Capítulo 1

Apuntes teoría

1.1. Decisión bajo incertidumbre

1. **Ingredientes de los problemas de decisión**
   1.1. Elementos de un problema de decisión
   1.2. Una clasificación de las decisiones

2. **Tablas de decisión**

3. **Decisión bajo incertidumbre**
   3.1. Principios de racionalidad
   3.2. Criterios clásicos
   3.3. Ejemplos

1.1.1. Ingredientes de los problemas de decisión

Un proceso de toma de decisión puede entenderse como la elección de lo "mejor" entre lo "posible". Ahora bien, según se defina qué es lo mejor y qué es lo posible nos enfrentaremos a distintas situaciones de decisión. En esta asignatura se tratará el estudio de los procesos de toma de decisiones desde una perspectiva racional. Se tratará de analizar cómo se *deberían* tomar las decisiones, aunque teniendo en cuenta aspectos, que estudian ciencias como la psicología o la sociología, que influyen en que se observen decisiones aparentemente incoherentes.

Características de un proceso de decisión

1. Son posibles al menos dos formas de actuar, que llamaremos alternativas o acciones, excluyentes entre sí.

2. Entre las alternativas y mediante un proceso de decisión se elige una que es la que se lleva a cabo.

3. La elección de una alternativa ha de realizarse de modo que cumpla un fin determinado.

Esquemáticamente:

PRESENTE				FUTURO
elección	$\longrightarrow$	actuación	$\longrightarrow$	resultado

Por otro lado, podemos diferenciarlas siguientes **fases** en el Proceso de decisión:

1. *Predicción de las consecuencias* de cada actuación.
2. *Valoración de las consecuencias*
3. *Elección* de la alternativa mediante un criterio de decisión adecuado.

Esquematicamente:

SISTEMA DE PREDICCIÓN
SISTEMA DE VALORES $\longrightarrow$ CRITERIO DE DECISIÓN $\longrightarrow$ RECOMENDACIONES

1.1.1.1. Elementos de un problema de decisión

Podemos diferenciar los siguientes:

- **Decisor.**
- **Alternativas.** Al conjunto de las alternativas lo denotaremos por $\mathcal{A}$ y sus elementos por a_i, i $\in \mathcal{I} = \{$i$|\ a_i \in \mathcal{A}\}$
- **Estados de la naturaleza.** Conjunto de factores o variables no controladas por el decisor que definen el entorno del problema. Al conjunto de estados de la naturaleza lo denotaremos por Ω y sus elementos por ω_j, j $\in \mathcal{J}=\{$j$|\omega_j \in \Omega\}$
- **Consecuencias o resultados** que se siguen de la elección de una alternativa y la presentación de un estado de la naturaleza.

El conjunto de resultados será modelado a través de una función real definida sobre el producto cartesiano de los conjuntos de alternativas y estados de la naturaleza.

Se define la **función de pérdida** o de costo o de penalización como

$$\mathrm{L} : \mathcal{A} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, w) \longrightarrow \mathrm{L}(a, w)$$

aquella función que a cada acción o decisión aplicada $a \in \mathcal{A}$ cuando se presenta el escenario o estado de la naturaleza $w \in \Omega$ le asigna el costo o pérdida que produce $\mathrm{L}(a, w)$. (Para el caso de que las consecuencias sean beneficios la función se definiría de forma similar)

- La elección de una alternativa en función de los resultados dependerá del **criterio de decisión** que se utilice y serán distintos según el nivel de conocimientos del decisor acerca de los estados de la naturaleza.

1.1.1.2. Una clasificación de las decisiones

Los procesos de decisión se pueden clasificar atendiendo a diversos criterios. Algunos de ellos son:

a. Según el **número de decisores**. La clasificación sería:

   - Procesos de decisión individuales, si existe un único decisor. Estos problemas los estudia la Teoría de Decisión Estadística.
   - Procesos de decisión colectivos, si existen varios decisores cooperativos. Estos problemas los estudia la Teoría de Decisiones Colectivas.
   - Procesos de decisión en ambiente de conflicto (competitivo), si existen varios decisores y la consecuencia de la acción seguida por el decisor depende de la reacción de uno o más oponentes que son adversarios inteligentes. Estos problemas los estudia la Teoría de Juegos.

b. Según el **número de decisiones** se clasifican en:

   - Procesos de decisión únicos, en los que se debe adoptar una única decisión.
   - Procesos de decisión secuenciales, en los que se debe adoptar una serie de decisiones dependientes o encadenadas a lo largo del tiempo de forma que las decisiones que se toman en cada etapa vienen condicionadas por los resultados de las decisiones anteriores y condicionan nuevas decisiones. La Programación Dinámica y los Procesos de Markov ayudan a resolver estos problemas.

c. Según el **grado de conocimiento** del decisor sobre los estados de la naturaleza.

   - Problema de decisión en **ambiente de certidumbre**. El ambiente es de certidumbre cuando se conoce con certeza su estado, es decir, cada acción conduce invariablemente a un resultado bien definido.
   - Problema de decisión en **ambiente de riesgo**. El ambiente es de riesgo cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que puede asignarse una distribución de probabilidad conocida. Usaremos la notación π_i = Probabilidad de que se presente el escenario $\omega_i \in \Omega$ (con $\sum_i \pi_i = 1$). Obviamente, si el conjunto de estados es continuo, debe usarse una función de densidad $\pi(\omega)$.
   - Problema de decisión en **ambiente de incertidumbre**. El ambiente es de incertidumbre cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que no puede asignarse una distribución de probabilidad, bien porque sea desconocida o porque no tenga sentido hablar de ella.

1.1.2. Tablas de decisión

Tres de los elementos básicos de un problema de decisión son los siguientes:

- Las acciones o alternativas entre las que seleccionará el decisor:

$$a_i, i \in \mathcal{I} = \{i | a_i \in \mathcal{A}\}$$

.

- Los diferentes estados que puede presentar la naturaleza:

$$\omega_j, j \in \mathcal{J} = \{j | \omega_j \in \Omega\}$$

.

- Las consecuencias o resultados x_{ij} de la elección de la alternativa a_i cuando la naturaleza presenta el estado ω_j .

Cuando el número de estados y el de alternativas posibles son finitos, $\mathcal{I} = \{1, ..., m\}, \mathcal{J} = \{1, ..., n\}$, podemos representar todo lo anterior simultáneamente en una tabla,denominada *tabla de decisión*, de la forma:

		Estados de la naturaleza			
		ω_1	ω_2	...	ω_n
Alternativas	a_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
	a_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
	...	...	...	...	...
	a_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

Nota: En la tabla anterior, los elementos x_{ij} pueden no ser numéricos. Si es así, debemos pasar a una tabla con valores numéricos que nos permita comparar las posibles consecuencias de cada alternativa en cada estado. Supondremos que el decisor puede valorarlos numéricamente, es decir, se asumirá la existencia de una función V(.) con valores reales tal que:

V(x_{ij}) > V(x_{kl}) si y sólo si el decisor prefiere el resultado x_{ij} al resultado x_{kl}.

En lo que sigue, se supondra que la tabla consta de dichos valores numéricos, es decir, L$(a_i, w_j) =$ V(x_{ij}).

Una vez obtenida la tabla de decisión de un problema de decisión, debemos seleccionar la mejor alternativa.

Ejemplo 2.1 *La compañía Petrol es la dueña de unos terrenos en los que puede haber petróleo. Debido a esta posibilidad, otra compañía petrolera ha ofrecido comprar las tierras por 90.000 euros. Sin embargo, la Petrol está considerando conservarla para perforar* *ella misma. Si encuentra petróleo, la ganancia esperada de la compañía sería aproximadamente de 700.000 euros, pero si no lo encuentra incurrirá en una pérdida de 100.000 euros (pozo seco, sin petróleo).*

Las dos alternativas posibles para la compañia son:

- a_1= *"Perforar buscando petróleo" y*
- a_2= *"Vender la tierra"*

Los dos estados de la naturaleza posibles son:

- ω_1 = *"Pozo con petróleo" y*
- ω_2 = *"Pozo sin petróleo (seco)".*

La tabla de decisión para este problema sería

	Estados de la naturaleza		
		ω_1 =*Petróleo*	ω_2 =*Seco*
Alternativas	$\mathbf{a_1}$=*Perforar*	*700.000*	*-100.000*
	$\mathbf{a_2}$=*Vender*	*90.000*	*90.000*

A veces, por ejemplo si el número de estados de la naturaleza es elevado, no sería práctico trabajar con la tabla de decisión directamente.

Ejemplo 2.2 *Una empresa debe seleccionar una de las cuatro máquinas que dispone para fabricar Q unidades de un determinado producto, del que se sabe que como mínimo se demandarán 10 unidades y como máximo 40 unidades. Si los costes fijos y variables por unidad producida de cada máquina son:*

Máquina	Coste fijo	*Coste unitario*
1	*100*	*5*
2	*40*	*12*
3	*150*	*3*
4	*90*	*8*

¿Qué máquina utilizará?

1.1.3. Decisión bajo incertidumbre

Definición 3.1 *Se denomina regla o criterio de decisión a una aplicación* $S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que asocia a cada decisión* $a \in \mathcal{A}$ *un número, de modo que dicho número* $S(a)$ *expresa las preferencias del individuo por los resultados asociados a cada decisión.*

1.1.3.1. Principios de racionalidad

Se pueden usar varios criterios en un mismo problema. Para ver cuál de ellos posee propiedades más deseables, veremos en primer lugar los denominados axiomas o principios de racionalidad dados por Milnor en 1954.

John Willard Milnor MARCO MARTENS | PREMIO ABEL

1. **Orden.** El criterio debe proporcionar una ordenación total de las alternativas del problema. Esta propiedad es deseable, pues en caso de no darse existirían alternativas no comparables, siendo preciso un nuevo criterio para dilucidar entre elementos maximales.

2. **Simetría.** El criterio debe ser simétrico, es decir, independiente del orden fijado a priori en el conjunto de alternativas y del orden en que se definan los estados de la naturaleza.

3. **Linealidad.** La relación de orden establecida por el criterio no debe cambiar si los resultados x_{ij} son reemplazados por otros y_{ij} tales que

$$y_{ij} = \lambda \cdot x_{ij} + \mu \quad con \quad \lambda > 0$$

4. **Dominancia fuerte.** Si en una tabla de decisión existen dos alternativas a_i y a_k tales que $x_{ij} \succ x_{kj}$ tales que para todos los estados de la naturaleza ω_j, entonces el criterio debe asignar valores a las alternativas de modo que $S(a_i) > S(a_k)$

5. **Independencia de alternativas irrelevantes.** El criterio debe ser abierto, es decir, el valor asignado por dicho criterio a una alternativa no debe variar al ser definido en otro conjunto de alternativas que contenga al primero con las mismas valoraciones (el orden entre dos alternativas no cambia por la adición de una nueva alternativa). Esta propiedad es muy importante, ya que garantiza que al aumentar el conjunto de alternativas, los cálculos efectuados con anterioridad siguen siendo válidos.

6. **Linealidad de columnas.** La relación de orden establecida por el criterio no debe cambiar si se añade una constante a todos las valoraciones correspondientes a un estado de la naturaleza.

7. **Independencia de permutación de filas.** Si en una tabla de decisión existen dos alternativas a_i y a_k tales que el conjunto de valoraciones de la alternativa a_k es una permutación del conjunto de valoraciones correspondiente a la alternativa a_i, entonces el criterio debe asignar idéntico valor a ambas, es decir, $S(a_i) = S(a_k)$.

8. **Independencia de duplicación de columnas**. El criterio debe ser invariante por extensión, es decir, el orden establecido por el criterio no debe cambiar si se añade una nueva columna (estado de la naturaleza) idéntica a alguna columna ya existente.

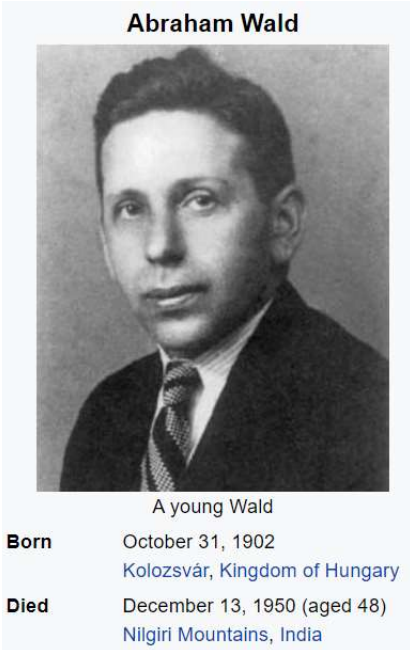
9. **Continuidad**. Si una sucesión de matrices de decisión $\{x_{ij}^k\}$ converge hacia $\{x_{ij}\}$, y $\forall k$ la alternativa a_l^k es siempre preferida a la alternativa a_h^k, en el límite a_l será mejor o igual que a_h.

10. **Convexidad**. El conjunto de alternativas maximales es convexo. Es decir cualquier combinación convexa de alternativas maximales es también maximal.

1.1.3.2. Criterios clásicos

La regla de decisión a usar depende del criterio seleccionado. Veamos algunos de los que podemos usar bajo incertidumbre:

1. **Criterio de Wald o minimax-maximin o pesimista.**



Para cada alternativa se supone que va a pasar lo peor, y elige aquella alternativa que dé mejor valor. De esta forma se asegura que en el peor de los casos se obtenga lo mejor posible, que corresponde a una visión pesimista de lo que puede ocurrir. En el caso de que los pagos sean costes esta filosofía supone elegir el mínimo de los máximos denominándose minimax, mientras que si son ganancias sera el máximo de los mínimos, denominándose maximin.

Consideremos el ejemplo 2.1, cuya tabla es la siguiente:

	Estados de la naturaleza				
		ω_1	ω_2	$\dots$	ω_n
Alternativas	$\mathbf{a_1}$	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}
	$\mathbf{a_2}$	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\mathbf{a_m}$	x_{m1}	x_{m2}	$\dots$	x_{mn}

Para la alternativa a_1 = **"Perforar"**, el mínimo es -100.000 y para a_2 = **"Vender"** es 90.000. Por lo tanto se selcciona la alternativa a_2.

Objecciones: es posible optar por decisiones poco adecuadas, como por ejemplo:

estados:	w_1	w_2	Alternativa seleccionada
a_1	100000	1000	
a_2	1001	1001	*

No cumple el axioma de linealidad de columnas.

2. **Criterio maximax u optimista.** Es el criterio justamente opuesto al anterior, para cada alternativa se supone que pasará lo mejor, y se elige la que dé mejor valor. Este criterio apenas es utilizado ya que no tiene en cuenta en ningún momento los riesgos que se corren al tomar una decisión.

En el ejemplo 2.1, para a_1 el máximo es 700.000 y para a_2 es 90.000. Se selecciona a_2.

Objecciones: es posible optar por decisiones poco adecuadas, como por ejemplo:

estados:	w_1	w_2	Alternativa seleccionada
a_1	1000	1000	
a_2	1001	-1000000	*

3. **Criterio de Hurwicz.**

Leonid Hurwicz se ha convertido en el Premio Nobel con más edad al ser galardonado teniendo 90 años.
Universidad de Minnesotta

Este criterio combina las actitudes pesimista y optimista, valorando cada alternativa con una ponderación entre lo mejor y lo peor posible. Esta ponderación se hace multiplicando lo mejor por un factor α entre 0 y 1, denominado índice de optimismo, y lo peor por 1 - α, sumando ambas cantidades. Se elegirá la alternativa que mejor valor dé. Este criterio presenta la dificultad de estimar el valor del índice de optimismo del decisor, de modo que habitualmente se obtiene la solución para todos los posibles valores de este índice y se intenta situar al decisor en alguno de los intervalos resultantes del índice de optimismo.

Para seleccionar α, debe pedirse al decisor que indique cuando la alternativa que toma un valor 1-α en todos los escenarios es equivalente a otra con valores extremos en los escenarios.

(Hay textos en los que se denota α al factor de pesimismo)

Objecciones: Se pueden poner ejemplos similares al anterior.

No cumple el axioma de linealidad de columnas.

4. **Criterio de Savage o costes de oportunidad.**

Leonard J. Savage	
Born	20 November 1917 Detroit
Died	1 November 1971 (aged 53) New Haven
Nationality	American

Milton Friedman said Savage was "one of the few people I have met whom I would unhesitatingly call a genius."

Este criterio toma en consideración el coste de oportunidad o penalización o arrepentimiento por no prever correctamente el estado de la naturaleza. Estos costes de oportunidad se evalúan para cada alternativa y cada estado, haciendo la diferencia entre lo mejor de ese estado y lo que proporciona esa alternativa para ese estado, construyendo la llamada matriz de penalizaciones o costes de oportunidad. Sobre esta matriz se aplican los criterios anteriores, pudiendo aplicarse el del coste esperado, o, lo que es mas habitual, el criterio minimax conociéndose entonces también como criterio de minimizar el maximo arrepentimiento.

En el ejemplo 2.1, teniendo en cuenta que para el caso de beneficios el arrepentimiento se define como la pérdida o costo de oportunidad, es decir, es lo que se pierde por no haber tomado la mejor opción, debemos contruir una nueva tabla, donde en cada combinación de alternativas y estados se calcula

$$A_{ij} = B_j - C_{ij}$$

donde

- A_{ij}= Pérdida de oportunidad de una alternativa a_i para un estado de la naturaleza ω_j.
- B_j = Pago máximo para el estado de la naturaleza ω_j.
- C_{ij}= Pago de la alternativa a_i para el estado de la naturaleza ω_j.

La tabla de arrepentimientos resultante es:

		Estados de la naturaleza	
	Tabla de arrepentimientos	ω_1 =Petróleo	ω_2 =Seco
Alternativas	$\mathbf{a_1}$=Perforar	0	190.000
	$\mathbf{a_2}$=Vender	610.000	0.000

Por lo tanto el arrepentimiento máximo para la alternativa a_1 se cifra en 190.000 y para a_2 en 610.000. Se selecciona a_1.

Objecciones: Puede dar lugar a decisiones paradójicas cuando se incorporan nuevas alternativas.

Por ejemplo, si se considera un problema con la siguiente tabla de decisión:

estados:	w_1	w_2
a_1	9	2
a_2	4	6

la tabla de costes de oportunidad asociada y la alternativa selecionada es:

estados:	w_1	w_2	Alternativa seleccionada (Wald)
a_1	0	4	*
a_2	5	0	

Si ahora se incorpora una nueva alternativa a_3

estados:	w_1	w_2
a_1	9	2
a_2	4	6
a_3	3	9

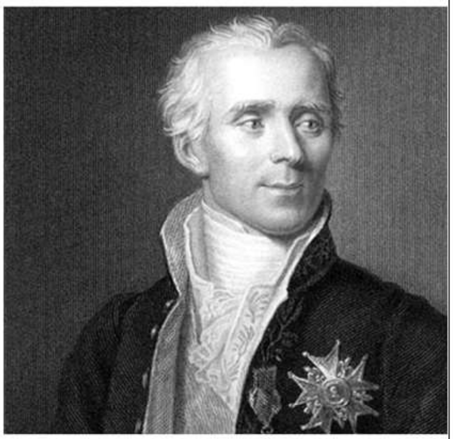
la tabla de costes de oportunidad asociada y la alternativa selecionada es:

estados:	w_1	w_2	Alternativa seleccionada (Wald)
a_1	0	7	
a_2	5	3	*
a_2	6	0	

Esto implica que se puede cambiar el orden entre dos alternativas tras la incorporación de una alternativa adicional.

No cumple el axioma de independencia de alternativas irrelevantes ni el de independencia de permutación de filas.

5. **Criterio de Laplace.**



Pierre-Simon Laplace

Fecha de nacimiento: 28 de Marzo de 1749
Lugar: Beaumont-en-Auge, Normandía, Francia
Fecha de fallecimiento: 5 de Marzo de 1827 (París)

https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/52-4-b-laplace.html

Está basado en el principio de razón insuficiente. Como a priori no existe ninguna razón para suponer que un estado se puede presentar antes que los demás, podemos considerar que todos los estados tienen la misma probabilidad de ocurrencia, es decir, la ausencia de conocimiento sobre el estado de la naturaleza equivale a afirmar que todos los estados son equiprobables. Así, para un problema de decisión con n posibles estados de la naturaleza, asignaríamos probabilidad 1/n a cada uno de ellos. El criterio consiste en calcular la media de cada una de las filas de la matriz de valores numéricos y elegir la decisión que nos produzca mayor media.

En el ejemplo 2.1, para a_1, la ganancia media (suponiendo equiprobables todos los estados) sería 300.000 y para a_2 sería 90.000. Se selecciona a_1.

La objeción que se suele hacer al criterio de Laplace es la siguiente: ante una misma realidad, pueden tenerse distintas probabilidades, según los casos que se consideren. Por ejemplo, una partícula puede moverse o no moverse, por lo que la probabilidad de no moverse es 1/2. En cambio, también puede considerarse de la siguiente forma: una partícula puede moverse a la derecha, moverse a la izquierda o no moverse, por lo que la probabilidad de no moverse es 1/3.

Desde un punto de vista práctico, la dificultad de aplicación de este criterio reside en la necesidad de elaboración de una lista exhaustiva y mutuamente excluyente de todos los posibles estados de la naturaleza.

Por otra parte, al ser un criterio basado en el concepto de valor esperado, su funcionamiento debe ser correcto tras sucesivas repeticiones del proceso de toma de decisiones. Sin embargo, en aquellos casos en que la elección sólo va a realizarse una vez, puede conducir a decisiones poco acertadas si la distribución de resultados presenta una gran dispersión.

No cumple el axioma de independencia de duplicación de columnas.

6. **Criterio de Punto Ideal.** Consiste en construir un valor en cada escenario $\overline{V}_j$ que es el máximo posible (en el caso de recompensas), denominado punto ideal $\overline{V}$.

Posteriormente la valoración de cada alternativa a_i se define como la distancia del vector de valoraciones V(a_i) en tabla de decisiones de esa alternativa al punto ideal según alguna norma:

$$S(a_j) = d(V(a_i), \overline{V}) = \|(V_1(a_i), \ldots, V_n(a_i)) - (\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n)\|_p$$

Recordemos que

$$\|v\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p)^{1/p} \quad (p - norma)$$

y que se pueden usar p-normas ponderadas en cada componente. Para la norma $p = 1$ (norma de la suma) es el criterio de Laplace. Sería:

$$\begin{aligned}
\|(V_1(a_i), \ldots, V_n(a_i)) - (\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n)\|_1 &= \|V_1(a_i) - \overline{V}_1, \ldots, V_n(a_i) - \overline{V}_n\|_1 \\
&= |V_1(a_i) - \overline{V}_1| + \ldots + |V_n(a_i) - \overline{V}_n| \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\overline{V}_j - V_j(a_i)) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} V_j(a_i) + \sum_{j=1}^{n} \overline{V}_j
\end{aligned}$$

Luego para que $a_i \succ a_k$, debe ser $-\sum_{j=1}^{n} V_j(a_i) > -\sum_{j=1}^{n} V_j(a_k)$, o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_j(a_i) < \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_j(a_k)$$

que es lo que se pide en el citerio de Laplace (en el caso de pérdidas; para beneficios se razona de forma similar).

Para la norma $p = \infty$ (norma uniforme o del máximo) es el criterio de mínima pérdida o de Savage.

$$\|(V_1(a_i), \ldots, V_n(a_i)) - (\overline{V}_1, \ldots .\overline{V}_n)\|_\infty = \|(V_1(a_i) - \overline{V}_1, \ldots, V_n(a_i) - \overline{V}_n\|_\infty =$$

$$\max_{j=1,\ldots,n} |V_j(a_i) - \overline{V}_j| = \max_{j=1,\ldots,n} -V_j(a_i) + \overline{V}_j$$

que es la regla de mínima pérdida.

Por ejemplo, si se considera un problema con la siguiente tabla de decisión:

```
##    w1 w2
## a1  8  4
## a2  0 10
```

el criterio del punto ideal se aplicaría como sigue.

$$V^*(a_1) = \|(8,4) - (8,10)\|_p = \|(8-8, 4-10)\|_p = \|(0,-6)\|_p = (0^p + |-6|^p)^{1/p} = 6$$

$$V^*(a_2) = \|(0,10) - (8,10)\|_p = \|(0-8, 10-10)\|_p = \|(-8,0)\|_p = (|-8|^p + 0^P)^{1/p} = 8$$

Luego $a_1 \succ a_2$(cuanto menor sea la distancia, mejor). Para $p = 2$ tendremos la distancia euclídea.

1.1.3.3. Ejemplos

Vamos a ver algunos ejemplos para ilustrar los criterios anteriores.

Ejemplo 3.1 Se desea planificar la producción de determinado producto para el mes siguiente. Supóngase que la demanda prevista para el mes siguiente es 1, 2, 3 o 4. Si una unidad de producto que es fabricado un mes se vende ese mismo mes el precio de venta sería de 6500 euros, mientras que si ha de venderse el mes siguiente sería de 4000. Las unidades que no se vendan por no existir demanda el mismo mes de fabricación se venden todas al mes siguiente. Los costes unitarios de producción son de 5000 euros. Con estos datos se forma la tabla o matriz de decisión:

		Estados de la naturaleza			
		$\omega_1 = 1$	$\omega_2 = 2$	$\omega_3 = 3$	$\omega_4 = 4$
Alternativas	$a_1 = 1$	*1500*	*1500*	*1500*	*1500*
	$a_2 = 2$	*500*	*3000*	*3000*	*3000*
	$a_3 = 3$	*-500*	*2000*	*4500*	*4500*
	$a_4 = 4$	*-1500*	*1000*	*3500*	*6000*

La decisión a tomar según cada criterio es la siguiente:

1. *Criterio de Wald. Los mínimos para cada decisión son 1500, 500, - 500 y -1500, respectivamente, luego, la alternativa preferida sería producir 1 artículo.*

2. *Criterio optimista. En este caso los máximos son 1500, 3000, 4500, - 1500, y por lo tanto, se elegiría producir 4 artículos.*

3. *Criterio de Hurwicz. En este caso, para cada alternativa tenemos:* $a_1 \hookrightarrow 1500$, $a_2 \hookrightarrow 3000\alpha + 500(1-\alpha)$, $a_3 \hookrightarrow 4500\alpha - 500(1-\alpha)$ *y* $a_4 \hookrightarrow 6000\alpha - 1500(1-\alpha)$. *Si* $\alpha < 0.4$, *la alternativa sería producir 1 artículo, mientras que si es superior sería producir 4 artículos.*

4. *Criterio de Savage. El primer paso es construir la matriz de penalizaciones o costes de oportunidad. La matriz la formamos por columnas, obteniendo el máximo de la columna y restándole a este valor el pago de cada alternativa. Así la matriz obtenida es:*

0	1500	3000	4500
1000	0	1500	3000
2000	1000	0	1500
3000	2000	1000	0

Ahora aplicamos el criterio minimax, para minimizar la máxima penalización, obteniendo que los máximos son 4500, 3000, 2000 y 3000, por lo que la alternativa sería producir 3 artículos.

5. *Criterio de Laplace. Considerando todos los estados equiprobables,saldría* $a_1 \hookrightarrow$ 1500, $a_2 \hookrightarrow$ 9500/4, $a_3 \hookrightarrow$ 10500/4 *y* $a_4 \hookrightarrow$ 9000/4 *. La alternativa seleccionada sería la 3.*

6. *Criterio del punto ideal. La distancia euclídea de cada alternativa al punto ideal son 5612.49, 3500.00, 2692.58 y 3741.66, por tanto la alternativa que se elegiría sería la tercera.*

Ejemplo 3.2 *Considere un Problema de Decisión de Inversión donde las alternativas son:*

a_1 =“Invertir en bonos”(B), a_2 =“Invertir en acciones”(A),a_3 =“Invertir en depósitos”(D).

Por otro lado los distintos estados de la naturaleza que considera que se pueden presentar para los intereses producidos de cada inversión son los siguientes:

ω_1=“Crecimiento alto”, ω_2=“Crecimiento medio”, ω_3=“Sin crecim iento”, ω_4=“Bajo”

La tabla de intereses en cada escenarios y alternativa seleccionada se estima que es:

	Estados de la naturaleza			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Alternativas $\mathbf{a_1}$	12	8	6	3
$\mathbf{a_2}$	15	7	3	-2
$\mathbf{a_3}$	7	7	7	7

Los resultados son los siguientes: **Pesimismo**, o Conservador (Maximin).

a) Escriba el número mínimo en cada fila de acción.
b) Elija el número máximo y realice esa acción.

$a_1 = B \quad 3$, $a_2 = A \quad -2$, $a_3 = D \quad 7*$

Optimismo, Agresivo (Maximax). Las cosas buenas siempre me suceden a mí.

a) Escriba el número máximo en cada fila de acción.

b) Elija el número máximo y realice esa acción.

$a_1 = B \quad 12$, $a_2 = A \quad 15*$, $a_3 = D \quad 7$

Coeficiente de Optimismo (Indice de Hurwicz). A mitad de camino: Ni demasiado optimista ni demasiado pesimista:

a) Elija α entre 0 y 1, 1 significa optimista y 0 significa pesimista.
b) Elija los números más alto y más bajo para cada acción.
c) Multiplique el beneficio más alto (en el sentido de las filas) por α y el más bajo por (1-α).
d) Opte por el curso de acción que da la suma más alta.

Por ejemplo, para α= 0.7, tenemos:

$$a_1 = B \quad (0.7 * 12) + (0.3 * 3) = 9.3$$
$$a_2 = A \quad (0.7 * 15) + (0.3 * (-2)) = 9.9*$$
$$a_3 = D \quad (0.7 * 7) + (0.3 * 7) = 7$$

Tarea Estudiar como influye el valor de α, y aplicar los restantes criterios de decisión.

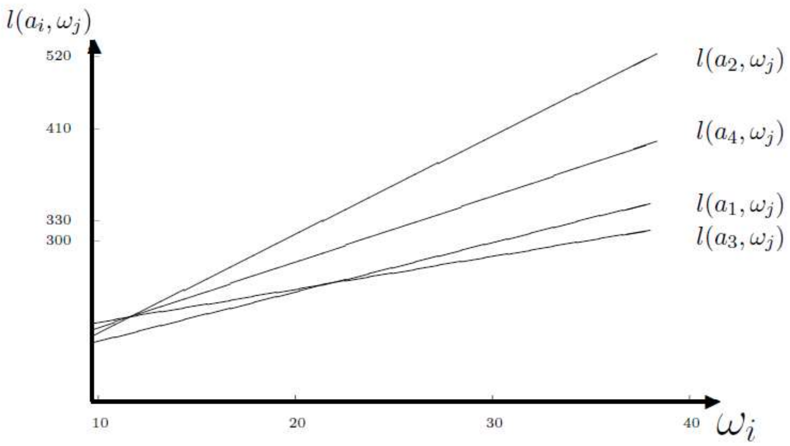
Ejemplo 2.2 Una empresa debe seleccionar una de las cuatro máquinas que dispone para fabricar Q unidades de un determinado producto, del que se sabe que como mínimo se demandarán 10 unidades y como máximo 40 unidades. Si los costes fijos y variables por unidad producida de cada máquina son:

```
##      Máquina Coste fijo Coste unitario
## [1,]       1        100              5
## [2,]       2         40             12
## [3,]       3        150              3
## [4,]       4         90              8
```

¿Qué máquina utilizará?
Lo primero que debe notarse es que le número de estados posibles (demanda igual a 10 hasta demanda igual a 40) es demasiado elevado, por lo que no se usará tabla de decisión. Veamos cuáles son los elementos de este problema

1. Decisor: la empresa.
2. Alternativas: las cuatro máquinas $a_1, ..., a_4$.
3. Estados: la demanda $\omega_i \in \{10, ..., 40\}$.
4. Resultados:
   - $l(a_1, \omega_i) = 100 + 5 \cdot \omega_i$
   - $l(a_2, \omega_i) = 40 + 12 \cdot \omega_i$
   - $l(a_3, \omega_i) = 150 + 3 \cdot \omega_i$
   - $l(a_4, \omega_i) = 90 + 8 \cdot \omega_i$

Se puede realizar una represenración gráfica de las funciones anteriores:



La decisión a tomar según cada criterio es la siguiente:
1. Criterio de Wald. Como todas son crecientes, basta tomar los valores de las anteriores funciones en $\omega_i = 40$.
El mejor resultado se da en a_3.
2. Criterio optimista. Ahora, por ser todas crecientes, el mejor resultado se da para $\omega_i = 10$. El mejor resultado se da en a_1.
3. Criterio de Laplace. Salen a_1 y a_3.
4. Criterio de Savage. Salen a_1 y a_3.

1.1.3.4. Teorema

No es posible construir un criterio de decisión que cumpla los 10 axiomas simultáneamente.