Sprawozdanie

Metody numeryczne

Laboratorium 10

Minimalizaja wartości funkcji metodą złotego podziału

07.05.2020

Marcin Filipek

I. Wstęp teoretyczny

W celu wyszukania najmniejszej / największej wartości funkcji na pewnym przedziale [a, b], na którym funkcja jest określona, używamy iteracyjnego algorytmu podziału. Polega on na tym, że w kolejnych iteracjach dzielimy przedział [a, b] na 3 części, poprzez wyznaczenie λ_1 i λ_2 ϵ (a, b). Następnie sprawdzamy, w której λ funkcja przyjmuje większą wartość (lub mniejszą, jeżeli wyszukujemy maksimum). Jeżeli tak, to nowym b staje się λ_2, a w przeciwnym wypadku nowym a staje się λ_1. Algorytm powtarzamy do momenu, gdy

$$| a - b | < \varepsilon,$$

gdzie ε to dokładność szukanego rozwiązania. Obliczona wartość jest pośrodku przedziału [a, b]:

$$\lambda^* = (b - a) / 2. \tag{1}$$

Powyższa zasada jest ogólnym algorytmem. Pozostaje jeszcze kwestia podziału [a, b] tak, aby rozwiązać problem jak najefektywniej. Pierszym sposobem jaki się nasuwa jest podzielić przedział na 3 równe części:

$$r = (b - a) / 3 \tag{2}$$

$$\lambda_1 = a + r, \qquad \lambda_2 = a + 2r, \tag{3}$$

jednak najszybszym sposobem jest **metoda złotego podziału**. Swoją nazwę wziął od punktu wyjścia w obliczaniu podziałów, złotej proporcji:

$$\frac{(\lambda_1 - a) + (b - \lambda_2)}{b - \lambda_1} = \frac{b - \lambda_1}{\lambda_1 - a} = \varphi \tag{4}$$

$$b - a = L \Rightarrow b = L - a \tag{5}$$

$$\frac{L}{L + a - \lambda_1} = \frac{L + a - \lambda_1}{\lambda_1 - a} \tag{6}$$

$$L(\lambda_1 - a) = (L - (\lambda_1 - a))^2 \tag{7}$$

$$\lambda_1 - a = \left(1 - \frac{(\lambda_1 - a)}{L}\right)^2 = Lr^2 \tag{8}$$

oraz druga relacja (z dedinicji, ponieważ punkty mają być umieszczone symetrycznie względem środka):

$$b - \lambda_1 = \left(1 - \frac{(\lambda_1 - a)}{L}\right) = Lr \tag{9}$$

Podstawiając do równanie wyjściowego (4) otrzymujemy równanie kwadratowe, $r^2 + r - 1 = 0$, którego dodatnim rozwiązaniam jest:

$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61 \tag{10}$$

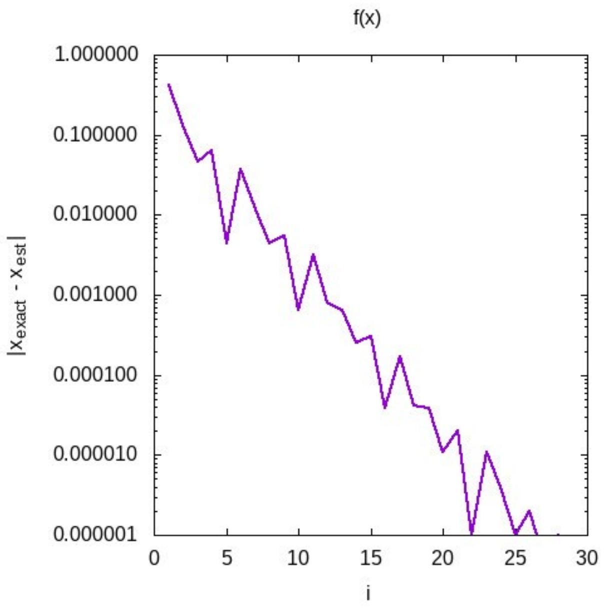
Zostaje wyznaczyć λ_1 i λ_2 ze wzorów (8) i (9).

II. Problem

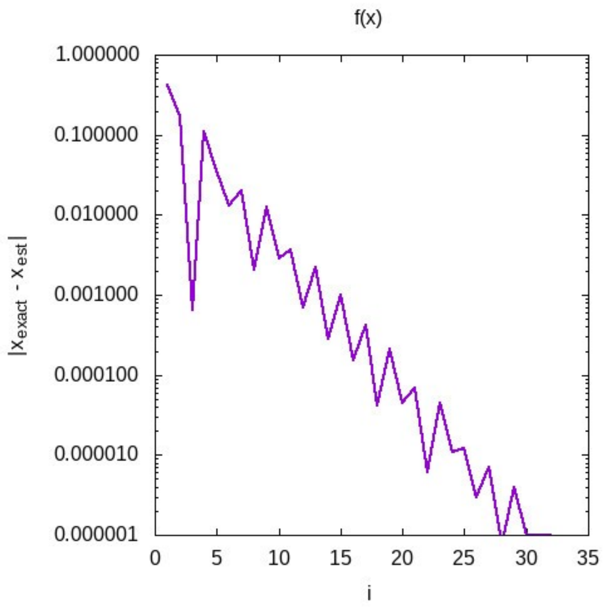
Potrzebujemy wyznaczyć minimum funckji: $f(x) = ln\ (\ x^5 + 3x^2 + x + 9\ )$ w przedziale x ϵ [-0.5, 1]. Uzywamy do tego metody złotego podziału, a następnie metody z podziałem na 3 równe części. Całość powtarzamy gla funkcji $g(x) = x^6$ w przedziale x ϵ [-4, 1]. Dla każdego przypadku zapisujemy numer iteraci, położenie aktualnego przybliżenia i moduł różnicy od rozwiązania dokładnego, w celu sprawdzenia poprawności działania.

III. Wyniki

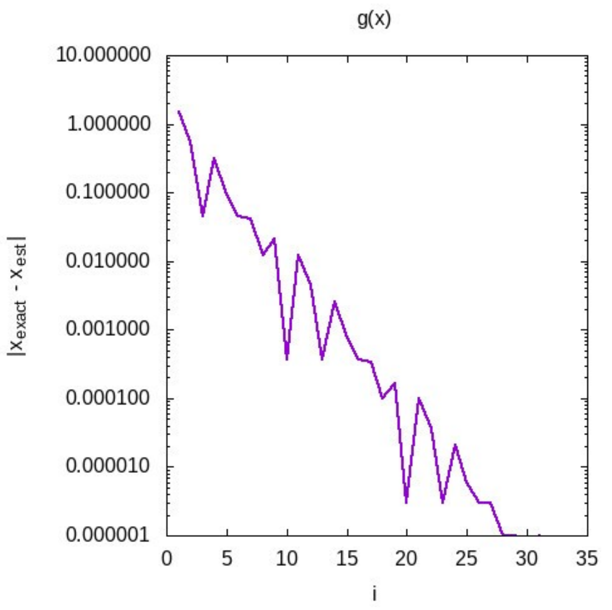
Poniższe wykresy prezentują odległość od dokładnego rozwiązania jako fukcja od numeru iteracji dla każdego z 4 przypadków:



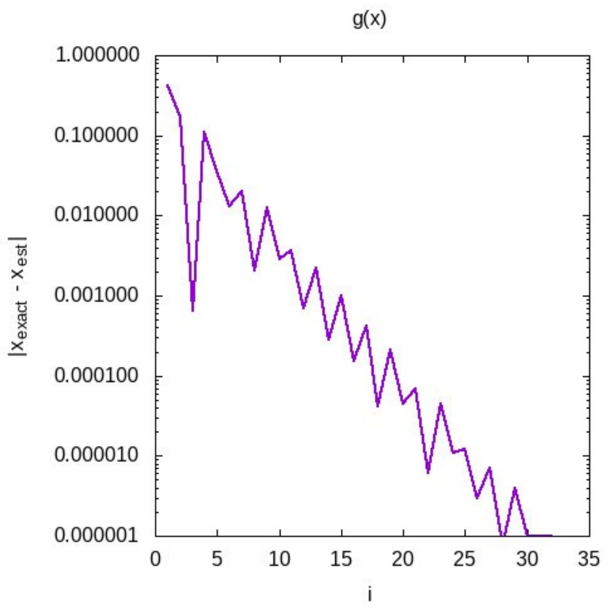
Rys. 1: Wykres dla rozwiązania funkcji f(x) metodą złotego podziału



Rys. 2: Wykres dla rozwiązania funkcji f(x) metodą równych podziałów



Rys. 3: Wykres dla rozwiązania funkcji g(x) metodą złotego podziału



Rys. 4: Wykres dla rozwiązania funkcji g(x) metodą równych podziałów

IV. Wnioski

Obie metody dość szybko poradziły sobie ze znalezieniem rozwiązań, maksymalnie w 32 iteracjach. Metoda złotego podziału jest o kilka iteracji szybsza od dzielenia równomiernego, widać to dla obu funkcji.

Wykresy są postrzępione, oscylują wokół pewnej malejącej prostej. Oznacza to, że przybliżenie tak samo oscyluje wokół wartości dokładnej, nie zbliża się do niego monotonicznie.

Ciekwym jest, że pomimo kilkakrotnie więszego przedziału funkcji Liczba iteracji nie wzrosła znacznie, a zaledwie o 2-3. Jest to spowodowane użyciem dzielenia przedziałów, które ma naturę logarytmiczną, więc metody będą osiągać podobną wydajność nawet dla dużo większych przedziałów startowych.