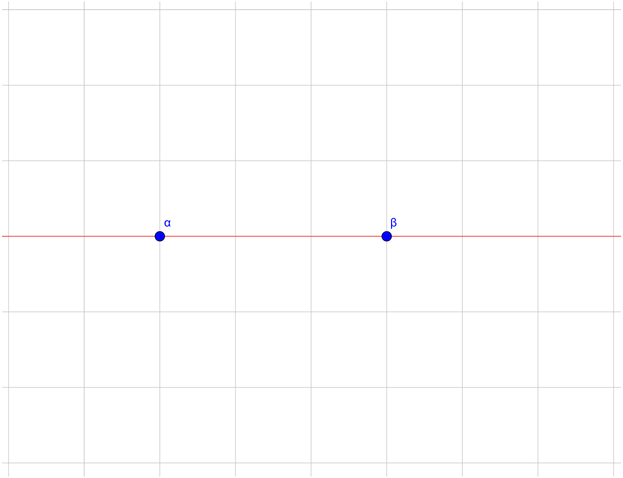
Your Presentation

Andrzej Kokosza

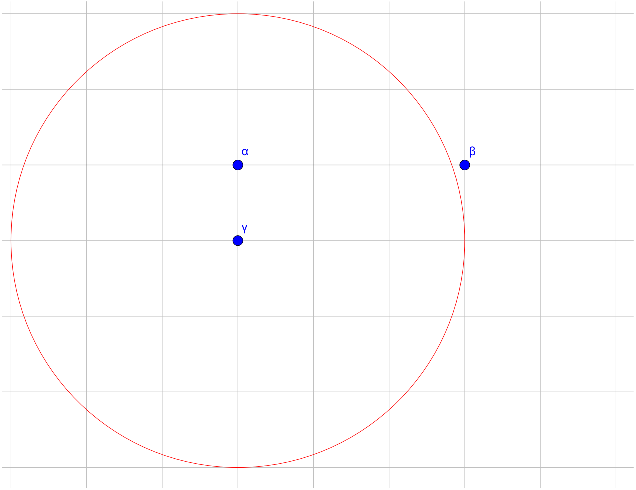
Oblicze 2016

Aksjomaty



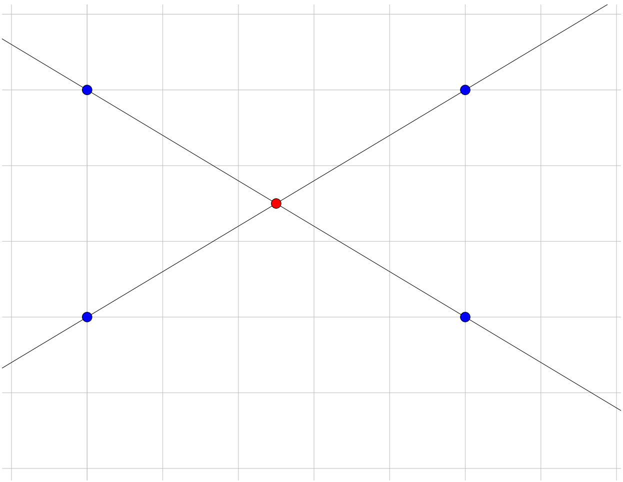
(C1) Dwa punkty $\alpha \neq \beta$ można połączyć prostą.

Aksjomaty



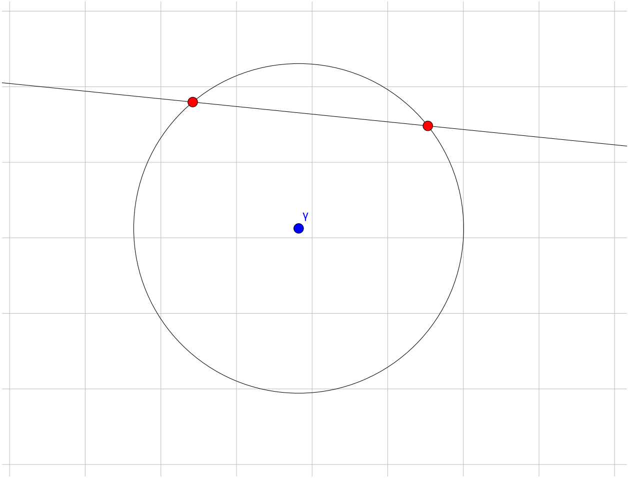
(C2) Dla puntów $\alpha \neq \beta$ i γ można utworzyć okrąg o środku w γ i promieniu $|\alpha\beta$

Aksjomaty



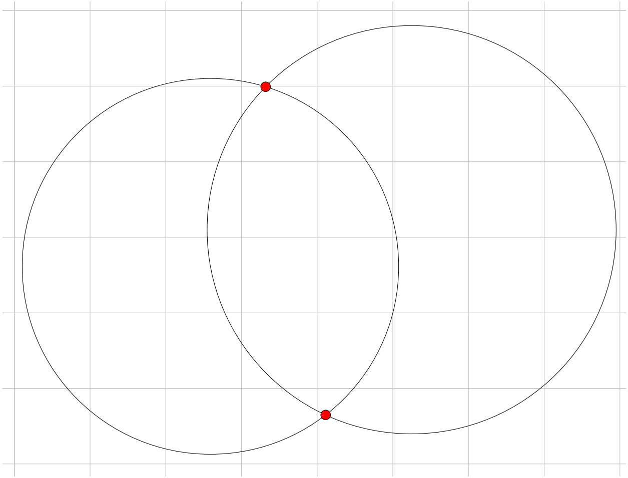
(P1) Punkt powstaje poprzez przecięcie 2 prostych.

Aksjomaty



(P2) Punkt powstaje przez przecięcie prostej i okręgu.

Aksjomaty



(P3) Punkt powstaje przez przecięcie dwóch okręgów.

Liczby Konstruowalne

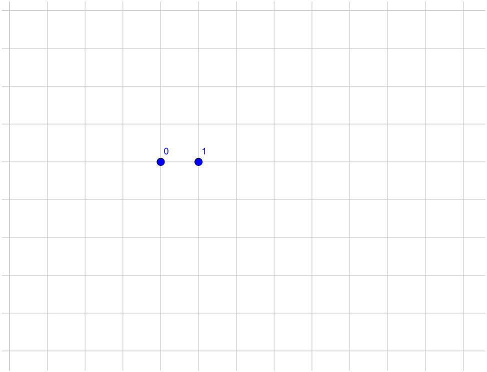
Definicja

Liczba zespololona jest konstruowalna.

Liczby Konstruowalne

Przykład

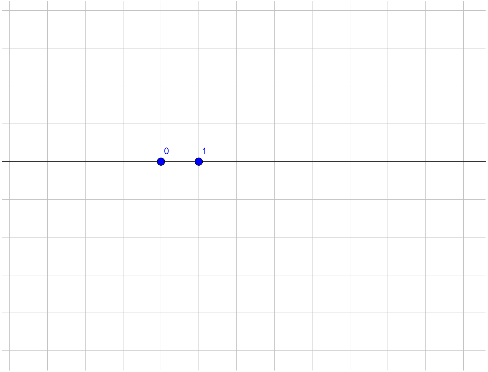
Liczby naturalne



Liczby Konstruowalne

Przykład

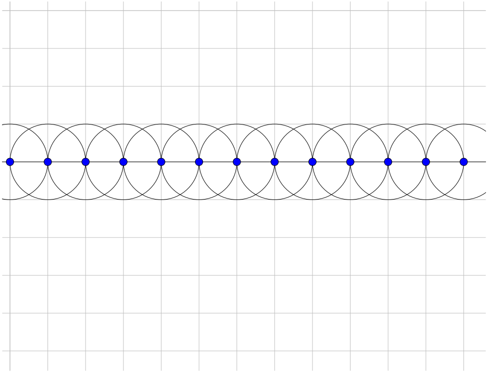
Liczby naturalne



Liczby Konstruowalne

Przykład

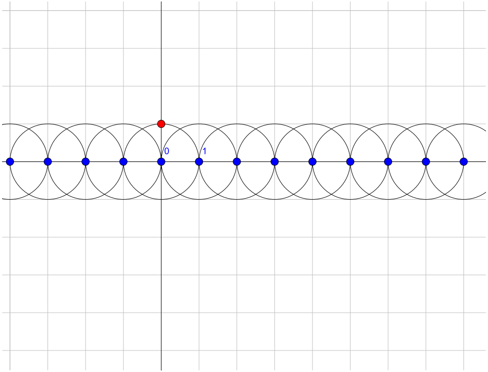
Liczby naturalne



Liczby Konstruowalne

Przykład

Liczby urojone całkowite



Liczby Konstruowalne

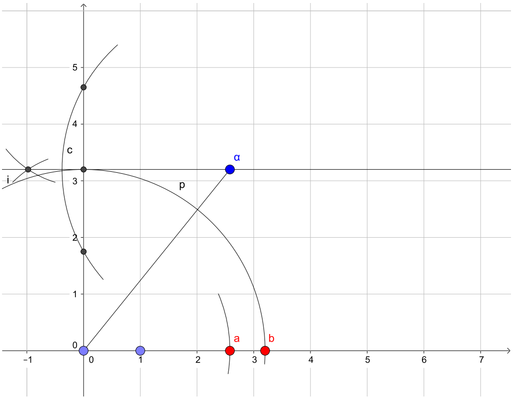
Twierdzenie

Niech $\mathcal{C} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ jest konstuowalne}\}$ *$\mathcal{C}$ jest podciałem* $\mathbb{C}$
Ponadto:

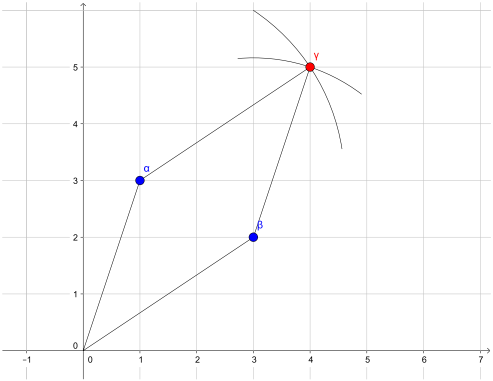
(a) Niech $\alpha = a + bi \in \mathcal{C}$, *gdzie* $a, b \in \mathbb{R}$, *to* $a, b \in \mathcal{C}$.

(b) Jeżeli $\alpha \in \mathcal{C}$, *to* $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}$

Liczby Konstruowalne



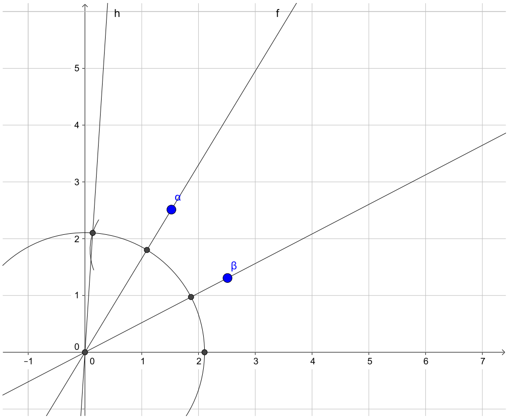
Liczby Konstruowalne



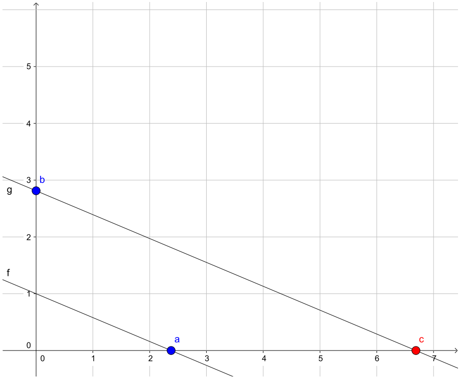
Liczby Konstruowalne

$$\alpha \cdot \beta = ae^{\theta} \cdot be^{\tau} = (ab)e^{\theta+\tau}$$

Liczby Konstruowalne



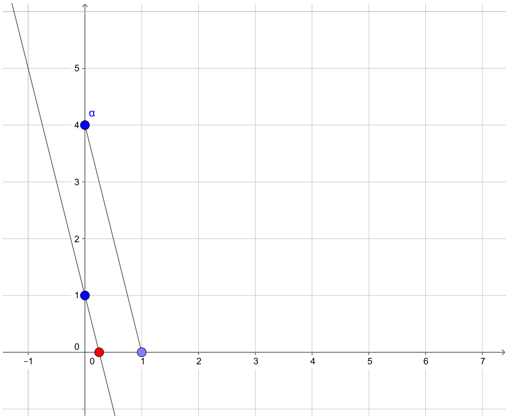
Liczby Konstruowalne



Liczby Konstruowalne

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ae^{\theta}}{be^{\tau}} = \left(\frac{a}{b}\right)e^{\theta-\tau}$$

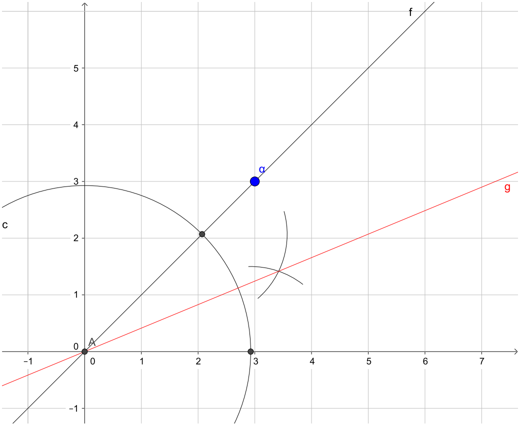
Liczby Konstruowalne



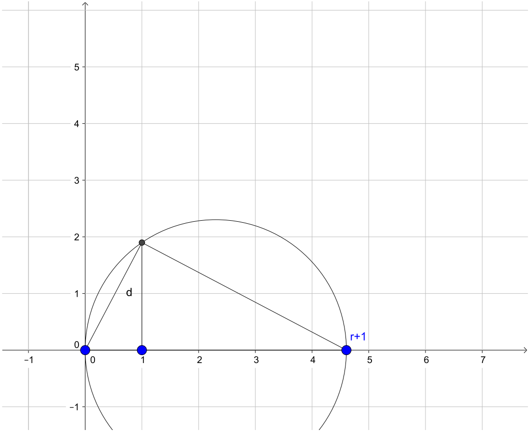
Liczby Konstruowalne

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{a}e^{\frac{\theta}{2}}$$

Liczby Konstruowalne



Liczby Konstruowalne



Liczby Konstruowalne

Twierdzenie

Niech α będzie liczbą zespoloną. Wtedy $\alpha \in \mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciała

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

takie, że $\alpha \in F_n$ i $[F_{i-1} : F_i] = 2$ dla $0 < i \leqslant n$

Liczby Konstruowalne

Dowód.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że istnieje $\mathbb{Q} = F_0 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$ gdzie $[F_{i-1} : F_i] = 2$. Możemy skorzystać z faktu, że jeżeli $[F_{i-1} : F_i] = 2$, to $F_i = F_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ dla pewnego $\alpha_i \in F_{i-1}$. Poprzez indukcję udowodnimy, że dla $0 < i \leqslant n$ $F_i \subset \mathbb{Q}$. Oczywiście $F_0 = \mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$. Załóżmy, że $F_{i-1} \subset \mathcal{C}$, $F_i = F_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$. Skoro $\alpha_i \in \mathcal{C}$, to $\sqrt{\alpha_i} \in \mathcal{C}$, stąd $F_i = F_{i-1}(\sqrt{\alpha_i}) \in \mathcal{C}$. Zatem $F_n \in \mathcal{C}$.

Liczby Konstruowalne

Dowód.

$(\Rightarrow)$ $\alpha \in \mathcal{C}$ Udowodnimy, przez stworzenie wieży rozszerzeń $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$ gdzie $[F_{i-1} : F_i] = 2$ takie, że F_n wartości urojone i rzeczywiste liczb, które powstają w trakcie konstrukcji α. Przeprowadzimy indukcje po liczbie N użyć aksjomatów P1, P2, P3. Dla $N = 0$ $\alpha = 0$ lub $\alpha = 1$ zatem $\mathbb{Q} = F_0 = F_n$.

Liczby Konstruowalne

Dowód.

Niech $N > 1$ i punkt α został otrzymany za pomocą P1, przecięcie się prostych l_1, l_2. Proste powstały z punktów α_1 i β_1 oraz α_2 i β_2. α_1, β_1, α_2, β_2 powstały w co najwyżej $N-1$ krokach, zatem z założenia indukcyjnego istnieje $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$ gdzie $[F_{i-1} : F_i] = 2$, że części urojone α_1, β_1, α_2, β_2 należą do F_n. Prosta l_1 jest opisana równaniem $a_1 x + b_1 y = c_1$, ponieważ $\alpha_1, \beta_1 \in F_n$ to $a_1, b_1, c_1 \in F_n$. analogicznie równaniem l_2 jest $a_2 x + b_2 y = c_2$. α jest punktem przecięcia się l_1, l_2. Zatem jego części urojone i rzeczywiste rozwiązaniem układu równań:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Readable Mathematics

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ and $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$, and let

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} X_i$$

denote their mean. Then as n approaches infinity, the random variables $\sqrt{n}(S_n - \mu)$ converge in distribution to a normal $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.