EMRI：Orbits, Multi-Timescale Analysis and GW

张子锐

2024-12

1 EMRI 简介

双星系统可以按照双星的质量比 $\mu = m/M$ 进行分类，如果 μ 很小（一般是 $10^{-6} \sim 10^{-4}$）则这个系统称为极端质量比旋进 (Extreme Mass Ratio Inspiral：EMRI)。典型的 EMRI 一般由 SMO (Stellar Mass Object , $m \sim 1\text{--}100 M_{\text{solar}}$) 和 SMBH (Super Massive Black Hole , $M \sim 10^4\text{--}10^6 M_{\text{solar}}$)。EMRI 当然可以不由 SMBH 和 SMO 组成（比如有人研究过大质量 Boson Star 和小质量天体组成的 EMRI），但是本文接下来为了叙述方便，中心大质量天体一律用 SMBH 代指，小质量绕转天体用 SMO 代指。

由于 $\mu \to 0$，EMRI 中小质量天体的运动可以在 μ 上展开。此时，0 阶项对应点粒子在 SMBH 中的测地线运动。

由于 SMO 可以长时间绕转 SMBH，后者引力场的性质可以很好的体现在 SMO 的轨道上（比如 Schwartzchild 时空的测地线在一个平面内，而 Kerr 时空的测地线则不是），因此 EMRI 可以作为 SMBH 引力场性质的精确探针，可用于测量 SMBH 的物理量（spin、mass 等）和检测引力理论（不同的引力理论会使 SMO 有着截然不同的轨迹）等，具有很高的研究价值。

我们可以使用多信使天文学的手段观测 EMRI，其中最为典型的就是 GW（引力波）观测。由于 MERI 的中心天体一般为 SMBH，所以传统的“凌星法”对于 EMRI 的观测难以起作用；而根据 SMO 的光度和红移观测 SMO 的轨道，其精度又太低，难以满足 SMBH 参数测量和检验引力理论的精度要求。因此，GW 便是观测 EMRI 自然的选择。

EMRI 的 GW 属于低频 GW，大部分 EMRI 的 GW 波段位于 LISA 等空间 GW 探测器的灵敏度范围中，预计在 LISA 和太极上天之后，会真正探测到 EMRI 事件。

除了 GW，目前已知还可以通过 QPE（Quasi Periodical Eruption：准周期爆发）观测 EMRI。当 SMBH 有吸积盘的时候，SMO 轨道如果恰好处在可以撞到吸积盘的区间中，SMO 将会周期性的撞击吸积盘，发出准周期性的闪光。通过 QPE 数据可以精确的分析出 SMO 在多个自由度上的周期，进而实现 EMRI 轨道的观测。目前已经探测到多个 EMRI 产生的 QPE 事件，在考虑了吸积盘的进动的情况下，参数估计得到了不错的结果，可以认为这种观测是可行而准确的。

综上，EMRI 有巨大的天体物理和引力理论的研究价值，可以被 QPE 现象和未来的 GW 探测观测，有望精确测量 SMBH 的物理参数和检验多种修改引力和暗物质模型。为了进行上述研究，我们需要计算 EMRI 中 SMBH 的时空，SMO 的轨迹，进而计算其 QPE 信号和 GW 波形，实现对于 EMRI 的“多信使观测”。

本文将主要介绍如何求解 EMRI 轨迹，并简介如何计算 QPE 信号和 GW 波形。

2 EMRI 轨迹

2.1 0 阶轨道

0 阶轨道实际上就是测地线（或者说测试粒子的运动，毕竟可能除了引力之外还受点什么力），所以这部分实际上就是理论力学的内容。

根据无毛定理，如果 GR 是对的，任何黑洞的时空都是 KN 时空。鉴于目前没有黑洞带电的观测证据，同时考虑 KN 时空有些复杂，我们此处将介绍如何解析计算 Kerr 时空测地线。事实上，目前为止主流的可以用的 EMRI 模板都是基于 Kerr 时空甚至 Schwartzchild 时空制作的。所以这里将 Kerr 时空也是一种 “紧跟前沿”。

2.1.1 Kerr 时空

Kerr 时空由自旋系数 $a = J/M$ 与质量 M 决定，BL 坐标（一定程度上可以理解为球坐标的推广）下度规为：·

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{4Mar\sin^2\theta}{\Sigma}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi + \frac{-\frac{2Mar\sin^2\theta}{\Sigma}}{}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{2Ma^2r\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{1}$$

其中 $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ 且 $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$，写成喜闻乐见的矩阵形式：

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right) & 0 & 0 & -\frac{2Mar\sin^2\theta}{\Sigma} \\ 0 & -\frac{2Mar\sin^2\theta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{2Mar\sin^2\theta}{\Sigma} & 0 & 0 & \left(r^2+a^2+\frac{2Ma^2r\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

为了方便，此处顺便求个逆：

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma\Delta} & 0 & 0 & -\frac{2Mar}{\Sigma\Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{2Mar}{\Sigma\Delta} & 0 & 0 & \frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\Sigma\Delta\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{3}$$

这个在写 Kerr 测地线哈密顿量的时候用得到。

此外，该时空还有内外视界：

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \tag{4}$$

其中 r_+ 是外视界，r_- 是内视界。

2.1.2 Kerr 测地线的 HJ 方法

为了求解 Kerr 测地线，我们将使用 HJ（Hamilton-Jacobi）方法。为什么不用测地线方程（实际上是 EL 方程）或者正则方程呢？那是因为 HJ 方法最简单：EL 方程是 4 个二阶方程，正则方程是 8 个一阶方程。而利用 HJ 方法，可以充分发掘系统的对称性（可积性），从而完整的求解运动方程的首次积分，获得 4 个一阶方程。

Kerr 时空测地线的哈密顿量可以写为：

$$H=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu} \tag{5}$$

值得注意的是，此处的哈密顿量并不是传统意义上从作用量 $S=-\alpha\int ds$ 出发并做勒让德变换得到的哈密顿量。从这个 S 出发，得到的拉格朗日量实际上是：

$$L=\sqrt{-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}} \tag{6}$$

但是，考虑到 $g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=-1$，系统实际上可以用“有效拉氏量” $L_{\text{effective}}=L^2$ 表示，在此基础上就可以得到常见的哈密顿量 (5) 的形式。值得注意的是，由于 H 变为了“有效”形式，其对应的守恒量也不再是能量 E，而是粒子的 4 动量的平方 $p^{\mu}p_{\mu}=:-\kappa^2$。

为了求解运动方程，我们需要求解 HJ 方程：

$$\frac{\partial S\left(\tau,x,P\right)}{\partial\lambda}+H\left(x^{\mu},p_{\nu}=\frac{\partial S\left(\lambda,x,P\right)}{\partial x^{\nu}}\right)=0 \tag{7}$$

很明显，根据 Kerr 度规 $g^{\mu\nu}$ 的性质 (3)，H 中有循环坐标 $\{\lambda,t,\phi\}$，因此，S 可初步分离变量为

$$S=\frac{1}{2}\kappa^2\tau-Et+L\phi+W\left(r,\theta\right) \tag{8}$$

此处，我们期望 W 也是可以分离变量的，这样就可以方便的求出运动方程了。为此，我们假设 W 是可以分离变量的：

$$W\left(r,\theta\right)=S_r\left(r\right)+S_{\theta}\left(\theta\right) \tag{9}$$

并带入到 HJ 方程 (7) 中，得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial\tau}+H&=\frac{1}{2}\left[\kappa^2-g^{tt}E^2+g^{\phi\phi}L^2+2g^{t\phi}EL+g^{rr}\left(\frac{\partial W}{\partial x^r}\right)^2+g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial x^r}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[g^{rr}\dot{S}_r^2+g^{\theta\theta}\dot{S}_{\theta}^2+\kappa^2-g^{tt}E^2+g^{\phi\phi}L^2+2g^{t\phi}EL\right]\\&=\frac{\Delta}{2\Sigma}\dot{S}_r^2+\frac{1}{2\Sigma}\dot{S}_{\theta}^2+\frac{1}{2}\kappa^2+\\&\quad\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta a^2\sin^2\theta}{2\Sigma\Delta}E^2+\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{2\Sigma\Delta\sin^2\theta}L^2-\frac{2Mar}{\Sigma\Delta}EL\end{aligned} \tag{10}$$

注意到 $\Sigma\left(r,\theta\right)=r^2+a^2\cos^2\theta$ 且 $\Delta\left(r\right)=r^2-2Mr+a^2$，上式可整理为：

$$\begin{aligned}2\Sigma\times\left(\frac{\partial S}{\partial\tau}+H\right)=&\ \Delta\left(r\right)\dot{S}_r^2+\dot{S}_{\theta}^2+\kappa^2r^2+\kappa^2a^2\cos^2\theta+\\&\frac{\left(r^2+a^2\right)^2E^2}{\Delta\left(r\right)}-a^2\sin^2\theta E^2+\frac{L^2}{\sin^2\theta}-\frac{a^2L^2}{\Delta\left(r\right)}-\frac{4Mar}{\Delta\left(r\right)}EL\end{aligned} \tag{11}$$

很明显：

$$\begin{aligned}0=\text{RHS}=&\left[\Delta\left(r\right)\dot{S}_r^2+\kappa^2r^2+\frac{\left(r^2+a^2\right)^2E^2}{\Delta\left(r\right)}-\frac{a^2L^2}{\Delta\left(r\right)}-\frac{4Mar}{\Delta\left(r\right)}EL\right]+\\&\left[\dot{S}_{\theta}^2+\kappa^2a^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta E^2+\frac{L^2}{\sin^2\theta}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

于是，HJ 方程即可分离变量：

$$\begin{aligned} C &= \dot{S}_\theta^2 + \kappa^2 a^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta E^2 + \frac{L^2}{\sin^2\theta} \\ &= -\left[\Delta(r)\dot{S}_r^2 + \kappa^2 r^2 + \frac{\left(r^2+a^2\right)^2 E^2}{\Delta(r)} - \frac{a^2 L^2}{\Delta(r)} - \frac{4Mar}{\Delta(r)} EL\right] \end{aligned} \tag{13}$$

其中 C 是分离变量得到的常数，很明显 C 也是 Kerr 测地线系统的一个守恒量。令 $M=1$ 方便计算（实际上是用 M 做单位，下文将保持 $M=1$ 的这个假设），对上式稍加整理并定义：

$$\begin{aligned} R(r) &:= \left[\left(r^2+a^2\right)E - aL\right]^2 - \Delta\left[\kappa^2 r^2 + (L-aE)^2 + C\right] \\ \Theta(\theta) &:= C - \left[\left(\kappa^2 - E^2\right)a^2 + \frac{L^2}{\sin^2\theta}\right]\cos^2\theta \end{aligned} \tag{14}$$

即可将原方程分离变量得到两个方程：

$$\begin{aligned} \dot{S}_r^2 &= \frac{R(r)}{\Delta^2(r)} \\ \dot{S}_\theta^2 &= \Theta(\theta) \end{aligned} \tag{15}$$

故可得 W 的形式：

$$W(r,\theta) = \pm\int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr \pm \int \Theta d\theta \tag{16}$$

至此，我们完整的求得了 Kerr 测地线的一个哈密顿主函数：

$$S(\tau, x, P) = \frac{1}{2}\kappa^2\tau - Et + L\phi \pm \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr \pm \int \Theta d\theta \tag{17}$$

这是一个第二类生成函数，将相空间坐标 $\{x, p\}$ 变换到 $\{Q, P\}$，其中 $x^\mu = \{t, r, \theta, \phi\}$ 和 $P_\nu = \{\kappa, E, C, L\}$。理论上，到这里，我们已经求得的 Kerr 测地线的相空间积分解。下一节将详细介绍如何求得物理坐标 x^μ 上的轨迹，我们将看到，这个积分解在物理坐标 x^μ 下可以用简单的特殊函数表示出来。

2.1.3 首次积分（方程）与其解析解

利用第二类生成函数的性质：

$$p_\mu = \frac{\partial S(\tau, x, P)}{\partial x^\mu} \tag{18}$$

结合定义：

$$p_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \tag{19}$$

我们可以得到：

$$\dot{x}^\mu = g^{\mu\nu}\frac{\partial S(\tau, x, P)}{\partial x^\nu} \tag{20}$$

利用逆变 Kerr 度规 (3)，很容易计算出：

$$\begin{aligned} \kappa\Sigma\frac{dt}{d\tau} &= \frac{\left(r^2+a^2\right)\left(E\left(r^2+a^2\right) - aL\right)}{\Delta} - a^2 E \sin^2\theta + aL \\ \kappa\Sigma\frac{dr}{d\tau} &= \pm\sqrt{R(r)} \\ \kappa\Sigma\frac{d\theta}{d\tau} &= \pm\sqrt{\Theta(\theta)} \\ \kappa\Sigma\frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{a\left(E\left(r^2+a^2\right) - aL\right)}{\Delta} + \frac{L}{\sin^2\theta} - aE \end{aligned} \tag{21}$$

其中提取了公共的系数 $\kappa\Sigma$，Σ 来自于 Kerr 度规 $g^{\mu\nu}$ 的公共系数，而 $\kappa \in \{0,1\}$ 则是为了区分 null 测地线和 timelike 测地线（后者不存在 τ，仿射参数需要通过 $d\sigma = \lim d\tau/\kappa$ 定义）引入的。这就是利用 HJ 方法得到的 Kerr 测地线方程的首次积分。

为了方便求解方程 (21)，我们可以很自然的引入新的参数 λ：

$$\kappa\Sigma d\lambda = d\tau \tag{22}$$

其中参数 λ 称为 Mino Time。在这个参数下，方程 (21) 变为了更为简单的形式：

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\lambda} &= \frac{\left(r^2+a^2\right)\left(E\left(r^2+a^2\right)-aL\right)}{\Delta} - a^2E\sin^2\theta + aL \\
\frac{dr}{d\lambda} &= \pm\sqrt{R\left(r\right)} \\
\frac{d\theta}{d\lambda} &= \pm\sqrt{\Theta\left(\theta\right)} \\
\frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{a\left(E\left(r^2+a^2\right)-aL\right)}{\Delta} + \frac{L}{\sin^2\theta} - aE
\end{aligned} \tag{23}$$

相信大部分人此时已经可以一眼看出这个方程该如何积分了。如何还看不出来，我们可以把方程写为更具有暗示性的形式：

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\lambda} &= T_r\left(r\right) + T_\theta\left(\theta\right) + aL \\
\frac{dr}{d\lambda} &= \pm\sqrt{R\left(r\right)} \\
\frac{d\theta}{d\lambda} &= \pm\sqrt{\Theta\left(\theta\right)} \\
\frac{d\phi}{d\lambda} &= \Phi_r\left(r\right) + \Phi_\theta\left(\theta\right) - aE
\end{aligned} \tag{24}$$

很明显，到这里只要把 r 和 θ 部分积分出来，再带入另外两个方程就好了。剩下就是算积分的工作了。这也是为什么我们说 “Integrable systems are trivial”：对于可积系统，唯一需要计算的实际上就是几个积分，而现在的数值积分技术是极为先进且开箱即用的。

不过，这里我们还是可以利用我们丰富的特殊函数知识，将 (24) 的积分解用特殊函数（严格来说是各种椭圆函数）表示出来。这些椭圆函数在 Python 的 Scipy 包里面都是内置的，所以论数值生成轨道的速度，这里还是 “解析解” 更快。

为此，我们需要将 BL 坐标进行微调，用 $z = \cos\theta$ 替换原有的坐标 θ，得到改良的方程 (24)：

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\lambda} &= T_r\left(r\right) + T_z\left(z\right) + aL \\
\frac{dr}{d\lambda} &= \pm\sqrt{R\left(r\right)} \\
\frac{dz}{d\lambda} &= \pm\sqrt{Z\left(z\right)} \\
\frac{d\phi}{d\lambda} &= \Phi_r\left(r\right) + \Phi_z\left(z\right) - aE
\end{aligned} \tag{25}$$

其中：

$$
\begin{aligned}
T_r(r) &= \frac{(r^2+a^2)\left(E\left(r^2+a^2\right)-aL\right)}{\Delta} && (26)\\
T_z(z) &= a^2E\left(z^2-1\right) && (27)\\
\Phi_r(r) &= \frac{a\left(E\left(r^2+a^2\right)-aL\right)}{\Delta} && (28)\\
\Phi_z(z) &= \frac{L}{1-z^2} && (29)
\end{aligned}
$$

且：

$$
\begin{aligned}
R(r) &= \left(E(r^2+a^2)-aL\right)^2-\Delta\left(\kappa^2r^2+(aE-L)^2+C\right) && (30)\\
Z(z) &= C-z^2\left(a^2(\kappa^2-E^2)(1-z^2)+L^2+C\right) && (31)
\end{aligned}
$$

r 和 z 部分的积分　这两部分的积分十分好求，事实上：

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \pm\int_{r_0}^{r}\frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}\\
\lambda &= \pm\int_{z_0}^{z}\frac{d\xi}{\sqrt{Z(\xi)}}
\end{aligned} \tag{32}
$$

其中，$\pm$ 分别表示不同方向的两种运动（比如 r 越来越大的或越来越小的），r_0 和 z_0 则是积分常数，代表了运动的起始位置。

为了写出这个积分的解析形式 $r(\lambda)$ 和 $z(\lambda)$，我们需要对 $R(r)$ 和 $Z(z)$ 进行具体的分析。回顾 (30) 和 (31)，可以发现他们都是四次函数，且 $Z(z)$ 中只含有 z^2 项。因此，可以作以下分解（实际上，有时候这两个函数并不都有 4 个实根，这里先假设有四个实根）：

$$
\begin{aligned}
R(r) &= (\kappa^2-E^2)(r_1-r)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)\\
Z(z) &= (z^2-z_1^2)\left(a^2(\kappa^2-E^2)z^2-z_2^2\right)
\end{aligned} \tag{33}
$$

其中，可以假设 $r_1>r_2>r_3>r_4$ 和 $z_2>z_1$。注意，这里需要求的是 bound geodesic，所以必须有 $E<1$。对于 (33) 形式的 R 和 Z，积分 (32) 有标准解法，这里省略具体过程，罗列结果如下：

$$
\begin{aligned}
r(q_r) &= \frac{r_3(r_1-r_2)\mathsf{sn}^2\left(\frac{\mathsf{K}(k_r)}{\pi}q_r|k_r\right)-r_2(r_1-r_3)}{(r_1-r_2)\mathsf{sn}^2\left(\frac{\mathsf{K}(k_r)}{\pi}q_r|k_r\right)-(r_1-r_3)}\\
z(q_z) &= z_1\mathsf{sn}\left(\mathsf{K}(k_z)\frac{2q_z}{\pi}|k_z\right)
\end{aligned} \tag{34}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
q_r &= \Upsilon_r\lambda+q_{r0}\\
q_z &= \Upsilon_z\lambda+q_{z0}
\end{aligned} \tag{35}
$$

且：

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_r &= \frac{\pi}{2\mathsf{K}(k_r)}\sqrt{(\kappa^2-E^2)(r_1-r_3)(r_2-r_4)}\\
\Upsilon_z &= \frac{\pi z_2}{2\mathsf{K}(k_z)}
\end{aligned} \tag{36}
$$

并定义了：

$$
\begin{aligned}
k_r &:= \frac{(r_1-r_2)(r_3-r_4)}{(r_1-r_3)(r_2-r_4)} \\
k_z &:= a^2(\kappa^2-E^2)\frac{z_1^2}{z_2^2}
\end{aligned} \tag{37}
$$

除此之外，还用到了特殊函数 $\mathsf{sn}(u|m)$ 与 $\mathsf{K}(m)$，定义如下：

$$
\begin{aligned}
u &= \int_0^{\arcsin(\mathsf{sn}(u|m))} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} \\
\mathsf{K}(m) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}
\end{aligned} \tag{38}
$$

值得注意的是，这里的 $\mathsf{sn}(u|m)$ 对于 u 来说是一个以 2π 为周期的函数，在 $m=0$ 的时候可以退化为 $\mathsf{sn}(u|0)=\sin u$，在理解这个解析解的时候可以用 sin 函数辅助理解。至此，我们就得到了相对简单的 r 和 z 方向上的积分。

t 和 ϕ 部分的积分 回忆起 (25) 中的 t 和 ϕ 部分：

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{d\lambda} &= T_r(r)+T_z(z)+aL \\
\frac{d\phi}{d\lambda} &= \Phi_r(r)+\Phi_z(z)-aE
\end{aligned} \tag{39}
$$

现在我们已经知道了 $r(\lambda)$ 与 $z(\lambda)$，实际上求出 $t(\lambda)$ 与 $\phi(\lambda)$ 也就是积个分的事：

$$
\begin{aligned}
t(\lambda) &= \int_0^{\lambda} \left[T_r(r(\xi))+T_z(z(\xi))+aL\right]d\xi \\
\phi(\lambda) &= \int_0^{\lambda} \left[\Phi_r(r(\xi))+\Phi_z(z(\xi))-aE\right]d\xi
\end{aligned} \tag{40}
$$

不过可以想象，这个积分必然是巨复杂无比的，这里就不展示细节了，直接上结果：

$$
\begin{aligned}
t(q_t,q_r,q_z) &= q_t+t_r(q_r)+t_z(q_z) \\
\phi(q_\phi,q_r,q_z) &= q_\phi+\phi_r(q_r)+\phi_z(q_z)
\end{aligned} \tag{41}
$$

诶这里是不是还挺简单，但是：

$$
\begin{aligned}
t_r(q_r) &:= \tilde{t}_r\left(\mathsf{am}\left(\mathsf{K}(k_r)\frac{q_r}{\pi}\middle|k_r\right)\right)-\frac{\tilde{t}_r(\pi)}{2\pi}q_r \\
t_z(q_z) &:= \tilde{t}_z\left(\mathsf{am}\left(\mathsf{K}(k_z)\frac{2q_z}{\pi}\middle|k_z\right)\right)-\frac{\tilde{t}_z(\pi)}{\pi}q_z
\end{aligned} \tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_r(q_r) &:= \tilde{\phi}_r\left(\mathsf{am}\left(\mathsf{K}(k_r)\frac{q_r}{\pi}\middle|k_r\right)\right)-\frac{\tilde{\phi}_r(\pi)}{2\pi}q_r \\
\phi_z(q_z) &:= \tilde{\phi}_z\left(\mathsf{am}\left(\mathsf{K}(k_z)\frac{2q_z}{\pi}\middle|k_z\right)\right)-\frac{\tilde{\phi}_z(\pi)}{\pi}q_z
\end{aligned} \tag{43}
$$

诶是不是已经有点难绷了？这还不够复杂！请接着看：

$$
\begin{aligned}
\tilde{t}_r(\xi_r) &= \frac{E(r_2-r_3)}{\sqrt{(\kappa^2-E^2)(r_1-r_3)(r_2-r_4)}}\Bigg[(4+r_1+r_2+r_3+r_4)\,\Pi(h_r;\xi_r\mid k_r) \\
&\quad - \frac{4}{r_+-r_-}\left(\frac{r_+(4-aL/E)-2a^2}{(r_2-r_+)(r_3-r_+)}\Pi(h_+;\xi_r\mid k_r)-(+\leftrightarrow-)\right) \\
&\quad + \frac{(r_1-r_3)(r_2-r_4)}{r_2-r_3}\left(\mathsf{E}(\xi_r\mid k_r)-h_r\frac{\sin\xi_r\cos\xi_r\sqrt{1-k_r\sin^2\xi_r}}{1-h_r\sin^2\xi_r}\right)\Bigg] \\
\tilde{t}_z(\xi_z) &= -\frac{E}{\kappa^2-E^2}z_2\mathsf{E}(\xi_z\mid k_z)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_r(\xi_r) &= -\frac{2aE(r_2-r_3)}{(r_+-r_-)\sqrt{(\kappa^2-E^2)(r_1-r_3)(r_2-r_4)}} \\
&\quad \times\left[\frac{2r_+-aL/E}{(r_2-r_+)(r_3-r_+)}\Pi(h_+;\xi_r\mid k_r)-(+\leftrightarrow-)\right] \\
\tilde{\phi}_z(\xi_z) &= \frac{L}{z_2}\Pi(z_1^2;\xi_z\mid k_z)
\end{aligned}
\tag{45}
$$

同时还要定义 q_t 与 q_ϕ：

$$
\begin{aligned}
q_t &= \Upsilon_t\lambda+q_{t0} \\
q_\phi &= \Upsilon_\phi\lambda+q_{\phi0}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_t &= \tilde{\Upsilon}_{t,r}+\tilde{\Upsilon}_{t,z} \\
\Upsilon_\phi &= \tilde{\Upsilon}_{\phi,r}+\tilde{\Upsilon}_{\phi,z}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

诶嘿这还没完，把上面这个东西写开就是：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Upsilon}_{t,r} &:= (4+a^2)E+E\Bigg\{\frac{1}{2}\Big[(4+r_1+r_2+r_3)r_3-r_1r_2 \\
&\quad +(r_1-r_3)(r_2-r_4)\frac{\mathsf{E}(k_r)}{\mathsf{K}(k_r)}+(4+r_1+r_2+r_3+r_4)(r_2-r_3)\frac{\Pi(h_r\mid k_r)}{\mathsf{K}(k_r)}\Big] \\
&\quad +\frac{2}{r_+-r_-}\left[\frac{(4-aL/E)r_+-2a^2}{r_3-r_+}\left(1-\frac{r_2-r_3}{r_2-r_+}\frac{\Pi(h_+\mid k_r)}{\mathsf{K}(k_r)}\right)-(+\leftrightarrow-)\right]\Bigg\} \\
\tilde{\Upsilon}_{t,z} &:= -a^2E+\frac{EC}{(\kappa^2-E^2)z_1^2}\left[1-\frac{\mathsf{E}(k_z)}{\mathsf{K}(k_z)}\right] \\
\tilde{\Upsilon}_{\phi,r} &:= \frac{a}{r_+-r_-}\left[\frac{2Er_+-aL}{r_3-r_+}\left(1-\frac{r_2-r_3}{r_2-r_+}\frac{\Pi(h_+\mid k_r)}{\mathsf{K}(k_r)}\right)-(+\leftrightarrow-)\right] \\
\tilde{\Upsilon}_{\phi,z} &:= \frac{L}{\mathsf{K}(k_z)}\Pi(z_1^2\mid k_z)
\end{aligned}
\tag{48}
$$

至此，我们就得到了 Kerr 测地线的解析解，可能比你想象中要复杂一点点，亲爱的读者，你记住了吗？其实这里 t 和 ϕ 上的解还是有些微妙的地方的，不过这里不展开说了，请读者根据表达式自行体会 [\doge]。

2.2 1 阶轨道：Self-Force 与 Multi-Timescale Analysis

2.2.1 引力辐射

测地线固然好算，随便积积分就轻轻松松算出来了。但是对于 EMRI 波形，我们还要做一些更切合实际的事：考虑小东西的质量。

小东西的质量对小东西（SMO）的影响实际上体现在了小东西的引力辐射下。如何计算小东西的引力辐射？我们可以用 Teukolsky 微扰论：这是一个描述 Kerr 时空在有一个小小的能动张量扰动下的行为的理论，这里简要介绍一下吧！

为了描述引力辐射（实际上就是 GW），我们选择用 Weyl 张量 C_{abcd}：

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}\left(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}\right) + \frac{R}{6} g_{a[c}g_{d]b} \tag{49}$$

描述时空中的引力效应。Weyl 张量是 Riemann 张量的无迹部分，这意味着它消除了 Ricci 张量的贡献，描述纯粹的“引力波”或自由引力场。在真空区域（即 $R_{ab} = 0$），Riemann 曲率张量可以完全由 Weyl 张量决定。

为了计算横向无迹的引力波，我们只要关注 Weyl 张量的某些分量即可。事实上，Teukolsky 微扰论中关注标量 ψ_4，在 NP 标架：

$$\begin{aligned} n^\alpha &= \left[(r^2+a^2), -\Delta, 0, a\right]/(2\Sigma) \\ m^\alpha &= [ia\sin\theta, 0, 1, i/\sin\theta]/(\sqrt{2}(r+ia\sin\theta)) \\ \overline{m}^\alpha &= [-ia\sin\theta, 0, 1, -i/\sin\theta]/(\sqrt{2}(r-ia\sin\theta)) \end{aligned} \tag{50}$$

下，它的定义是：

$$\psi_4 = -C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha \overline{m}^\beta n^\gamma \overline{m}^\delta \tag{51}$$

不熟悉标架法的朋友把 NP 标架理解为一组非坐标基就行。可以证明（此处略）在 $r \to \infty$ 时，标量 ψ_4 与常见的引力波的两个极化分量 h_+ 与 $h_\times$ 可以通过如下方式联系起来：

$$\psi_4 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(h_+ - ih_\times\right) \tag{52}$$

因此，求得了标量 ψ_4 就求得了引力波。那么如何求 ψ_4？我们需要用到 Teukolsky 方程，这是一组描述 Kerr 时空中引力微扰的方程（这里的 ψ_4 实际上应当理解为一个微扰量），这里显然我们不准备介绍推导过程，直接写出对于 ψ_4 的 Teukolsky 方程：

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(r^2+a^2)^2}{\Delta} - a^2\sin^2\theta\right]\partial_t^2\Psi - 4\left[r + ia\cos\theta - \frac{M(r^2-a^2)}{\Delta}\right]\partial_t\Psi + \frac{4Mar}{\Delta}\partial_\phi\partial_t\Psi - \Delta^2\partial_r\left(\Delta^{-1}\partial_r\Psi\right) \\ &-\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\Psi\right) + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\right]\partial_\phi^2\Psi + 4\left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]\partial_\phi\Psi + \left(4\cot^2\theta + 2\right)\Psi = 4\pi\Sigma\mathcal{T} \end{aligned} \tag{53}$$

其中 $\Psi = \rho^{-4}\psi_4$ 且 $\rho = (r - ia\cos\theta)^{-1}$；$\mathcal{T}$ 是 source term。注意到，这个方程复杂到一行都写不下，但是其实它可以被分离变量（这就是 Teukolsky 方程的变态之处），对 Ψ 和 $\mathcal{T}$ 在 t 和 ϕ 的频域上分解：

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{\ell,m}\int d\omega e^{-i\omega t + im\phi}\, {}_{-2}S^{a\omega}_{\ell m}(\theta)\, R_{\ell m\omega}(r) \\ 4\pi\Sigma\mathcal{T} &= \sum_{\ell,m}\int d\omega e^{-i\omega t + im\phi}\, {}_{-2}S^{a\omega}_{\ell m}(\theta)\, T_{\ell m\omega}(r) \end{aligned} \tag{54}$$

带入到刚刚提到的 Teukolsky 方程中，可得：

$$\begin{gathered}\Delta^2\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{dR_{\ell m\omega}}{dr}\right)-V(r)R_{\ell m\omega}=T_{\ell m\omega}\\ \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right\}-a^2\omega^2\sin^2\theta-\frac{(m-2\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}+4a\omega\cos\theta-2+2ma\omega+\lambda\right]{}_{-2}S^{a\omega}_{\ell m}=0\end{gathered}\tag{55}$$

其中：

$$\begin{gathered}V(r)=-\frac{K^2+4i(r-M)K}{\Delta}+8i\omega r+\lambda\\ K=(r^2+a^2)\omega-ma\end{gathered}\tag{56}$$

这里面 λ 是 ${}_{-2}S^{a\omega}_{\ell m}$ 对应的本征值，一般很难解析求出。${}_{-2}S^{a\omega}_{\ell m}$ 称为自旋为 -2 的自旋加权球谐函数（spin-weighted spheroidal harmonic with spin weight -2）是一种特殊的球谐函数，满足归一化条件：

$$\int_0^\pi |{}_{-2}S^{a\omega}_{\ell m}|^2\sin\theta d\theta=1\tag{57}$$

实际计算中，可以将 0 阶轨道对应的能动张量 $\mathcal{T}$ 转化为 $T_{\ell m\omega}(r)$ 然后带入 (55)，求得 $R_{\ell m\omega}$ 与 ${}_{-2}S^{a\omega}_{\ell m}$，进而得到标量 ψ_4，然后对 (52) 积分，即可得 0 阶轨道对应的引力波波形。

不过此处似乎有点跑偏了，我们只是想计算 EMRI 轨道在 GW 带来的 Self-force 作用下带来的偏移，而不是具体的 GW 波形。事实上，即使此处不计算出 0 阶轨道的波形，仍然有办法近似的计算出 GW 带来的耗散效应（比如大名鼎鼎的四极矩近似）。总之，从上述的 GW 波形的方式或者是其他近似的方式，我们总可以找到一种方法，计算出 GW 的辐射在何种程度上影响了 EMRI 轨道。

2.2.2 Self-Force 简介

终于进入了这一节的正题。Self-Force 的定义其实从名字中就可以推断出来，如果 Kerr 时空的运动可以写成：

$$\dot{p}=F\left(x,p\right)\tag{58}$$

那么考虑到 GW 耗散之后的方程就是：

$$\dot{p}=F_0\left(x,p\right)+\epsilon F_1\left(x,p\right)\tag{59}$$

其中 ϵ 是刻画 GW 辐射对于轨道影响的尺度因子，一般情况下都很小，可以看成一个微扰参数。F_1 的具体形式则和 GW 耗散的具体形式有关，一般情况下复杂的不得了，这里也就不写上去了，想看的可自行查找 EMRI 波形模板相关的文献。

除了直观自然的定义 (59) 以外，我们还可以用一个更不自然但是实际上更好算（后面会介绍为啥好算）的方式定义这个“自力”。由于 Kerr 测地线系统是一个可积系统，且我们已经找出了其 HJ 方程的解（即一个把所有相流都映射到对应点上的生成函数），我们总可以找到一个正则变换 $\{x,p\}\to\{q,J\}$，使得 $H\left(x,p\right)\to K\left(J\right)$ 同时：

$$\begin{gathered}\dot{q^\mu}=\frac{\partial K}{\partial J_\mu}=:\Upsilon^\mu\left(J\right)\\ \dot{J_\mu}=\frac{\partial K}{\partial q^\mu}=0\end{gathered}\tag{60}$$

此时的 q 称为 Angle Variable（角变量），J 称为 Action Variable（作用变量），这就是所谓的 Action-Angle Variable 理论。正则变量 $\{q,J\}$ 有很好的性质，其运动方程 (60) 的解为：

$$\begin{aligned} q^\mu &= \Upsilon^\mu(J)\lambda + q_0^\mu \\ J_\mu &= \text{const} \end{aligned} \tag{61}$$

注意此处演化参数用的是 λ。如果吧 $\{q,J\}$ 映射回物理坐标 $\{x,p\}$，会有形如：

$$x = x(q;J) = x(\Upsilon\lambda + q_0;J) \tag{62}$$

的变换式。注意到这和“简谐振动”的解：

$$x = \sin(\phi) = \sin(\omega t + \phi_0) \tag{63}$$

长得很像，这也是 Angle Variable 变量得名的原因：如果映射 $q \to x$ 是周期性的，实际上这里 q 就起到了类似于简谐振动中的“相位”的作用；而“相位”换种说法就是“角度”，请读者仔细体会其中的联系。

在 Action-Angle Variable 上，Self-force 写为：

$$\begin{aligned} \dot{q}^\mu &= \Upsilon^\mu(J) + \epsilon f^\mu(q,J) \\ \dot{J}_\mu &= \epsilon G_\mu(q,J) \end{aligned} \tag{64}$$

这没啥特别的，就是换个写法罢了。具体的 f 和 G 的形式，由 Action-Angle 对应的正则变换导出。以 f 为例，假设哈密顿量被微扰：

$$H = H_0(x,p) + \epsilon H_1(x,p) \tag{65}$$

我们假设存在变换：

$$x = \alpha(q;J) \tag{66}$$

则我们可以求逆：

$$q = \tilde{\alpha}(x;J) \tag{67}$$

如果我们还知道 $J(x,p)$，我们就可以计算 Poisson 括号：

$$\dot{q} = [\tilde{\alpha}, H]_{\{x,p\}} = \Upsilon^\mu(J) + \epsilon[\tilde{\alpha}(x;J(x,p)), H_1(x,p)] \tag{68}$$

从而：

$$f = [\tilde{\alpha}(x;J(x,p)), H_1(x,p)] \tag{69}$$

这就在“理论上”导出了 f 的具体形式。

2.2.3 Multi-Timescale 分析

铺垫到现在，终于要端出重头戏 Multi-Timescale Analysis 了。我们先从一个简单的例子入手，讲讲为什么需要这个东西。先请出我们的老朋友谐振子：

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{70}$$

如果我们的谐振子收到了一点点 damping foce 的话，方程就会变为：

$$\ddot{x}+2\epsilon\dot{x}+x=0 \tag{71}$$

此处的 ϵ 是一个微扰量。我们先尝试用最简单的微扰论去处理这个例子，假设有微扰解：

$$x=x_0+\epsilon x_1 \tag{72}$$

带入得：

$$\ddot{x}_0+x_0+\epsilon\left(\ddot{x}_1+x_1+2\dot{x}_0\right)+O\left(\epsilon^2\right)=0 \tag{73}$$

于是有两个不同阶微扰方程：

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0+x_0&=0\\ \ddot{x}_1+x_1&=-2\dot{x}_0\end{aligned} \tag{74}$$

这个方程组很好解，在初始条件 $x\left(0\right)=1,\dot{x}\left(0\right)=0$ 时的解为：

$$\begin{aligned}x_0&=\cos t\\ x_1&=\sin t-t\cos t\end{aligned} \tag{75}$$

于是解为：

$$x=\left(1-\epsilon t\right)\cos t+\epsilon\sin t \tag{76}$$

但是，很明星 (71) 是可以直接解出来的，这里不解了直接给答案：

$$x=e^{-\epsilon t}\left(\cos\omega t+\frac{\epsilon}{\omega}\sin\omega t\right) \tag{77}$$

其中 $\omega=\sqrt{1-\epsilon^2}$。通过对比精确解和一般微扰解 (76) 我们可以发现，第一项 $\left(1-\epsilon t\right)\cos t$ 和对应的精确解 $e^{-\epsilon t}\cos\omega t$ 在 $t\sim O\left(1/\epsilon\right)$ 的时候实际上就有 $O\left(1\right)$ 量级的偏差，这意味着我们的微扰解此时已经是不准确的了。所以，在处理形如 (71) 这样的耗散问题时，传统的微扰论解 (76) 往往只在时标 $O\left(1/\epsilon\right)$ 内有效。很不幸的是，我们的 GW 耗散下 EMRI 轨道计算问题也是这样。但是我们的 GW 信号，尤其是 EMRI 观测的信号往往需要观测 10^3 量级的周期数，而 SMO 的 GW 辐射又没有小到 $O\left(1/\epsilon\right)$ 够用的程度。因此，我们需要 Multi-Timescale 方法代替传统微扰论去提取出 GW 辐射带来的轨道长期效应。

为了简单考虑，我们以方程：

$$\dot{x}^\mu=F_0\left(\lambda,x\right)+\epsilon F_1\left(\lambda,x\right) \tag{78}$$

为例，介绍 Multi-Timescale 方法的一般理论。Multi-Timescale 方法的核心思想就是“升维”：把空间 $\{x,\lambda\}$ 中的方程延拓到更高维的空间 $\left\{x,\lambda,\tilde{\lambda}\right\}$ 上，其解也从曲线 $x(\lambda)$ 延拓成了曲面 $x(\lambda,\tilde{\lambda})$，后者在平面 $\epsilon\lambda=\tilde{\lambda}$ 中回到 $x(\lambda)$：

$$x(\lambda)=x(\lambda,\tilde{\lambda}=\epsilon\lambda) \tag{79}$$

其中 λ 称为短时标变量，$\tilde{\lambda}$ 称为长时标变量。很明星，方程 (78) 的延拓需要在平面 $\epsilon\lambda=\tilde{\lambda}$ 中回到它本身，于是这就要求在平面 $\epsilon\lambda=\tilde{\lambda}$ 中：

$$\frac{d}{d\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}+\epsilon\frac{\partial}{\partial\tilde{\lambda}} \tag{80}$$

此时方程为:

$$\frac{d}{d\lambda}=\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}+\epsilon\frac{\partial}{\partial\tilde{\lambda}}\right)x\left(\lambda,\tilde{\lambda}=\epsilon\lambda\right)=F_0\left(\lambda,x\right)+\epsilon F_1\left(\lambda,x\right) \tag{81}$$

把这个方程延拓到整个空间 $\left\{x,\lambda,\tilde{\lambda}\right\}$ 上:

$$\frac{\partial x\left(\tilde{\lambda},\lambda\right)}{\partial\lambda}+\epsilon\frac{\partial x\left(\tilde{\lambda},\lambda\right)}{\partial\tilde{\lambda}}=F_0\left(\lambda,x\right)+\epsilon F_1\left(\lambda,x\right) \tag{82}$$

这就是 Multi-Timescale Analysis 下，方程 (78) 被延拓后的形式。实际上，Multi-Timescale 方法正是通过将方程中不同时标的变化投影到不同的变量 λ 和 $\tilde{\lambda}$ 上，实现分离出方程微扰带来的长时标效应的。观察解析解 (77)，我们可以发现 damping force 带来的效应体现在了整体的系数 $e^{-\epsilon t}$ 上，很明显这里的 $\epsilon t=:\tilde{t}$ 就是长时标；而解 (77) 中的震荡项，如 $\cos t$ 等，则是短时标驱动的震荡项。

我们同样可以应用 Multi-Timescale 方法处理 (71) 中的问题，只要把所有的 d/dt 都换为

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial}{\partial\tilde{t}} \tag{83}$$

即可。我们设解为:

$$x=x_0\left(t,\tilde{t}\right)+\epsilon x_1\left(t,\tilde{t}\right) \tag{84}$$

带入原 ODE，此时这个 ODE 变为一个 PDE 系统:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2x_0}{\partial t^2}+x_0=0\\&\frac{\partial^2x_1}{\partial t^2}+x_1=-2\left(\frac{\partial x_0}{\partial t}+\frac{\partial^2x_0}{\partial\tilde{t}\partial t}\right)\end{aligned} \tag{85}$$

第一个方程很好解，考察原先的边界条件，解为:

$$x_0=A\left(\tilde{t}\right)\cos t \tag{86}$$

其中 A 满足 $A\left(0\right)=0$。因此对于第二式:

$$\mathrm{RHS}=2\left(A+A'\right)\sin t \tag{87}$$

注意到我们的初始条件对于 x_1 的限制是 $x_1=\dot{x}_1=0$，这实际上并不会对 A 有任何的限制。因此在 A 的选择上我们有了更多的自由度。一个有教育意义的选择就是令:

$$\mathrm{RHS}(\tilde{t})=\left\langle\mathrm{RHS}\left(t,\tilde{t}\right)\right\rangle_t=:\oint\mathrm{RHS}\left(t,\tilde{t}\right)dt \tag{88}$$

这常常被称为“周期平均近似”，用于平均化驱动力的周期性的影响，提取出长期效应。由于 $\sin t$ 的性质，$\left\langle\mathrm{RHS}\left(t,\tilde{t}\right)\right\rangle_t=0$。因此有:

$$A+A'=0 \tag{89}$$

因此，结合 $A\left(0\right)=0$ 可解出:

$$A\left(\tilde{t}\right)=e^{-\tilde{t}} \tag{90}$$

再此基础上，我们得到了包含长时标的 0 阶解:

$$x_0=A\left(\tilde{t}\right)\cos t=e^{-\tilde{t}}\cos t \tag{91}$$

回到空间 $\{t, x\}$ 上，为：

$$x_0 = e^{-\epsilon t} \cos t \tag{92}$$

与 (77) 对照，可以发现在 ϵ 的 0 阶的意义上，该 0 阶解很好的提取出了 damping force 带来的 $e^{-\epsilon t}$ 这一长期效应，比直接在空间 $\{t, x\}$ 上进行微扰求解更为精确。

下面介绍一下求解 (82) 的基本流程

懒得介绍了。。。其实都差不多，讲到这里估计都要结束了

2.3 可积性、混沌与轨道共振

暂时鸽了，这部分还挺有意思的

3 EMRI 的 QPE 与 GW 信号简介

3.1 QPE 简介

没啥好介绍的

3.2 EMRI 的 GW 波形计算简介

前面介绍了一点，细节太复杂了我也懒得打了。相信大家并不会对这个感兴趣。