一种具体的有限位数有理数构造

曾千里

（华南师范大学哲学与社会发展学院，广东广州，510631）

1两种直观

19世纪到和20世纪，数学越发地严格化，对数学的形式处理也得到了发展。柯西（Augustin Louis Cauchy，1789-1857）和魏尔开特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstraß，1815-1897）对“微积分”的严格化，对微积分概念上的困难的解决作出了贡献；皮亚诺（Giuseppe Peano，1858-1932）提出了他的五条公理以定义自然数；戴德金和柯西分别给出了等价的实数构造方法[1]。在这一段我们所熟知的数系不断得到精确化的过程中有一个小小的步骤，那就是有理数的构造。

自从康托创立了集合论以来，在对数学基础的重视下，集合论得以完善，公理集合论作为数学基础的地位也得到巩固，主要的大部分数学理论上都能在集合论中得到表达[2]。在被给予了自然数（和整数）的情况下①在集合论基础上的常见的有理数的构造方式[3]是依照其分数形式处理为一个整数有序对的等价类，其基于下述的直观：

正如整数由两自然数相减而构造出来一样，比例数可以有两整数相除而构造出来。[3]

有理数都能够表示为分数的形式。基于此，我们可以将一个有理数表示为其分子和分母的有序对的等价类（例如可以表示为等等的类）。由此，我们就从整数出发构造得到了有理数。

而我在本文要提出的是另一种直观。数学哲学中数学基础上的直觉主义，是构造主义的一个分支，其是这样一种观点：

大体而言，哲学上的直觉主义主张，数学是个体的构造性的心智活动……数学对象产生于某种先天的直觉。比如，自然数列源于关于时间的原始直觉，这种直觉从一个自然呈现的单位开始，意识到这个单位自身迭加的可能性，从而产生数1、2等。这是一个潜无穷的构造过程，永无终点。……因此，没有一个已经完成的所有数学对象的集合，也没有一蹴而就的总体理论，一切都在构造中增长。我们想象一个理想的直觉主义数学家（“创造主体”），他在时间进程中自由地扩大他地论域，积累他的知识。在每个时刻，他都拥有业已构造出的一组个体……[4]

类似地，我们的构造可以被认为是这样一种过程，在一个给定的初始时刻，我们拥有了自然数；在时间，我们构造出了“第一批”有理小数，即……（同时，通过加法和乘法的运算，我们也可以得到诸如等数）；在处，我们构造出了“第二批”有理小数，如此类推，一直到无限。我们知道，康托证明了自然数的“数量”和有理数的“数量”是“相等的”。这让我们想起了罗素曾讲过的那个故事：

如我们所知，特利斯特拉姆·香迪用了两年时间来记录他的生活中的头两天的历史，然后他抱怨道，按照这种速度他永远也写不完。但是我认为，如果他可以永远活下去，而且坚持不懈地写下去，那么，即使他的一生始终像开端那样充满需要记录地内容，他的传记也不会遗漏任何部分。[5]

因此无论有限位数的有理数看起来比自然数多多少倍，我们“最后”总能“产生”出所有有限位数的有理数，或每一个有限位数的有理数都会在线性序时间中的某一刻被“追及”。

我们可以发现，与之间的比例一如与。由此我们可能会设想，在自然数②已经被给予的情况下，我们可以将每一个数都扩大倍，例如扩大为变成等，我们将这些扩大了后的数看作为在有理数中的“它们原先的值”，如有理数的等；而此时的自然数中的等也就被我们看成了等有理小数。这可以看作是这样一个动态的过程：有一个寄存器，在初始状态下变量等的值是等；而在状态时，我们将等的值赋为自然数等，就如在命令式的程序语言里我们可以更改变量的赋值/变量的值不断在变化一样。而我们正是将这些始终作为有理数中的……在这个拉展的过程中新“产生”，或空出来、留下来的“间隙”自然数数就可以被视作是有理数中的和了。在这个意义上，新的一批有理数就被“生产”出来了。

2 标准的处理方法

定义 1 两个整数的有序对和，其中和不等于，之间满足关系，当且仅当。

在不致引起误解的情况下，我们称两个满足的整数的有序对是“相等”的（这背后的直观是很好理解的，就像和是相等的）。

我们证明关系是一个等价关系。

命题1 关系是一个等价关系，即是自反的（reflexive）, 对称的（symmetric）和传递的（transitive）。

证明 是整数的有序对，是自反的，因为，所以；

是对称的，设，则有，所以；

是传递的，设,则有 所以，两边分别消去和得.

现在，我们将有理数定义为相对于关系的整数有序对的等价类：

定义 2 一个有理数是一个相对于关系的整数有序对的等价类，全体有理数的集合记为。我们使用一个等价类中的任意一个代表元来代表这个等价类，或将之与相对应的有理数看作是“等同”的（例如，记号代表所有与有关系的整数有序对所组成的类）。我们一会儿会证明这么做是合理的。

现在我们定义有理数的加法和乘法。

定义 3 如果和是有理数，

（记住，我们是在整数的基础上定义有理数的，因此我们一开始就给定了整数的加法和乘法。）

现在我们来验证我们对有理数的定义是良定义（well-defined）的，亦即，

引理1 在这些运算中的一个输入的有理数（等价类）的代表元被与它相等的另一个有理数替换时，运算的输出不变。

证明 我们只对加法进行验证。假设，于是和都不是零，且。现在我们证明

根据定义，左边是，而右边是，于是我们必须证明

即

但由于，所需的结论就产生了。

QED.

我们注意到有理数与整数有相同的性状：

我们这样定义整数到有理数的嵌入（embedding）：

定义 4 整数到有理数的嵌入将整数映到有理数上，即

我们还能够证明我们定义出来的“有理数”满足有理数的相关性质。

命题 2 设是有理数。那么下面的代数算律成立：

证明 令，其中是整数，是不为零的整数，我们只验证最长的一个，即

于是我们可以看到是相等的。

其它恒等式的验证可用类似的方式。

QED.

如果我们还定义了倒数运算，那么加上，我们就确定了有理数集构成一个域。

3 整数的“扩展”和动态的视角

设我们在某个初始时刻被给定了自然数，在此刻我们为有理数（分别代表有理数的“”“”“”等）分别赋予它们与之相对应自然数中的等作值，即在时刻的赋值为，的赋值为……这可以用 或来表示；在接下来的时刻 ，为了构造或“产生”出一批新的有理数③，我们将之前的有理数等都“拉展”倍以便出现“空隙”以容纳新的有理数，即它们在 时刻的赋值是它们原先在 时刻的赋值的倍（注意，为等赋的值是自然数，而它们自己本身才是有理数），这可以用等来表示（我们之后会证明我们对 的用法是合理的）。而此刻我们将预留下来的自然数等赋予一批新的变量等，这用来表示。它们的直观意义也很显然，就是和等有理数。依此类推，通过这种方法，再加上加法和乘法，我们可以生产出所有的正有限小数位数有理数。在这里强调的是一种动态的进程，那就是，有限小数位数有理数是我们“一步步”构造出来的。

现下我们给出正式的形式定义。

定义 5 两个自然数的有序对和之间满足关系 当且仅当

例 1 直观上这可以看成变量和变量 等（即有理数和有理数等）分别在时刻 和时刻 等被给予的不同的有理数赋值。

在不致引起误解的情况下，我们称两个满足的自然数的有序对是“等同”，或“同一”的。

和上一节一样，我们可以证明关系 是一个等价关系。

现在，我们定义非负有限小数位数有理数。

定义6 一个非负有限小数位数有理数一个相对于关系~自然数数有序对的等价类。我们使用一个等价类中的任意一个代表元来代表这个等价类，或将之与相对应的有理数看作是“等同”的（例如，记号代表所有与有关系的自然数有序对所组成的类）。我们一会儿会证明这么做是合理的。

现在我们定义非负有限小数位数有理数的加法和乘法，不失一般性的，我们假设（在的情况中只要将在乘法的定义中的和互换就可以了）。

定义 7 如果和是非负有限小数位数有理数，

（记住，我们是在自然数的基础上定义有限小数位数有理数的，因此我们一开始就给定了整数的加法和乘法。）

例 2 .

现在我们来验证我们对有限小数位数有理数的定义是良定义（well-defined）的，亦即，

引理2 在这些运算中的一个输入的有限小数位数有理数（等价类）的代表元被与它相等的另一个有理数替换时，运算的输出不变。

证明 我们只对加法进行验证。假设，不妨假设，于是。

我们要证明的是.

即.

即.

式两边添上并进行交换位置即可得到我们想要的结果.

同样地，和上一节类似地，我们能够定义自然数到非负有限小数位数有理数的嵌入。

依照上一节，我们还能够证明我们定义出来的“非负有限小数位数有理数”满足有限小数位数有理数的相关性质。我们只证明其中一个。

命题 2 设是非负有限小数位数有理数。那么

证明 令，其中,是自然数，

于是我们可以看到是相等的。

QED.

依照平常的方法定义我们能很轻易地证明这样定义出来的有限小数位数有理数具有稠密性。因此，一阶理论在序关系上无法区分有限小数位数有理数和有理数和实数。

同样，我们也能证明对于任意一个有理数，我们都能找到一个有限小数位数有理数的任意小间隔的逼近。

因为有理数都是无限循环小数，而那循环的位数是有限的，因此，我们能比较容易地找到一种扩展的表示法，使之填补上一部分的间隙，能够表示出全部有理数。

我们也可以采用另一条进路，通过类似柯西列的方法，填补上所有的空隙，得到实数。因此，我们也看到了一种直接从有限小数位数有理数直接到实数的方法。

我们还可以思考有限小数位数有理数的代数结构，例如，我们一下就可以看出，它并非除环，如虽3/2在这里，其逆2/3却不处于其中。

我们看到，“有限小数位数”是依赖于进位制的。例如，在10进制下是有限小数位数的0.1，在2进制下将会是0.00011001100110011……，这无疑削弱了它的普遍性。

注释：

① 在纯粹集合论中，在冯诺依曼定义或策梅洛定义下，自然数可以被处理为纯粹集合（即这样的集合），而这两种定义相对于自然数的那些性质来说，是同构的。

② 在这种情况下（只有自然数被给予），我们只能定义非负有限小数位数有理数，但要定义全部有限小数位数有理数也很容易，只要将给定条件中的自然数换成整数（甚至只要是正整数）就可以了。

③ 或用一种富有直觉主义意味的说法，我们的心灵（mind）在时间中构造有理数。

参考文献：

[1] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想（四） [M]. 邓东皋 译. 上海：上海科学技术出版社，2002，1-32.

[2] Kenneth Kunen. Set Theory [M]. College Publication, 2011, 9.

[3]陶哲轩. 陶哲轩实分析 [M]. 王昆扬 译. 北京：人民邮电出版社，2008，65.

[4]邢滔滔. 数理逻辑 [M]. 北京：北京大学出版社，2008，258-259.

[5]威廉姆·庞德斯通. 推理的迷宫：悖论、谜题，及知识的脆弱性 [M]. 李大强 译. 北京：北京理工大学出版社，2005，184.