo di personale di tipo k che può essere assunto per l' HCC i

- Notazione e parametri
- Modello base e formulazione MILP
- Modello a due stadi robusto con distanza di Mahalanobis
- Analisi di sensitività
- Soluzione esatta con decomposizione di Benders
- Algoritmo formale
- Personalization
- Summary

Data l'osservazione della domanda, la decisione da prendere riguarda:
$x := (x_{il})_{in\in[I],l\in[L]} \in \{0,1\}$ ovvero l'autorizzazione di attivare il servizio l per il centro i
$s := (s_{ik})_{in\in[I],k\in[K]} \in \mathcal{Z}_+^{IxK}$ ovvero il numero di personale da assumere nel centro i
(x, s) rappresenta quindi la decisione presa su autorizzazione e capacità, essa deve risolvere il problema di programmazione lineare misto-intero seguente:

$$\max_{x,s,y} \sum_{i\in[I]} \sum_{j\in[J]} \sum_{k\in[K]} r_{ijk} \left(\sum_{l\in[L]} y_{ijlk} \right) - \sum_{j\in[J]} \sum_{l\in[L]} \sum_{k\in[K]} p_{jlk} \left(V_{lk} d_{jl} \sum_{i\in[L]} y_{ijlk} \right) - \sum_{i\in[I]} a^T s_i - \sum_{i\in[I]} c^T x_i$$

s.t

$$\sum_{i\in[I]} y_{ijlk} \leq V_{lk} d_{jl} \qquad \forall j \in [J], k \in [K], l \in [L]$$

$$\sum_{j\in[J]} \sum_{l\in[L]} y_{ijlk} \leq s_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K]$$

$$\sum_{j\in[J]} y_{ijlk} \leq x_{il} B_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K], l \in [L]$$

$$\underline{s}_{lk} x_{il} \leq s_{ik} B_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K], l \in [L]$$

$$s_{lk} x_{il} \leq B_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K], l \in [L]$$

$$x_{il} \in \{0,1\}^{IxL}, \qquad s \in \mathcal{Z}_+^{IxK}, \qquad y \geq 0$$

Data l'osservazione della domanda, la decisione da prendere riguarda:
$x := (x_{il})_{in\in[I],l\in[L]} \in \{0,1\}$ ovvero l'autorizzazione di attivare il servizio l per il centro i
$s := (s_{ik})_{in\in[I],k\in[K]} \in \mathcal{Z}_{+}^{IxK}$ ovvero il numero di personale da assumere nel centro i
(x, s) rappresenta quindi la decisione presa su autorizzazione e capacità, essa deve risolvere il problema di programmazione lineare misto-intero seguente:

$$\max_{x,s,y} \sum_{i\in[I]} \sum_{j\in[J]} \sum_{k\in[K]} r_{ijk} \left(\sum_{l\in[L]} y_{ijlk} \right) - \sum_{j\in[J]} \sum_{l\in[L]} \sum_{k\in[K]} p_{jlk} \left(V_{lk} d_{jl} \sum_{i\in[L]} y_{ijlk} \right) - \sum_{i\in[I]} a^T s_i - \sum_{i\in[I]} c^T x_i$$

s.t

$$\sum_{i\in[I]} y_{ijlk} \leq V_{lk} d_{jl} \qquad \forall j \in [J], k \in [K], l \in [L]$$

$$\sum_{j\in[J]} \sum_{l\in[L]} y_{ijlk} \leq s_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K]$$

$$\sum_{j\in[J]} y_{ijlk} \leq x_{il} B_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K]$$

$$s_{lk} x_{il} \leq s_{ik} B_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K], l \in [L]$$

$$s_{lk} x_{il} \leq B_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K], l \in [L]$$

$$x_{il} \in \{0,1\}^{IxL}, \qquad s \in \mathcal{Z}_{+}^{IxK}, \qquad y \geq 0$$

Definendo matrici e vettori in modo coerente con la formulazione precedente, otteniamo la seguente forma compatta equivalente:

$$
\begin{aligned}
R(x,s,d) = \max_{y}\; & r^T A y - p^T V d + p^T W_1 y \\
\text{s.t.} \quad & W_1 y \leq V d, \\
& W_2 y \leq Q_1 s, \\
& W_3 y \leq Q_2 x, \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i\in[I]}\sum_{j\in[J]}\sum_{k\in[K]} r_{ijk}\left(\sum_{l\in[L]} y_{ijlk}\right) = r^T A y, \quad Ay = \left(\sum_{l\in[L]} y_{ijlk}\right)$$

$A := [a_{111}, ..., a_{ijk}, ..., a_{IJK}]$, a_{ijk} vettore di entrate binarie

$$W_1 y := \left(\sum_{i\in[I]} y_{ijlk}\right) \in \mathcal{R}^{JKLx1},\; W_2 y := \left(\sum_{j\in[J]}\sum_{l\in[L]} y_{ijlk}\right) \in \mathcal{R}^{IKx1},$$

$$W_3 y := \left(\sum_{j\in[J]} y_{ijlk}\right) \in \mathcal{R}^{IKLx1},\; Vd := (V_{lk} d_{jl}) \in \mathcal{R}^{JlKx1}$$

$Q_1 s := (q_k s_{ik}) \in \mathcal{R}^{IKx1}$ e $Q_2 x := (B_{ik} q_k x_{il}) \in \mathcal{R}^{IKx1}$

Table of Contents

- Notazione e parametri
- Modello base e formulazione MILP
- Modello a due stadi robusto con distanza di Mahalanobis
- Analisi di sensitività
- Soluzione esatta con decomposizione di Benders
- Algoritmo formale
- Personalization
- Summary

Modelliamo l'incertezza sulla domanda con la distanza di Mahalanobis, assumiamo di avere i dati delle realizzazioni della domanda in passato : $\{\hat{d}^{-t}, t \in [T] \cup \{0\}\}$, dove $\hat{d}^0$ è l'osservazione più recente.
Consideriamo il seguente modello di incertezza per la domanda :

$$d = \hat{d}^0 + \varepsilon$$

Dove ε è l'incremento random della domanda, che ha struttura simmetrica.
Per stimare l'incremento della domanda, otteniamo il sample degli incrementi della domanda, utilizzando i dati storici relativi alla domanda :

$$\{\hat{\varepsilon}^t = (\hat{\varepsilon}^t_{lj})_{l\in[L],j\in[J]}, \forall t \in [T] | \hat{\varepsilon}^t_{lj} := \hat{d}_{lj}^{-(t-1)} - \hat{d}_{lj}^{-t}, \forall l \in [L], j \in [J], t \in [T]\}$$

Modello a due stadi robusto con distanza di Mahalanobis

Possiamo calcolare media e matrice di covarianza del campione di osservazioni ($\{\hat{\varepsilon}^t, \forall t \in [T]\}$) , denotate $\hat{\mu}$ e $\hat{\Sigma}$ rispettivamente.
La distanza di Mahalanobis indica la distanza di un' osservazione da una distribuzione di probabilità dati la media e la matrice di covarianza.
La distanza di Mahalanobis ha una forma ellittica convessa per questo risulta utile nella formulazione del problema.
Utilizzeremo questa distanza per modellare l'uncertainty set della domanda.
La distanza di Mahalanobis tra l'incremento random ε della domanda e la distribuzione dei dati storici degli incrementi è data da :

$$\sqrt{(\varepsilon - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma} (\varepsilon - \hat{\mu})}$$

E consideriamo il seguente uncertainty set:

$$M(\delta) := \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}_+^{LJx1} | \boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{d}}^0 + \varepsilon, \sqrt{(\varepsilon - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma} (\varepsilon - \hat{\mu})} \leq \delta\}$$

Il parametro $\delta > 0$ è l'upper bound della distanza di Mahalanobis e indica la regione di incertezza, ovvero l'ellissoide centrato in .

Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, per ogni vettore v e ogni matrice simmetrica e definita positiva U abbiamo il seguente bound di probabilità :

$$P[\varepsilon \in M_v^U(\delta)] \geq 1 - \frac{E[(\varepsilon - v)^T U^{-1}(\varepsilon - v)]}{\delta^2}, \forall v \in R^{LJx1}, U \succ 0$$

Il lower bound migliore si ottiene per $(v, U) = (\mu, \Sigma)$, ovvero :

$$(\mu, \Sigma) \in \underset{v \in R^{LxJ}, U \succ 0}{\operatorname{argmin}} E[(\varepsilon - v)^T U^{-1}(\varepsilon - v)]$$

Abbiamo quindi che :

$$P[\varepsilon \in M_\mu^\Sigma(\delta)] \geq 1 - \frac{E[(\varepsilon - \mu)^T \Sigma^{-1}(\varepsilon - \mu)]}{\delta^2} = 1 - \frac{LxJ}{\delta^2}$$

Se per esempio, la regione di copertura desiderata è $1 - \beta$, allora possiamo trovare δ come :

$$P[\varepsilon \in M_\mu^\Sigma(\delta)] \geq 1 - \frac{LxJ}{\delta^2} \geq 1 - \beta \iff \delta \geq \sqrt{\frac{LxJ}{\beta}}$$

Dopo aver definito l'uncertainty set $M(\delta)$, incorporiamo l'incertezza della domanda nella formulazione base:

$$\max_{x,s}\{\min_{d\in M(\delta)} R(x,s,d)\} - \sum_{i\in[I]}\sum_{k\in[K]} a^T s_i - \sum_{i\in[I]} c^T x_i$$

$$s.t. (x,s) \in Z$$

$$Z := \{(x,s) \in \{0,1\}^{IxL} x Z_+^{IxK} \quad | \quad \underline{s_{lk}} x_{il} \leq s_{ik}, s_{ik} \leq B_{ik}, \forall i \in [I], \forall l \in [L], \forall k \in [K]\}$$

Ricordiamo la definizione del profitto $R(x,s,d)$:

$$\max_{x,s,y} \sum_{i\in[I]} \sum_{j\in[J]} \sum_{k\in[K]} r_{ijk} \left(\sum_{l\in[L]} y_{ijlk} \right) - \sum_{j\in[J]} \sum_{l\in[L]} \sum_{k\in[K]} p_{jlk} \left(V_{lk} d_{jl} \sum_{i\in[L]} y_{ijlk} \right)$$

s.t

$$\sum_{i\in[I]} y_{ijlk} \leq V_{lk} d_{jl} \qquad \forall j \in [J], k \in [K], l \in [L]$$

$$\sum_{j\in[J]} \sum_{l\in[L]} y_{ijlk} \leq s_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K]$$

$$\sum_{j\in[J]} y_{ijlk} \leq x_{il} B_{ik} q_k \qquad \forall i \in [I], k \in [K]$$

$$y \geq 0$$

Possiamo osservare che in questo modello la decisione di tipi di servizio e capacità (x, s) è una decisione al primo stadio, prima di osservare la realizzazione della domanda.
$R(x, s, d)$ risolve un problema di allocazione di risorse (y è la variabile decisionale) in base alla domanda d osservata.
In ottica di ottimizzazione robusta a due stadi, $R(x, s, d)$ e y sono definiti come il valore ottimale e la soluzione del problema operativo del secondo stadio, mentre il modello completo ha come obiettivo trovare le decisioni (x, s) (tipo,capacità) che massimizzano il profitto worst-case.

Table of Contents

- Notazione e parametri
- Modello base e formulazione MILP
- Modello a due stadi robusto con distanza di Mahalanobis
- Analisi di sensitività
- Soluzione esatta con decomposizione di Benders
- Algoritmo formale
- Personalization
- Summary

Per fare analisi di sensitività utilizzeremo il duale di $R(x, s, d)$, denotiamo con :

$$v_{\delta}^{WC}(x, s) := \min_{d \in M(\delta)} R(x, s, d)$$

Il profitto worst-case di secondo stadio, dato (x, s) e δ. Applicando la dualità possiamo enunciare il seguente teorema: (Teorema 1)
Il profitto worst-case $v_{\delta}^{WC}(x, s)$ data una decisione (x,s) (tipo,capacità) è equivalente al seguente problema di ottimizzazione :

$$v_{\delta}^{WC}(x, s) = \min_{(g,h,u) \in P} (g^T V - p^T V)(\hat{d}^0 + \hat{\mu}) - \delta \|\hat{\Sigma}^{1/2}(V^T p - V^T g)\|_2 + h^T Q_1 s + u^T Q_2 x$$

dove $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}^{1/2} \hat{\Sigma}^{1/2}$, e g, h, u sono le variabili duali associate con il problema $R(x, s, d)$ e il feasible set P è definito come :

$$P := \{(g, h, u) \in R_+^{JLKx1} x R_+^{IKx1} x R_+^{ILKx1} : g^T W_1 + h^T W_2 + u^T W_3 \geq A^T r + W_1^T p\}$$

Il teorema 1 mette in evidenza una struttura particolare del profitto worst-case $v_\delta^{WC}(x, s)$ che è utile per creare un algoritmo che analizzeremo in seguito, in particolare stiamo minimizzando una funzione concava su un set (P) che è rappresentabile come un poliedro che ha almeno un punto estremo, possiamo quindi raggiungere l'ottimalità in un punto estremo del set.
Questa idea è espressa nel seguente corollario: (Corollario 1)
Il profitto worst-case di secondo stadio, dato (x, s), è equivalente a :

$$v_\delta^{WC}(x, s) = \min_{e \in [E]}([g^e]^T V - p^T V)(\hat{d}^0 + \hat{\mu}) - \delta \|\hat{\Sigma}^{1/2}(V^T p - V^T g^e)\|_2 + [h^e]^T Q_1 s + [u^e]^T Q_2 x$$

dove $(g^e, h^e, u^e), \forall e \in [E]$ è il set dei punti estremi del poliedro P.

Il teorema 1 ci permette di fare analisi di sensitività del profitto worst-case $v_\delta^{WC}(x, s)$.
Prima di fare analisi di sensitività riscriviamo $v_\delta^{WC}(x, s)$ utilizzando una formulazione di ottimizzazione minmax :

$$v_\delta^{WC}(x, s) = \min_{d \in M(\delta)} \max_{y} r^T A y - p^T V d + p^T W_1 y$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad W_1 y &\leq Vd \\ W_2 y &\leq Q_1 s \\ W_3 y &\leq Q_2 x \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere questo problema come un problema di programmazione mista-intera conica di secondo ordine.

Proposizione 1: Dati (x, s) il problema di ottimizzazione minmax può essere riformulato nel seguente problema di programmazione mista-intera conica di secondo ordine.

$$\min_{d,y,g,h,u,\alpha,\beta,\gamma,\omega} r^T Ay - p^T Vd + p^T W_1 y$$

s.t.

$$W_1 y \leq Vd$$

$$W_2 y \leq Q_1 s$$

$$W_3 y \leq Q_2 x$$

$$g^T W_1 + h^T W_2 + u^T W_3 \geq A^T r + W_1^T p$$

$$g \leq \alpha[\max_{i,j,k,l} r_{ijk} + p_{jkl}]$$

$$Vd - W_1 y \leq (e_1 - \alpha)[\max_{l,j,k}\{(\hat{d}_{lj}^0 + \hat{\mu}_{lj} + \delta\|\sigma_{lj}\|_2)V_{lk}\}]$$

$$h \leq \beta[\max_{i,j,k,l} r_{ijk} + p_{jkl}]$$

$$Q_1 s - W_2 y \leq (e_2 - \beta)[\max_{i,k} B_{ik} q_k]$$

$$u \leq \gamma[\max_{i,j,k,l}(r_{ijk} + p_{jkl})]$$

$$Q_2 x - W_3 y \leq (e_3 - \gamma)[\max_{i,k} B_{ik} q_k]$$

$$\gamma \leq \omega[\max_{i,j,k,l}(Q_1 z)_{ik}(Q_2 1)_{ilk}]$$

$$(g-p)^T W_1 + h^T W_2 + u^T W_3 - A^T r \leq (e_4 - \omega)3[\max_{i,j,k,l} r_{ijk} + p_{jkl}]$$

$$\gamma \geq 0, d \in M(\delta)$$

$$(g, h, u) \in R_+^{JKLx1} R_+^{IKx1} R_+^{ILKx1}$$

$$\alpha \in \{0,1\}^{JKLx1}, \beta \in \{0,1\}^{IKx1}, \gamma \in \{0,1\}^{ILKx1}, \omega \in \{0,1\}^{IJLKx1}$$

Dove $e_1 \in R^{JLKx1}, e_2 \in R^{IKx1}, e_3 \in R^{ILKx1}, e_4 \in R^{IJLKx1}$ sono vettori di uni, e $\hat{\Sigma}^{-1/2} := (\sigma_{11}^T, ..., \sigma_{lj}^T, ..., \sigma^T LJ)^T$ dove ogni $\sigma_{lj} \in R^{LJx1}$, $\forall (l, j) \in [L]x[J]$ serve come vettore riga della matrice $\hat{\Sigma}^{-1/2}$

Si può dimostrare che la soluzione di quest'ultima formulazione è legata alla soluzione della formulazione precedente, e possiamo enunciare il seguente teorema : (Teorema 2)
Dati (x, s) sia $(g^*, h^*, u^*, y^*, d^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ la soluzione ottima del MISOCP, allora (g^*, h^*, u^*) è la soluzione ottima di $v_\delta^{WC}(x, s)$.
Tramite il teorema 2 possiamo fare analisi di sensitività del profitto worst-case $v_\delta^{WC}(x, s)$ rispetto al valore di robustezza δ, data una decisione (x, s).
Proposizione 2:
Sia (g^*, h^*, u^*) la soluzione ottimale del MISOCP, allora abbiamo:
1. Se il livello di robustezza è aumentato di Δ_δ, allora il profitto worst-case $v_\delta^{WC}(x, s)$ è diminuito almeno di :

$$\Delta_\delta \|\hat{\Sigma}^{1/2}(V^T p - V^T g^*)\|_2$$

2. Se il tipo di servizio l nel centro i viene abbandonato ovvero $x_{il} = 1 \longrightarrow x_{il} = 0$ allora il profitto worst-case è diminuito almeno di :

$$\sum_{k \in [K]} B_{ik} q_k u^*_{ikl}$$

3. Se il numero di staff di tipo k nel centro i diminuisce di 1 ovvero $s_{ik} - 1$ allora il profitto worst-case è diminuito almeno di :

$$q_k h^*_{ik}$$

Table of Contents

- Notazione e parametri
- Modello base e formulazione MILP
- Modello a due stadi robusto con distanza di Mahalanobis
- Analisi di sensitività
- Soluzione esatta con decomposizione di Benders
- Algoritmo formale
- Personalization
- Summary

Analizziamo un algoritmo per il nostro problema di pianificazione a due stadi, basato sulla decomposizione di Benders.
Consideriamo il problema di pianificazione dei centri HHC totale :

$$\max_{x,s} v_{\delta}^{WC}(x,s) - \sum_{i\in[I]} \sum_{k\in[K]} a_k^T s_i - \sum_{i\in[I]} c^T x_i$$

$$s.t.(x,s) \in Z$$

$$Z := \{(x,s) \in \{0,1\}^{IxL} x Z_{+}^{IxK} \quad | \quad \underline{s_{lk}} x_{il} \leq s_{ik}, s_{ik} \leq B_{ik}, \forall i \in [I], \forall l \in [L], \forall k \in [K]\}$$

Dove :

$$v_{\delta}^{WC}(x,s) = \min_{d\in M(\delta)} R(x,s,d)$$

Introduciamo una variabile ausiliaria θ e riscriviamo il problema come :

$$\max_{x,s,\theta} \theta - \sum_{i\in[I]} \sum_{k\in[K]} a_k^T s_i - \sum_{i\in[I]} c^T x_i$$

$$s.t. \theta \leq v_\delta^{WC}(x,s), (x,s) \in Z$$

Utilizzando il teorema 1 e il corollario 1 possiamo riscrivere il vincolo come :

$$\theta \leq \min_{e\in[E]} ([g^e]^T V - p^T V)(\hat{d}^0 + \hat{\mu}) - \delta \|\hat{\Sigma}^{1/2}(V^T p - V^T g^e)\|_2 + [h^e]^T Q_1 s + [u^e]^T Q_2 x$$

Che è equivalente a :

$$\theta \leq ([g^e]^T V - p^T V)(\hat{d}^0 + \hat{\mu}) - \delta \|\hat{\Sigma}^{1/2}(V^T p - V^T g^e)\|_2 + [h^e]^T Q_1 s + [u^e]^T Q_2 x, \forall e \in [E]$$

Dove $(g^e, h^e, u^e), \forall e \in [E]$ è il set di punti estremi del poliedro P dato da :

$$P := \{(g,h,u) \in R_+^{JLKx1} x R_+^{IKx1} x R_+^{ILKx1} : g^T W_1 + h^T W_2 + u^T W_3 \geq A^T r + W_1^T p\}$$

Soluzione esatta con decomposizione di Benders

Quindi otteniamo un problema di programmazione lineare mista intera (MILP) :

$$\max_{x,s,\theta} \theta - \sum_{i\in[I]} \sum_{k\in[K]} a_k^T s_i - \sum_{i\in[I]} c^T x_i$$

$$s.t. \theta \leq ([g^e]^T V - p^T V)(\hat{d}^0 + \hat{\mu}) - \delta \|\hat{\Sigma}^{1/2}(V^T p - V^T g^e)\|_2 + [h^e]^T Q_1 s + [u^e]^T Q_2 x, \forall e \in [E]$$

$$(x, s) \in Z$$

Possiamo notare come il problema di partenza si riduce ad un MILP di grande scala, però il set P è molto grande e numerare tutti i punti estremi in questo set è un problema NP-hard, quindi risolvere direttamente questo problema non è fattibile.

Per risolvere questo problema utilizziamo un algoritmo basato sulla decomposizione di Benders.

Prima consideriamo un rilassamento del problema principale, in cui la funzione obiettivo è la stessa ma i vincoli sono solo un sottoinsieme dei vincoli totali.

Il problema rilassato è una formulazione definita su un subset di punti estremi del set P.

Assumiamo di avere una soluzione ottima (x^*, s^*, θ^*) del problema rilassato, dobbiamo controllare se questa soluzione è ammissibile per il problema generale.
Se (x^*, s^*, θ^*) è ammissibile per il problema generale, allora si può dimostrare che è anche la soluzione ottima, e l'algoritmo si ferma.
Altrimenti otteniamo un punto estremo, per generare un vincolo che è violato dall'attuale soluzione (x^*, s^*, θ^*), e aggiungiamo questo nuovo vincolo al problema rilassato.
Ripetiamo questi step finchè non troviamo la soluzione ottima del problema generale.

Per costruire il problema rilassato, consideriamo un sottoinsieme di punti estremi di P, denotati con $\{(g^e, h^e, u^e), e \in [H]\}$ con $[H] \subset [E]$
E proponiamo una formulazione del problema rilassato :

$$\max_{x,s,\theta} \theta - \sum_{i\in[I]} \sum_{k\in[K]} a_k^T s_i - \sum_{i\in[I]} c^T x_i$$

$$s.t. \theta \leq ([g^e]^T V - p^T V)(\hat{d}^0 + \hat{\mu}) - \delta \|\hat{\Sigma}^{1/2}(V^T p - V^T g^e)\|_2 + [h^e]^T Q_1 s + [u^e]^T Q_2 x, \forall e \in [H]$$

$$(x, s) \in Z$$

Che è un MILP di scala più bassa di quello precedente, e ha un numero di vincoli minore di quello generale.
Denotiamo con (x^*, s^*, θ^*) la soluzione ottima del problema rilassato.
Possiamo ottenre un upper bound del problema generale come :

$$UB = \theta^* - \sum_{i\in[I]} \sum_{k\in[K]} a_k^T s_i^* - \sum_{i\in[I]} c^T x_i^*$$

Successivamente verifichiamo se (x^*, s^*, θ^*) è una soluzione ammissibile del problema generale.

Data la soluzione (x^*, s^*, θ^*) del problema rilassato, l'ammissibilità della soluzione nel problema generale è equivalente a verificare che la soluzione (x^*, s^*, θ^*) soddisfa il seguente vincolo :

$$\theta \leq ([g^e]^T V - p^T V)(\hat{d}^0 + \hat{\mu}) - \delta \|\hat{\Sigma}^{1/2}(V^T p - V^T g^e)\|_2 + [h^e]^T Q_1 s + [u^e]^T Q_2 x, \forall e \in [E]$$

Utilizzando il teorema 1 e il corollario 1 possiamo riscrivere questo vincolo come :

$$\theta^* \leq v_\delta^{WC}(x^*, s^*)$$

Proposizione 3 :
Sia (x^*, s^*, θ^*) la soluzione ottima del problema rilassato, allora (x^*, s^*) è la soluzione ottima del problema generale se e solo se vale : $\theta^* \leq v_\delta^{WC}(x^*, s^*)$.

Verificando il vincolo $\theta^* \leq v_\delta^{WC}(x^*, s^*)$ inoltre, possiamo ottenere un lower bound del problema generale come :

$$LB = v_\delta^{WC}(x, s) - \sum_{i \in [I]} \sum_{k \in [K]} a_k^T s_i^* - \sum_{i \in [I]} c^T x_i^*$$

La soluzione del MISOCP (g^*, h^*, u^*, d^*) dato (x, s) ci permette di trovare un punto estremo (g^{**}, h^{**}, u^{**}) del poliedro P che può essere usato per generare un nuovo vincolo se il vincolo attuale non è rispettato.
In modo specifico, il punto estremo (g^{**}, h^{**}, u^{**}) sarà incluso nel set di punti estremi $\{(g^e, h^e, u^e), e \in [H]\}$ per definire un problema rilassato più esteso. Sintetizziamo questo concetto nel corollario 2.
Corollario 2 :
Sia $(d^*, y^*, g^*, h^*, u^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \omega^*)$ la soluzione ottimale del MISOCP data la soluzione (x^*, s^*), allora ogni soluzione ammissibile di :

$$\min_{g,h,u}(g^T V - p^T V)d^* + h^T Q_1 s^* + u^T Q_2 x^*$$

$$s.t. (g^T V - p^T V)d^* + h^T Q_1 s^* + u^T Q_2 x^* = J^*$$

$$g^T W_1 + h^T W_2 + u^T W_3 \geq A^T r + W_1^T p$$

$$g, h, u \geq 0$$

è un punto estremo del poliedro P, dove $J^* = ([g^*]^T V - p^T V)d^* + [h^*]^T Q_1 s^* + [u^*]^T Q_2 x^*)$

- Notazione e parametri
- Modello base e formulazione MILP
- Modello a due stadi robusto con distanza di Mahalanobis
- Analisi di sensitività
- Soluzione esatta con decomposizione di Benders
- Algoritmo formale
- Personalization
- Summary

Procedura risolutiva del problema generale :

1) Iniziamo con un subset di punti estremi $\{(g^e, h^e, u^e), e \in [H]\}$ di P.

2) Con il set $\{(g^e, h^e, u^e), e \in [H]\}$ risolviamo il problema rilassato per ottenere una soluzione (x^*, s^*, θ^*).

3) Verifichiamo l'ottimalità della soluzione (x^*, s^*, θ^*) utilizzando la condizione : $\theta^* \leq v_\delta^{WC}(x^*, s^*)$.

4) Risolvendo il MISOCP $v_\delta^{WC}(x^*, s^*)$ dato (x^*, s^*) otteniamo una soluzione che può essere usata per risolvere il problema esposto nel corollario 2, per ottenere un punto estremo (g^{**}, h^{**}, u^{**}) del poliedro P che può essere aggiunto nel set $\{(g^e, h^e, u^e), e \in [H]\}$, per aggiungere vincoli al problema rilassato.

5) L'algoritmo si ferma se la condizione $\theta^* \leq v_\delta^{WC}(x^*, s^*)$ viene rispettata, oppure il gap tra lower e upper bound è sotto una determinata soglia.

Input: Parametri del modello
Inizializzazione: Trovare un punto estremo (g^0, h^0, u^0) di P e imporre $\varepsilon_P := \{(g^0, h^0, u^0)\}$
STEP 1.
Risolvere il problema rilassato per ottenere soluzione (θ^*, x^*, s^*)
STEP 2.
Risolvere il MISOCP settando $(x, s) = (x^*, s^*)$ per ottenere $(g^*, h^*, u^*, y^*, d^*)$ e $v_\delta^{WC}(x^*, s^*)$
STEP 3.
Se $\theta^* \leq v_\delta^{WC}(x^*, s^*)$ allora,

$(x^{**}, s^{**}) \longleftarrow (x^*, s^*)$

STOP

STEP 4.
Risolvere il problema del corollario 2 per ottenere un punto estremo (g^{**}, h^{**}, u^{**}) e aggiornare il set di punti estremi $\varepsilon_P \longleftarrow \varepsilon_P(g^{**}, h^{**}, u^{**})$
STEP 5.
Aggiungo un vincolo al problema rilassato e torno allo STEP 1.
Output : Soluzione ottimale tipo-capacità (x^{**}, s^{**})

Writing a Simple Slide

It's really easy!

- A typical slide has bulleted lists

Writing a Simple Slide

It's really easy!

- A typical slide has bulleted lists
- These can be uncovered in sequence

Writing a Simple Slide

It's really easy!

- A typical slide has bulleted lists
- These can be uncovered in sequence

Code for a Page with an Itemised List

```
\begin{frame}{Writing a Simple Slide}
  \framesubtitle{It's really easy!}
  \begin{itemize}[<+->]
    \item A typical slide has bulleted lists
    \item These can be uncovered in sequence
  \end{itemize}\end{frame}
```

Table of Contents

- ▶ Notazione e parametri
- ▶ Modello base e formulazione MILP
- ▶ Modello a due stadi robusto con distanza di Mahalanobis
- ▶ Analisi di sensitività
- ▶ Soluzione esatta con decomposizione di Benders
- ▶ Algoritmo formale
- ▶ Personalization
- ▶ Summary

Changing Slide Style

- You can select the white or *maincolor* **slide style** *in the preamble* with `\themecolor{white}` (default) or `\themecolor{main}`
  - You should *not* change these within the document: Beamer does not like it
  - If you *really* must, you may have to add `\usebeamercolor[fg]{normal text}` in the slide
- You can change the **footline colour** with `\footlinecolor{color}`
  - Place the command *before* a new `frame`
  - There are four "official" colors: `maincolor`, `sintefyellow`, `sintefgreen`, `sintefdarkgreen`
  - Default is no footline; you can restore it with `\footlinecolor{}`
  - Others may work, but no guarantees!
  - Should *not* be used with the `maincolor` theme!

Standard Blocks

These have a color coordinated with the footline (and grey in the blue theme)

```
\begin{block}{title}
content...
\end{block}
```

Colour Blocks

Similar to the ones on the left, but you pick the colour. Text will be white by default, but you may set it with an optional argument.

```
\begin{colorblock}[black]{sinteflightgreen}{title}
content...
\end{colorblock}
```

The “official” colours of colour blocks are: `sinteflilla`, `maincolor`, `sintefdarkgreen`, and `sintefyellow`.

Using Colours

- You can use colours with the `\textcolor{<color name>}{text}` command
- The colours are defined in the `sintefcolor` package:
  - Primary colours: `maincolor` and its sidekick `sintefgrey`
  - Three shades of green: `sinteflightgreen`, `sintefgreen`, `sintefdarkgreen`
  - Additional colours: `sintefyellow`, `sintefred`, `sinteflilla`
    - These may be shaded—see the `sintefcolor` documentation or the SINTEF profile manual
- Do *not* abuse colours: `\emph{}` is usually enough
- Use `\alert{}` to bring the focus somewhere

Using Colours

- You can use colours with the `\textcolor{<color name>}{text}` command
- The colours are defined in the `sintefcolor` package:
  - Primary colours: `maincolor` and its sidekick `sintefgrey`
  - Three shades of green: `sinteflightgreen`, `sintefgreen`, `sintefdarkgreen`
  - Additional colours: `sintefyellow`, `sintefred`, `sinteflilla`
    - These may be shaded—see the `sintefcolor` documentation or the SINTEF profile manual
- Do *not* abuse colours: `\emph{}` is usually enough
- Use `\alert{}` to bring the focus somewhere
- If you highlight too much, you don't highlight at all!

Adding images

Adding images works like in normal LaTeX:

Code for Adding Images

```
\usepackage{graphicx}
% ...
\includegraphics[width=\textwidth]
{assets/logo_RGB}
```

Splitting in Columns

Splitting the page is easy and common; typically, one side has a picture and the other text:

This is the first column

And this the second

Column Code

```
\begin{columns}
    \begin{column}{0.6\textwidth}
        This is the first column
    \end{column}
    \begin{column}{0.3\textwidth}
        And this the second
    \end{column}
    % There could be more!
\end{columns}
```

Special Slides

7 Personalization

- Chapter slides
- Side-picture slides

- Similar to `frames`, but with a few more options
- Opened with `\begin{chapter}[<image>]{<color>}{<title>}`
- Image is optional, colour and title are mandatory
- There are seven “official” colours: `maincolor`, `sintefdarkgreen`, `sintefgreen`, `sinteflightgreen`, `sintefred`, `sintefyellow`, `sinteflilla`.
  - Strangely enough, these are *more* than the official colours for the footline.
  - It may still be a nice touch to change the footline of following slides to the same color of a chapter slide. Your choice.
- Otherwise, `chapter` behaves just like `frame`.

Side-Picture Slides

7 Personalization

- Opened with `\begin{sidepic}{<image>}{<title>}`
- Otherwise, `sidepic` works just like `frame`

Fonts

- The paramount task of fonts is being readable
- There are good ones…
  - Use serif fonts only with high-definition projectors
  - Use sans-serif fonts otherwise (or if you simply prefer them)
- … and not so good ones:
  - `Never use monospace for normal text`
  - Gothic, calligraphic or weird fonts should always be avoided

Look

- To insert a final slide with the title and final thanks, use `\backmatter`.
  - The title also appears in footlines along with the author name, you can change this text with `\footlinepayoff`
  - You can remove the title from the final slide with `\backmatter[notitle]`
- The aspect ratio defaults to 16:9, and you should not change it to 4:3 for old projectors as it is inherently impossible to perfectly convert a 16:9 presentation to 4:3 one; spacings *will* break
  - The `aspectratio` argument to the `beamer` class is overridden by the SINTEF theme
  - If you *really* know what you are doing, check the package code and look for the `geometry` class.

Table of Contents

8 Summary

- Notazione e parametri
- Modello base e formulazione MILP
- Modello a due stadi robusto con distanza di Mahalanobis
- Analisi di sensitività
- Soluzione esatta con decomposizione di Benders
- Algoritmo formale
- Personalization
- Summary

Good Luck!

- Enough for an introduction! You should know enough by now
- If you have corrections or suggestions, send them to me!

Pianificazione di servizi medici domiciliari *Thank you for listening! Any questions?*