

Nabitý superpon v elektrickém poli

Filos G.

8. února 2024

Úvod

Toto pojednání volně navazuje na sepis myšlenek jménem *Majoranovy fermiony jako částice ve 2D čase* [1]. Dále se zabývá myšlenkou existence částice, která je v superpozici běžného částicového stavu $|p\rangle$ a antičásticového stavu $|\bar{p}\rangle$. Na základně obecně spočtených pravděpodobností [1], že je částice v jednom a v druhém stavu, můžeme tvořit další komplexní fyziku zakládající se myšlenkovém experimentu, v němž figuruje nabitá částice tohoto speciálního druhu v elektrickém poli. A právě tímto případem se bude celý tento text zabývat.

Ještě než začneme s rozvojem dalších myšlenek, musíme si trochu ujasnit jazyk, kterým je budeme popisovat. Majoranovy fermiony jsou ve skutečnosti pouze částice, pro které platí $|p\rangle = |\bar{p}\rangle$, nic jiného. Tohle ale není náš případ. Částice, které by byly v superpozici $|p\rangle$ a $|\bar{p}\rangle$ ještě žádný oficiální název nemají, řekněme jim tedy pracovním třeba *superpony* jako odkaz na jejich záhadnou superpozici, jež je charakterizuje.

Nyní již můžeme zkoumat, co se stane s částicí se střídavým nábojem, když ji umístíme do elektrického pole. Začneme zlehka prostředím s konstantním skalárním potenciálem.

Konstantní elektrický potenciál

Pro začátek zapomeňme na problémy se zákonem zachování náboje, dynamiku, geometrii dvou časových dimenzí a podobné nešvary a připusťme jednoduše možnost, že superpon může měnit náboj z kladného na záporný (z q na $-q$). Přeskakuje z jednoho náboje na druhý a v podstatě se může zdát, že tak mění svou energii v elektrickém poli. Ano, ale jsou to pouze energie jednotlivých stavů $|p\rangle$ a $|\bar{p}\rangle$, nikoliv však energie celkového stavu, který je určen jejich superpozicí.

Tak či tak, potřebujeme nějak přijít na časovou závislost a dynamiku přeskočků z jednoho stavu do druhého. K tomu slouží jeden dynamický zákon kvantové mechaniky, jenž určuje časový vývoj dvojbázového systému [2].

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j \quad (1)$$

Dejme tomu, že systém popisuje nějaký souhrnný časově závislý stav $|\psi(t)\rangle$, pak C_i značí amplitudu toho, že stav $|\psi(t)\rangle$ je v nějakém báзовém stavu $|i\rangle$, tedy

$$C_i(t) = \langle i | \psi(t) \rangle.$$

V našem případě máme pouze dva báзовé stavy, $|1\rangle = |p\rangle$ a $|2\rangle = |\bar{p}\rangle$. Označme si obdobně i jednotlivé amplitudy.

$$C_p(t) = \langle p | \psi(t) \rangle$$

$$C_{\bar{p}}(t) = \langle \bar{p} | \psi(t) \rangle$$

Obecná rovnice (1) se nám rozpadne na soustavu dvou konkrétních rovnic.

$$i\hbar \frac{dC_p}{dt} = H_p C_p + H_{p \rightarrow \bar{p}} C_{\bar{p}}$$

$$i\hbar \frac{dC_{\bar{p}}}{dt} = H_{\bar{p}} C_{\bar{p}} + H_{\bar{p} \rightarrow p} C_p$$

H_p je hamiltonián superponu v částicovém stavu, $H_{\bar{p}}$ naopak odpovídá hamiltoniánu ve stavu antičásticovém. $H_{p \rightarrow \bar{p}}$ a $H_{\bar{p} \rightarrow p}$ jsou hamiltoniány nábojového přechodu, který je ve své vnitřní podstatě pravděpodobně symetrický, a proto se sobě musí rovnat.

$$H_{p \rightarrow \bar{p}} = H_{\bar{p} \rightarrow p} = A$$

Obecně platí, že přechodové hamiltoniány jsou vůči sobě jen komplexně sdružené. V tomto specifickém případě rovnosti je proto podmínkou, aby oba hamiltoniány byly reálné, což bychom od energie čekali.

Jak vypadají hamiltoniány jednotlivých báзовých stavů? Můžeme si je představit klasicky schrödingerovsky jako součet kinetické a potenciální energie $\hat{T} + \hat{V}$. Nebo ani nemusíme dělat z kinetické energie žádný diferenciální operátor, nehledáme závislost amplitud na poloze, pouze na čase. Berme proto kinetickou energii jen jako nějaký energetický přírůstek T . Potenciální energie je již zajímavější, ta je v našem případě určena pouze interakcí velikosti náboje q s elektrickým polem s potenciálem ϕ . Jednotlivé hamiltoniány budou mít tvar

$$H_p = T + q\phi,$$

$$H_{\bar{p}} = T - q\phi.$$

U druhého má člen potenciální energie opačné znaménko kvůli prohozenému náboji v antičásticovém stavu.

Všechny poznatky dosadíme do soustavy výše.

$$i\hbar \frac{dC_p}{dt} = TC_p + q\phi C_p + AC_{\bar{p}}$$

$$i\hbar \frac{dC_{\bar{p}}}{dt} = TC_{\bar{p}} - q\phi C_{\bar{p}} + AC_p$$

Z první rovnice můžeme vyjádřit $C_{\bar{p}}$ a dosadit do druhé rovnice.

$$C_{\bar{p}} = \frac{i\hbar}{A} \frac{dC_p}{dt} - \frac{T}{A} C_p - \frac{q\phi}{A} C_p$$

$$-\frac{\hbar^2}{A} \frac{d^2 C_p}{dt^2} - i\hbar \frac{T}{A} \frac{dC_p}{dt} - i\hbar \frac{q\phi}{A} \frac{dC_p}{dt} = i\hbar \frac{T}{A} \frac{dC_p}{dt} - \frac{T^2}{A} C_p - \frac{q\phi T}{A} C_p - i\hbar \frac{q\phi}{A} \frac{dC_p}{dt} + \frac{q\phi T}{A} C_p + \frac{q^2 \phi^2}{A} C_p + AC_p$$

Což lze zredukovat na

$$-\hbar^2 \frac{d^2 C_p}{dt^2} - 2i\hbar T \frac{dC_p}{dt} + T^2 C_p = q^2 \phi^2 C_p + A^2 C_p.$$

Stojí za povšimnutí, že celkový operátor na levé straně se dá shrnout do kvadrátu jiného, elegantnějšího.

$$\left(i\hbar \frac{d}{dt} - T \right)^2 C_p = (q^2 \phi^2 + A^2) C_p \quad (2)$$

Operátor na levé straně je vlastně operátor druhé mocniny rozdílu celkové energie E a kinetické energie. Rovnice (2) je tak identická s rovnicemi

$$(E - T)^2 C_p = (q^2 \phi^2 + A^2) C_p,$$

$$E = T \pm \sqrt{q^2 \phi^2 + A^2}. \quad (3)$$

Zajímavé je, že i amplituda $C_{\bar{p}}$ splňuje rovnici (2), tudíž i pro tento stav dostáváme energii (3). Zvláštní, opravdu mají oba stavy stejnou energii i přes svůj odlišný náboj? Samozřejmě ne! Sice energie obou stavů popisuje stejná rovnice, ale ta je k našemu štěstí kvadratická, tedy má dvě řešení. Je tak poměrně racionální domnívat se, že

každému stavu můžeme připsat jiné řešení. Asi bychom očekávali, že stav $|\bar{p}\rangle$ bude mít pro kladný potenciál ϕ nižší energii. Energie částicového stavu by tak měla mít formu

$$E_p = T + \sqrt{q^2\phi^2 + A^2}$$

a energie antičásticového stavu naopak

$$E_{\bar{p}} = T - \sqrt{q^2\phi^2 + A^2}.$$

Což je ale divné, ne? Energetický rozdíl obou stavů je $2\sqrt{q^2\phi^2 + A^2}$. Klasicky bychom očekávali pouze $2q\phi$. A naše očekávání je správné, vskutku nalezené energie nejsou energie stavů $|p\rangle$ a $|\bar{p}\rangle$. Ale co je to potom za energie?

Pokud rovnici (2) splňují obě amplitudy, C_p i $C_{\bar{p}}$, pak ji splňuje i jejich libovolná lineární kombinace. Tedy zaručeně existují dva bázevé stavy namixované z našich $|p\rangle$ a $|\bar{p}\rangle$ s přesně určenou energií, která je dána výrazem (3). Čili je jasné, že nějak bychom z celého systému dokázali vytahat změnu energie

$$2\sqrt{q^2\phi^2 + A^2} > 2q\phi.$$

Dobrá, ale jaký význam má onen člen A ? Odkud se bere? Pokud bychom provedli analogický výpočet pro částici se spinem v magnetickém poli, zjistíme, že nějaký hamiltonián přechodu spinu má nenulovou hodnotu v případě, kdy magnetické pole směřuje nějakou částí mimo zkoumaný směr spinu. Podobně tomu je i případě superponu. Směřuje-li nějaký vektor elektrické energie $\mathbf{U} = (U_t, U_\tau)$ mimo naši časovou osu, existuje určitá pravděpodobnost přechodu z částicového stavu do antičásticového.

Z Diracovy rovnice pro dvě časové dimenze [1] víme jednu skvělou vlastnost stavu superponu. Nechť je superpon ve stavu $|\mathbf{U} = 0\rangle$, pokud se nenachází v žádném elektrickém poli. Po zapnutí elektrického pole se dostane do stavu $|\mathbf{U}\rangle$. Oba stavy spolu souvisí jednoduchou de Broglievou evolucí.

$$|\mathbf{U}\rangle = |\mathbf{U} = 0\rangle e^{-i\mathbf{U}\cdot\mathbf{t}}$$

Nyní analyzujeme pouze skalární součin vystupující v přirozené exponenciále.

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{t} = U_t t + U_\tau \tau$$

Řekněme, že časová trajektorie superponu je přesně definována lineárním vztahem $\tau = kt$.

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{t} = U_t t + U_\tau kt = t\sqrt{(U_t + U_\tau k)^2} = \pm t\sqrt{U_t^2 + 2U_t U_\tau k + U_\tau^2 k^2}$$

Lze si snadno uvědomit, že $U_t^2 = q^2\phi^2$ a zbytek $A = \sqrt{2U_t U_\tau k + U_\tau^2 k^2}$. Tím ale přesně dostáváme

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{t} = \pm t\sqrt{q^2\phi^2 + A^2}.$$

Tímto jsme jednoduše převedli popis pomocí dvou časů na jednodimenzionální časové vyjádření. Dostali jsme tak očekávaný výsledek

$$|\mathbf{U}\rangle = |\mathbf{U} = 0\rangle e^{\pm it\sqrt{q^2\phi^2 + A^2}}.$$

Z něhož nám vypadávají dvě energie vyvolané elektrickým potenciálem, které jsou měřitelné v našem světě. Tyto energie jsou naprosto totožné s naším předchozím výsledkem a můžeme tedy říci, že popis pomocí přeskakování z jednoho stavu do druhého odráží skutečnost, že existuje i nějaké pole v tom druhém čase. Zároveň díky tomu víme, že pro představu toho, že dva časy existovaly dříve a zhroutily se do jednoho, je celý tento popis neplatný. Ačkoliv si superpon může zachovat svou krásnou superpozici, pořád v jednom čase nemůže existovat dodatečný potenciál U_τ a A je tak rovno nule. Žádné zajímavé výsledky v tomto případě člověk nenachází...

Efektivní náboj superponu

Zjistili jsme již, že žádné zajímavé výsledky související s dynamikou dvoubázových stavů u superponu neobdržíme, pokud se pohybuje pouze v jedné časové dimenzi nebo pokud má pole ϕ_τ nulovou hodnotu. Nicméně pořád i tak můžeme naměřit nějakou zajímavou experimentální deviaci, která by poukazovala na superpozici superponu i za absence pole ϕ_τ .

Nechť stav $|\text{sup}\rangle$ označuje superpoziční stav superponu.

$$|\text{sup}\rangle = \alpha|p\rangle + \beta|\bar{p}\rangle$$

Napišme pro tento stav Schrödingerovu rovnici, ve které vystupuje zatím pouze konstantní elektrická potenciální energie V superponu.

$$V|\text{sup}\rangle = \hat{V}|\text{sup}\rangle$$

Operátor potenciální energie působí tak, že každému stavu ($|p\rangle$ a $|\bar{p}\rangle$) přiřadí koeficient v podobě příslušné energie.

$$\hat{V}|p\rangle = q\phi|p\rangle$$

$$\hat{V}|\bar{p}\rangle = -q\phi|\bar{p}\rangle$$

q je náboj částice v ryze částicovém stavu. Po dosazení...

$$V(\alpha|p\rangle + \beta|\bar{p}\rangle) = \hat{V}(\alpha|p\rangle + \beta|\bar{p}\rangle)$$

$$V(\alpha|p\rangle + \beta|\bar{p}\rangle) = q\phi(\alpha|p\rangle - \beta|\bar{p}\rangle)$$

Nyní můžeme vynásobit rovnici výrazem $\langle\text{sup}| = \alpha^*\langle p| + \beta^*\langle\bar{p}|$.

$$V\langle\text{sup}|\text{sup}\rangle = q\phi(\alpha^*\langle p| + \beta^*\langle\bar{p}|)(\alpha|p\rangle - \beta|\bar{p}\rangle)$$

Stav $|\text{sup}\rangle$ je normován na jedničku.

$$V = q\phi(|\alpha|^2 - |\beta|^2)$$

Víme, že $|\alpha|^2$ a $|\beta|^2$ jsou jednotlivé pravděpodobnosti toho, že je superpon v daném stavu [1].

$$P_p = |\alpha|^2$$

$$P_{\bar{p}} = |\beta|^2$$

$$V = q\phi(P_p - P_{\bar{p}})$$

Superpon bude v poli působit jako by měl elektrický potenciál V . My bychom ho pak popisovali jako částici s nějakým nábojem q' . Tento náboj představuje pouze efektivní náboj superponu. Musí tak z definice platit $V = q'\phi$. A pro efektivní náboj tedy platí vztah níže.

$$\boxed{q' = (P_p - P_{\bar{p}})q}$$

Tento výsledek se dal očekávat. Když bude pravděpodobnost částicového stavu 100 %, bude efektivní náboj totožný s nábojem q , nábojem částice. Bude-li pravděpodobnost antičásticového stavu 100 %, efektivní náboj bude nyní $-q$. Klasicky náboj antičástice. A pokud je stav superponu 50 na 50, je efektivní náboj nulový.

Dynamika superponu

Nyní by nás zajímalo, jak obsáhnout kompletní popis dynamiky superponu. Výše spočtený potenciál a následně efektivní náboj funguje zatím jako kvalitní popis pouze pro konstantní potenciál. Nic ale nevíme o přesném kvantově-mechanickém chování superponu. Pokusme se vyjít z analogie ke klasické diracovské teorii nabitých částic.

Pro fermion se spinem $1/2$ má hustota lagrangiánu shrnující pohyb částice a její interakci s polem A^μ tvar

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + qA - m)\psi.$$

Dejme tomu, že operátor potenciálu \hat{V} z předchozí kapitoly převedeme na intuitivnější formu, na součin jakéhosi operátoru náboje a pole $\hat{q}\phi$. Hustotu lagrangiánu tak můžeme zobecnit i na případ superponů.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + \hat{q}A - m)\psi$$

Jak působí \hat{q} na vlnovou funkci? Odpověď dostaneme, rozepíšeme-li si vlnovou funkci v braketovém zápisu.

$$\psi(x^\mu) = \langle x^\mu | \psi \rangle$$

Víme, že stavový vektor superponu můžeme vyjádřit kombinací

$$|\psi\rangle = \alpha|p\rangle + \beta|\bar{p}\rangle.$$

Pokud tuto rovnici vynásobíme zleva stavem prostoročasové události částice $\langle x^\mu |$, dostaneme

$$\langle x^\mu | \psi \rangle = \psi(x^\mu) = \alpha p(x^\mu) + \beta \bar{p}(x^\mu),$$

kde funkce $p(x^\mu) = \langle x^\mu | p \rangle$ a její antičásticová obdoba $\bar{p}(x^\mu) = \langle x^\mu | \bar{p} \rangle$. Aplikujme tedy operátor \hat{q} na $\psi(x^\mu)$.

$$\hat{q}\psi(x^\mu) = \hat{q} \langle x^\mu | \psi \rangle = \langle x^\mu | \hat{q} | \psi \rangle$$

Nábojový operátor nepůsobí na stavový vektor události. Obecně vůči němu je náboj invariantní a konstantní. Nicméně co dělá nábojový operátor z principu? Násobí daný stavový vektor nábojem stavu, který popisuje. Naše stavy $|p\rangle$ a $|\bar{p}\rangle$ mají přesně definované náboje. q a $-q$. Proto platí

$$\hat{q}|\psi\rangle = q\alpha|p\rangle - q\beta|\bar{p}\rangle.$$

Díky této znalosti víme, jak působí operátor náboje na vlnovou funkci superponu.

$$\hat{q}\psi(x^\mu) = q\alpha \langle x^\mu | p \rangle - q\beta \langle x^\mu | \bar{p} \rangle = q(\alpha p(x^\mu) - \beta \bar{p}(x^\mu))$$

Lagrangián superponu nyní můžeme rozložit na jakousi kinematickou a interakční část.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\psi}\hat{q}A\psi$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\psi}qA(\alpha p - \beta \bar{p})}$$

Toto je obecný elektrodynamický lagrangián superponu. Z něho už dokážeme určit veškerou mechaniku superponu. Například z Eulerovy–Lagrangeovy rovnice dokážeme zpětně dovodit kvantově mechanickou pohybovou rovnici analogickou k Diracově.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right)$$

Vidíme, že lagrangián neobsahuje žádné derivace $\bar{\psi}$, čili pravá strana Eulerovy–Lagrangeovy rovnice se zjednoduší na nulu.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0$$

Po dosazení hustoty lagrangiánu získáme rovnici

$$(i\cancel{D} - m)\psi + q\cancel{A}(\alpha p - \beta \bar{p}) = 0.$$

Tato rovnice by měla být jen redukcí dvou dalších separátních.

$$(i\cancel{D} + q\cancel{A} - m)p = 0$$

$$(i\cancel{D} - q\cancel{A} - m)\bar{p} = 0$$

Což jsou jednoduše Diracovy rovnice jednotlivě pro částicový a antičásticový stav. Všimněme si, že u druhé rovnice je prohozeno znaménko náboje, jelikož náboj dané antičástice je v podstatě $-q$. Nyní vidíme, že vlnovou funkci superponu ψ zjistíme tak, že vyřešíme tyto dvě rovnice a pak lineární kombinací obou řešení dostaneme

$$\psi = \alpha p + \beta \bar{p}.$$

Klasická limita

Když už jsme formulovali kvantově-mechanický popis superponu, můžeme z něj přejít do klasického světa. Na základě rovnice pro vlnovou funkci superponu

$$(i\cancel{D} + \hat{q}\cancel{A} - m)\psi = 0$$

dokážeme zpětně určit relativistický hamiltonián superponu.

$$\hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \gamma^0 m - \hat{q}\vec{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \hat{q}\phi,$$

kde $\vec{\alpha}$ je vektor α matic

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní by nás zajímalo, jaký je dynamický zákon superponu v limitě klasické mechaniky. K Newtonovým zákonům superponu se dostaneme tak, že se pokusíme nalézt časovou změnu střední hodnoty hybnosti superponu, čímž bychom dostali klasický obraz síly.

$$\frac{d\langle \mathbf{p} \rangle}{dt} = i \langle \psi | [\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}] | \psi \rangle$$

Nejprve spočítejme komutátor hamiltoniánu a hybnosti.

$$[\hat{H}, \hat{p}_i] \psi = \vec{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \hat{p}_i \psi + \gamma^0 m \hat{p}_i \psi - \hat{q}\vec{\alpha} \cdot \mathbf{A} \hat{p}_i \psi + \hat{q}\phi \hat{p}_i \psi - \hat{p}_i (\vec{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi) - \hat{p}_i (\gamma^0 m \psi) + \hat{p}_i (\hat{q}\vec{\alpha} \cdot \mathbf{A} \psi) - \hat{p}_i (\hat{q}\phi \psi)$$

A pokud \hat{p}_i nahradíme diferenciálním operátorem $-i\partial_i$, dostáváme

$$[\hat{H}, \hat{p}_i] \psi = -i\hat{q}\vec{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \psi + i\hat{q} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi.$$

Nyní, abychom poznali, kdy operátor parciální derivace ∂_i působí pouze na potenciály a nic dalšího za nimi, začneme používat důraznější (zároveň kratší) zápis $\partial_i a = a_{,i}$.

$$[\hat{H}, \hat{p}_i] = -i\hat{q} (\vec{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{,i} - \phi_{,i})$$

Díky získanému komutátoru můžeme již dopočítat derivaci střední hodnoty hybnosti.

$$\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = \langle \psi | \hat{q} (\vec{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{,i} - \phi_{,i}) | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{q}\vec{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{,i} | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{q}\phi_{,i} | \psi \rangle$$

Abychom mohli pokračovat, musíme si uvědomit jednu věc. Chceme-li spočítat střední hodnotu veličiny A , provedeme to následujícím způsobem.

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = |\alpha|^2 \langle p | \hat{A} | p \rangle + |\beta|^2 \langle \bar{p} | \hat{A} | \bar{p} \rangle + \alpha\beta^* \langle \bar{p} | \hat{A} | p \rangle + \alpha^*\beta \langle p | \hat{A} | \bar{p} \rangle \quad (4)$$

Problematické je, že střední hodnota veličiny A středovaná přes funkci p se liší od střední hodnoty A dle rozdělení s \bar{p} . Některé členy dokonce odpovídají jakémusi středování přes obě funkce kombinovaně. Je tedy jasné, že například u případu střední hodnoty operátoru $\hat{q}\phi_i$ není výsledek v klasické kompozici $q' \langle \phi_i \rangle$, kterou bychom od klasické mechaniky možná očekávali. Ani žádnou efektivní sílu v tom nelze vidět. Proto nelze říci, že celou dynamiku v klasické limitě můžeme popsat klasickou lorentzovskou formou s efektivním nábojem. Čili nelze použít vztah typu

$$\mathbf{F} = q'(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

který by se zdál nanejvýše intuitivní. Je to další z divů kvantové mechaniky, který vzešel ze superpozice

$$|\psi\rangle = \alpha|p\rangle + \beta|\bar{p}\rangle.$$

Ostatně je to výsledek, který dodává superponům ještě větší mystičnost.

Nekonečná potenciálová jáma

Když už nelze superpony popsat klasicky, můžeme vyzkoušet vyřešit pár situací, v nichž tyto částice vystupují, kvantově mechanicky. První případ, který se nabízí je trochu nereálný, ale pro svou jednoduchost nám dokáže hezky ukázat, jak postupovat při obecnějších úlohách. Uvažme uzavřený, nepropustný jednodimenzionální box, který uvnitř vytváří všude konstantní elektrický potenciál ϕ . Z prostředí mimo krabici, kde je potenciál nulový, vženeme do krabice superpon. Jeho potenciální energie je rozštěpena na dvě hodnoty, které se řídí nábojovým stavem superponu. Obecný nerelativistický hamiltonián superponu v boxu má tvar

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{q}\phi.$$

Jelikož je systém časově nezávislý, dostáváme pro vlnovou funkci superponu Schrödingerovu rovnici ve tvaru

$$E\psi = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \phi \hat{q}\psi,$$

která se po aplikaci výše zmíněných postulátů rozpadne na dvě další rovnice.

$$Ep = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + q\phi p$$

$$E\bar{p} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} - q\phi \bar{p}$$

Obecná řešení těchto rovnic jsou

$$p(x) = c_1 \sin\left(x\sqrt{2m(E - q\phi)}\right) + c_2 \cos\left(x\sqrt{2m(E - q\phi)}\right),$$

$$\bar{p}(x) = c_3 \sin\left(x\sqrt{2m(E + q\phi)}\right) + c_4 \cos\left(x\sqrt{2m(E + q\phi)}\right).$$

Nehledě na to, jak okrajové podmínky ovlivňují hodnoty koeficientů c_1 , c_2 , c_3 a c_4 , můžeme psát finální vlnovou funkci superponu.

$$\psi = \alpha c_1 \sin\left(x\sqrt{2m(E - q\phi)}\right) + \alpha c_2 \cos\left(x\sqrt{2m(E - q\phi)}\right) + \beta c_3 \sin\left(x\sqrt{2m(E + q\phi)}\right) + \beta c_4 \cos\left(x\sqrt{2m(E + q\phi)}\right)$$

Každopádně vlnová funkce $\psi(x)$ nás zas až tolik nemusí zajímat. To, co je hlavní, je Fourierova transformace této vlnové funkce. Čili vlnová funkce $\Phi(p_x)$ popisující distribuci hybnosti superponu p_x .

$$\Phi(p_x) = \kappa \mathcal{F}[\psi(x)](p_x)$$

κ je neznámá integrační konstanta.

$$\begin{aligned} \Phi(p_x) = & \kappa_1 \alpha \delta\left(p_x - \sqrt{2m(E - q\phi)}\right) + \kappa_1 \alpha \delta\left(p_x + \sqrt{2m(E - q\phi)}\right) + \\ & + \kappa_2 \beta \delta\left(p_x - \sqrt{2m(E + q\phi)}\right) + \kappa_2 \beta \delta\left(p_x + \sqrt{2m(E + q\phi)}\right) \end{aligned}$$

Jednotlivé části příslušných nábojových stavů musí do výsledku přispívat měrou danou koeficienty α a β . Z toho vyplývá, že $\kappa_1 = \kappa_2$. A aby platila jednotková norma vlnové funkce v hybnosti, musí $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/\sqrt{2}$.

Spočteme nyní střední hodnotu kvadrátu hybnosti.

$$\langle p_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp_x p_x^2 \Phi(p_x) \Phi^*(p_x) = 2m(E - q\phi)|\alpha|^2 + 2m(E + q\phi)|\beta|^2$$

Jinými slovy střední kinetická energie je

$$\langle T \rangle = (|\alpha|^2 + |\beta|^2) E - (|\alpha|^2 - |\beta|^2) q\phi = E - q'\phi.$$

A vzhledem k tomu, že $E = \langle T \rangle + \langle V \rangle$, je střední potenciální energie superponu přesně rovna $q'\phi$, což je výsledek, který jsme pro konstantní potenciál obdrželi již dříve, ovšem úplně jinou optikou. Náš aparát takto vypadá konzistentně.

Atom vodíku

Zkusme se nyní podívat, jak vypadají energetické hladiny speciálního atomu vodíku s klasickým protonem, avšak se superponovaným elektronem. Počítejme klasicky se statickým středem s elementárním nábojem a celou kvantovou mechaniku provádějme jenom na obíhajícím superponu. Jaká je jeho energie E , popisujeme-li ho vlnovou funkcí ψ a jeho energetickým hamiltoniánem \hat{H} ?

$$E = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$$

Na základě vzorce (4) můžeme výraz pro energii rozepsat jako

$$E = |\alpha|^2 \langle p | \hat{H} | p \rangle + |\beta|^2 \langle \bar{p} | \hat{H} | \bar{p} \rangle + \alpha\beta^* \langle \bar{p} | \hat{H} | p \rangle + \alpha^*\beta \langle p | \hat{H} | \bar{p} \rangle$$

$p(\mathbf{r})$, kde \mathbf{r} značí polohový vektor, představuje klasické řešení atomu vodíku, kdežto $\bar{p}(\mathbf{r})$ popisuje pravděpodobnostní rozložení pro pozitron pohybující se kolem protonu. Kvůli souhlasným nábojům se bude pozitron držet daleko od protonu, kde se bude $\bar{p}(\mathbf{r})$ chovat jako konstanta limitně jdoucí k nule. $\bar{p}(\mathbf{r})$ je tedy téměř řešení pro volnou částici vyjma oblasti v těsné blízkosti jádra, kde jde vlnová funkce ještě víc k nule. Každopádně řešení $\bar{p}(\mathbf{r})$ má nekvantovanou energii. V nekonečnu, mimo působení protonu, si ale můžeme zvolit energii jako nulovou (u běžného řešení atomu vodíku se taky tak činí). Z této logiky by hned druhý člen měl být roven nule, jelikož souvisí čistě s energií pozitronu.

$$\langle \bar{p} | \hat{H} | \bar{p} \rangle = 0$$

taky může být. Stejnou podmínku můžeme nastavit například pro základní stav. Rozdíl je v tom, že zde dostáváme řešení pro elektron kvantované, kdežto energie pozitronu tvoří v tomto případě jen konstantní příspěvek k celému systému. Logicky referenčně jsme ho položili rovný nule. Rozdíl mezi jednotlivými hladinami tak bude skutečně způsobovat pouze první člen (elektronová část), to nám však nebrání, aby v počátečním stavu měly obě složky stejnou energii. Problém je pak v energetickém přechodu. Tam už se změní energie elektronové části oproti té pozitronové. V klasickém pohledu by tohle byl způsob jak poznat, že je v atomu elektron a ne pozitron, jelikož pozitron by už dávno odputoval pryč a atom by se rozpadl. Nicméně musíme mít stále na paměti, že v kvantové mechanice se tyto dva stavy navzájem komplementárně doplňují a v průběhu celé existence se na sebe navzájem přelévají a nelze tak říci, že v atomu byl celou dobu jen pozitron nebo jenom elektron. Je to jeden společný objekt – superpon. jeden objekt, jeden systém s vlastní kvantovanou energií, která vypadá následovně:

$$E = |\alpha|^2 \langle p | \hat{H} | p \rangle.$$

Tím, že je $p(\mathbf{r})$ řešení pro běžný atom vodíku, supluje nám celá braketová závorka onu energii běžného atomu vodíku.

$$\langle p | \hat{H} | p \rangle = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Přičemž $n \in \mathbb{N}$ představuje v tomto případě hlavní kvantové číslo, m_e hmotnost elektronu a e elementární náboj. Po dosazení tak dostáváme energii atomu vodíku se superponujícím elektronem.

$$E = -|\alpha|^2 \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Všimněme si, že ať je pravděpodobnost existence elektronu sebemenší, pořád se zde vytváří slabá přitažlivá vazba, která drží atom pohromadě a vytváří určité energetické hladiny, ačkoliv je jeho efektivní náboj kladný...

Fluktuace dodatečných časových dimenzí

Na základě všech předchozích poznatků se teď v poslední části můžeme podívat na poměrně odvážnou hypotézu. Představme si klasický atom běžící v čase. Nyní uvažujme, že z nějakého důvodu se v malých rozměrech vytváří dodatečné časové dimenze, pouze ale omezené a ohrazené. Dejme tomu, že sledujeme časoprostorovou trajektorii jádra a vůči ní trasujeme pohyb ostatních částic. Řekněme, že se velikostně vychýlí elektron v dodatečných časových dimenzích o délku $c\Delta\tau$ vůči jádru. V časovém prostoru se tak superponovaný elektron odchýlí o úhel θ definovaný v pojednání [1], který bude mít tvar

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\Delta\tau}{\Delta t},$$

kde Δt značí příslušné posunutí celé soustavy v normálním čase. Čili je možné, že při vytvoření nějakého malého intervalu dodatečných časových dimenzí se může elektron odchýlit od jádra, čímž vůči jádru změní svou částicově antičásticovou povahu a koeficient α dle vztahu

$$|\alpha|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Po dosazení výše vyjádřeného úhlu dostaneme

$$|\alpha|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta\tau^2}{\Delta t^2}}} \right).$$

Nyní přichází na řadu naše ústřední myšlenka. Jak nejvíc se může elektron za nějaký čas Δt odchýlit o $\Delta\tau$, abychom to ještě nepoznali? Může se stát, že se elektron odchýlí o úhel θ , čímž se z pohledu jádra lehce natočí referenční časová soustava, v níž se elektron pohybuje, a naopak. Naštěstí se ukazuje, že oba pohledy jsou zcela symetrické.

Dostaneme stejný výsledek, ať už uvažujeme, že superponuje elektron, nebo že stejnou měrou superponuje jádro. Jde o to, že se částice může fluktuací lehce odchýlit podél vedlejších časových os a začít tak lehce superponovat. Nyní zbývá pouze otázka, jak moc. Kdyby se tento efekt skutečně děl, měnila by se spektroskopická povaha atomů, neboť energie atomu by rovněž kolísala kolem základní energie atomu vodíku. To bychom ale jistojistě pozorovali ve změně spektrálních čar. Každopádně i my jako měřidla máme určitou přesnost. Proto existuje jistý poměr $\Delta\tau/\Delta t$, při kterém již žádnou změnu nebudeme schopni pozorovat a to dokonce nejen díky naší experimentální omezenosti, ale i elementárně díky kvantovým vlastnostem přírody. Každopádně, ať je maximální možná odchylka $\Delta\tau$ jakákoliv, bude mnohonásobně menší než Δt , můžeme tedy aproximovat výše uvedený vztah.

$$|\alpha|^2 \approx \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\tau^2}{\Delta t^2} \right) = 1 - \frac{1}{4} \frac{\Delta\tau^2}{\Delta t^2}$$

A jaké jsou vlastně ty elementární kvantové meze přírody? Můžeme si domyslet, že určitou hranici bude tvořit Planckova délka (ℓ_P) při měření spektroskopické vlnové délky. A teď jde o to, jaké. Respektive při kterém přechodu. Vlnovou délku přechodu v našem hypotetickém atomu bychom obecně spočítali jako

$$\lambda = \frac{8c\varepsilon_0^2 h^3}{m_e e^4 |\alpha|^2} \frac{i^2 j^2}{i^2 - j^2}$$

při přechodu elektronu z i -té energetické hladiny do j -té. Můžeme už dosadit $|\alpha|^2$ a s aproximací pro malá $\Delta\tau$ psát

$$\lambda = \frac{8c\varepsilon_0^2 h^3}{m_e e^4} \frac{i^2 j^2}{i^2 - j^2} + \frac{2c\varepsilon_0^2 h^3}{m_e e^4} \frac{\Delta\tau^2}{\Delta t^2} \frac{i^2 j^2}{i^2 - j^2}$$

Vidíme, že jako první člen jsme obdrželi klasickou vlnovou délku emise při přechodu elektronu v atomu vodíku. Druhý člen je způsobný drobným chodem mimo základní časovou linii a s tím spojenou superpozicí elektronu a pozitronu. Abychom nikdy nic nemohli poznat, musí být tento dodatečný příspěvek pod Planckovou délkou.

$$\frac{2c\varepsilon_0^2 h^3}{m_e e^4} \frac{\Delta\tau^2}{\Delta t^2} \frac{i^2 j^2}{i^2 - j^2} < \ell_P$$

Tato nerovnice je ekvivalentní s nerovnicí

$$\Delta\tau < \Delta t \frac{e^2}{ij\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m_e \ell_P (i^2 - j^2)}{2ch^3}}.$$

Nyní nás zajímá, jaký přeskok elektronu má úplně nejnižší energii, čili největší vlnovou délku, abychom odhalili tu nejextrémnější situaci, která je skutečně na hranici našich zjišťovacích možností. Největší vlnovou délku přechodu získáme pro těsně sousedící i a j , čili $i = j + 1$. Zároveň čím dál tyto orbity budou, tím větší vlnovou délku obdržíme. Proto se budeme pohybovat ve sféře vysokých i a j , pro něž můžeme použít následující aproximaci:

$$\frac{\sqrt{i^2 - j^2}}{ij} = \frac{\sqrt{2j + 1}}{j(j + 1)} \approx \sqrt{\frac{2}{j^3}},$$

kterou využijeme pro zjednodušení nerovnice výše.

$$\Delta\tau < \Delta t \frac{e^2}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m_e \ell_P}{ch^3 j^3}}$$

Vidíme, že pro $j \rightarrow \infty$ pravá strana konverguje k nule a máme tak $\Delta\tau = 0$. Žádná fluktuace vedlejších časových dimenzí neprobíhá, protože obecně v našem modelu atomu může být j libovolné přirozené číslo. Vzhledem k tomu, že hledáme takové $\Delta\tau$, které bude splňovat nerovnici pro všechna j , vypadá to, že naše pátrání skončilo na hodnotě $\Delta\tau = 0$. Jenomže tato matematická podmínka nezahrnuje jeden fyzikální fakt. Pro hodně vysoká j nemůže již

atom existovat. Jak ale zhodotíme, zda může, nebo ne? Podle času, po který se dokáže elektron na orbitě udržet. Se vzrůstajícím j bude tento čas klesat, až jednou klesne i pod Planckův čas ($t_P = \ell_P/c$).

Označme $\chi(t)$ amplitudu pravděpodobnosti toho, že elektron zůstane na j -té orbitě. Ta bude záviset na čase dle předpisu

$$\chi(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^j (E_j - E_i) t/\hbar\right),$$

kde

$$E_i = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{i^2}$$

je energie i -tého stavu. Pro přehlednost zavedme substituci

$$\Omega = \sum_{i=1}^j (E_j - E_i)/\hbar = \frac{\pi m_e e^4}{4\varepsilon_0^2 \hbar^3} \sum_{i=1}^j \frac{j^2 - i^2}{i^2 j^2}.$$

$$\chi(t) = e^{-\Omega t}$$

Střední dobu $\langle t \rangle$, kterou elektron na orbitě stráví poté, co se na ni dostane, spočteme jako

$$\langle t \rangle = -\int_0^\infty t \frac{d}{dt} (\chi \chi^*) dt = -\int_0^\infty t \frac{d}{dt} (e^{-2\Omega t}) dt = 2\Omega \int_0^\infty t e^{-2\Omega t} dt = \frac{1}{2\Omega}.$$

Sice střední čas neznamena absolutní čas, za který elektron stoprocentně opustí slupku, to se může stát klidně i později. Nicméně tato hranice slouží jako dobrý orientační bod pro atom, který jen stěží v přírodě kdy existoval a kdy existovat bude. A pokud ho ani příroda neviděla, pak z principů kvantové mechaniky se můžou na řádu příslušného $\Delta\tau$ díť všelijaké neplechty. A nejen to, ony se z jisté filozofie běžně dějí!

Každopádně vraťme se k výpočtu středního času.

$$\langle t \rangle = \frac{2\varepsilon_0^2 \hbar^3}{\pi m_e e^4} \left(\sum_{i=1}^j \frac{j^2 - i^2}{i^2 j^2} \right)^{-1}$$

Jak jsme již zmínili, tento čas musí být větší než Planckův čas.

$$\langle t \rangle > t_P$$

$$\frac{2\varepsilon_0^2 \hbar^3}{\pi m_e e^4} \left(\sum_{i=1}^j \frac{j^2 - i^2}{i^2 j^2} \right)^{-1} > \frac{\ell_P}{c}$$

$$\sum_{i=1}^j \frac{j^2 - i^2}{i^2 j^2} < \frac{2c\varepsilon_0^2 \hbar^3}{\pi m_e \ell_P e^4}$$

Nyní už se vyplatí náš problém řešit numericky. Pravá strana vychází po dosazení všech konstant přibližně jako $5 \cdot 10^{26}$, což je poměrně hodně. Může vůbec někdy tuto hodnotu překonat řada na levé straně? Ukazuje se, že pro rostoucí j je taktéž rostoucí, ovšem je omezená, má jisté supremum, které si dokážeme snadno spočítat.

$$\sup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^j \frac{j^2 - i^2}{i^2 j^2} \right\} \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j \frac{j^2 - i^2}{i^2 j^2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Náš výsledek ukazuje, že pro všechna přirozená j je nerovnost splněná. Neexistuje tak žádná orbita, na které by elektron setrval ve střední hodnotě kratší čas než Planckův. Z našich výsledků tak vychází, že $\Delta\tau = 0$. V tom případě neexistuje žádná kvantová hranice nezjistitelnosti fluktuace ve druhých časových dimenzích, jedinou hranicí je lidská omezenost v měření. Postupem času s větší a větší přesností však budeme posouvat nejistotu v $\Delta\tau$ až na nulu, nebo se naměří jisté odchylky a ukáže se, že má vesmír skutečně více časových dimenzí. Tohle by byl asi jeden z dobrých způsobů, jak takový fakt zjistit. Nebo celý náš koncept by mohl být dobrým teoretickým vysvětlením pro nějaké případné anomálie v budoucím spektroskopickém měření.

Závěr

Ukázali jsme si nějaké základní dynamické vlastnosti nabitého superponu v elektrickém poli (rovnici, lagrangián atd.) a poté jsme se zaměřili na nějaké důsledky, které z jejich záhadné superpozice v kombinaci s účinky elektrického pole plynou. Ukazuje se, že mnohem více anomálií ve spektroskopickém měření jsme schopni pozorovat právě tehdy, když má náš vesmír více časových dimenzí. Pokud jich více pouze měl a všechny superpony jsou tak zbytkové, vyprchají superpoziční vlastnosti poměrně rychle a nic moc zajímavého pozorovat nebudeme.

Toto byl jen takový ukázkový nástřel toho, jak se se superpony dá počítat. Samozřejmě jejich přesný vztah k více časovým dimenzím by vyžadovalo přesnou relativistickou analýzu např. v obecném AdS prostoročase. Což je problém pouhé vyšší obecnosti a formality, ale základní myšlenky byly snad v této úvaze podány jasně.

Reference

- [1] G., Filos. *Majoranovy fermiony jako částice ve 2D čase*. 23. 7. 2023
- [2] FEYNMAN, Richard P., LEIGHTON, Robert B., SANDS, Matthew. *Feynmanovy přednášky z fyziky 3*. Praha: Fragment, 2018.