

1.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + R_z(\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_z(\alpha)R_y(\beta) \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\alpha} + \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\beta} + \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{bmatrix} \dot{\gamma} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta \\ 1 & 0 & -\sin \beta \end{bmatrix} \dot{\Psi} \end{aligned}$$

当 $\beta \neq 90^\circ$ 时

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta \\ 1 & 0 & -\sin \beta \end{bmatrix}^{-1} \omega \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \tan \beta & \sin \alpha \tan \beta & 1 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} & \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} & 0 \end{bmatrix} \omega \end{aligned}$$

当 $\beta = 90^\circ$ 时, ZYX 欧拉角奇异。

2.

$$\begin{aligned}
\omega &= \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(20^\circ) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(20^\circ)R_y(-10^\circ) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ 0 & \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ 0 & \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos -10^\circ & 0 & \sin -10^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin -10^\circ & 0 & \cos -10^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ \end{bmatrix} \dot{\beta} + \begin{bmatrix} -\sin 10^\circ \\ -\sin 20^\circ \cos 10^\circ \\ \cos 20^\circ \cos 10^\circ \end{bmatrix} \dot{\gamma} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin 10^\circ \\ 0 & \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \cos 10^\circ \\ 0 & \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \cos 10^\circ \end{bmatrix} \dot{\Psi} \\
\Psi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin 10^\circ \\ 0 & \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \cos 10^\circ \\ 0 & \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \cos 10^\circ \end{bmatrix}^{-1} \omega \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\sin 20^\circ \tan 10^\circ & \cos 20^\circ \tan 10^\circ \\ 0 & \cos 20^\circ & \sin 20^\circ \\ 0 & -\frac{\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ} & \frac{\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4.627^\circ/s \\ -1.962^\circ/s \\ 9.4533^\circ/s \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. (1) 由题 1 可知

$$J_{Euler,ZYX} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta \\ 1 & 0 & -\sin \beta \end{bmatrix}$$

$$e = J_{Euler,ZYX} \Delta \Psi = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c \\ 0 & \cos \alpha_c & \sin \alpha_c \cos \beta_c \\ 1 & 0 & -\sin \beta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_d - \alpha_c \\ \beta_d - \beta_c \\ \gamma_d - \gamma_c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin \alpha_c (\beta_d - \beta_c) + \cos \alpha_c \cos \beta_c (\gamma_d - \gamma_c) \\ \cos \alpha_c (\beta_d - \beta_c) + \sin \alpha_c \cos \beta_c (\gamma_d - \gamma_c) \\ (\alpha_d - \alpha_c) - \sin \beta_c (\gamma_d - \gamma_c) \end{bmatrix}$$

(2)

$$\omega = J_{Euler,ZYX} \dot{\Psi}$$

则有

$$\dot{e} = J_{Euler,ZYX} \Delta \dot{\Psi} = J_{Euler,ZYX} \Delta \omega$$

故控制方程为

$$\begin{aligned} \tau &= K_{pp} e + K_{pi} \int e dt + K_{pd} \dot{e} \\ &= K_{pp} J_{Euler,ZYX} \Delta \Psi + K_{pi} J_{Euler,ZYX} \int \Delta \Psi dt + K_{pd} J_{Euler,ZYX} \Delta \omega \end{aligned}$$