欧拉函数

> 本来好好的刷着排列组合的题目鬼知道怎么蹦出来了一个欧拉函数的题，以前也没有接触过，那就只能学一学喽

整理自oi-wiki-欧拉函数

背景知识

当需要求取多个数的欧拉函数时，需要借助**埃氏筛**和**欧拉筛**的相关思想。

埃氏筛(Eratosthenes)

时间复杂度为 $O(nlglgn)$，~~我不会证QAQ~~

```
// 埃氏筛思想：从小到大逐个得到小于 n 的质数
// 每得到一个质数，就将 n 以内该质数的所有倍数筛去
int Eratosthenes(int n, int *pri){
    for(int i = 2; i <= n; ++i){
        if(!vis[i]){    // 满足该条件说明 i 为质数
            pri[cnt++] = i;
            // 筛去所有质数的倍数
            // 对于 k * i, 当 k < i 时该数已经被 k 筛去
            // 故 k 从 i 开始
            for(long long j = i * i * 1ll; j <= n; j += i)
                vis[j] = 1;
        }
}
```

欧拉筛

时间复杂度为 $O(n)$，每一个数仅被访问一次

```
// 欧拉筛思想: 枚举从 1 到 n 的所有数 i
// 使 i 乘上所有已求得的质数筛去合数
// 通过最小因子的思想进行线性优化，即每一个数都被其最小因子筛掉，而不是被其他因子筛掉
int Euler(int n, int *pri){
    for(int i =2; i <= n; ++i){
        if(!vis[i]) pri[cnt++] = i; // 满足该条件说明 i 为质数
        for(int j = 0; j < cnt; ++j){
            if(1ll * pri[j] * i > n) break;
            vis[i * pri[j]] = 1;
            // 下面的代码是优化的核心
            // 对于 i * pri[j], 若 i % pri[j] == 0
            // 则 i = pri[j] * n'
            // 那么对于 i * pri[k], k > j
            // i * pri[k] = pri[j] * n' * pri[k] = pri[j] * (n' * pri[k])
            // 其中 pri[j] 是 i * pri[k] 的最小因子
            // 数 i * pri[k] 在之后会通过 pri[j] * (n' * pri[k]) 筛掉，无需在此处筛去
            if(i % pri[j] == 0) break;
        }
    }
}
```

欧拉函数(Euler's totient function)的定义

使用 $\phi(x)$ 来代表欧拉函数，其表示的是小于等于 x 和 x 互质的数的个数。根据定义我们可以知道 $\phi(1)=1$，当 p 为质数时 $\phi(p)=p-1$。注意，1 与任何数都互质。

欧拉函数的性质

- 欧拉函数是积性函数
  欧拉函数为积性函数是指当 a,b 两个数互质时，即 $gcd(a,b)=1$，$\phi(a\times b)=\phi(a)\times\phi(b)$
  特别的，当 n 为奇数时，$\phi(2n)=\phi(n)$
- $n=\sum_{d|n}\phi(d)$
  上述公式可以解释为所有 n 的因数的欧拉函数的和为 n 本身。可以使用莫比乌斯反演来证明，然而我不会。此处使用其他方法证明。
  条件一：如果 $gcd(k,n)=d$，即 k 与 n 的最大公因数为 d，那么当 k 与 n 同时除以 d 时（k 和 n 一定可以整除 d），$\frac{k}{d}$ 与 $\frac{n}{d}$ 互质。有 $gcd(\frac{k}{d},\frac{n}{d})=1$
  条件二：如果令 $f(x)$ 表示满足 $gcd(k,n)=x$ 的 k 的个数，即 $f(x)$ 为所有小于等于 n 的数中和 n 的最大公倍数为 x 的数的个数，那么有

$$n = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

其原因在于，对于任意从 1 到 n 之间的数字 m，m 只可能与 n 有唯一的一个最大公因数 i，且 $i \le n$，那么我们只需枚举从 1 到 n 中所有的数字 i 作为最大公因数，并累加 $f(i)$，其就代表枚举了 m 从 1 到 n 的所有情况，故 $\sum_{i=1}^{n} f(x) = n$

根据上述两个条件，我们可以找到 $f(x)$ 定义的等价形式，即$f(x)$ 表示满足 $gcd(\frac{k}{x}, \frac{n}{x}) = 1$ 的 k 的个数，把 $\frac{k}{x}$ 看做 k，则 $f(x)$ 表示满足 $gcd(k, \frac{n}{x}) = 1$ 的 k 的个数，根据欧拉函数的定义，可以发现 $f(x) = \phi(\frac{n}{x})$。
这时有 $n = \sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\frac{n}{i}) = \sum_{d|n} \phi(d))$。

- 若 $n = p^k$，且 p 为质数，那么 $\phi(n) = p^k - p^{k-1}$。原因是从 1 到 n 中所有与 n 不互质的数的个数有 $n/p = n^p/p = p^{k-1}$ 个，故与 n 互质的数的个数有 $n - p^{k-1} = p^k - p^{k-1}$ 个。
- 由唯一分解定理，设 $n = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$，由于 $\phi(n)$ 为积性函数，故

$$\begin{aligned} phi(n) &= \prod_{i=1}^{n} \phi(p_i^{k_i}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (p^k - p^{k-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} p_i^k (1 - \frac{1}{p_i}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} p_i^k \times \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_i}) \\ &= n \times \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_i}) \end{aligned}$$

我们可以得到欧拉函数的对应公式：

$$\phi(n) = n \times \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_i})$$

求出单个欧拉函数的值

我们可以简单的根据上述欧拉公式来求得单个欧拉函数的值：

```
int euler_phi(int x){
    int ans = n;
    for(int i = 2; i * i <= n; ++i){
        if(n % i == 0){
            ans = ans / i * (i - 1);
            whiel(n % i == 0) n /= i;
        }
    }
    // 特判 n 为质数的情况
    if(n > 1) ans = ans / n * (n-1);
    return n;
}
```

上述方法可以使用 Pollard Rho进行优化，然而菜鸡的我现在貌似还用不到。

求出多个欧拉函数的值

借助上述的公式，我们可以借用埃氏筛的思想求欧拉函数：

```
void phi_table(int n, int *phi){
    for(int i = 2; i <= n; ++i) phi[i] = 0;
    phi[1] = 1;
    for(int i = 2; i <= n; ++i)
        if(!phi[i]){
            for(int j = i; j <= n; j += i){
                if(!phi[j]) phi[j] = j;
                phi[j] = phi[j] / i * (i - 1);
            }
}
```

我们通过欧拉筛来线性求解多个欧拉函数的值。首先需要进行公式推导:

在欧拉筛的过程中，每一个合数都是被其最小因数筛掉的，我们设该最小因数为 p_1，剩余部分为 n'，两者满足关系 $p_1 * n' = n$。
考虑 n' 的两种情况，如果 $n' \bmod p_1 = 0$，则 n' 包含了 n 的全部质因子。

$$\begin{aligned}\phi(n) =& n \times \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i - 1}{p_i} \\ =& p_1 \times n' \times \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i - 1}{p_i} \\ =& p_1 \times \phi(n')\end{aligned}$$

如果 $n' \bmod p_1 \neq 0$，则 p_1 和 n' 互质，根据欧拉函数的性质有

$$\begin{aligned}\phi(n) =&\phi(n') \times \phi(p_1) \\ =&\phi(n') \times (p_1 - 1)\end{aligned}$$

据此，我们可以在通过欧拉筛得到质数的同时得到欧拉函数

```
int euler(int n, int* phi, int* pri){
    phi[1] = 1;
    for(int i = 2; i <= n; ++i){
        if(!vis[i]){
            // 对于质数直接进行标记
            phi[i] = i - 1;
            pri[cnt++] = i;
            vis[i] = 1;
        }
        for(int j = 0; j < cnt; ++j){
            if(1ll * pri[j] * i > n) break;
            vis[i * pri[j]] = 1;
            if(i % pri[j]){
                // 对应第二种情况
                phi[i * pri[j]] = phi[i] * (pri[j] - 1);
            }else{
                // 对应第一种情况
                phi[i * pri[j]] = phi[i] * pri[j];
                break;
            }
        }
    }
}
```