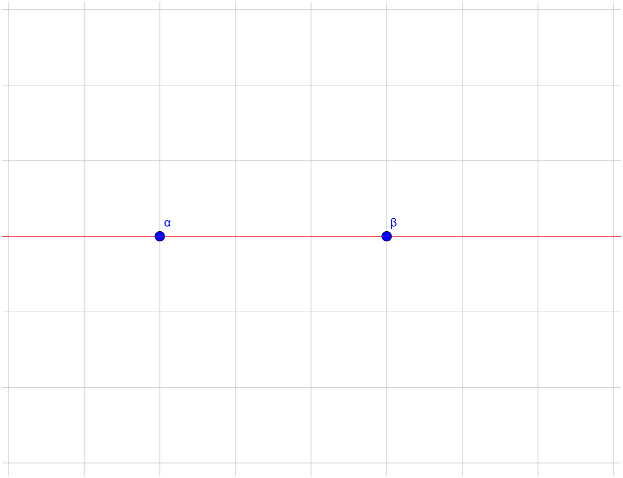
Your Presentation

Andrzej Kokosza

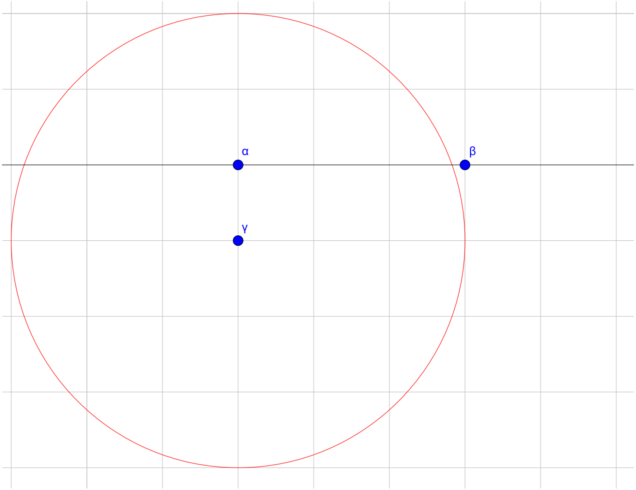
Oblicze 2016

Aksjomaty



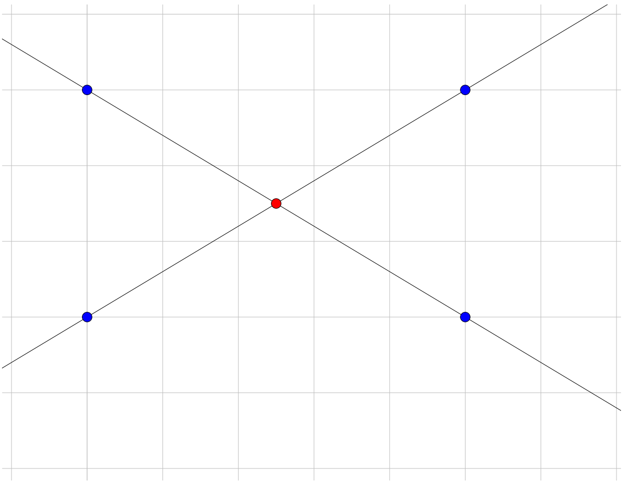
(C1) Dwa punkty $\alpha \neq \beta$ można połączyć prostą.

Aksjomaty



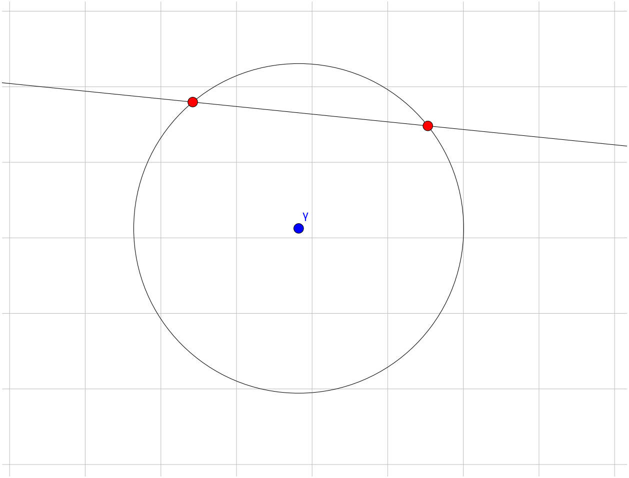
(C2) Dla puntów $\alpha \neq \beta$ i γ można utworzyć okrąg o środku w γ i promieniu $|\alpha\beta$

Aksjomaty



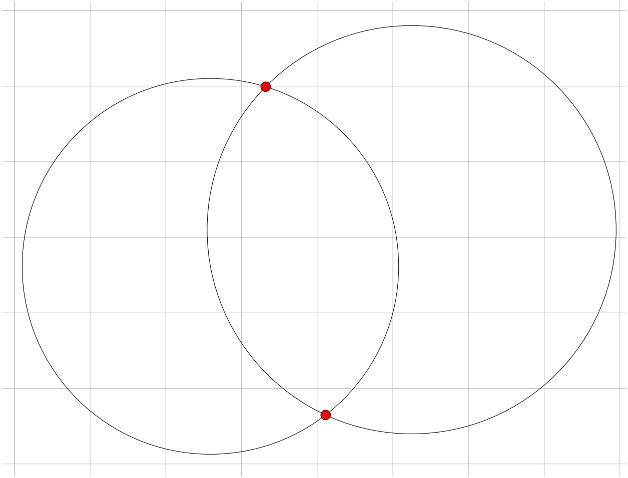
(P1) Punkt powstaje poprzez przecięcie 2 prostych.

Aksjomaty



(P2) Punkt powstaje przez przecięcie prostej i okręgu.

Aksjomaty



(P3) Punkt powstaje przez przecięcie dwóch okręgów.

Liczby Konstruowalne

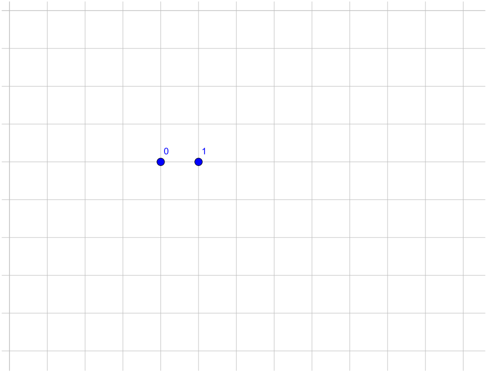
Definicja

Liczba zespololona jest konstruowalna, gdy można utworzyć ją za pomocą aksjomatów C1, C2, P1, P2, P3 w skończonej liczbie kroków. z liczb 0, 1.

Liczby Konstruowalne

Przykład

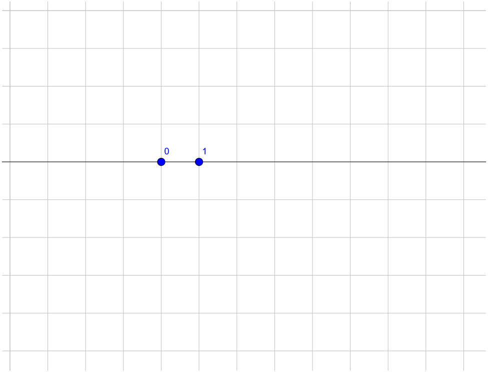
Liczby naturalne



Liczby Konstruowalne

Przykład

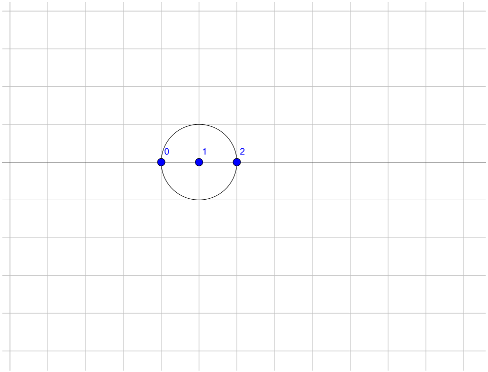
Liczby naturalne



Liczby Konstruowalne

Przykład

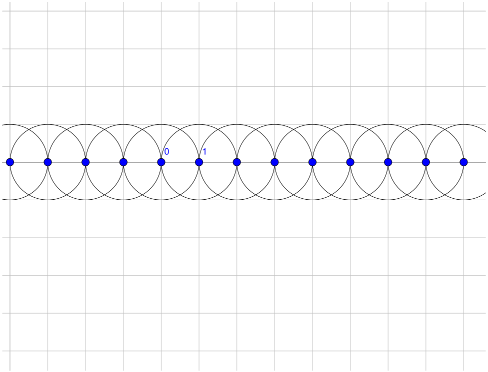
Liczby naturalne



Liczby Konstruowalne

Przykład

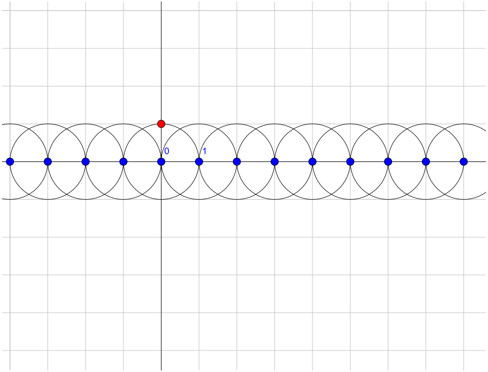
Liczby naturalne



Liczby Konstruowalne

Przykład

Liczby urojone całkowite



Liczby Konstruowalne

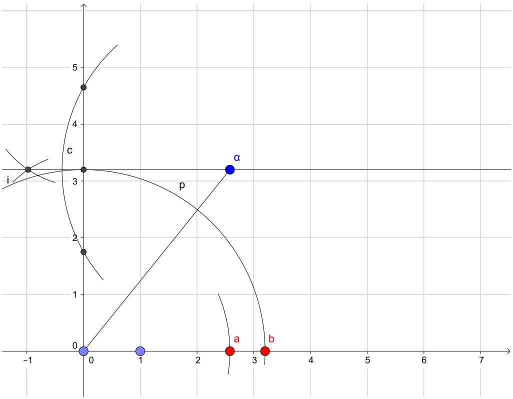
Twierdzenie

Niech $\mathcal{C} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ jest konstuowalne}\}$*.* $\mathcal{C}$ *jest podciałem* $\mathbb{C}$
Ponadto:

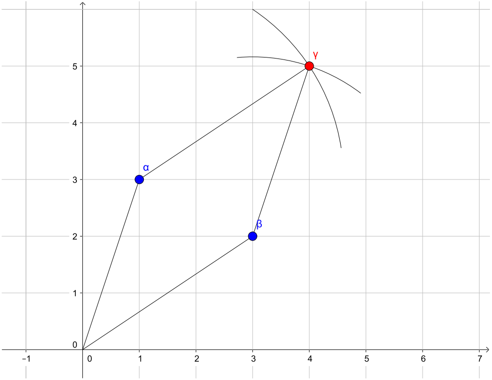
(a) Niech $\alpha = a + bi \in \mathcal{C}$*, gdzie* $a, b \in \mathbb{R}$*, to* $a, b \in \mathcal{C}$*.*

(b) Jeżeli $\alpha \in \mathcal{C}$*, to* $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}$

Liczby Konstruowalne



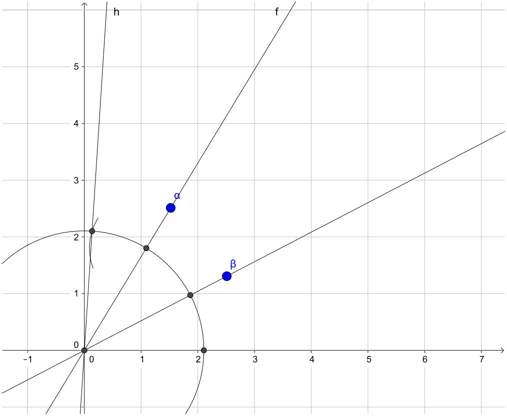
Liczby Konstruowalne



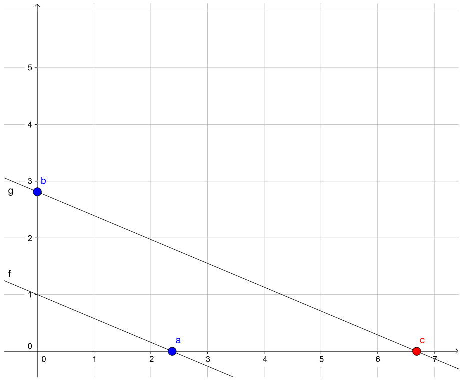
Liczby Konstruowalne

$$\alpha \cdot \beta = ae^{\theta} \cdot be^{\tau} = (ab)e^{\theta + \tau}$$

Liczby Konstruowalne



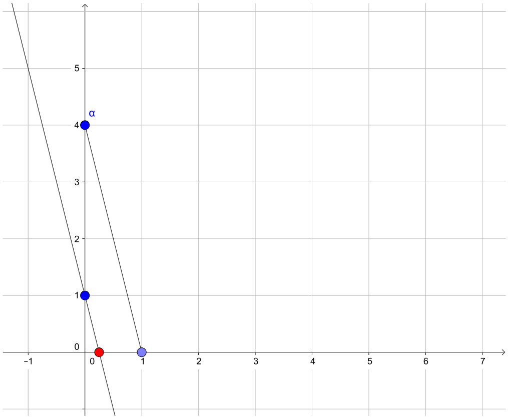
Liczby Konstruowalne



Liczby Konstruowalne

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ae^{\theta}}{be^{\tau}} = \left(\frac{a}{b}\right)e^{\theta-\tau}$$

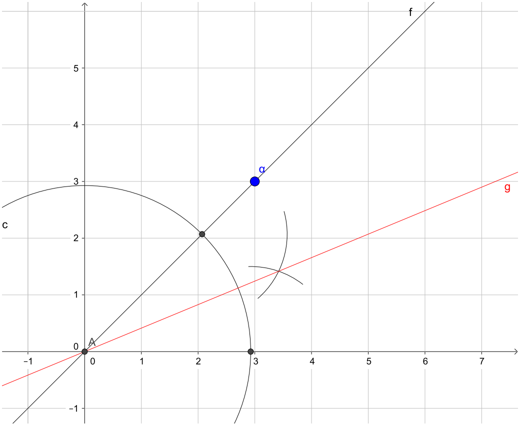
Liczby Konstruowalne



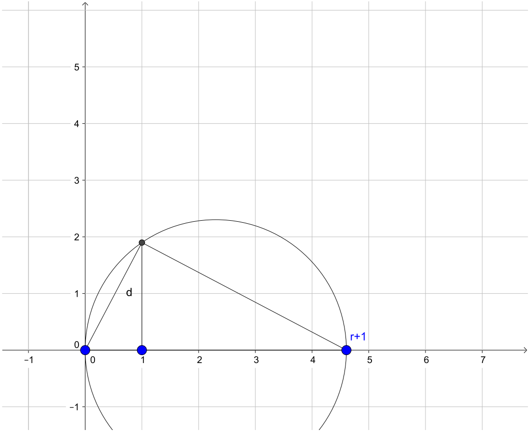
Liczby Konstruowalne

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{r} e^{\frac{\theta}{2}}$$

Liczby Konstruowalne



Liczby Konstruowalne



Przypomnienie

Liczby Konstruowalne

Twierdzenie

Niech α *będzie liczbą zespoloną. Wtedy* $\alpha \in \mathcal{C}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciała*

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

takie, że $\alpha \in F_n$ *i* $[F_{i-1} : F_i] = 2$ *dla* $0 < i \leqslant n$

Liczby Konstruowalne

Dowód.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że istnieje $\mathbb{Q} = F_0 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$ gdzie $[F_{i-1} : F_i] = 2$. Możemy skorzystać z faktu, że jeżeli $[F_{i-1} : F_i] = 2$, to $F_i = F_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ dla pewnego $\alpha_i \in F_{i-1}$. Poprzez indukcję udowodnimy, że dla $0 < i \leqslant n$ $F_i \subset \mathbb{Q}$. Oczywiście $F_0 = \mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$. Załóżmy, że $F_{i-1} \subset \mathcal{C}$, $F_i = F_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$. Skoro $\alpha_i \in \mathcal{C}$, to $\sqrt{\alpha_i} \in \mathcal{C}$, stąd $F_i = F_{i-1}(\sqrt{\alpha_i}) \in \mathcal{C}$. Zatem $F_n \in \mathcal{C}$.

Liczby Konstruowalne

Dowód.
($\Rightarrow$) $\alpha \in \mathcal{C}$ Udowodnimy, przez stworzenie wieży rozszerzeń $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$ gdzie $[F_{i-1} : F_i] = 2$ takie, że F_n wartości urojone i rzeczywiste liczb, które powstają w trakcie konstrukcji α. Przeprowadzimy indukcje po liczbie N użyć aksjomatów P1, P2, P3. Dla $N = 0$ $\alpha = 0$ lub $\alpha = 1$ zatem $\mathbb{Q} = F_0 = F_n$.

Liczby Konstruowalne

Dowód.

Niech $N > 1$ i punkt α został otrzymany za pomocą P1, przecięcie się prostych l_1, l_2. Proste powstały z punktów α_1 i β_1 oraz α_2 i β_2. α_1, β_1, α_2, β_2 powstały w co najwyżej $N-1$ krokach, zatem z założenia indukcyjnego istnieje $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$ gdzie $[F_{i-1} : F_i] = 2$, że części urojone i rzeczywiste α_1, β_1, α_2, β_2 należą do F_n. Prosta l_1 jest opisana równaniem $a_1x + b_1y = c_1$, ponieważ $\alpha_1, \beta_1 \in F_n$ to $a_1, b_1, c_1 \in F_n$. analogicznie równaniem l_2 jest $a_2x + b_2y = c_2$. α jest punktem przecięcia się l_1, l_2. Zatem jego części urojone i rzeczywiste rozwiązaniem układu równań:

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y = c_1 \\
a_2x + b_2y = c_2
\end{aligned}
$$

Stąd $\alpha \in F_n$

Liczby Konstruowalne

Dowód.

Niech $N > 1$ i punkt α został otrzymany za pomocą P1, przecięcie się prostych l_1, l_2. Proste powstały z punktów α_1 i β_1 oraz α_2 i β_2. α_1, β_1, α_2, β_2 powstały w co najwyżej $N-1$ krokach, zatem z założenia indukcyjnego istnieje $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$ gdzie $[F_{i-1} : F_i] = 2$, że części urojone i rzeczywiste α_1, β_1, α_2, β_2 należą do F_n. Prosta l_1 jest opisana równaniem $a_1x + b_1y = c_1$, ponieważ $\alpha_1, \beta_1 \in F_n$ to $a_1, b_1, c_1 \in F_n$. analogicznie równaniem l_2 jest $a_2x + b_2y = c_2$. α jest punktem przecięcia się l_1, l_2. Zatem jego części urojone i rzeczywiste rozwiązaniem układu równań:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Stąd $\alpha \in F_n$

Liczby Konstruowalne

Dowód.

Niech $N > 1$ i punkt α został otrzymany za pomocą P2, przecięcie się prostej l i okręgu o. Jak poprzednio można znaleźć $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$ gdzie $[F_{i-1} : F_i] = 2$, że części rzeczywiste i urojone punktów, z których powstały l i o, należą do F_n.

α jest rozwiązaniem układu równań.

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Gdzie $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2 \in F_n$. Załóżmy, że $a_1 \neq 0$, więc możemy przyjąć, że $a_1 = 1$.Po podstawieniu $x = -b_1 y + c_1$ otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$(-b_1 y + c_1)^2 + y^2 + a_2(-b_1 y + c_1) + b_2 y + c_2 = 0$$

Liczby Konstruowalne

Dowód.

$$(-b_1 y + c_1)^2 + y^2 + a_2(-b_1 y + c_1) + b_2 y + c_2 = 0$$

W przypadku, gdy wartości y, będące rozwiązaniami równania, należą do F_n, to $x = b_1 y + c_1$ także należy do F_n, więc F_n jest szukanym ciałem
Gdy rozwiązania nie należą do F_n, to istnieje rozszerzenie F_{n+1} stopnia drugiego F_n, do którego należą wartości rozwiązania, $x = b_1 y - c_1$ także należy do F_{n+1}. Zatem F_{n+1} jest szukanym ciałem.

Liczby Konstruowalne

Dowód.

Niech $N > 1$ i punkt α został otrzymany za pomocą P3, przecięcie się dwóch okręgów o_1 i o_2. Jak poprzednio α jest rozwiązaniem równania

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{gathered}$$

Po odjęciu stronami otrzymujemy:

$$\begin{gathered} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{gathered}$$

Co sprowadza się do poprzedniego przypadku. $\square$

Liczby Konstruowalne

Wniosek

$\mathcal{C}$ jest najmniejszym ciałem zamkniętym na operację pierwiastka kwadratowego.

Liczby Konstruowalne

Dowód.
Wiemy, że $\mathcal{C}$ jest zamknięty na operację $\sqrt{\ }$. Załóżmy, że istnieje $F \subset \mathbb{C}$ będzie ciałem zamkniętym na $\sqrt{\ }$. Weźmy dowolne $\alpha \in \mathcal{C}$. Z poprzedniego twierdzenia wiemy, istnieje wieża ciał $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$, gdzie $F_i = F_{i-1}(\alpha_i)$. Stąd $F_n \in F$, zatem $\mathcal{C} \subset F$. $\square$

Liczby Konstruowalne

Wniosek

Jeżeli $\alpha \in \mathcal{C}$*, to* $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^n$ *dla pewnego* $n \in \mathbb{N}$*. Więc każda liczba konstruowalna jest algebraiczna nad* $\mathbb{Q}$ *oraz jej wielomian minimalny jest stopnia* 2^n*.*

Liczby Konstruowalne

Dowód.

Jeżeli $\alpha \in \mathcal{C}$, to istnieje wieża ciał z poprzedniego twierdzenia $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset \mathbb{C}$, gdzie $[F_i : F_{i-1}] = 2$. Stąd

$$[F_n : \mathbb{Q}] = [F_n : F_0] = [F_n : F_{n-1}][F_{n-1} : F_{n-2}]...[F_2 : F_1] = 2^m$$

Ponieważ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset F_n$, to $[\mathbb{Q}(\alpha\mathbb{Q}]$ dzieli $[F_n : \mathbb{Q}]$. Zatem $[\mathbb{Q}(\alpha\mathbb{Q}] = 2^n$. $\square$

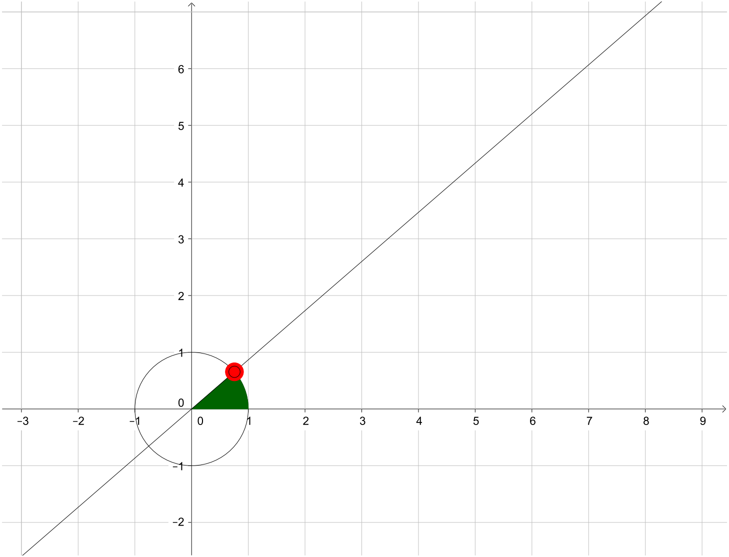
Trysekcja kąta

Przykład

Na przykładzie kąta $\frac{2}{3}\pi$.
Kąt θ *utożsamiamy z liczbą* e^{θ}

Trysekcja kąta

Przykład



Trysekcja kąta

Przykład

Pokażemy, że nie da się podzielić kąta $\frac{2}{3}\pi$ *na trzy, czyli skonstruować kąta* $\frac{2}{9}\pi$
Kąt θ *utożsamiamy z liczbą* e^{θ}*.*
Czyli badamy konstruowalność punku $e^{\frac{2}{9}\pi} = \zeta_9$*. Wielomianem minimalnym* ζ_9 *jest* $x^6 + x^3 + 1$*, którego stopień to 6. Stąd* ζ_9 *nie jest konstruowalny.*

Podwojenie Objętości sześcianu

Przykład

Problem sprowadza się do skonstruowania liczby $\sqrt[3]{2}$*. jego wielomian minimalny to* $x^3 - 2$*, jego stopień wynosi* 3*. Co oznacza, że* $\sqrt[3]{2}$ *nie jest konstruowalny.*

Teoria Galois

Liczby konstruowalne

Twierdzenie

Niech $\alpha \in \mathbb{C}$ *będzie algebraiczne nad* $\mathbb{Q}$ *i* $\mathbb{Q} \subset L$ *będzie ciałem rozkładu wielomianu minimalnego* α *nad* $\mathbb{Q}$*. Wtedy* α *jest konstruowalne wtedy i tylko wtedy, gdy* $[L : \mathbb{Q}]$ *jest potęgą dwójki.*

Liczby konstruowalne

Dowód.
($\Leftarrow$) Załóżmy, że $[L : \mathbb{Q}]$ jest potęgą dwójki. Ponieważ $L/\mathbb{Q}$ jest Galois, to $|Gal(L/\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}] = 2^n$. $Gal(L/\mathbb{Q})$ jest rozwiązywalna, więc istnieją podgrupy:

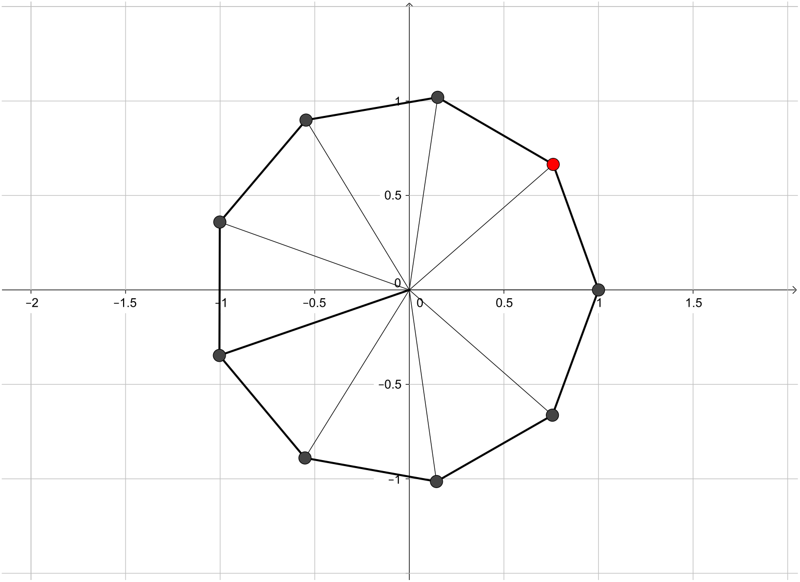
$$\{e\} = G_m \subset G_{m-1} \subset ... \subset G_1 \subset G_0 = Gal(L/\mathbb{Q})$$

takie, że G_{i-1} jest podgrupą normalną dla G_i o indeksie 2. Z odpowiedniości Galois wynika, że istnieje wieża ciał

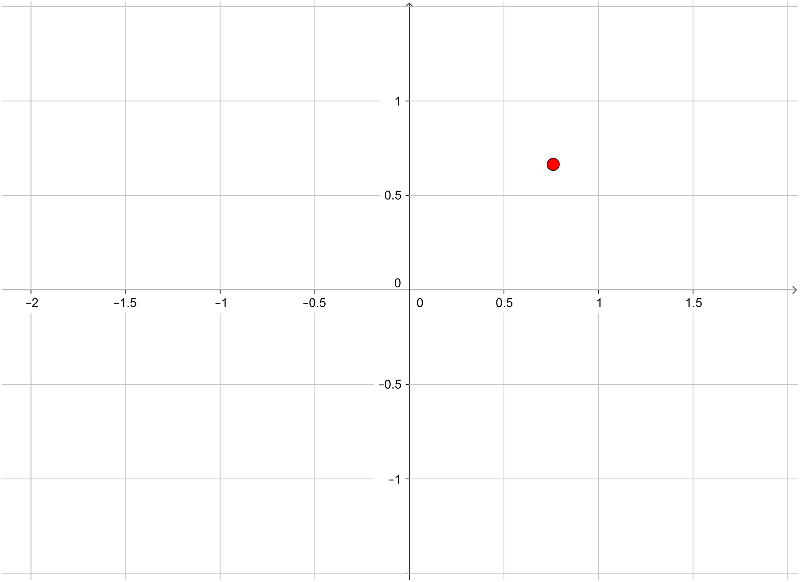
$$\mathbb{Q} = L_{G_0} \subset L_{G_1} \subset ... \subset L_{G_m} = L,$$

gdzie $[L_{G_i} : L_{G_{i-1}}] = 2$. Zatem α jest konstruowalne.

Wielokąty foremne



Wielokąty foremne



Wielokąty foremne

Definicja

Liczba pierwsza p większa od 2 jest liczbą pierwszą Fermata, jeżeli można ją zapisać jako:

$$p = 2^{2^n} + 1$$

Wielokąty foremne

Twierdzenie

Niech $n > 2$ całkowite, wtedy n-kąt foremny może zostać skonstruowany wtedy i tylko wtedy, gdy

$$n = 2^s p_1 p_2 ... p_r,$$

gdzie $p_1, ..., p_n$ są liczbami pierwszymi Fermata.

Wielokąty foremne

Dowód.

($\Leftarrow$) Dany n-kąt foremny jest konstruowalny, gdy konstruowalne jest ζ_n. Wiemy, że:

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$ jest Galois,

ζ_n jest konstruowalne, gdy $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = 2^s$

$[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}) = \begin{cases} 2^{s-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_n - 1), & s > 0 \\ (p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_n - 1), & s = 0 \end{cases}$$

w obu przypadkach $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ jest potęgą dwójki.

Wielokąty foremne

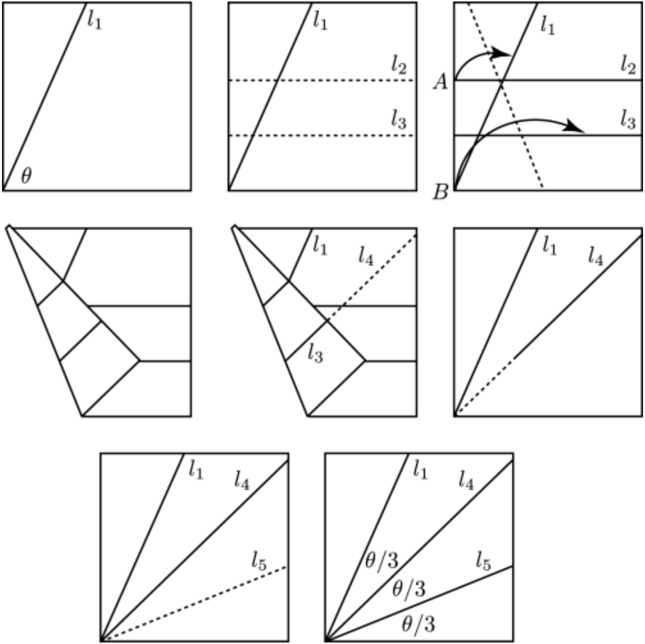
Dowód.

($\Rightarrow$) Niech $n = q_1^{s_1}, ..., q_n^{s_n}$, gdzie $q_1, ..., q_n$ są liczbami pierwszymi.

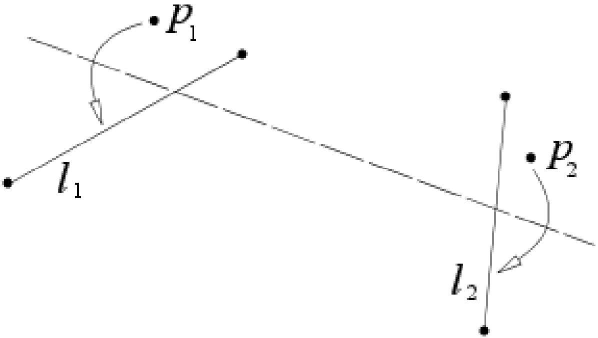
$$\phi(n) = n \prod_{q|n} (1 - \frac{1}{q}) = q_1^{a_1}(q_1 - 1)...q_2^{a_2}(q_2 - 2).$$

Jeżeli q_i jest większe od 2, to s_i jest równe 1, dla 2 dowolne. Zatem wszystkie liczby $q_1, ..., q_n$ są postaci $2^{k_i} + 1$. Wystarczy dowieść, że jeżeli liczba pierwsza tej postaci jest liczbą Fermata. $\square$

Liczby Origami



Liczby Origami



Lemat

Niech P_1 będzie punktem na płaszczyźnie nie leżącym na linii l_1. Linia l, o którą odbicie P_1 leży na prostej l_1, jest styczna z parabolą o ogniskowej w P_1 i kierownicy l_1.

Liczby Origami

Przykład

pokażemy, jak za pomocą stycznej do 2 paraboli policzyć pierwiastki wielomianu $x^3 + ax + b = c$ *rozważmy parabole*

$$(y - \frac{a}{2})^2 = 2bx \text{ oraz } y = \frac{1}{2}x^2$$

Niech l *będzie prostą styczną do tych parabol. w punktach* (x_1, y_1) *pierwszą oraz* (x_2, y_2) *drugą. współczynnik nachylenia prostej wynosi:*

$$m = \frac{b}{y_1 - \frac{1}{2}a}$$

stąd $m \neq 0$ *oraz:*

$$x_1 = \frac{zb}{2m^2}$$

$$y_1 = \frac{zb}{m} + \frac{a}{2}$$

Liczby Origami

Przykład

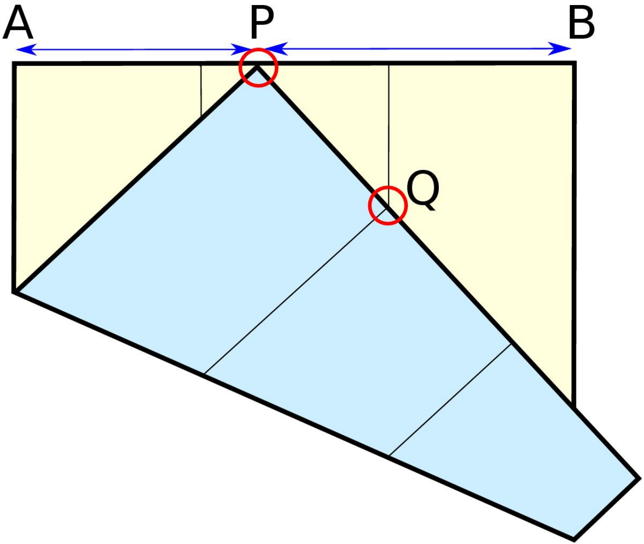
Jeśli podstawimy pod $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ *otrzymamy:*

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m^2}{2} - \left(\frac{b}{m} + \frac{a}{2}\right)}{m - \frac{2}{2m^2}} = \frac{m^4 - 2m - qm^2}{2m^3 - b}$$

Co sprowadza się do:

$$m^3 + am^2 + bm + c = 0$$

Liczby Origami



Liczby Origami

Twierdzenie

Niech $\mathcal{O} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha$ *jest origami*$\}$. $\mathcal{C}$ *jest podciałem* $\mathbb{C}$ *Ponadto:*

(a) *Niech* $\alpha = a + bi \in \mathcal{C}$, *gdzie* $a, b \in \mathbb{R}$, *to* $a, b \in \mathcal{C}$.

(b) *Jeżeli* $\alpha \in \mathcal{C}$, *to* $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}$

(c) *Jeżeli* $\alpha \in \mathcal{C}$, *to* $\sqrt[3]{\alpha} \in \mathcal{C}$