Paikallisuus hajautetuissa verkkoalgoritmeissa

Juhana Laurinharju

Tieteellinen kirjoittaminen
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 7. toukokuuta 2013

1 Johdanto

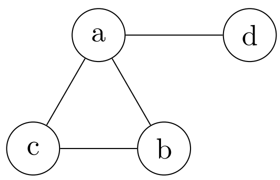
2 Määritelmiä

2.1 Verkko

Suuntaamaton verkko on pari $G = (V, E)$, missä V on *solmujoukko* ja E on *kaarijoukko*. *Kaari* solmusta $v \in V$ solmuun $u \in V$ on kaksikko $\{v, u\} \in E$. Kaarta voidaan myös merkitä lyhyemmin vu. Esimerkiksi verkko $G = (V, E)$, missä

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d\} \text{ ja} \\ E &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, d\}\} \\ &= \{ab, bc, ca, ad\} \end{aligned}$$

näyttää seuraavalta



2.2 Laskennan malli

Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton verkko. Verkon jokaisessa solmussa $v \in V$ on tietokone. Laskenta koostuu *kommunikaatiokierroksista*. Yhden kommunikaatiokierroksen aikana jokainen solmu voi:

1. suorittaa mielivaltaista laskentaa
2. lähettää viestin jokaiselle naapurilleen
3. vastaanottaa naapureiden lähettämät viestit

Lisäksi jokaiselle solmulle $v \in V$ on annettu yksikäsitteinen tunniste $\mathrm{ID}(v) \in \{1, \ldots, |V|\}$. Laskennan päätyttyä jokaisen solmun tulee tietää oma tulosteensa.

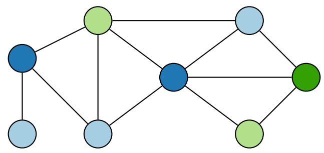
TODO: motivointia sille, että tarkastellaan vain kommunikaatiokierrosten lukumäärää aikavaativuutena.

2.3 Verkon väritys

Verkko on *väritetty*, jos jokaiseen solmuun $v \in V$ on liitetty jokin *väri* $c(v) \in \mathbb{N}$ ja kahdella vierekkäisellä solmulla ei koskaan ole samaa väriä. Tarkemmin, verkon $G = (V, E)$ *solmuväritys* on kuvaus $c : V \to \{1, \ldots, k\}$

jollain luonnollisella luvulla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi vaaditaan, että jos verkossa on kaari solmusta v solmuun u, eli $vu \in E$, niin $c(v) \neq c(u)$.

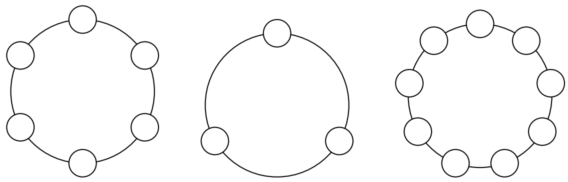
Verkon voi värittää k:lla värillä jos löytyy yllä olevan ehdon täyttävä kuvaus $c : V \to \{1, \ldots, k\}$. Tällaista väritystä kutsutaan *k-väritykseksi.*



Jos verkkoa väritetään hajautetulla algoritmilla, niin jokaisen solmun tulee tietää oma värinsä laskennan päätyttyä.

2.4 Sykli

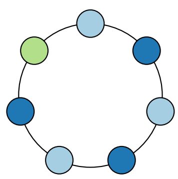
Verkko on *sykli*, jos se on yhtenäinen ja sen jokaisella solmulla on tasan kaksi naapuria.



Tarkemmin sanoen, n-sykli, missä $n \geq 3$, on verkko $C_n = (V, E)$ jolla

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$
$$E = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\}$$

Syklin voi aina värittää kolmella värillä.
TODO: tälle lähde?



2.5 Iteroitu logaritmi $\log^*$

Iteroitu logaritmi $\log^*$ kertoo kuinka monta kertaa luvusta täytyy ottaa logaritmi, kunnes lopputulos on korkeintaan yksi. Tarkemmin,

$$\log^* x = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq 1, \\ 1 + \log^*(\log x), & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned}\log^* 16 &= \log^* 2^{2^2} = 1 + \log^* 2^2 \\ &= 2 + \log^* 2 = 3 + \log^* 1 = 3\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\log^* 65536 &= \log^* 2^{2^{2^2}} = 1 + \log^* 16 \\ &= 4,\end{aligned}$$

joten $\log^* n$ on arvoltaan pienempi kuin 5 kun $n < 2^{65536}$. Iteroitu logaritmi on siis äärimmäisen hitaasti kasvava funktio.

2.6 Näkymä

Määritelmä 1. Verkon G *polku* on jono $P = (p_1, \ldots, p_n)$, missä jokainen $p_i \in V(G)$ on verkon G solmu ja lisäksi kahden jonon perättäisen solmun välillä täytyy aina olla kaari. Siis kaikilla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ täytyy olla voimassa ehto $u_i u_{i+1} \in E(G)$. Polku P on polku solmusta p_1 solmuun p_n.

TODO: kuva polusta

Määritelmä 2. Polun $P = (p_1, \ldots, p_n)$ pituus on sen kaarten lukumäärä. Siis polun P pituus on $n - 1$.

TODO: kuvan polun pituus

Määritelmä 3. Kahden verkon G solmun $u, v \in V(G)$ välinen *etäisyys* verkossa G, $d_G(u, v)$, on lyhimmän solmusta u solmuun v kulkevan polun pituus.

TODO: tarvitaanko notaatiota $d_G(u, v)$?
TODO: kuva lyhimmästä polusta ja etäisyydestä

Hajautetussa algoritmissa solmu $v \in V$ saa k:ssa kierroksessa selville oman k-ympäristönsä. Toisaalta solmu ei pysty tässä ajassa saamaan mitään selville solmuista, joiden etäisyys v:stä on yli k.

TODO: kuvasarja havainnollistamaan tätä

Hajautettu algoritmi, jonka ajoaika on k kierrosta on siis funktio, jonka lähtöjoukkona on solmujen mahdolliset k-ympäristöt.

TODO: tää kaipaa varmaan vähän selvennystä

Erityisesti syklissä algoritmi, jonka ajoaika on k kierrosta, tekee päätöksensä k:n edeltäjän, k:n seuraajan ja oman tunnisteensa perusteella. Toisin sanoen solmun $v_l \in V(C_n)$ tuloste on funktio arvoilta

$$\left(\mathrm{ID}(v_{l-k}), \mathrm{ID}(v_{l-k+1}), \ldots, \mathrm{ID}(v_{l-1}), \mathrm{ID}(v_l), \mathrm{ID}(v_{l+1}), \ldots, \mathrm{ID}(v_{l+k})\right),$$

Missä yhteen- ja vähennyslaskut suoritetaan modulo n.

TODO: Kuvasarja solmun näkymästä syklissä.

Erityisesti jos algoritmi tuottaa 3-värityksen syklissä k:ssa kierroksessa, niin täytyy olla olemassa sellainen funktio $f : [n]^{2k+1} \to [3]$, joka tuottaa laillisen 3-värityksen riippumatta siitä miten solmuille on annettu tunnisteet.

2.7 Naapurustoverkot

TODO: liitä tää syklien näkymiin

Naapurustoverkko $B_{t,n} = (V, E)$, missä V on kaikkien vektoreiden $(x_1, \dots, x_{2t+1})$ joukko joilla x_i:t ovat keskenään erisuuria kokonaislukuja joukosta $[n]$. Verkossa $B_{t,n}$ solmut muotoa

$$(x_1, \dots, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_2, \dots, x_{2t})$$

ovat naapureita, kun $y \neq x_{2t+1}$.

TODO: esittele $[n]$ merkintä, tai älä käytä sitä ollenkaan

TODO: pari kuvaa näistä verkoista pienillä parametrien arvoilla

Määritelmä 4. Solmun $v \in V(G)$ *asteluku* on sen naapureiden lukumäärä verkossa G. Tarkemmin, solmun $v \in V(G)$ asteluku on $|\,\{e \in E(G) \mid v \in e\}\,|$.

Verkossa $B_{t,n}$ on $n(n-1)(n-2)\cdots(n-2t)$ solmua ja sen kaikkien solmujen asteluku on $2(n-2t-1)$.

TODO: onko asteluvusta puhuminen olennaista?

TODO: epäkonsistenttia: kierrosmäärä on välillä k ja välillä t

Hajautettu algoritmi, joka 3-värittää syklin t kierroksessa on funktio $c : V(B_{t,n}) \to [3]$.

TODO: tätä vois perustella

Nyt c on myös laillinen 3-väritys verkolle $B_{t,n}$, sillä jos c antaa solmuille

$$(x_1, \dots, x_{2t}, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_1, \dots, x_{2t})$$

saman värin, niin se antaa myös syklissa kahdelle vierekkäiselle solmulle saman värin kun syklissä esiintyy pätkä

$$y, x_1, x_2, \dots, x_{2t+1}.$$

Siis jos näytetään, että verkkoa $B_{t,n}$ ei voi 3-värittää, niin ei voi myöskään olla hajautettua algoritmia joka värittäisi n-syklin kolmella värillä t kierroksessa.

2.8 Suunnattu verkko

Suunnatto verkko $G = (V, E)$ on verkko, jossa kaarilla on suunta. Suunnatussa verkossa on kaari solmusta $u \in V$ solmuun $v \in V$ jos $(u, v) \in E$. Suunnatulla kaarella $e = (u, v) \in E$ on *kärki*

$$\mathrm{head}(e) = v$$

ja *häntä*

$$\mathrm{tail}(e) = u$$

TODO: onks kärki ja häntä oikeet käännökset?

TODO: kuva suunnatusta verkosta ja havainnollistava kuva kärjestä ja hännästä

2.9 Värityksluku $\chi(G)$

Verkon G värityksluku $\chi(G)$ on pienin määrä värejä, jolla sen voi värittää.

3 Sykliä ei voi 3-värittää alle $\log^* n$ kierroksessa

Väritysluvun $\chi(B_{t,n})$ alaraja todistetaan käyttäen suunnattujen verkkojen $D_{s,n}$ perhettä. Suunnatut verkot $D_{s,n}$ liittyvät läheisesti naapurustoverkkoihin $B_{t,n}$. Verkon $D_{s,n}$ solmujoukon V muodostavat kaikki vektorit muotoa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_s),$$

joilla pätee

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_s \leq n.$$

Solmusta $(a_1, \ldots, a_s)$ lähtee kaari muotoa

$$(a_2, \ldots, a_s, b)$$

oleviin solmuihin, joilla $a_s < b \leq n$.

Nyt naapurustoverkko $B_{t,n}$ pitää sisällään aliverkkona suunnatun verkon $D_{2t+1,n}$.

TODO: avaa tätä

TODO: pitäskö aliverkko määritellä?

Tästä erityisesti seuraa, että $\chi(B_{t,n}) \geq \chi(D_{2t+1})$.

TODO: selvennä tätä

3.1 Suunnatun verkon kaariverkko

Suunnatun verkon G *kaariverkko* $\mathrm{DL}(G)$ on verkko, jonka solmuja ovat alkuperäisen verkon G kaaret ja kahden kaariverkon solmun

$$u, v \in V(\mathrm{DL}(G)) = E(G)$$

välillä on kaari, jos $\mathrm{head}(u) = \mathrm{tail}(v)$.

TODO: havainnollistava kuva

Tarkemmin ilmaistuna,

$$V(\mathrm{DL}(G)) = E(G)$$
$$E(\mathrm{DL}(G)) = \{(v, u) \in E(G) \times E(G) \mid \mathrm{head}(v) = \mathrm{tail}(u)\}.$$

Lemma 5. *$D_{1,n}$ on n:n solmun täydellinen verkko, jossa kaaret on suunnattu pienemmästä solmusta isompaan.*

Todistus. Verkon $D_{s,n}$ määritelmä s:n arvolla 1 antaa seuraavan verkon:

$$\begin{aligned} V(D_{1,n}) &= \{(k) \mid 1 \leq k \leq n\} \\ E(D_{1,n}) &= \{((k),(l)) \mid k < l\}. \end{aligned}$$

Tässä verkossa jokaisen kahden solmun välillä on kaari tasan yhteen suuntaan. □

Määritelmä 6. Kaksi suunnattua verkkoa G ja H ovat *isomorfiset* jos niiden solmujoukkojen välillä on olemassa kuvaus $\varphi\colon V(G) \to V(H)$ joka toteuttaa seuraavat ehdot

1. φ on bijektio
2. $(u,v) \in E(G)$ jos ja vain jos $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H)$.

Nämä ehdot toteuttavaa kuvausta kutsutaan *isomorfismiksi*.

Lemma 7. *Verkko $D_{s+1,n}$ on verkon $D_{s,n}$ kaariverkko. Tarkemmin,*

$$D_{s+1,n} = \mathrm{DL}(D_{s,n}).$$

Todistus. Ideana on samaistaa kaariverkon $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ kaari

$$\big((x_1,\ldots,x_s),(x_2,\ldots,x_s,y)\big)$$

verkon $D_{s+1,n}$ solmun $(x_1,\ldots,x_s,y)$ kanssa. Määritellään siis verkkojen välille kuvaus

$$\varphi\colon V(\mathrm{DL}(D_{s,n}) \to V(D_{s+1,n})$$

asettamalla

$$\varphi\big((x_1,\ldots,x_s),(x_2,\ldots,x_s,y)\big) = (x_1,\ldots,x_s,y).$$

Näytetään, että φ on isomorfismi. Ensinnäkin φ on bijektio, sillä sille löytyy seuraava käänteiskuvaus $\psi\colon D_{s+1,n} \to \mathrm{DL}(D_{s,n})$:

$$\psi(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \big((x_1,\ldots,x_n),(x_2,\ldots,x_{n+1})\big).$$

Kuvaus ψ on kuvauksen φ käänteiskuvaus, sillä

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)\big((x_1,\ldots,x_n),(x_2,\ldots,x_n,y)\big) &= \psi\big(\varphi\big((x_1,\ldots,x_n),(x_2,\ldots,x_n,y)\big)\big) \\ &= \psi(x_1,\ldots,x_n,y) \\ &= \big((x_1,\ldots,x_n),(x_2,\ldots,x_n,y)\big) \end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) &= \varphi\big(\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\big) \\
&= \varphi\big((x_1, \ldots, x_n), (x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})\big) \\
&= (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Vielä täytyy näyttää, että kuvaus toteuttaa isomorfiaehdon. Olkoon

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= (x_1, \ldots, x_n) \in V(D_{s,n}), \\
\bar{x}_2 &= (x_2, \ldots, x_{n+1}) \in V(D_{s,n}), \\
\bar{y}_1 &= (y_1, \ldots, y_n) \in V(D_{s,n}) \text{ ja} \\
\bar{y}_2 &= (y_2, \ldots, y_{n+1}) \in V(D_{s,n})
\end{aligned}
$$

verkon $D_{s,n}$ solmuja. Tällöin erityisesti

$$
\begin{aligned}
(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &\in V(\mathrm{DL}(D_{s,n})) \text{ ja} \\
(\bar{y}_1, \bar{y}_2) &\in V(\mathrm{DL}(D_{s,n}))
\end{aligned}
$$

ovat kaariverkon $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ solmuja. Jos $\big((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) \in E(\mathrm{DL}(D_{s,n}))$ on kaariverkon $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ kaari, niin kaariverkon määritelmän nojalla

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{head}\big((\bar{x}_1, \bar{x}_2)\big) = \operatorname{tail}\big((\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) && \Longrightarrow \\
&\bar{x}_2 = \bar{y}_1 && \Longrightarrow \\
&(x_2, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, \ldots, y_n) && \Longrightarrow \\
&y_1 = x_2, \ldots \text{ ja } y_n = x_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Koska $\bar{x}_1 \in V(D_{s,n})$ ja $\bar{y}_2 \in V(D_{s,n})$, niin $x_1 < y_1 = x_2$ ja $y_n < y_{n+1}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\big(\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) &= \big((x_1, \ldots, x_{n+1}), (y_1, \ldots, y_{n+1})\big) \\
&= \big((x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n), (y_1, \ldots, y_{n+1})\big) \in E(D_{s+1,n}).
\end{aligned}
$$

Ollaan siis näytetty ensimmäinen kahdesta implikaatiosta:

$$
\big((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) \in E(\mathrm{DL}(D_{s,n})) \implies \big(\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) \in E(D_{s+1,n}).
$$

Toisaalta jos

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= (x_1, \ldots, \bar{x}_{n+1}) \in V(D_{s+1,n}) \text{ ja} \\
\bar{y} &= (y_1, \ldots, \bar{y}_{n+1}) \in V(D_{s+1,n}).
\end{aligned}
$$

ovat verkon $D_{s+1,n}$ solmuja joiden välillä on kaari, eli $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n})$, niin tällöin

$$
x_2 = y_1, \ldots \text{ ja } x_{n+1} = y_n.
$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= (x_1, \dots, x_n),\\
\bar{x}_2 &= (x_2, \dots, x_{n+1}),\\
\bar{y}_1 &= (y_1, \dots, y_n) \text{ ja}\\
\bar{y}_2 &= (y_2, \dots, y_{n+1})
\end{aligned}$$

ovat verkon $D_{s,n}$ solmuja joilla pätee

$$\begin{aligned}
(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in E(D_{s,n}) &\implies (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in V(\mathrm{DL}(D_{s,n})) \text{ ja}\\
(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in E(D_{s,n}) &\implies (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in V(\mathrm{DL}(D_{s,n})).
\end{aligned}$$

Koska $\bar{x}_2 = \bar{y}_1$, niin kaariverkossa $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ on kaari

$$((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)) \in E(\mathrm{DL}(D_{s,n})).$$

Koska

$$\begin{aligned}
(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \varphi^{-1}(\bar{x}) \text{ ja}\\
(\bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \varphi^{-1}(\bar{y})
\end{aligned}$$

niin väite on todistettu. Ollaan siis näytetty, että jos $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n})$ on verkon $D_{s+1,n}$ kaari, niin sen solmujen alkukuvien välillä on myös kaari. Tarkemmin sanottuna

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n}) \implies (\varphi^{-1}(\bar{x}), \varphi^{-1}(\bar{y})) \in E(\mathrm{DL}(D_{s,n})).$$

Ollaan siis näytetty, että löytyy bijektio $\varphi \colon V(\mathrm{DL}(D_{s,n})) \to D_{s+1,n}$ joka toteuttaa isomorfiaehdon, joten verkot $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ ja $D_{s+1,n}$ ovat isomorfisina olennaisesti sama verkko. $\square$

TODO: todista erikseen, että $D_{2,n} = \mathrm{DL}(_{1,n})$?

Verkkojen $D_{s,n}$ välillä on nyt siis tarkkaan tunnettu yhteys, kun s:n arvot vaihtelevat. Lisäksi verkko $D_{1,n}$ on rakenteeltaan yksinkertainen täydellinen verkko. Koska täydellisessä verkossa on kaari verkon jokaisen solmuparin välillä, täytyy sen jokaisella solmulla olla eri väri kuin millään muulla solmulla. Siispä verkon $_{1,n}$ värittämiseen tarvitaan n väriä. Tarkemmin ilmaistuna,

$$\chi(D_{1,n}) = n.$$

TODO: pitäiskö äskeisen olla huomautus?

Seuraavan lemman avulla saadaan yhteys verkkojen $D_{s,n}$ ja $D_{s+1,n}$ värityslukujen välille.

Lemma 8. *Olkoon G kaariverkko. Tällöin*

$$\chi(\mathrm{DL}(G)) \geq \log \chi(G).$$

Todistus. Olkoon $\Psi\colon \mathrm{DL}(G) \to [k]$ kaariverkon $\mathrm{DL}(G)$ k-väritys. Koska verkko $\mathrm{DL}(G)$ on verkon G kaariverkko, niin kuvaus Ψ antaa jokaiselle verkon G kaarelle värin. Jos $u, v \in E(G)$ ovat verkon G perättäisiä kaaria, eli $\mathrm{head}(u) = \mathrm{tail}(v)$, niin Ψ antaa niille eri värit, $\Psi(u) \neq \Psi(v)$.

Muodostetaan verkolle G väritys $c\colon G \to \mathcal{P}([k])$ joka värittää G:n 2^k värillä. Olkoon $x \in V(G)$ verkon G solmu. Määritellään x:n väri seuraavasti:

$$c(x) = \{\Psi(u) \mid \mathrm{tail}(u) = x\}.$$

Solmun x väri on siis joukko, jossa on kaikkien solmusta x lähtevien kaarten värit värityksessä Ψ. Jotta c olisi laillinen väritys, se ei saa antaa samaa väriä kahdelle naapurisolmulle. Olkoon $u = (x, y) \in E(G)$ verkon G kaari ja siis $y \in V(G)$ solmun x naapuri. Nyt $\mathrm{tail}(u) = x$, joten u:n väri kuuluu x:n värijoukkoon. Tarkemmin ilmaistuna, $\Psi(u) \in c(x)$. Toisaalta jos $\Psi(u) \in c(y)$, niin tällöin löytyy kaari $v \in E(G)$, joka lähtee solmusta y, eli $\mathrm{tail}(v) = y$ ja lisäksi jolle Ψ antaa saman värin kuin u:lle, eli $\Psi(x) = \Psi(y)$. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä $\mathrm{head}(u) = y = \mathrm{tail}(v)$, jolloin Ψ ei olisikaan laillinen verkon $\mathrm{DL}(G)$ väritys. Siis c antaa vierekkäisille solmuille aina toisistaan eroavan värin, joten se täyttää väritysehdon.

TODO: Yllä oleva kappale on pitkä, luettavuutta voisi parantaa ainakin siirtämällä jotain yhtälöympäristöön

Väritys c antaa verkon G solmuille väriksi jonkin osajoukon värityksen Ψ väreistä. Koska k:n alkion joukolla on yhteensä 2^k osajoukkoa, niin c värittää verkon G korkeintaan 2^k värillä.

Ollaan siis näytetty, että jos verkon G kaariverkon $\mathrm{DL}(G)$ voi värittää k:lla värillä, niin G:n voi värittää 2^k värillä. Toisin sanoen

$$\begin{aligned}
\chi(G) &\leq 2^{\chi(\mathrm{DL}(G))} \implies \\
\log \chi(G) &\leq \chi(\mathrm{DL}(G))
\end{aligned}$$

□

Korollaari 9.

$$\chi(D_{s+1,n}) \geq \log \chi(D_{s,n}).$$

4 Lähteet