

Homework 2

Student name: Moubane Abdelouahab 305716, Racca Riccardo 315163,
Vay Edoardo 316737 Longo Maria Antonietta 308756, Scaramozzino Filippo 312856

Course: *Dinamiche su Network*

Esercizio 1. Given an even integer n , consider the simple graph R_n , in which the node i is connected by undirected links to nodes $i + 1$, $i - 1$ and $i + n/2 \pmod n$.

- Consider the stochastic matrix P with entries $P_{ij} = w_i^{-1} W_{ij}$, where $w_i = (W\mathbf{1})_i$, and let $P_{lazy} = (I + P)/2$. Analyze the convergence of dynamics $x(t + 1) = Px(t)$ and $x(t + 1) = P_{lazy}x(t)$.
- Compute explicitly λ_2 , i.e., the second largest eigenvalue of P_{lazy} , and determine the relaxation time $1/(1 - \lambda_2)$ as a function of n , as $n \rightarrow +\infty$ (**Hint:** observe that R_n is a circulant graph).
- Compute an upper and a lower bound for the relaxation time on the barbell graph B_n as a function of n , as $n \rightarrow +\infty$.
- (**optional**) Observe that the relaxation time provides an upper bound for the convergence time of dynamics $x(t + 1) = P_{lazy}x(t)$ to consensus. In light of this observation, find two initial conditions $x(0)$ and $y(0)$ on B_n (consider n multiple of 4) where half of the nodes have initial opinion 0 and half of the nodes have initial opinion 1, such that i) the convergence to consensus of $x(t)$ is *fast* (i.e., it does not scale with the size of the graph) ii) the convergence of $y(t)$ to consensus is *slow* (i.e., it scales quadratically with the size of the graph). Simulate numerically the dynamics with n sufficiently and plot the convergence time as a function of n for both the initial conditions $x(0)$ and $y(0)$. It is not asked to compute analytically the speed of convergence of $x(0)$ and $y(0)$.

Soluzione.

- (a) Notiamo subito che, affinché le richieste sulla definizione di R_n siano soddisfatte, n deve essere necessariamente pari. Inoltre R_n è fortemente connesso e se:

$$\begin{cases} \frac{n}{2} \text{ dispari} & \rightarrow R_n \text{ periodico di periodo uguale a } 2 \\ \frac{n}{2} \text{ pari} & \rightarrow R_n \text{ aperiodico} \end{cases}$$

Quindi se $\frac{n}{2}$ è dispari R_n è periodico e la dinamica $x(t + 1) = Px(t)$ **non** converge. Al contrario, per $\frac{n}{2}$ pari, R_n è aperiodico (e fortemente connesso); ciò mi garantisce che la dinamica $x(t + 1) = Px(t)$ converge a $(\pi'x(0))\mathbb{1}$ qualunque sia $x(0)$.

Per quanto riguarda $x(t + 1) = P_{lazy}x(t)$, possiamo subito affermare che c'è convergenza a $(\pi'x(0))\mathbb{1}$, perchè è fortemente connesso e aperiodico grazie alla presenza dei selfloop.

- (b) Gli autovalori della matrice di adiacenza W sono della forma:

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n-1} r_j \omega_k^j = r_1 \omega_k^1 + r_{\frac{n}{2}} \omega_k^{\frac{n}{2}} + r_{n-1} \omega_k^{n-1},$$

dove $r_j = 1 \ \forall j \in \{1, \frac{n}{2}, n-1\}$ e $r_j = 0$ altrove e $\omega_k = \exp(\frac{2\pi i}{n}k)$ sono le radici n -esime dell'unità.

Dunque,

$$\begin{aligned}\mu_k &= \exp\left(\frac{2\pi i}{n}k\right) + \exp\left(\frac{2\pi i k n}{n} \frac{1}{2}\right) + \exp\left(\frac{2\pi i(n-1)k}{n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{n}k\right) + \cos(\pi k) + i \sin(\pi k) + \exp\left(2\pi i k - \frac{2\pi i k}{n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{n}k\right) + \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}k\right) + \cos(\pi k) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \cos(\pi k)\end{aligned}$$

per $k = 0, \dots, n-1$

Per arrivare a questa espressione abbiamo usato:

- $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ nel secondo passaggio
- $\exp(2\pi i k) = 1$ nel terzo passaggio
- $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)$ nell'ultimo passaggio

A questo punto, dal momento che il grafo R_n è 3-regolare, $P = \frac{W}{3}$ e quindi:

$$\sigma(P) = \left\{ \lambda_k = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{3} \cos(\pi k), \quad k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Per quanto riguarda la dinamica *lazy*, fissato $P_{\text{lazy}} = \frac{1}{2}(P + I)$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}\sigma(P_{\text{lazy}}) &= \left\{ \lambda_k = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{3} \cos(\pi k) + 1 \right), \quad k = 0, \dots, n-1 \right\} \\ &= \left\{ \lambda_k = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{6} \cos(\pi k) + \frac{1}{2}, \quad k = 0, \dots, n-1 \right\}\end{aligned}$$

Dobbiamo cercare il secondo autovalore più grande, che otteniamo per $k = 2$, vediamo come:

Prima di tutto escludiamo il caso $k = 0$ che fornisce $\lambda_0 = 1$.

Adesso notiamo che il secondo addendo è negativo per k dispari e positivo per k pari.

A questo punto basta notare che il primo addendo è una funzione periodica con periodo n e che è decrescente per $k \in [0, \frac{n}{2}]$.

Poichè la funzione $\cos(\frac{2\pi k}{n})$ assume tutti i valori dell'immagine nell'intervallo $[0, \frac{n}{2}]$, siamo interessati a studiare i casi $k = 1$ e $k = 2$ al variare di n multiplo di 4.

Facendo i calcoli:

- per $n = 4$ abbiamo $\lambda_1 = \lambda_2$
- per $n = 8$ abbiamo $\lambda_2 > \lambda_1$

Sapendo che per $n = 8$ abbiamo $\lambda_2 > \lambda_1$ e che all'aumentare di n aumenta il periodo della funzione $\cos(\frac{2\pi k}{n})$ e la differenza $\cos(\frac{2\pi 1}{n}) - \cos(\frac{2\pi 2}{n})$ diminuisce, questo significa che per qualunque $n > 8$ abbiamo $\lambda_2 > \lambda_1$. Da queste considerazioni possiamo concludere che per n multiplo di 4, il valore $k = 2$ restituisce il secondo autovalore maggiore.

Quindi, per $k = 2$:

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \frac{1}{6} \cos(2\pi) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \frac{2}{3}$$

Ne studiamo il comportamento per $n \rightarrow \infty$:

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{16\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{2}{3} = 1 - \frac{8\pi^2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Quindi:

$$\tau_{rel} = \frac{1}{1-\lambda_2} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{8\pi^2}{3n^2}\right)} = \frac{3}{8} \frac{n^2}{\pi^2} \quad \text{da ciò:} \quad \tau_{rel} \text{ è } O(n^2).$$

(c) Poichè vale che $\frac{1}{2}\Phi^2 \leq 1 - \lambda_2 \leq 2\Phi$, l'*upper bound* che cerchiamo è dato da 2Φ , mentre il *lower bound* è dato da $\frac{1}{2}\Phi^2$. Resta da capire chi è Φ nel caso di un Barbell.

Per definizione: $\Phi_G = \min_{U \subseteq V, 0 < w_U \leq \frac{1}{2} \mathbb{1}' w} \frac{|\partial U|}{w_U}$

In un Barbell si raggiunge il minimo quando l'insieme dei nodi scelto, U , è una delle due componenti complete, da cui $|\partial U| = 1$ e $w_U = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1$

Quindi:

$$\Phi = \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1\right)^{-1}$$

Ne consegue che:

Lower bound: $\frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1\right)^{-2} \approx \frac{1}{n^4}$ e tende a 0 per $n \rightarrow \infty$

Upper bound: $2 \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1\right)^{-1} \approx \frac{1}{n^2}$ e tende a 0 per $n \rightarrow \infty$

(d) Per affrontare il problema abbiamo considerato le seguenti tre condizioni iniziali:

- $x(0)$ la configurazione in cui ogni componente completa possiede la metà dei nodi con opinione 0 e l'altra metà con opinione 1. I due nodi che collegano le due componenti complete hanno opinioni discordanti.
- $x'(0)$ la configurazione in cui ogni componente completa possiede la metà dei nodi con opinione 0 e l'altra metà con opinione 1. I due nodi che collegano le due componenti complete hanno opinioni concordi.
- $y(0)$ la configurazione in cui tutti i nodi con opinione 1 si trovano nella stessa componente completa.

Per analizzare l'evoluzione abbiamo utilizzato Matlab, calcolando il numero di iterazioni necessarie a raggiungere il consenso in funzione del numero di nodi nel grafo Bn . Il numero di iterazioni è stato calcolato tramite questa funzione :

```
function [x, k] = Test_Convergence(P, x0, tol)
```

```
%TEST_CONVERGENCE
```

```
x = x0;
dist = 1;
k = 1;
while dist > tol && k < 100000
    x_new = P * x;
    dist = norm(x_new - x);
    k = k+1;
    x = x_new;
end
end
```

Questa funzione prende in ingresso una matrice stocastica P che descrive il grafo; x_0 è la distribuzione iniziale delle opinioni e tol la differenza entro cui consideriamo le opinioni uguali.

Le variabili x e k indicano rispettivamente l'opinione finale e il numero di iterazioni(per un massimo di 100000) per raggiungere x .

```
iter = 63;
% xseq = zeros(iter, 1);
% kseq = zeros(iter, 1);

for j=1:iter

    n = 4 * (j);
    Component = ones(n/2, n/2) - eye(n/2, n/2);

    W = blkdiag(Component, Component);
    W(n/2, n/2 +1) = 1;
    W(n/2 +1, n/2) = 1;
    x0 = zeros(n, 1);

    for i=1:n/2
        x0(i) = 1;
    end

    w = sum(W,1);

    D = diag(w);
```

```

P = DW;
P = (P + eye(n))./ 2;

[x, k] = Test_Convergence(P, x0, 1e-6);
kseq(j) = k;

end

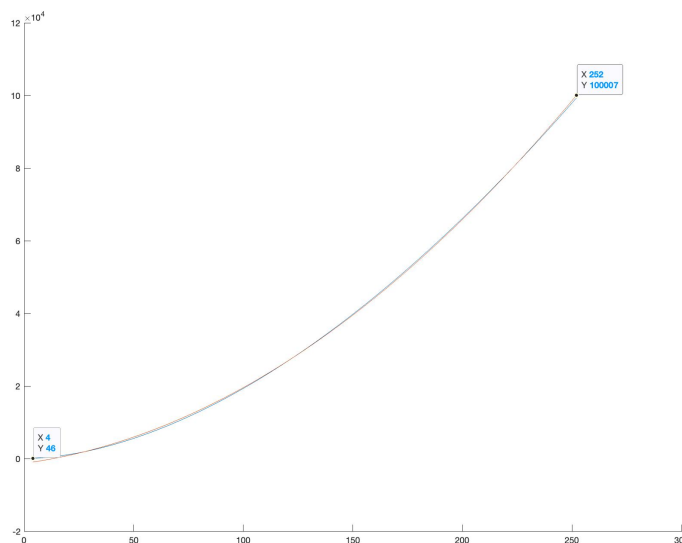
t = 1:iter;
t = 4 * (t);

hold on

plot(t, kseq);
coeff = polyfit(t, kseq, 2)
y1 = polyval(coeff, t);

plot(t, y1)

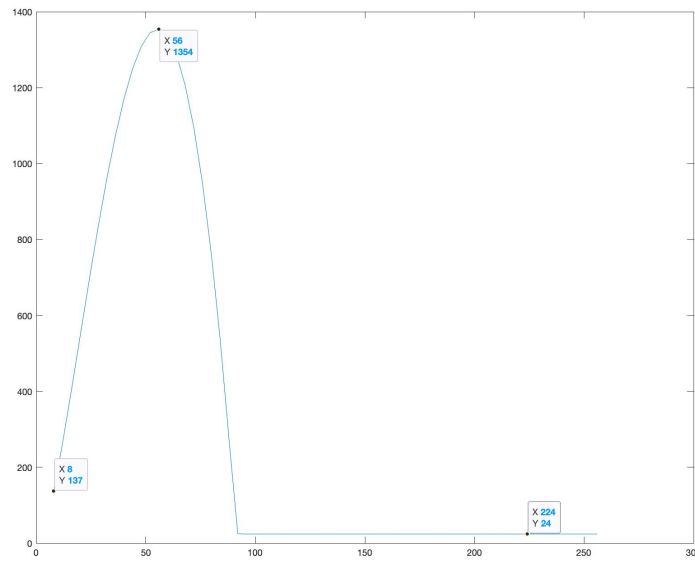
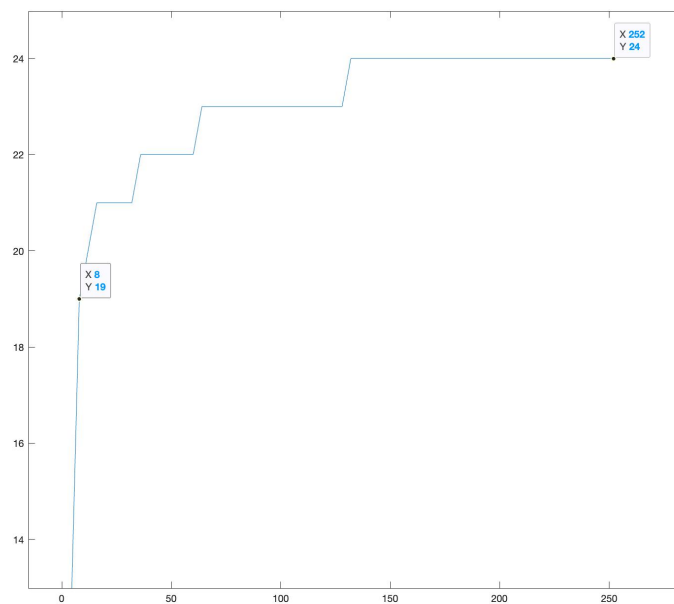
```



convergenza di $y(0)$

Utilizzando la configurazione iniziale $y(0)$ possiamo notare come la convergenza dipenda quadraticamente dal numero di nodi: infatti la curva risulta quasi perfettamente sovrapponibile con una parabola i cui coefficienti possiamo stimare con la funzione `polyfit` di MatLab.

Abbiamo ripetuto la simulazione anche partendo dalle configurazioni iniziali $x(0)$ e $x'(0)$ ottenendo i seguenti risultati:

convergenza di $x(0)$ convergenza di $x'(0)$

Possiamo notare come partendo dalla configurazione $x(0)$, la convergenza peggiore inizialmente fino a raggiungere il massimo quando $n = 56$: successivamente, per n sempre maggiori la convergenza migliora fino a raggiungere un tempo costante indipendente dalla dimensione del grafo. Partendo invece dalla configurazione $x'(0)$ la convergenza avviene molto più velocemente rispetto agli altri casi, anche per n piccoli: questo perché, quando i due nodi che collegano le componenti connesse sono concordi, si minimizza il passaggio di informazioni sull'arco che connette le due componenti; per questa ragione, essendo la situazione

completamente simmetrica, il grafo evolve parallelamente in entrambe le componenti complete minimizzando l'effetto del bottle-neck.

Esercizio 2. Consider the simple tree in Figure 1 and assume there are two players: player P_A , who places on the tree a stubborn node s_1 with value 1, and player P_B , who places on the tree a stubborn node s_0 with value 0. Each player aims at maximizing the influence of the stubborn node that he places, that is, he aims at making the average asymptotic opinion of nodes in the average dynamics as close as possible to the opinion of its own stubborn node.

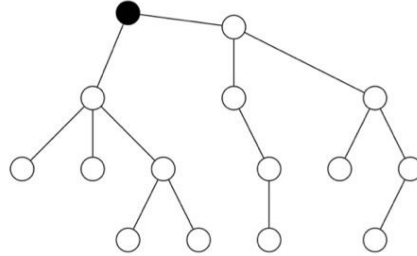


Figure 1: Tree for Exercise 2

- Suppose that player P_A has moved first and he has placed the stubborn node s_1 on the black node of the tree. Then, it is time for player P_B to move: where should he place the stubborn node s_0 in order to make the average opinion of nodes as close to 0 as possible?
- Consider now a different scenario. Player P_B is the first to move and he places the stubborn node s_0 . Then it is P_A 's turn to move, and he places (on a different position) the stubborn node s_1 in such a way that the average opinion of nodes is the highest possible. Where should player P_B place s_0 in order to make the average opinion of nodes as close to 0 as possible?

Soluzione

- Conoscendo la posizione dello stubborn s_1 scelta dal player P_A , intuitivamente sappiamo che per minimizzare la media delle opinioni dobbiamo ridurre il più possibile i nodi influenzati dal nodo s_1 . Seguendo questo ragionamento concludiamo che la scelta ottimale per posizionare lo stubborn s_0 è sul nodo adiacente a s_1 da cui parte il sottoalbero più numeroso.

Supportiamo ora la nostra intuizione con le formule.

Introduciamo alcune notazioni per scopi futuri

- T grafo ad albero.
- V è l'insieme dei nodi del grafo, con $|V| = n$
- U insieme dei nodi dell'albero con opinione 1. ($U \subseteq V$)
- Z insieme dei nodi dell'albero con opinione 0. ($Z \subseteq V$)
- M insieme dei nodi dell'albero che hanno opinione diversa sia da 0 che da 1.
 $M = V \setminus (U \cup Z)$

Notiamo che ciascuno di questi insiemi forma un albero a sua volta.

Inoltre, siano:

- γ_{s_1, s_0} il path che conduce da s_1 a s_0 .
- $K(U, Z)$ il numero di nodi visitati da γ_{s_1, s_0} .
- $\Gamma_{s_1, s_0} = \{s_1 = v_1, v_2, \dots, s_0 = v_{K(U, Z)}\}$, l'insieme dei nodi visitati da γ_{s_1, s_0} .

- $A(i)$ il numero di nodi del sottoalbero con radice v_i .

La media delle opinioni di un grafo come quello appena descritto è data dalla seguente formula:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{x \in V} x = \frac{1}{n} \left(\sum_{u \in U} 1 + \sum_{v_i \in \Gamma_{s_1, s_0} \setminus \{v_1, v_{K(U, Z)}\}} \frac{K(U, Z) - i}{K(U, Z) - 1} (A(i) + 1) + \sum_{z \in Z} 0 \right)$$

- indichiamo $\sum_{u \in U} 1$ con (*).
- indichiamo $\sum_{v_i \in \Gamma_{s_1, s_0} \setminus \{s_1, s_0\}} \frac{K(U, Z) - i}{K(U, Z) - 1} (A(i) + 1)$ con (**).

Notando che gli insiemi U e Z dipendono entrambi dalla posizione di s_0 , delin-
eiamo come obiettivo trovare la posizione di s_0 che soddisfa:

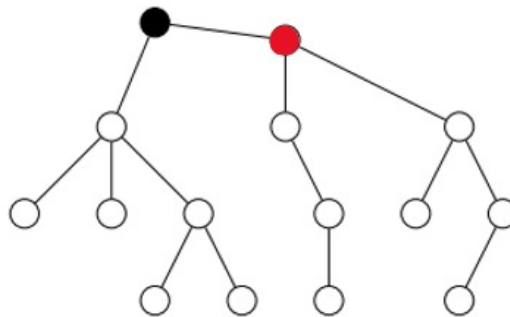
$$\min_{\substack{s_0 \in V \setminus \{s_1\} \\ |U| \geq c \\ |U| + |Z| + |M| = n}} \bar{x}$$

dove c è il numero di nodi totali meno il numero di nodi della ramificazione più numerosa che si dirama da s_1 ; nel nostro caso $c = 7$.

Per minimizzare \bar{x} dobbiamo minimizzare (*) e (**). Analizziamo cosa significa minimizzare queste due quantità: (ricordando che la parte in cui possiamo agire non è l'argomento delle sommatorie, bensì le cardinalità degli insiemi in cui esse scorrono)

- (**) è una somma di termini positivi, essa quindi può essere minimizzata riducendo al minimo il numero degli addendi. Nel nostro caso possiamo addirittura ridurre a zero il numero degli addendi e questo avviene se, e solo se, $\Gamma_{s_1, s_0} \setminus \{s_1, s_0\} \equiv \emptyset$.
- osserviamo subito come (*) coincide esattamente con la cardinalità dell'insieme U . Per minimizzare (*) (tenendo in considerazione quanto detto per annullare (**)) è sufficiente posizionare il nodo stubborn s_0 nel nodo adiacente a s_1 da cui si ramificano più nodi, in modo da interrompere l'influenza del nodo s_1 verso il maggior numero di nodi possibile.

Perciò il giocatore P_b per minimizzare la media delle opinioni deve posizionare il nodo stubborn s_0 nel nodo rosso nel grafo sottostante.



- (b) Una volta fissato s_0 , ricadiamo nel problema del punto precedente a ruoli invertiti. L'obiettivo per P_A è:

$$\max_{\substack{s_1 \in V \setminus \{s_0\} \\ |Z| \geq c \\ |U| + |Z| + |M| = n}} \bar{x}$$

dove c è il numero di nodi totali meno il numero di nodi della ramificazione più numerosa che si dirama da s_0 . Le dinamiche di scelta del nodo in cui posizionare s_1 sono analoghe alle precedenti.

Alla luce di quanto appena descritto, e tenendo presente che la scelta di s_0 influisce solo nel vincolo $|Z| \geq c$, concludiamo che la scelta migliore di P_B per posizionare il nodo s_0 è quella che massimizza c . Nel nostro caso coincide alla posizione del nodo rosso del grafo precedente.

Esercizio 3. Assume that a community of agents whose interactions are described by the graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ with

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Each agent has an initial opinion $x_i(0) = \xi_i$, where $\{\xi_i\}_{i \in \mathcal{V}}$ are independent random variables variance distribution $(0.1, 0.3, 0.2, 0.2)$. Let $E[\xi_i] = 0$ for each node i .

- Compute the variance of the asymptotic consensus value of the French-DeGroot dynamics.
- How should the invariant probability distribution π of a strongly connected aperiodic graph be in order to minimize the variance of the consensus value?
- Consider the graph defined by the adjacency matrix (1). Assume now that a selfloop (i, i) with arbitrary weight α_i is added to each node i . Find a non-negative vector α such that on the new graph the variance of the asymptotic consensus value is minimized. If multiple α exist, select the one that minimizes $\alpha' \mathbf{1}$.
- Consider again the graph (1), and assume that the initial opinions $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ are gaussian variables with covariance matrix given by

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

and such that $E[\xi_i] = 0$ for each node i . Compute the variance of the asymptotic consensus value of the French-DeGroot dynamics.

- Consider the same setting of point (d), and find a non-negative vector α such that on the new graph the variance of the asymptotic consensus value is minimized. If multiple α exist, select the one that minimizes $\alpha' \mathbf{1}$.

Soluzione

(a) $var(\alpha) = var(\pi' x(0)) = \sum_{i=1}^4 \pi_i^2 var(x(0))$, quindi calcoliamo π :

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad P' \pi = \pi$$

Poichè il grafo è bilanciato, possiamo calcolare velocemente π come il rapporto dei gradi:

$$\Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{2}{9} \quad \pi_4 = \frac{1}{3}$$

Adesso possiamo calcolare la varianza:

$$var(\alpha) = \frac{1}{10} \frac{4}{81} + \frac{3}{10} \frac{4}{81} + \frac{2}{10} \frac{4}{81} + \frac{2}{10} \frac{9}{81} = \frac{42}{810} = 0.0519$$

$$(b) \text{ var}(\alpha) = g(\pi) = \sum_{i=1}^4 \pi_i^2 \text{var}(x_i)$$

$$\min_{\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1} g(\pi)$$

indicando $\pi_1 = x, \pi_2 = y, \pi_3 = z, \pi_4 = k$

$$g = \frac{x^2}{10} + \frac{3y^2}{10} + \frac{2z^2}{10} + \frac{2(1-x-y-z)^2}{10}$$

$$(1-x-y-z)^2 = 1 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2xy + 2xz + 2yz$$

$$\begin{aligned} 10g &= 2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 4y - 4z + 4xy + 4xz + 4yz + x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \\ &= 3x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 4y - 4z - 4x + 2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 6x + 4y + 4z - 4 = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 4x + 10y + 4z - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ da cui si ottiene:}$$

$$6x - 10y + 4y - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x - 6y = 0 \Leftrightarrow x = 3y \text{ inoltre:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z} &= 8z + 4x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow 8z + 12y + 4y - 4 = 0 \\ \Rightarrow z &= \frac{-16y+4}{8} = \frac{1-4y}{2} = \frac{1}{2} - 2y \end{aligned}$$

sostituendo x e z otteniamo $y = \frac{1}{7}$

Da cui:

$$\varphi = \left[\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14} \right]'$$

A cui corrisponde un valore di varianza pari a 0.0428.

(c) Dato che il grafo è bilanciato, i calcoli si semplificano:

nodo	grado	π
1	2	$\frac{2}{9}$
2	2	$\frac{2}{9}$
3	2	$\frac{2}{9}$
4	3	$\frac{3}{9}$
TOT	9	1

Essendo φ la distribuzione obiettivo, dobbiamo aggiungere un totale di 5 gradi per raggiungere il valore 14 che è il minimo comune multiplo di φ

\Rightarrow aggiungendo $\alpha = [4, 0, 1, 0]$, otteniamo:

nodo	grado	π
1	2+4	$\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$
2	2+0	$\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$
3	2+1	$\frac{3}{14}$
4	3+0	$\frac{3}{14}$
TOT	14	1

(d) Come in precedenza, calcoliamo $var(\alpha)$ tenendo in conto le covarianze:

$$var(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \pi_i^2 var(x_i) + 2\pi_1\pi_2 cov(x_1, x_2) + 2\pi_1\pi_3 cov(x_1, x_3) + 2\pi_3\pi_4 cov(x_3, x_4) =$$

$$= \frac{4}{81} \frac{2}{10} + \frac{4}{81} \frac{3}{10} + \frac{4}{81} \frac{2}{10} + \frac{9}{81} \frac{3}{10} + \frac{8}{81} \frac{1}{10} + \frac{12}{81} \frac{1}{10} = \frac{83}{810} = 0.1025$$

(e) Calcoliamo la nuova φ distribuzione ottimale che minimizza $var(\alpha)$:

$$\begin{cases} g(\pi) = \sum_{i=1}^4 \pi_i^2 var(x_i) + 2\pi_1\pi_2 cov(x_1, x_2) + 2\pi_1\pi_3 cov(x_1, x_3) + 2\pi_3\pi_4 cov(x_3, x_4) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

Da cui:

$$y = g(\pi) = \frac{2}{10}\pi_1^2 + \frac{3}{10}\pi_2^2 + \frac{2}{10}\pi_3^2 + \frac{3}{10}(1 - \pi_1 - \pi_2 - \pi_3)^2 +$$

$$+ 2\pi_1\pi_2 \frac{1}{10} + 2\pi_1\pi_3 \frac{1}{10} + 2\pi_3(1 - \pi_1 - \pi_2 - \pi_3) \frac{1}{10}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$y = \frac{5}{10}\pi_1^2 + \frac{6}{10}\pi_2^2 + \frac{3}{10}\pi_3^2 + \frac{8}{10}\pi_1\pi_2 + \frac{6}{10}\pi_1\pi_3 + \frac{4}{10}\pi_2\pi_3 - \frac{6}{10}\pi_1 - \frac{6}{10}\pi_2 - \frac{4}{10}\pi_3 + \frac{3}{10}$$

Imponendo:

$$\frac{\partial y}{\partial \pi_1} = \pi_1 + \frac{8}{10}\pi_2 + \frac{6}{10}\pi_3 - \frac{6}{10} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \pi_2} = \frac{12}{10}\pi_2 + \frac{8}{10}\pi_1 + \frac{4}{10}\pi_3 - \frac{6}{10} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \pi_3} = \frac{6}{10}\pi_3 + \frac{6}{10}\pi_1 + \frac{4}{10}\pi_2 - \frac{4}{10} = 0$$

si ottiene:

$$\varphi = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]'$$

A cui corrisponde un valore di varianza pari a 0.1.

nodo	grado	π
1	2	$\frac{2}{9}$
2	2	$\frac{2}{9}$
3	2	$\frac{2}{9}$
4	3	$\frac{3}{9}$
TOT	9	1

La quantità minima di gradi da aggiungere per avere grado totale multiplo di 4 è 3: quindi aggiungiamo un totale di 3 self-loop nel modo seguente:

nodo	grado	π
1	2+1	$\frac{1}{4}$
2	2+1	$\frac{1}{4}$
3	2+1	$\frac{1}{4}$
4	3+0	$\frac{1}{4}$
TOT	12	1

$$\Rightarrow \alpha = [1, 1, 1, 0]$$

Esercizio 4. Consider the epidemic model SI on an undirected connected graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ of size $|\mathcal{V}| = n$. Let β be the transmission rate of each link, and let $X(t) \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$ denote the

configuration of the epidemic model at time $t \geq 0$, where $X_i(t) = 1$ if the node i is infected and $X_i(t) = 0$ if the node is susceptible. Let

$$N(t) = \mathbf{1}'X(t) = \sum_i X_i(t), \quad B(t) = (\mathbf{1} - X(t))'W X(t) = \sum_{i,j} W_{ij}(1 - X_i(t))X_j(t),$$

which represent respectively the number of infected nodes and the number of active links at time t . Assume that the initial configuration is such that $\mathbb{P}(N(0) \geq 1) = 1$, namely there is at least an infected node at time 0. The goal of this exercise is to compute an upper bound of the expected absorbing time

$$\tau = \mathbb{E}[T_1]$$

of the configuration where all nodes are infected. The bound must hold true for each graph \mathcal{G} . We then apply the result to some specific graphs. Let the *minimum conductance profile* of the graph \mathcal{G} be the function

$$\gamma : \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

such that

$$\gamma(k) = \min_{\mathcal{S} \subset \mathcal{V}: |\mathcal{S}|=k} \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}} W_{ij}.$$

(a) Prove that

$$\tau \leq \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma(k)} \leq \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)}.$$

(**Hint:** use the fact that, conditioned to the state $X(t)$, the waiting time before the next infection has exponential distribution with rate $\beta B(t)$.)

(b) Consider the case where the graph \mathcal{G} is a bidimensional grid with $n = m \times m$ nodes. Use the inequality $\gamma(k) \geq \sqrt{2k}$ (valid for $k \in \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$) and (a) to estimate the expected absorbing time τ for the SI model on the grid. Estimate the asymptotic behavior of τ as a function of n as $n \rightarrow +\infty$.

(c) Compute $\gamma(k)$ for the barbell graph with $n + n$ nodes, and use the result to estimate by (a) the expected absorbing time of the model SI on this graph. Estimate the asymptotic behavior of τ as a function of n as $n \rightarrow +\infty$.

Soluzione

$$\begin{aligned} (a) \quad \tau &= \sum_{t=0}^{n-2} \frac{1}{\beta B(t)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\beta B(n-1-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\beta \sum_{i,j} W_{ij}(1 - X_i(n-1-k))X_j(n-1-k)} = \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sum_{i,j} W_{ij}(1 - X_i(n-1-k))X_j(n-1-k)} \leq \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma(k)} \leq \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)} \end{aligned}$$

dove:

- $\gamma(k)$ è il numero minimo di link (i, j) tali che $i \in S, j \in V - S$ per $|S| = k$ fissato.
- Osserviamo che i termini di $\sum_{i,j} W_{ij}(1 - X_i(n-1-k))X_j(n-1-k)$ assumono valore 1 solo se $i \in S$ e $j \in V \setminus S$, altrimenti 0. Quindi la sommatoria rappresenta il numero di link (i, j) tali che $i \in S$ e $j \in V \setminus S$ al tempo $t = n - 1 - k$, che corrisponde all'istante in cui si hanno k suscettibili. Notiamo come il tempo sia scandito dal numero k di suscettibili. Quindi per un tempo $t = n - 1 - k$

fissato, $\gamma(k)$ è il minimo valore che può assumere $B(n-1-k)$. Quanto appena detto giustifica la prima disuguaglianza, infatti: $\gamma(k) \leq B(n-1-k) \rightarrow \frac{1}{B(n-1-k)} \leq \frac{1}{\gamma(k)}$.

- mentre per l'ultima disuguaglianza abbiamo ragionato come segue: avendo per ipotesi un grafo indiretto, osserviamo che $\gamma(k) = \gamma(n-k) \quad \forall k \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$

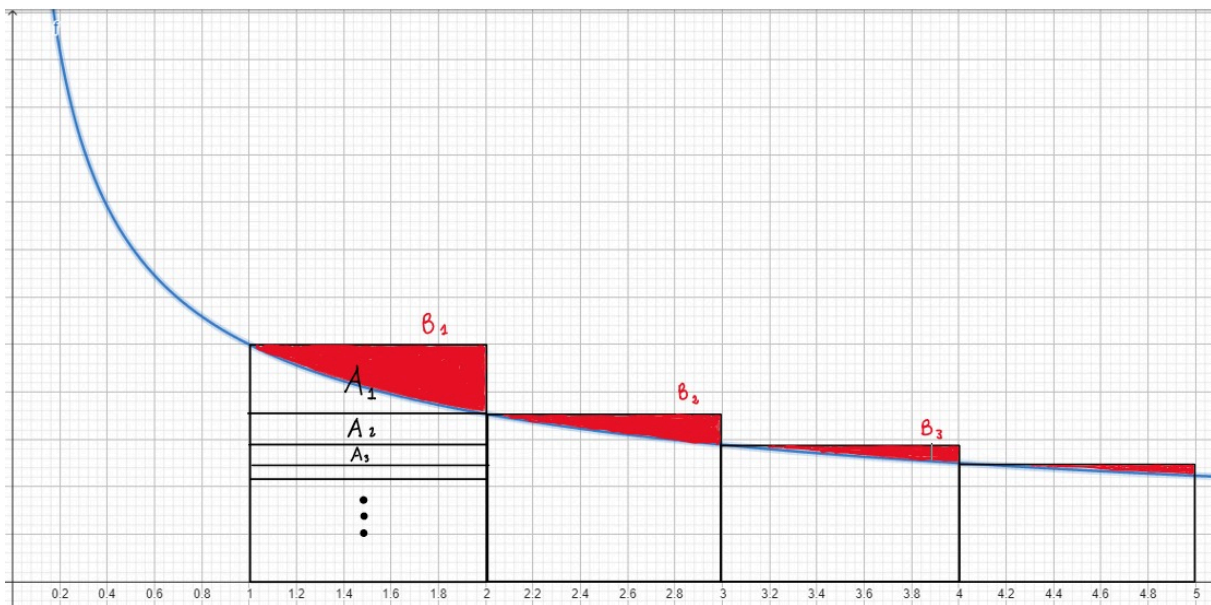
- se n è dispari:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow n-1 \\ 2 \rightarrow n-2 \\ \vdots \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rightarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma(k)} = \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)}$$

- se n è pari:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow n-1 \\ 2 \rightarrow n-2 \\ \vdots \\ \frac{n}{2} \rightarrow \frac{n}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma(k)} \leq \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)}$$

(b) Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.



Osserviamo che $\sum_{i=1}^{\infty} B_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} A_i = f(1)$.

L'integrale $\int_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx$ è sempre limitato superiormente dalla sommatoria $\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2k}}$, che a sua volta è limitata superiormente da $\frac{1}{\sqrt{2}} + \int_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx$. Ovvero:

$$\int_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx \leq \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx.$$

Questo risultato ci permette di determinare il comportamento asintotico della sommatoria analizzando solamente il comportamento asintotico dell'integrale per $n \rightarrow \infty$.

$$\tau \leq \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)} \leq \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2k}}, \quad (hp : \gamma(k) \geq \sqrt{2k})$$

$$\int_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} [2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^{1/2} - 2] \approx n^{1/2} \text{ per } n \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \int_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} [2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^{1/2} - 2] \approx n^{1/2} \text{ per } n \rightarrow \infty$$

- (c) A livello intuitivo ci aspettiamo che il tempo di assorbimento del Barbell con $n + n$ nodi sia dato dal tempo di assorbimento delle due componenti complete più il tempo di attivazione del link che connette le due.

Costruiamo $\gamma(k)$ per un Barbell:

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= 1(n-1) \\ \gamma(2) &= 2(n-2) \\ \gamma(3) &= 3(n-3) \\ &\vdots \\ \gamma(n) &= 1 \\ \gamma(n+1) &= \gamma(1) = 1(n-1) \\ &\vdots \\ \gamma(2n-1) &= \gamma(n-1) \end{aligned}$$

quindi abbiamo:

$$\gamma(k) = \begin{cases} (k \pmod{n})(n - (k \pmod{n})) & \text{se } k \neq n \\ 1 & \text{se } k = n \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \tau &\leq \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\gamma(k)} = \\ &= \frac{1}{\beta} \left(2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma(k)} + \frac{1}{\gamma(n)} \right) = \\ &= \frac{1}{\beta} \left(2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} + 1 \right) = \\ &= \frac{2}{\beta n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{\beta} \approx \frac{2 \log n}{\beta n} + \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

per $n \rightarrow \infty$.

Come ci aspettavamo.