Majoranovy fermiony jako částice ve 2D čase

Filos G.

23. 7. 2023

Úvod

Co jsou to Majoranovy fermiony? Jakou mají vlnově mechanickou strukturu a povahu? Jsou to skutečně jen pouhé hypotetické fermiony se speciálními vlastnostmi danými Majoranovou rovnicí, nebo se jedná o částice zcela běžné, pouze zasazené do nevšedních podmínek?

Majoranovy fermiony mohou existovat dle teoretické předpovědi Ettora Majorany v podobě speciálních částic, které jsou jistojistě samy sebou a zároveň svou antičásticí. Mohou mezi sebou anihilovat a jsou stoprocentně částice a zároveň stoprocentně antičástice. Druhá možnost, v jaké formě mohou Majoranovy fermiony existovat, je superpozice stavu (označme jej $|p\rangle$), v němž je daná částice skutečně ona částice, a stavu $|\overline{p}\rangle$, v němž má identitu příslušné antičástice. Jakýsi částicově–antičásticový stav částice $|\text{Majorana}\rangle$ má tvar

$$|\text{Majorana}\rangle = \alpha|p\rangle + \beta|\overline{p}\rangle,$$

kde koeficienty α a β jsou normovány tak, aby pravděpodobnost, že je částice ve smíšeném stavu částice–antičástice, byla 100 %. Vzhledem k tomu, že $|p\rangle$ a $|\overline{p}\rangle$ jsou v tomto případě navzájem ortogonální, musí platit

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Rozdíl mezi zmíněnými formami je tedy, že v první je částice zároveň antičásticí a platí tak

$$\langle p|\overline{p}\rangle = 1.$$

V druhém případě může být Majoranův fermion někdy částice, někdy antičástice, ale nikdy obojí zároveň. To upřesňuje podmínka

$$\langle p|\overline{p}\rangle = 0,$$

čili se jedná o bázové stavy částice.

V tomto pojednání podrobně rozebereme chování Majoranova fermionu druhého typu a pokusíme se vysvětlit možný původ oné prazvláštní superpozice stavu částice s antičásticí.

Feynmanova–Stückelbergova interpretace a hypotéza „jednoho elektronu“

Po formulaci Diracovy rovnice se snažilo mnoho fyziků vysvětlit ona záhadná řešení se zápornou energií. Sám Paul Dirac z těchto částic vytvořil pomyslné *Diracovo moře*. V něm se může občas vyskytovat sem tam nějaká díra, která má představovat antičástici. Takto Paul Dirac myšlenkově předpověděl existenci antihmoty.

Diracova „děrová“ teorie se však může zdát trochu přitažená za vlasy, což vedlo Wheelera, Stückelberga a Feynmana k vytvoření trochu jiného pohledu na antihmotu. Vezměme si obecné řešení Diracovy rovnice pro volnou částici s hybností $\mathbf{p}$, klidovou hmotností m a energií E. To má tvar klasické de Borglieovy vlny, která je přenásobená nějakým konstantním vektorem u, jenž z vlnové funkce utváří spinor. Pro tři prostorové dimenze popsané polohovým vektorem $\mathbf{r}$ dostáváme

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u\mathrm{e}^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)}. \tag{1}$$

Rovnici

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

ale nesplňuje pouze toto řešení, splňuje ho rovněž vlnová funkce ve tvaru

$$\psi^{-}(\mathbf{r}, t) = u^{-}\mathrm{e}^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+Et)}, \tag{2}$$

které nese zápornou energii. Zaměřme se jen na čistou vlnově mechanickou část vlnové funkce, která je dána komplexní exponenciálou. Nehleďme nyní na spin určený spinorovou strukturou (vektory u a u^{-}). Zadefinujme operaci T jako časovou reverzi. Jednoduše operaci, která nám prohodí směr běhu času. Vykonejme ji na exponenciální části vlnové funkce prvního řešení.

$$\mathsf{T} : \mathrm{e}^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} \mapsto \mathrm{e}^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+Et)}$$

Energie ani hmotnost znaménko nemění, hybnost ano, jelikož se jedná o derivaci polohy (která se po transformaci zachová) podle času (který znaménko změní) násobenou hmotností. Výsledkem je tak exponenciální část, která vystupuje ve vlnové funkci podivného elektronu se zápornou hmotností. Takže co nám to říká? Druhé řešení odpovídá pouze nějakým dalším částicím, které vypadají jako částice z prvního řešení s časově převráceným během. Tyto zvláštní částice jsou právě ony antičástice příslušné fermionům z prvního řešení. Dokonce pokud dle Diracovy teorie vytvoříme vhodné (dodnes používané) *nábojové sdružení*, bude celá časová reverze probíhat stejně. Výsledným poznatkem tedy je, že do jisté míry můžeme pohlížet na antičástici v normálním čase jako na její příslušnou částici pohybující v čase převráceném.

Výše uvedené výsledky se však mohou zdát poměrně náhodné. Může zde vyvstat otázka, proč by časově převrácený běh částic měl odpovídat chování antihmoty. Kde se třeba bere ten fakt, že antičástice pak musí mít opačný náboj? Trochu více se ujistíme, pokud do rovnice onen náboj ještě společně s vnějšími poli zakomponujeme. Přidejme tedy elektromagnetické pole složené ze skalárního potenciálu ϕ a vektorového potenciálu $\mathbf{A}$.

$$A^{\mu} = (\phi, \mathbf{A})$$

Diracova rovnice se pak rozšíří na

$$\left(i\not{\partial} + q\not{A} - m\right)\psi = 0.$$

Pokud je A^{μ} konstantní (což je v diagramatické formulaci kvantové mechaniky dostačující předpoklad), přidá se do exponentu exponenciální části řešení (1) člen $i(q\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} - q\phi t)$. Zajímavé je, že úplně stejný člen se přiřadí i k řešení (2). Jak bude vypadat tento člen po časovém převrácení?

$$\mathsf{T} : i(q\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} - q\phi t) \mapsto i(-q\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} + q\phi t)$$

Skalární potenciál se podobně jako energie pod časovou reverzí nemění. Jak se dá dokázat z druhé Maxwellovy rovnice (zákonu elektromagnetické indukce), $\mathbf{A}$ musí pod časovém převrácení změnit znaménko, pokud ho ϕ nemění. Náboj q se však zachovává.

Je zajímavé, že jsme dostali záporný výsledek oproti původnímu, když v obou řešeních (1, 2) vystupuje v rámci elektromagnetického pole stejný člen. Všechno je však naprosto v pořádku, musíme si pouze správně interpretovat získané výsledky. Pokud z celého členu $i(q\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} - q\phi t)$ můžeme jednoduše vytknout náboj q, lze si změnu znaménka celého členu představit pouze jako změnu náboje a vyřeší se tak problém toho, že po časové transformaci náboj stále odkazuje na náboj původní částice. Pokud bychom u každého dílčího řešení (1 a 2) rozepsali náboj, lišily by se elektromagnetické členy znaménkem, přesně jak by se po časové transformaci mělo stát. Antihmota je tedy pouze časově převrácená hmota, pokud má opačný náboj, což krásně odpovídá Diracově teorii či empirickým poznatkům.

Koncept, na který jsme právě narazili, jako první nejpravděpodobněji zaregistroval John Wheeler v rámci své hypotézy tzv. „jednoho elektronu“. Kde navrhuje model pro všechny elektrony ve vesmíru, podle něhož každičký elektron a pozitron na světě je vlastně jeden a ten samý elektron cestující několikrát tam a zpátky v čase. Pokud zrovna cestuje po směru, působí jako elektron, když proti směru času, jeví se nám jako pozitron. Občas se může elektron zničehonic obrátit a vydat se zpět v čase, čímž se z něj stane pozitron. Výsledná situace, celé otočení pak bude vypadat jako elektronová–pozitronová anihilace. Občas ale za celé stáří vesmíru elektron neanihiluje a dostane se třeba až k velkému krachu, kde se po skončení času zase obrátí a začne putovat zpátky k velkému třesku. A tak bude přeskakovat pořád dokola, zhruba tolikrát, kolik je ve vesmíru elektronů. Každé obrácenív čase znamená novou částici, z našeho pohledu další elektron či pozitron. Ve skutečnosti jsou však všechny tyto částice pouze *jeden elektron.*

John Wheeler si touto hypotézou chtěl zdůvodnit, proč mají všechny elektrony (popřípadě další částice) přesně stejnou hmotnost a náboj. Protože se jedná o jednu a tu samou částici! Část Wheelerových myšlenek si poté převzal i jeho student Richard Feynman, který ve svých teoriích ale pouze tvrdil, že pozitron je vlastně elektron cestující proti proudu času. Sám přiznává, že tento nápad „vykradl“ z Wheelerovy hypotézy. Co si od něj ale nepřevzal je jednoduše myšlenka jedné celosvětové částice.

Každopádně ať už je ve vesmíru elektronů nespočet nebo si tu poletuje pouze jeden, je docela přesvědčivé, že antičástice odpovídají částicím cestujícím zpět v čase. S touto hypotézou se dokonce dnes spokojuje většina fyziků. Je to docela zvláštní, neboť celé naše chápání světa kompletně přeorává. Opouští myšlenku lineárně běžícího času a umožňuje putování zpátky v čase. To je docela převratné. Každopádně v další části všechny tyto myšlenky uvedeme do ještě většího extrému...

Mechanika ve 2D čase

Než přejdeme k vrcholové myšlence tohoto textu, musíme probrat ještě jeden prazvláštní teoretický koncept, na kterém budeme později stavět. Představme si klasický čtyřvektor události

$$x^\mu = (t, x, y, z)$$

a zamysleme se nad myšlenkou přidání druhého času (říkejme mu τ), mohl by se analogicky přidat do čtyřvektoru jako pátá složka a vytvořit tak „pětivektor“ události.

$$x^\mu = (t, \tau, x, y, z)$$

To zní docela intuitivně, problém však tkví v tom, že používáme přirozenou volbu jednotek $\hbar = c = 1$. A nevíme, zda by u druhého času τ měla stát jako koeficient rovněž rychlost světla. Předpokládejme, že tomu tak je a že pětivektor se řídí signaturou $(-, -, +, +, +)$. Jak bude vypadat délka prostoročasového intervalu $\mathrm{d}s$?

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\mu = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\tau^2$$

V klasické speciální teorii relativity (dále jen STR) je tato délka v případě událostí týkajících se cestování světla rovna nule. Za takových podmínek platí

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}t^2,$$

kde pravá strana odpovídá délce prostorového intervalu. Po přidání druhého času máme

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\tau^2,$$

z čehož můžeme vidět, že vzdálenost, kterou světlo urazí za časy $\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}\tau$, je právě

$$c\sqrt{\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\tau^2}. \tag{3}$$

Nyní se pokusme zamyslet, jak by byla definovaná celá kinematika ve třech prostorových dimenzích a dvou časových. Například rychlost by byla vyjádřena tenzorem, ukazovala by, jakou dráhu v jaké složce prostoru by urazil hmotný bod za určitý čas určité složky času. Pokud bychom tedy popisovali těleso v m prostorových dimenzích a n časových, jeho rychlost by byla dána maticí typu $m \times n$. To by nemuselo znít až tak jako nějaký velký problém. Možná horší je jakési sjednocení s veličinami jako je hybnost apod. Můžeme ukázat, že hybnost bude i v n časových dimenzích vektor s počtem složek m. K uvědomění si této skutečnosti nám poslouží tzv.

teorém Noetherové. Podle něho je zákon zachování hybnosti projevem translační symetrie v jednotlivých složkách prostoru. Tím, že má náš prostor m nezávislých složek, přísluší každé z nich jedna zachovávající se hybnost. A tato veličina je v mechanice skutečně definovaná tak, aby se zachovávala. Je tedy jasné, že počet složek hybnosti bude odpovídat dimenzi prostoru.

Co je tedy za problém? No jednoduše není úplně jasné, jak zobecnit definici hybnosti $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Vše je takové dost neintuitivní a nejasné. Ale i kdyby se nám podařilo najít nějaké vztahy mezi kinematickými a dynamickými veličinami, zbývá tady ještě jeden nešvar. Pořád bychom nedokázali předpovědět pohyb hmotného bodu. Chybí nám jaksi jedna unikátní dimenze, která by působila jako nezávisle běžící proměnná. V našem vesmíru je jí čas. Ve vesmíru, kde by existovala pouze jedna složka prostoru a n časových dimenzí, by taková veličina byla právě ona poloha, když se jedná o jedinou význačnou dimenzi. Může se nám to zdát neintuitivní, ale pořád si uvědomme, že všechny časové dimenze jsou od sebe neodlišitelné a nedává smysl, aby fyzika preferovala jednu z nich. Tím, že je tu k dispozici jedna prostorová dimenze navíc, tělesa se budou pohybovat i v ní. Díky tomu, že se jedná o jakousi jedinečnou souřadnici, bude se celý pohyb vůči ní chápat jako nezastavitelné konstantní posouvání. Zbylých n časových dimenzí se bude popisovat jako funkce té jediné polohy. Najednou se funkce polohy zamění s funkcí času a celý prostoročas začneme chápat obráceně.

Celá tato kinematika by se mohla zdát v pořádku, dokud máme pouze jednu složku času, nebo jednu složku prostoru. Máme-li však více prostorových dimenzí a zároveň více časových, neexistuje žádná jednoznačná rozměrová linie, podle které se řídit. Nastává tak velký chaos, který nejsme schopni předpovídat ani v klasické mechanice. V kvantové mechanice bychom mohli popsat nějakou vlnovou funkci závislou na m prostorových a n časových dimenzích a pohyb v celém časoprostoru by byl pouze pravděpodobnostní, to by mělo jít, ale klasická mechanika kompletně selhává. Pro zjednodušení zatím budeme pokračovat v řešení problému ve dvou časových dimenzích a jedné prostorové.

Pokračujme dále v deskripci. Mechaniku pohybu v prostoročasu budeme zjednodušeně popisovat vektorem času $\mathbf{t} = (t, \tau)$ pouze o dvou složkách a jednou polohou x. Shrnuto do vektoru události...

$$x^\mu = (t, \tau, x)$$

Místo toho, abychom používali vektor rychlosti

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},$$

budeme užívat analogicky jakousi reciprocitní rychlost

$$\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_t, \Lambda_\tau) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}x}.$$

V čem tato veličina dává smysl? Ukážeme si to na rozboru. Délka infinitezimálního intervalu časového vektoru je dána jako

$$\mathrm{d}\mathbf{t} = \mathbf{\Lambda}\mathrm{d}x,$$

neboli

$$\mathrm{d}\mathbf{t}^2 = \mathbf{\Lambda}^2\mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}x^2 = \frac{\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\tau^2}{\mathbf{\Lambda}^2}.$$

Pokud bychom tahle chtěli popsat délku prostorového intervalu, kterou urazí kupříkladu světlo svou reciprocitní rychlostí $\mathbf{\Lambda}_{\text{light}}$ za časy $\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}\tau$, můžeme ji novými prostředky spočíst jako

$$\frac{1}{|\mathbf{\Lambda}_{\text{light}}|}\sqrt{\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\tau^2}.$$

Naprosto shodné s výrazem (3). V případě světla tedy platí, že $\mathbf{\Lambda}$ = const., za předpokladu, že světlo nemění „časový“ směr. Co do velikosti pak musí rovněž platit, že

$$|\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{light}}| = \frac{1}{c}.$$

Zajímavé je, že lze dokázat podobným přepisem Maxwellových rovnic do 3 časových dimenzí a jedné prostorové, že opět elektromagnetické záření v jistých případech splňuje vlnovou rovnici pro dané uspořádání rozměrů časoprostoru. Z nich se dá předvést, že právě velikost $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{light}}$ se musí zachovávat. Toto je tedy jiný přístup, jak lze prokázat neměnnost rychlosti světla ve více časových dimenzích. A právě proto, že nám to ukazuje sama Maxwellova teorie, můžeme tvrdit, že z toho vyplývá i správnost výrazu (3) a celkově tak i logičnost popisu pomocí vektoru události. Na základě dosavadních úvah je již snadné uvědomit si, že skalární součin $x^\mu x_\mu$ se zachovává ve všech možných soustavách, to znamená

$$x^\mu x_\mu = x^{\mu\prime} x'_\mu.$$

Podivné se může zdát, co znamená termín inerciální soustava v kontextu mnohočasového, jednorozměrného vesmíru. Za již uvedených podmínek můžeme prohlásit, že rychlost pohybu v čase (neboli $\mathbf{\Lambda}$) je relativní. To je trochu změna od našeho světa, ale nic, co by nás překvapilo. Každopádně pořád platí, že algebra čtyřvektorů (v našem podání už jen „třívektorů“) je stejná jako v klasické STR. Analogicky k události můžeme hlásat, že i skalární součin hybnosti s hybností je invariantní vůči Lorentzově transformaci pro vícerozměrný čas.

$$p^\mu p_\mu = p^{\mu\prime} p'_\mu$$

Přičemž vektor „tříhybnosti“ vypadá takto:

$$p^\mu = (E_t, E_\tau, p).$$

Opět se pohybujeme v přirozené soustavě jednotek, kde $c = |\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{light}}| = 1$. Definováním třívektoru hybnosti rovněž zavádíme koncept vektorové energie: $\mathbf{E} = (E_t, E_\tau)$. Ten se může zdát z počátku neintuitivní, ovšem při aplikaci již zmíněného teorému *Emmy Noetherové* si lze lehce spojit zachování energie s časově translační symetrií. Jelikož nyní pracujeme rovnou se dvěma časy, vynoří se z našeho popisu také dvě zachovávající se energie. Podle pravidel klasické STR by mělo se signaturou $(-, -, +)$ platit

$$p^\mu p_\mu = -m^2.$$

Po rozepsání

$$\mathbf{E}^2 = p^2 + m^2. \tag{4}$$

V jednom čase jsme zvyklí, že vztah mezi relativistickou energií a hybností má tuto podobu:

$$\mathbf{p} = E\mathbf{v}.$$

Obdobně pak v našem případě je vektor energie určen součinem hybnosti a reciprocitní rychlosti.

$$\mathbf{E} = p\mathbf{\Lambda}$$

Dosazením do rovnice (4) dostáváme

$$p^2 \mathbf{\Lambda}^2 = p^2 + m^2$$

$$p = \frac{m}{\sqrt{\mathbf{\Lambda}^2 - 1}}. \tag{5}$$

Mimochodem, pokud náš případ jednoho prostorového rozměru a dvou časových (dále můžeme zkráceně zapisovat ve formátu *počet prostorových + počet časových dimenzí*: $1+2$) zredukujeme na $1+1$, čili z $\mathbf{\Lambda}$ uděláme $1/v$, z hybnosti p se nám utvoří poměrně známý relativistický vztah.

$$p = \frac{m}{\sqrt{\frac{1}{v^2} - 1}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Díky tomuto zjištění se zdá, že naše rozšíření je víceméně v souladu se zásadami STR. Náš popis hmotného bodu pohybujícího se v $1+2$ dimenzích je v pořádku.

Ze vztahu (5) lze vyčíst ještě jednu zajímavost, která se často v populární fyzice objevuje. Je docela zřejmé, že v rozměrech $1+2$ je dominantní dimenze právě ta prostorová, jak jsme již avizovali. Všechny částice se v tomto prostředí bezpodmínečně pohybují prostorem, ale už nemusí cestovat časem. To, zda nějakou z časových dimenzí putují, je v tomto případě relativní. Vidíme tedy, že pro jisté objekty může být vektor $\mathbf{\Lambda}$ klidně nulový. Jedinou hranici, kterou má, je samozřejmě rychlost světla. Z tohoto důvodu platí fyzikální podmínka

$$0 \leq \mathbf{\Lambda}^2 < 1.$$

Což se může jevit jako mírně problematické, neboť ve jmenovateli pravé strany rovnice (5) dostaneme ryze imaginární číslo. Aby ale celková hybnost nesla nějaký význam, musí být reálná, tudíž i čitatel (čili klidová hmotnost) pak musí být nutně ryze imaginární. Které částice nesou ryze imaginární klidovou hmotnost? Hypotetické *tachyony*. Z tohoto důvodu se hovoří o tom, že vesmír typu $1+2$ nebo $1+3$ poskytuje ideální podmínky pro existenci tachyonů.

Když už máme vytvořené dynamické zákony popisující klasické hmotné body v $1+2$ dimenzích, můžeme se pokusit o expanzi našich myšlenek a našeho popisu do kvantové mechaniky. Jelikož se veškeré teoretizování aktuálně točí pouze kolem Majoranových fermionů, dává smysl pokusit se odvodit upravenou Diracovu rovnici v $1+2$. Rozepišme plně rovnici (4).

$$E_t^2 + E_\tau^2 = p^2 + m^2$$

Pomocí antikomutujících matic, kupříkladu α_1, α_2, α_3 a β, se pokusme vystupující kvadráty linearizovat.

$$(\alpha_1 E_t + \alpha_2 E_\tau)^2 = (\alpha_3 p + \beta m)^2$$

Přidejme vlnovou funkci a vytvořme tak kvantově–mechanickou pohybovou rovnici.

$$\alpha_1 E_t \psi + \alpha_2 E_\tau \psi = \alpha_3 p \psi + \beta m \psi$$

Nyní můžeme vynásobit celou rovnici maticí β zleva a využít identity (resp. definice gama matic pro $j \in \{1; 2; 3\}$)

$$\gamma^j = \beta \alpha_j$$

a rovnou rovnici anulovat.

$$\left(\gamma^1 E_t + \gamma^2 E_\tau - \gamma^3 p - m\right)\psi = 0 \tag{6}$$

Teď je potřeba vystupující veličiny nahradit vhodnými operátory. Operátor hybnosti má předpokládaný tvar

$$\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}.$$

Jak je to ale s operátory jednotlivých energií? Je opodstatněné domnívat se, že operátor první složky energie je poměrně klasicky

$$\hat{E}_t = i\frac{\partial}{\partial t}$$

a tudíž v podobném duchu vypadá i operátor druhé energie.

$$\hat{E}_\tau = i\frac{\partial}{\partial \tau}$$

Při aplikaci operátorů přejde rovnice (6) do tvaru

$$\left(i\gamma^1\partial_t + i\gamma^2\partial_\tau + i\gamma^3\partial_x - m\right)\psi = 0$$

Pro zkompaktnění zápisu definujme v $1+2$ dimenzích operátor nabla jako

$$\partial_\mu = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\partial_t, \partial_\tau, \partial_x)$$

Pohybová rovnice nám tak přejde do ještě hezčího tvaru.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{7}$$

V tomto podání vypadá rovnice silně jako Diracova, ovšem tomu je pouze díky chytré volbě indexů složek operátoru nabla. Ty nabývají celočíselných hodnot od jedné do tří a celá sumace přes μ pak probíhá přes hodnoty 1, 2 a 3.

Každopádně dostali jsme relativistickou kvantově–mechanickou pohybovou rovnici volné částice, která je jakousi úpravou Diracovy rovnice na případ $1+2$ dimenzí. Jaké je její řešení? Vzhledem k použitým maticím můžeme očekávat spinorový tvar, tedy řešení ve tvaru konstantního vektoru u přenásobeného skalární funkcí f se závislostí na poloze a časech.

$$\psi(x, \mathbf{t}) = u f(x, \mathbf{t})$$

Jelikož rovnice (7) je lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty, je její řešení klasická komplexně exponenciální funkce s podobou de Broglieovy vlny.

$$f(x, \mathbf{t}) = \mathrm{e}^{i(px - E_t t - E_\tau \tau)}$$

Rovnici (7) tedy splňuje jako řešení vlnová funkce

$$\psi(x, \mathbf{t}) = u\mathrm{e}^{i(px - \mathbf{E}\cdot\mathbf{t})}. \tag{8}$$

To zásadní v řešení pro nás představuje právě komplexní exponenciála. Ke zjištění, že se jedná o klasickou de Broglieovu vlnu v podání dvou časových dimenzí a vektorové energie bychom mohli dojít i kupříkladu z Kleinovy–Gordonovy rovnice či z jiných pohybových rovnic kvantové mechaniky. Každopádně to nejzajímavější v celém tomto textu je to, co budeme se získanou vlnovou funkcí provádět dále...

Rozšíření Feynmanovy–Stückelbergovy interpretace

Dostáváme se konečně k hlavní myšlence. Nechali jsme naši fantazii trochu si vyhrát a vytvořili jsme svět, kde má čas dvě dimenze a prostor pouze jednu. Dokázali jsme popsat mechaniku částic, které se v tomto časoprostoru pohybují. Nejen klasickou, ale i relativistickou kvantovou. Máme nyní už všechny prerekvizity k tomu, abychom porozuměli chování objektu, jenž je superpozicí částice a antičástice.

Vzpomeňme si ještě na ideu Feynmanovy–Stückelbergovy interpretace. Máme fermion pohybující se normálně v čase. Provedeme-li u něj časovou reflexi, stane ze z něj jeho příslušná antičástice. Co znamená ale časová reflexe? Jednoduše otočení pomyslné časové osy, její obrácení nebo jinak řečeno její rotaci o 180 stupňů v nějakém grafu, do kterého si zaznamenáváme pohyb částice. Má smysl tvrdit, že při časové reflexi byla časová osa otočena, nebo převrácena? Dává už vůbec nějaký význam udávat, že byla osa otočena o 180 stupňů, když stejně může mít jen dva možné směry? No, ani tolik ne. Ale co když máme časové osy dvě? Celý systém dvou os pak můžeme otáčet o libovolný úhel θ. Je sice zvláštní zamyslet se nad významem časového úhlu, ale v té geometrické interpretaci v grafu dává úhel θ větší smysl.

Nicméně, co znamenají dvě časové dimenze? No to je přesně náš případ $1+2$, který jsme celou dobu popisovali! Řekli jsme si, že v tomto systému můžeme na různé časové soustavy nahlížet jako na inerciální, pouze prostor je fixován. Podobně tomu bude i s rotací. Tak jako by měla v našem volném prostoru platit symetrie vůči otočení, platí i symetrie vůči otočení o úhel θ. Není těžké dopočítat se, že skalární součin $\mathbf{E}\cdot\mathbf{t}$, který vystupuje ve vlnové funkci (8) je vůči otočení o úhel θ invariantní.

Nyní víme, že matematicky můžeme popsat operaci T jako pouhé otočení časových souřadnic o úhel $\theta = 180^\circ$. Jenže když máme časové souřadnice dvě a transformační úhel θ může být libovolný, co se stane, když otočíme souřadnice například jen o 45 či 90 stupňů? Bude nyní fermion částice, nebo antičástice? Nebo možná není náhodou ta správná otázka, zda bude fermion částice nebo antičástice? Odpověď najdeme v analogii se spinem. To je rovněž veličina, která u fermionů nabývá pouze dvou hodnot a dává fermion do dvou možných ortogonálních stavů, se spinem nahoru $|\uparrow\rangle$ a se spinem dolů $|\downarrow\rangle$. V každé soustavě může být částice v jednom či druhém stavu, v žádném jiném ani v obou zároveň. Může mít však určité nenulové pravděpodobnosti na oba stavy v jednu chvíli, které v součtu dají 100 %, a být tak v superpozici těchto dvou stavů. Pravděpodobnosti jednotlivých stavů se mohou měnit s otáčením referenční soustavy. Referenční prostorové soustavy. Pokud z výchozí situace, kdy má částice stoprocentně spin nahoru otočíme osu, která je rovnoběžná se směrem spinu, o 180 stupňů, bude nyní mít spin stoprocentně dolů. Stejně tomu je i se stavy $|p\rangle$ a $|\overline{p}\rangle$. Pokud víme, že v původní soustavě časových souřadnic je fermion částicí, po otočení soustavy o 180 stupňů bude zase stoprocentně antičásticí. Vzhledem k mnoha podobnostem mezi stavy spinu a částicově–antičásticovými stavy můžeme vyzkoušet přiřadit stavům $|p\rangle$ a $|\overline{p}\rangle$ stejné transformační amplitudy jako mají stavy spinové.

$$|\text{Majorana}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|p\rangle + i\sin\frac{\theta}{2}\,|\overline{p}\rangle$$

Takto tedy vypadá náš stav, pokud při původním uspořádání časové soustavy (když $\theta = 0$) je fermion jistojistě částicí. Je tedy jasné, že pro určité úhly θ bude fermion v superpozici částice a antičástice. Jaké jsou dle našeho předpokladu pravděpodobnosti toho, že je fermion částicí (P_p), a toho, že je antičásticí ($P_{\overline{p}}$)?

$$P_p = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$P_{\overline{p}} = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

Snadno si můžeme ověřit, že například při rotaci o 90 stupňů to s pravděpodobnostmi bude přesně 50 na 50, což je něco, co bychom očekávali, jelikož vůči původní časové ose t pak částice nebude preferovat ani jeden směr a bude tak dokonale mezi možností stát se částicí a stát se antičásticí. Z tohoto důvodu jsou vyvážené i jednotlivé pravděpodobnosti. Všechno se zdá, že logicky sedí. Matematicky jsme ukázali, že existence fermionů v částicově–antičásticové superpozici je ve více časových dimenzí možná. Jaký to má ale reálný zásah do našeho světa?

Je hezké, že umíme pozorovat částice při otáčení časových os, ale jak se v našem světě můžou otáčet nějaké časové osy? Tato otázka zůstane pravděpodobně ještě dlouho nezodpovězená. Nicméně zatím si můžeme naši druhou časovou dimenzi τ představit jen jako pomocnou imaginární časovou osu, v níž se jen pomyslně pohybují nějaké privilegované částice. Ačkoliv by se tyto speciální částice pohybovaly skrz další časovou dimenzi, jejich pohyb by se jednoduše projektoval pouze do jednoho času, toho našeho. Svou identitu by však řídily podle obou časových dimenzí. Zkrátka můžeme si představit, že náš prostoročas ve formátu $x^\mu = (t, x, y, z)$ protíná ještě jeden s $x^\mu = (t, \tau, x)$. Ten zvláštní vesmír si žije vlastním životem, částice v něm se kreují a anihilují, tím si jasně nastavují svou identitu (neboť při takových procesech nastává kolaps stavového vektoru $|\text{Majorana}\rangle$), buďto částicovou, nebo antičásticovou. Tak, jako to máme s naší klasickou hmotou v našem vesmíru. Nějaké ty vybrané fermiony žijící v tom záhadném $1 + 2$ vesmíru by se promítaly do našeho právě jako „superpoziční Majoranovy“ fermiony. Tohle by mohlo být jedním z vysvětlení jejich záhadné superpozice.

Ještě než pokročíme dále, musíme si ujasnit, zda onu superpozici způsobuje samotný směr pohybu časovými rozměry (směr vektoru $\mathbf{\Lambda}$), nebo pouze pohled z jiné perspektivy. Po celou dobu se odpověď zdála jasná, záleží pouze na pohledu. Nicméně celá Feynmanova–Stückelbergova interpretace mluví jen o tom, že částice *pohybující* se zpět v čase se jeví jako antičástice. To nás může trochu zarazit, jenže pořád je zde ten fakt, že celý soubor antičástic si žije vlastním životem v tom vlastním vesmíru, který vypadá normálně částicově, ovšem má otočenou časovou osu, takže z našeho pohledu se nám jeví jako antihmota. Zároveň tak, jak je definovaná operace T, má logičtější význam ten náhled na superpozici hmoty a antihmoty, že závisí pouze na úhlu pohledu.

Vyvstává zde ještě jedna nesrovnalost. Jak můžeme promítat $1 + 2$ dimenzí do $3 + 1$? Neřešme teď ani tolik časové rozměry, nás aktuálně zajímají ty prostorové. Cožpak by se mohly superpoziční Majoranovy fermiony v našem vesmíru pohybovat pouze v jednom směru? Možná by to ale nebylo tak zvláštní, když už slučujeme dvě časové dimenze s jednou, proč ne taky jednu prostorovou se třemi? Ale i kdyby se nám to nelíbilo, tak pořád je tu možnost existence $3 + 2$ vesmíru. Sice jsme s ním odmítli počítat, ale to pouze kvůli nepředvídatelnosti v klasické mechanice. V mechanice kvantové už na tom nesejde a můžeme naše myšlenky jednoduše rozšířit i na tři prostorové složky.

A nyní přichází další možná představa integrace vícedimenzionálního času do našeho vesmíru. Dle některých kosmologických modelů mohl náš vesmír vzniknout ještě z jiné časoprostorové entity. V nějakém prapůvodním stavu mohl náš vesmír mít skutečně více časů a až později mohl zkolabovat do pouhého jednoho. V tomto ohledu by mohly být superpoziční Majoranovy fermiony jakési reliktní částice zachovalé z těchto dávných časů.

Která z těchto dvou představ je ta správná? Kdo ví? Nejpravděpodobněji žádná. První má docela velkou slabinu v tom, že vyžaduje jednu preferovanou časovou osu, která by se promítala. To nezní úplně nejlépe relativisticky, ale třeba tak svět opravdu funguje. Druhý nápad už je kompletně šílený, ale kdo ví, jak na tom náš vesmír je?

Ať už je tomu tak či onak, pořád zde má nějaký základ původní pohyb částice speciálním časovým směrem, který je trochu vychýlený od našeho časového toku. Uvedli jsme si pravděpodobnostní závislost jednotlivých stavů na úhlu θ, ale tento úhel je pro nás pořád z hlediska mechaniky poměrně abstraktní. Mnohem hezčí bude použít vektor energie, získáme pak trochu lepší obraz s více souvislostmi. Víme, že stejně jako vektor času se bude i vektor energie $\mathbf{E}$ transformovat na $\mathbf{E}'$ těmito vztahy:

$$E'_t = E_t \cos\theta + E_\tau \sin\theta,$$

$$E'_\tau = E_\tau \cos\theta - E_t \sin\theta.$$

Transformujeme ze soustavy spojené s časovým během zkoumané částice. Řekli jsme si, že v této soustavě je pravděpodobnost toho, že je částice částicí, 100 %, tudíž částice nijak neběží po časové ose τ a nemá tak ani žádnou energii E_τ (dle rovnice $\mathbf{E} = p\mathbf{\Lambda}$). V tomto specifickém případě se zredukují transformační rovnice na

$$E'_t = E_t \cos\theta,$$

$$E'_\tau = -E_t \sin\theta.$$

E_t nese význam velikosti vektoru energie. E'_t a E'_τ jsou pak jednotlivé složky energie pozorované z našeho vesmíru. Proveďme nyní menší reformu značení. Velikost energie si označme jako E a dvě složky vzniklé transformací zapisujme bez čárky, jelikož náš vesmír není hezké nazývat čárkovanou soustavou. Novým zápisem dostáváme

$$E_t = E \cos\theta, \tag{9}$$

$$E_\tau = -E \sin\theta.$$

Z těchto dvou rovnic lze jednoduše spočíst úhel θ, ale tahle cesta by byla značně neefektivní. Když si uvědomíme, že budeme potřebovat pouze vztahy

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2},$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2},$$

v nichž vystupuje pouze $\cos\theta$, bude jednodušší najít právě tento výraz. Z rovnice (9) vyplývá, že

$$\cos\theta = \frac{E_t}{E}.$$

Po dosazení máme

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E_t}{E}\right),$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E_t}{E}\right).$$

Což jsou vlastně hledané pravděpodobnosti…

$$P_p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E_t}{E}\right)$$

$$P_{\overline{p}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E_t}{E}\right)$$

Dostali jsme poměrně elegantní výsledek, správně normovaný tak, že $P_p + P_{\overline{p}} = 100\,\%$. Každopádně lze z něho vyčíst pár zajímavých informací, takže nám v podstatě doplnil tu krásnou mozaiku představ o naší domněnce. Zaprvé, pokud má částice energii $\mathbf{E} = (-E, 0)$, což je přesně případ druhého řešení Diracovy rovnice, chová se jenom jako antičástice. Toto tvrzení je v souladu s Feynmanovou–Stückelbergovou interpretací. Lze tak nabídnout nový způsob, jak na řešení se zápornou energií nahlížet. Jednoduše tak, že antičástice zápornou energii skutečně mají, protože se pohybují zpět v čase. Druhým zajímavým faktem je, že částice má vyvážené pravděpodobnosti právě tehdy, když je její relativistická energie z našeho pohledu rovna nule ($E_t = 0$). Nulovou energii nelze detekovat, v podstatě takový objekt ani neexistuje. Má to i svůj smysl, s nulovou E_t by se částice ani nepohybovala v čase t, v našem čase. Nemohla by tudíž pro nás vůbec existovat. Pokud je naše hypotéza správná, můžeme pozorovat částice typu

$$|\text{Majorana}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|p\rangle + i|\overline{p}\rangle\right),$$

pouze když by byly pozůstatkem z dob, kdy měl náš vesmír dva časy. Jejich superpozice by jim zůstala, ale energie by se změnila. Experimentální potvrzení existence takových částic by pak bylo rozhodně povznášející, neboť by nám to prozrazovalo více o kosmologickém vývoji našeho vesmíru.

Závěr

Během našeho teoretizování jsme dospěli k mnoha zajímavým myšlenkám. Stačilo si jen trochu vyhrát s matematikou časoprostoru, připustit, že z $2+1$ vesmíru se do $1+2$ dostaneme pouhou záměnou času a prostoru a že jsou tyto dvě veličiny identické. Jediné, co se při záměně zachovalo, jsou jevy z času a prostoru samostatně vycházející, jako právě částicově–antičásticová povaha nebo spin. Zjistili jsme, že abychom dostali hledanou superpozici, musíme vykonstruovat další časové dimenze. Tuto myšlenku jsme dále rozštěpili na dvě možnosti.

- Superpoziční Majoranovy fermiony jsou pouhé fermiony z jiného časoprostoru s více časy, jejichž pohyb je promítán do toho našeho.
- Superpoziční Majoranovy fermiony jsou pozůstatky ze stavu vesmíru, když měl ještě více časových dimenzí.

Obě myšlenky jsou poměrně podivné a každá z nich má své klady a zápory. Není však vůbec jasné, která je pravděpodobnější.

Dále na str. 6 jsme poznamenali, že v dimenzích $1+2$ mají největší potenciál k existenci tachyony. To nás ale nemusí odradit, neboť stejně jako se v našem vesmíru diskutuje možnost existence tachyonů, může se diskutovat i možnost existence částic pomalejších než světlo v $1+2$ vesmíru. A hlavně rozšířením na $3+2$ veškerá tachyonová preference vymizí.

Nabídli jsme rovněž nový přístup k řešení Diracovy rovnice se zápornou energií. Podle něj záporná energie není nic zvláštního, je to jen projev toho, že částice cestuje zpět v čase.

Zbývá nám ještě otázka, jak je to s fermiony, které mají náboj. Může být i náboj částice v superpozici? Nebude to narušovat zákon zachování náboje? Nebude, podobně jako spin (který se jakožto moment hybnosti musí rovněž zachovávat) může i náboj být v superpozici, ovšem za podmínky, že by byl provázán s nábojem jiné částice, aby se jejich celkový náboj mohl udržovat konstantní. Takový systém by mohl vést i k experimentálnímu potvrzení existence těchto podivných částic. Ve výsledku by se totiž superponující náboj choval jako oslabený náboj originální částice, což by se dalo naměřit a zaregistrovat.

Poměrně vzrušující myšlenka, že by nám nějaký podivný elektron s nábojem $-0,83e$ pomohl odhalit pátý rozměr našeho vesmíru…