# Sprawozdanie

Metody Numeryczne

Laboratorium 11:

Szybka tranformata Fouriera

Marcin Filipek

16.05.2020

# I. Wstęp teoretyczny

Dysketna tranformata Fouriera jest dość złożona obliczeniowo. Złożoność rzędu $n^2$ powoduje, że dla tysiąca węzłów należy wykonać milion operacji. W tym celu powstała szybka transormata Fouriera, algorytm o nazwie Radix2. Zmniejsza on złożoność do n log n, czyli dla tej samej liczby węzłów trzeba wykonać zaledwie 10 tysięcy operacji.

Wartość 100 jest tutaj symboliczna, ponieważ algorytm wymaga liczy węzłów w postaci $2^k$. Działa również najlepiej dla funkcji okresowych, jako że jest to transformata Fouriera.

Algorytm wygląda następująco:

Chcemy obliczyć współczynniki wielomianu $c_k$ ze wzoru:

$$c_k = \langle E_k, f \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} jk\right), \tag{1}$$

gdzie N to liczba węzłów. Grupujemy osobno składniki *j = 2m* i *j = 2m +1*:

$$c_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N/2} mk\right) + \exp\left(-I \frac{2\pi}{N/2} mk\right) \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N/2} mk\right) = p_k + \varphi_k q_k. \tag{2}$$

Korzystamy z okresowości $p_k$ i $q_k$:

$$p_k + \frac{N}{2} = p_k, \qquad q_k + N\ pver\ 2 = q_k. \tag{3}$$

Natomiast czynnik $\varphi_k$ ma własność:

$$\varphi_{k+N/2} = \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} k\right) \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} \frac{N}{2}\right) = -\varphi_k. \tag{4}$$

Obliczamy tylko współczynniki dla k < N/2:

$$c_k = \begin{cases} p_k + \varphi_k q_k, & k < \frac{N}{2} \\ p_{k-N/2} - \varphi_k q_{k-N/2}, & k \geq \frac{N}{2} \end{cases} \tag{5}$$

W kolejnym kroku dzielimy sumy $P_k$ i $q_k$ na kolejne sumy tylko parzyste i nieparzyste. Podział powtarzamy rekurencyjnie do momentu, gdy liczba elementów wynosi 1.

# II. Problem

Potrzebujemy odfiltrować sygnał wejściowy i wyciągnąć z niego interseującą część. W tym celu posłużymy się tranformatą Fouriera, a dokładnie algorytmem szybkiej transformaty Fouriera Radix2. Żeby sprawdzić działanie metody generujemy sygnał wejściowy w postaci funkcji:

$$y_0 = \sin(\omega i) + \sin(2\omega i) + \sin(3\omega i) + \Delta(i), \tag{6}$$

gdzie Δ jest szumem którego chcemy się pozbyć i ma postać:

$$\Delta(i) = 2 \cdot \left(\frac{rand()}{\mathrm{RAND\_MAX} + 1}\right) - 1. \tag{7}$$

ω jest współczynnikiem związanym z liczbą węzłów:

$$\omega = 2\frac{2\pi}{N}, \tag{8}$$

a N to liczba węzłów w postaci: $N = 2^k$.

Biblioteka GSL posiada zaimplementowaną metodę Radix2 jako funkcję:

*gsl_fft_complex_radix2_forward(double*,size_t,size_t);*

oraz transformatę odwrotną:

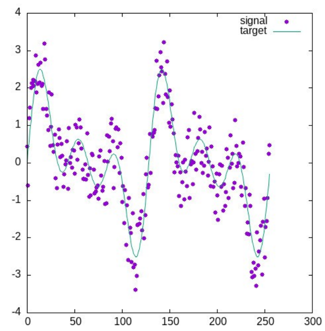
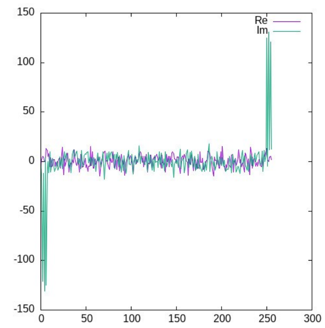
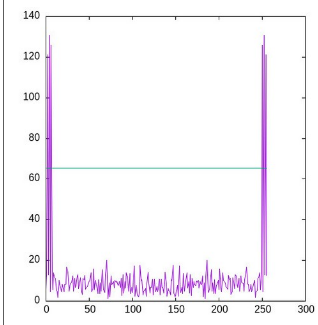
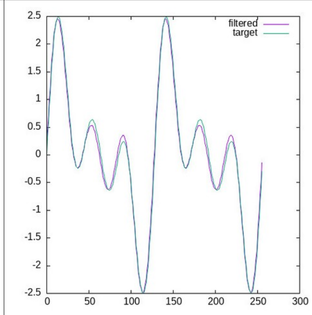
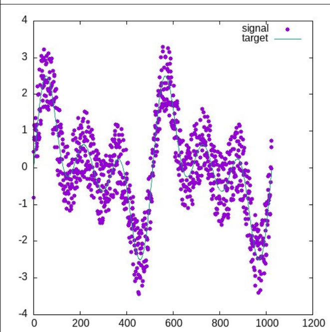
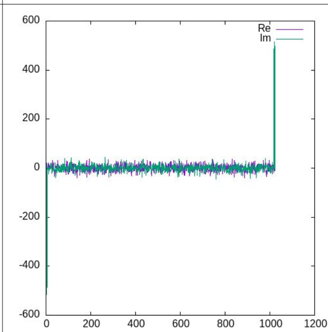
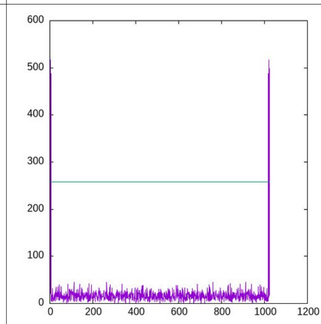
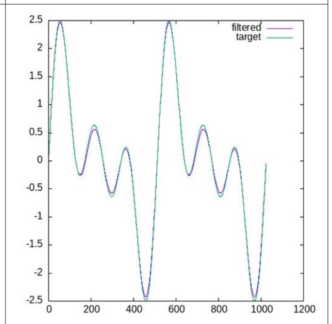
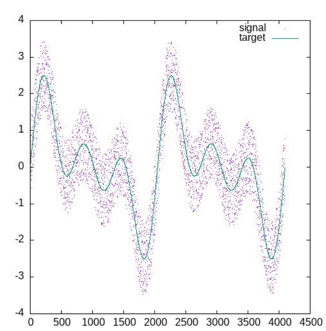
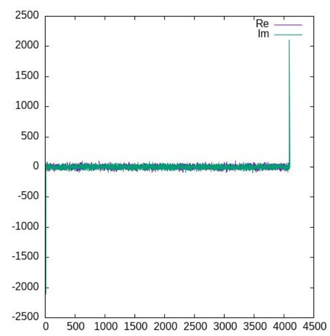
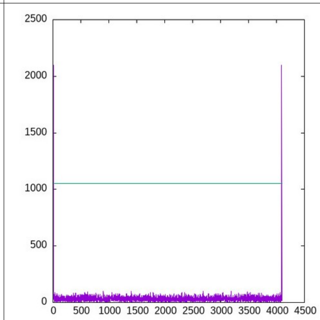
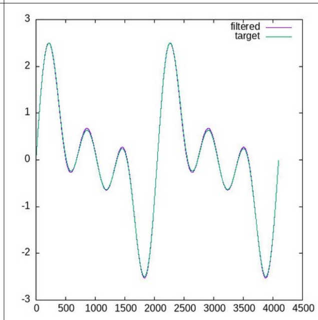
*gsl_fft_complex_radix2_backward(double*,size_t,size_t);*

gdzie *double** to wktor liczb zespolonych, więc należy odpowiednio przepisać wektor liczb rzeczywistych na nowy.

Po zastosowaniu transformaty obliczamy moduły kolejnych liczb. Przeprowadzamy dyskryminację, czyli zerujemy wartości niższe niż pewnien próg. W ten sposób pozbywamy się szumu. Pozostaje tylko zastosować transormatę odwrotną i narysować wykres z otrzymanych danych (odpowiednio unormowanych).

# III. Wyniki

Poniższa tabela przedstawia wykresy otrzymanych danych w kolejnych krokach dla trzech różnych k.

| k | Surowe dane | Transformata | Dyskryminacja | Dane odfiltrowane |
|---|---|---|---|---|
| 8 |   |   |  |   |
| 10 |   |   |  |   |
| 12 |   |   |  |   |

Na wykresach dyskryminacji kolorem fioletowym zaznaczono moduły transformat dla każdego węzła. Zielona linia jest wybraną wartością dyskryminacji, która wynosi połowę maksymalnej wartości.

# IV. Wnioski

Na wykresie tranformaty bardzo wyraźnie oddzielona są dwie częśći: szum (małe moduły) i interesująca nas część (duże piki na końcach przedziału). Granica pomiędzy nimi jest bardzo duża, więc jej wybór nie stanowił większego problemu.

Odfiltrowanie danych daje bardzo dokładne wyniki. Różnica widoczna jest jedynie dla k=8 w okolicach ekstremów funkcji, jednak kształ pozostał niezmienny. Zwiększenie wartości k daje lepsze dopasowanie, a dla k = 12 różnica jest niezauważalna. Wykres transformaty odwrotnej jest gładki dla wszystkich przypadków.

W naszym konketnym przypadku nie było problemu ze zgadnięciem kształtu wykresu odfiltrowanego i bez transformaty, jednak był to jedynie przypadek testowy. W rzeczywistości szum może być znacznie większy a wykres bardziej skomplikowany, przez co bardzo trudne byłoby "zgadnięcie" wykresu. Poza tym, do operacji matematycznych potrzebujemy bardziej dokłądnych danych, które transformata zapewnia. Większy szum prawdopodbnie spowoduje zawężenie granicy na wykresie modułów.