《金融经济学二十五讲》课程讲义

第10讲
求解完备市场中的一般均衡

徐高 博士

2019年3月23日

C-CAPM讨论路线图

	CAPM	C-CAPM
偏好	均值-方差偏好	期望效用 （第8讲）
行为	组合优化	不确定性下的行为 （第9讲）
均衡	部分均衡（资产市场）	一般均衡（整个经济） （第10讲）
资产定价	证券市场线（SML）	C-CAPM定价方程 （第11、12讲）

10.1 资产市场
不确定性的描述

- 简化假设
  - 消费品不可储存（non-storable）——无需考虑商品储存问题
  - 消费品以禀赋的形式外生给定——无需考虑生产问题
- 不确定性的描述（静态）
  - 两个时期：今天（0期），未来（1期）
  - 未来（1期）的每一种可能情形都定义为一个**状态**（state），并以s表示
  - S表示所有可能状态组成的集合（未来总共有S种可能性）
  - $0<\pi_s\leq 1$，$\sum_s \pi_s=1$
  - **概率测度**（probability measure）：$\prod=\{\pi_s, s\in S\}$
  - **随机变量**（random variable）：S维向量（vector）
  - 风险资产的回报率：$\tilde{r}=(r_1, r_2, \ldots, r_S)^T$。

10.1 资产市场
资产及其支付

- 资产*j*的（1期）支付向量义

$$\mathbf{x}^j = \begin{bmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_S^j \end{bmatrix}$$

- *J*种资产组成的资产市场的（1期）**支付矩阵**（payoff matrix）

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & J \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^J \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_S^1 & \cdots & x_S^J \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ S \end{array}$$

- *J*种资产的0期价格（以0期消费品为计价物）

$$\mathbf{p} \triangleq [p_1 \quad \cdots \quad p_J]$$

- 资产定价问题：$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}$

10.1 资产市场
资产组合

- **资产组合（portfolio）：** 对各类资产持有量组成的向量$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \ldots, \theta_J)^T$，其中的第$j$个元素代表第$j$类资产持有的数量
- 资产组合的支付

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{J} x_1^j \theta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{J} x_S^j \theta_j \end{bmatrix} = \mathbf{x}\boldsymbol{\theta}$$

- 资产组合的0期价值为

$$\sum_{j=1}^{J} p_j \theta_j = \mathbf{p}\boldsymbol{\theta}$$

10.2 完备市场和Arrow-Debreu市场
完备市场

- **定义10.1**：我们称一个资产市场**x**是**完备**（complete）的，如果任何一个1期的消费计划都可以通过某个资产组合来实现
- 在一个完备的市场中，任给一个1期的消费计划$\mathbf{c}=(c_1, ..., c_S)^T$，都能找到一组组合权重$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, ..., \theta_J)^T$是下面方程组的解（其中的$\theta_j$是消费者持有的资产$j$的数量）

$$c_s = \sum_{j=1}^{J} x_s^j \theta_j \qquad s = 1, 2, \cdots, S$$

- 从经济学意义上来说，所谓完备市场，就是消费者可以通过买卖市场上的资产，在任何两个状态之间调配资源。
- 为什么要特别关心完备市场？
  - 所有的完备市场都是等价的，任意一个完备市场中得到的结论对所有完备市场都适用。
  - 在完备市场中，消费者有最高的灵活度，可以实现最有效的风险的配置
  - 完备的市场处理起来比非完备市场容易很多——完备的市场都是一样的，但非完备的市场各有各非完备的方式。

10.2 完备市场和Arrow-Debreu市场

完备与非完备市场示例

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{状态1} \\ \text{状态2} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{状态1} \\ \text{状态2} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & \text{无} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{状态1} \\ \text{状态2} \\ \text{状态3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Arrow-Debreu市场与Arrow证券

- **Arrow—Debreu市场**（Arrow—Debreu Market）

$$\mathbf{I} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- **Arrow证券**（Arrow security）

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ s \\ \vdots \\ S \end{matrix}$$

10.2 完备市场和Arrow-Debreu市场

Arrow证券与资产定价

- **状态价格**（state price）：Arrow证券$\mathbf{I}_s$在当前（0期）的价格φ_s——1期某个状态下1单位支付在0期的价格

$$\boldsymbol{\varphi} \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_S \end{bmatrix}$$

- 资产j当前的价格（用Arrow证券来构造资产j的组合为$\mathbf{x}^j$）

$$p_j = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{x}^j = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^j$$

- 所有J种资产的价格

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}\mathbf{x}^1 & \cdots & \boldsymbol{\varphi}\mathbf{x}^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^1 & \cdots & \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^J \end{bmatrix}$$

- 从完备市场中S种线性无关的资产的价格反推Arrow证券价格

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{p}\mathbf{x}^{-1}$$

10.2 完备市场和Arrow-Debreu市场

无风险资产

- 无风险资产是在各个状态中支付都为1的资产

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 无风险资产在0期的价格（记为ρ）等于所有Arrow证券的价格之和

$$\rho = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{1} = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s$$

10.3 完备市场中的均衡
消费者优化问题

- 消费者的优化问题：给定在0期及1期S个状态中的消费品禀赋（e_0、e_1、…、e_S），选择对所有J种资产的持有量$(\theta_1, \ldots, \theta_J)$来最大化期望效用

$$\max_{\theta_1,\cdots,\theta_J} u(c_0)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s)$$

$$\text{s.t.}\qquad c_0=e_0-\sum_{j=1}^{J}p_j\theta_j$$

$$c_s=e_s+\sum_{j=1}^{J}x_s^j\theta_j \qquad (s=1,\cdots,S)$$

- 运用Arrow证券将消费者优化问题简化为（$(\theta_1, \ldots, \theta_S)$为对Arrow证券的持有量）

$$\max_{\theta_1,\cdots,\theta_S} u(c_0)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s)$$

$$\text{s.t.}\qquad c_0=e_0-\sum_{s=1}^{S}\varphi_s\theta_s$$

$$c_s=e_s+\theta_s \qquad (s=1,\cdots,S)$$

10.3 完备市场中的均衡
消费者优化问题求解

- 消费者的优化问题改写为（1期约束代入0期约束中）

$$\max_{c_1,\cdots,c_S} u(c_0)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s)$$

$$\text{s.t.}\qquad c_0+\sum_{s=1}^{S}\varphi_s(c_s-e_s)=e_0$$

- 优化条件推导

$$\mathcal{L}=u(c_0)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s)+\lambda\left(e_0-c_0-\sum_{s=1}^{S}\varphi_s(c_s-e_s)\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_0}=0:\qquad u'(c_0)=\lambda$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_s}=0:\qquad \delta\pi_s u'(c_s)=\lambda\varphi_s\qquad s=1,\cdots,S$$

$$\frac{\pi_s u'(c_s)}{\pi_{s'}u'(c_{s'})}=\frac{\varphi_s}{\varphi_{s'}}$$

10.4 均衡算例

一般均衡的求解方法

- **第一步，微观主体优化问题求解：**把所有价格当成给定，求取所有消费者的优化问题，把消费者的行为（消费、储蓄、资产组合构成）表示为价格的函数

- **第二步，市场出清求解均衡：**把微观主体优化行为（表示为价格的函数）代入各个市场的出清条件，得到只包含价格的方程组，从中求得均衡的价格，进而确定均衡中所有变量取值

10.4 均衡算例
条件

- **状态：**在1期有两个可能的状态a和b，发生的概率各为50%
- **资产：**市场中有两种资产。无风险债券（第1列）与股票（第2列）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- **消费者：**
  - 消费者1的即期效用函数为$u_1(c)=\log c$
  - 消费者2的即期效用函数为$u_2(c)=2c^{1/2}$
  - 两位消费者的主观贴现因子都为1（$\delta_1=\delta_2=1$）
- **禀赋**
  - 消费者1在 0时期拥有1单位的消费品（ 0期价值为1 ）
  - 消费者2在0时期拥有1单位的股票（0期价值为与$\varphi_a/2+2\varphi_b$ ）

10.4 均衡算例

消费者1的优化问题

- 优化问题
$$\max_{c_{1,0},c_{1,a},c_{1,b}} \log c_{1,0}+\tfrac{1}{2}\log c_{1,a}+\tfrac{1}{2}\log c_{1,b}$$
$$\text{s.t.}\quad c_{1,0}+\varphi_a c_{1,a}+\varphi_b c_{1,b}=1$$

- 设定拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=\log c_{1,0}+\tfrac{1}{2}\log c_{1,a}+\tfrac{1}{2}\log c_{1,b}+\lambda_1\left(1-c_{1,0}-\varphi_a c_{1,a}-\varphi_b c_{1,b}\right)$$

- 一阶条件
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{1,0}}=0:\qquad \frac{1}{c_{1,0}}=\lambda_1$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{1,a}}=0:\qquad \frac{1}{2c_{1,a}}=\lambda_1\varphi_a$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{1,b}}=0:\qquad \frac{1}{2c_{1,b}}=\lambda_1\varphi_b$$

10.4 均衡算例
消费者1的优化问题（续）

- 一阶条件代入预算约束

$$\frac{1}{\lambda_1}+\varphi_a\frac{1}{2\lambda_1\varphi_a}+\varphi_b\frac{1}{2\lambda_1\varphi_b}=1$$

- 从中解出$\lambda_1=2$。所以

$$c_{1,0}=\frac{1}{2},\qquad c_{1,a}=\frac{1}{4\varphi_a},\qquad c_{1,b}=\frac{1}{4\varphi_b}$$

消费者2的优化问题

- 优化问题

$$\max_{c_{2,0},c_{2,a},c_{2,b}} \ 2\sqrt{c_{2,0}}+\sqrt{c_{2,a}}+\sqrt{c_{2,b}}$$
$$\text{s.t.} \quad c_{2,0}+\varphi_a c_{2,a}+\varphi_b c_{2,b}=\varphi_a/2+2\varphi_b$$

- 设定拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=2\sqrt{c_{2,0}}+\sqrt{c_{2,a}}+\sqrt{c_{2,b}}+\lambda_2\left(\varphi_a/2+2\varphi_b-c_{2,0}-\varphi_a c_{2,a}-\varphi_b c_{2,b}\right)$$

- 一阶条件

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{2,0}}=0: \qquad \frac{1}{\sqrt{c_{2,0}}}=\lambda_2$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{2,a}}=0: \qquad \frac{1}{2\sqrt{c_{2,a}}}=\lambda_2\varphi_a$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{2,b}}=0: \qquad \frac{1}{2\sqrt{c_{2,b}}}=\lambda_2\varphi_b$$

10.4 均衡算例

消费者2的优化问题（续）

- 一阶条件代入预算约束

$$\frac{1}{\lambda_2^2}+\varphi_a\frac{1}{4\varphi_a^2\lambda_2^2}+\varphi_b\frac{1}{4\varphi_b^2\lambda_2^2}=\frac{\varphi_a}{2}+2\varphi_b$$

- 解出

$$\frac{1}{\lambda_2^2}=\left(\frac{\varphi_a}{2}+2\varphi_b\right)\Bigg/\left(1+\frac{1}{4\varphi_a}+\frac{1}{4\varphi_b}\right)$$

- 所以

$$c_{2,0}=\left(\frac{\varphi_a}{2}+2\varphi_b\right)\Bigg/\left(1+\frac{1}{4\varphi_a}+\frac{1}{4\varphi_b}\right)$$

$$c_{2,a}=\frac{1}{4\varphi_a^2\lambda_2^2}=\left(\frac{\varphi_a}{2}+2\varphi_b\right)\Bigg/\left[4\varphi_a^2\left(1+\frac{1}{4\varphi_a}+\frac{1}{4\varphi_b}\right)\right]$$

$$c_{2,b}=\frac{1}{4\varphi_b^2\lambda_2^2}=\left(\frac{\varphi_a}{2}+2\varphi_b\right)\Bigg/\left[4\varphi_b^2\left(1+\frac{1}{4\varphi_a}+\frac{1}{4\varphi_b}\right)\right]$$

10.4 均衡算例
市场出清

- 由于消费品不能储藏的，所以在各个时期各个状态下，两位消费者的总消费都应该等于经济中的总禀赋

$$\begin{cases} 1 = c_{1,0} + c_{2,0} = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{\varphi_a}{2} + 2\varphi_b\right) \Big/ \left(1 + \dfrac{1}{4\varphi_a} + \dfrac{1}{4\varphi_b}\right) \\ \dfrac{1}{2} = c_{1,a} + c_{2,a} = \dfrac{1}{4\varphi_a} + \left(\dfrac{\varphi_a}{2} + 2\varphi_b\right) \Big/ \left[4\varphi_a^2\left(1 + \dfrac{1}{4\varphi_a} + \dfrac{1}{4\varphi_b}\right)\right] \\ 2 = c_{1,b} + c_{2,b} = \dfrac{1}{4\varphi_b} + \left(\dfrac{\varphi_a}{2} + 2\varphi_b\right) \Big/ \left[4\varphi_b^2\left(1 + \dfrac{1}{4\varphi_a} + \dfrac{1}{4\varphi_b}\right)\right] \end{cases}$$

- 解出（舍去负根）

$$\varphi_a = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.81$$

$$\varphi_b = \frac{1+\sqrt{17}}{16} \approx 0.32$$

- 0期无风险债券价格为1.13（$=\varphi_a+\varphi_b$），股票价格为1.04（$=\varphi_a/2+2\varphi_b$）

10.5 一般均衡与部分均衡
算例

- 资产市场
  - 1/2可能性聚宝盆A里出现1单位消费品，而同时B里什么也没有
  - 1/2的可能性聚宝盆B里出现1单位消费品，而同时A里什么也没有
  - 无风险利率为0
- 消费者
  - 对数偏好

$$u(c_0, c_1, c_2) = \log c_0 + \tfrac{1}{2}(\log c_1 + \log c_2)$$

  - 消费者在0期有1单位的消费品禀赋，并持有*a*单位的聚宝盆A，以及*b*单位的聚宝盆B
- 消费者优化问题

$$\max_{c_0, c_1, c_2} \log c_0 + \tfrac{1}{2}\log c_1 + \tfrac{1}{2}\log c_2$$

$$\text{s.t} \quad c_0 + \varphi_1 c_1 + \varphi_2 c_2 = 1 + \varphi_1 a + \varphi_2 b$$

10.5 一般均衡与部分均衡
算例讨论

- 解出

$$\varphi_1 = \frac{1}{2a}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2b}$$

$$\rho = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$$

- 一般均衡下，只要$a \neq b$，聚宝盆A和B的价格就不会相等，更不会都等于0.5
- 部分均衡下，之所以会得到两个聚宝盆的价格合起来等于无风险资产价格的结论，是没有考虑到聚宝盆的供给——部分均衡是一个资产定价的不完善的框架