

Paikallisuus hajautetuissa verkkoalgoritmeissa

Juhana Laurinharju

Tieteellinen kirjoittaminen
Helsingin Yliopisto
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 5. helmikuuta 2013

Johdanto

Artikkelissa *Locality in Distributed Graph Algorithms* [2] Linial näyttää, ettei hajautettu algoritmi voi 3-värittää n solmun sykliä alle $\log^* n$ kierroksessa. Tämä alaraja on tiukka, sillä Colen ja Vishkinin [1] algoritmilla n -syklin voi 3-värittää $\log^* n$ kierroksessa.

Laskennan malli

Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton verkko. Verkon jokaisessa solmussa $v \in V$ on tietokone. Laskenta koostuu kommunikointikierroksista. Yhden kommunikointikierroksen aikana jokainen solmu voi:

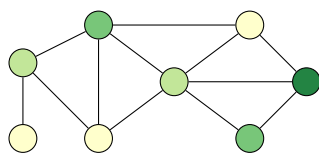
1. suorittaa mielivaltaista laskentaa
2. lähettää viestin jokaiselle naapurilleen
3. vastaanottaa naapureiden lähettämät viestit

Lisäksi jokaiselle solmulle $v \in V$ on annettu yksikäsitteinen tunniste $ID(v) \in \{1, \dots, |V|\}$

Verkon väritys

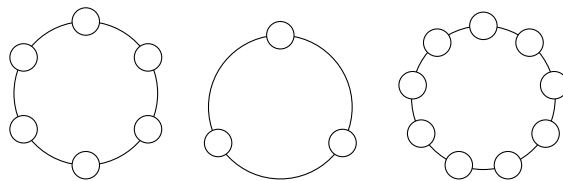
Verkko on väritetty, jos jokaiseen solmuun $v \in V$ on liitetty jokin väri ja kahdella vierekkäisellä solmulla ei koskaan ole samaa väriä. Tarkemmin, verkon $G = (V, E)$ *solmuväritys* on kuvaus $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ jollain luonnollisella luvulla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi vaaditaan, että jos verkossa on kaari solmusta v solmuun u , eli $vu \in E$, niin $c(v) \neq c(u)$.

Verkon voi värittää k :lla värillä jos löytyy yllä olevan ehdon täyttävä kuvaus $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Tällaista väritystä kutsutaan k -väritykseksi.

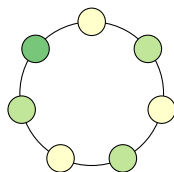


Sykli

Verkko on sykli, jos se on yhtenäinen ja sen jokaisella solmulla on tasan kaksi naapuria.



Syklin voi aina värittää kolmella värillä.



Iteroitu logaritmi \log^*

Iteroitu logaritmi \log^* kertoo kuinka monta kertaa luvusta täytyy ottaa logaritmi, kunnes lopputulos on korkeintaan yksi.

$$\log^* x = \begin{cases} 0 & , \text{ jos } x \leq 1 \\ 1 + \log^*(\log x) & , \text{ muutoin} \end{cases}$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} \log^* 16 &= \log^* 2^{2^2} = 1 + \log^* 2^2 \\ &= 2 + \log^* 2 = 3 + \log^* 1 = 3 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \log^* 65536 &= \log^* 2^{2^{2^2}} = 1 + \log^* 16 \\ &= 4, \end{aligned}$$

mistä voi huomata, että $\log^* n$ on arvoltaan pienempi kuin 5 kun $n < 2^{65536}$. Iteroitu logaritmi on siis äärimmäisen hitaasti kasvava funktio.

Linial näyttää, että hajautetun algoritmin tulee käyttää ainakin $\Omega(\log^* n)$ kierrosta syklin 3-värittämiseen. Tämä raja on myös asympotoottisesti tiukka, sillä Colen ja Vishkinin algoritmi värittää syklin kolmella värillä $O(\log^* n)$ kierroksessa.

1 Lähteet

- [1] Cole, Richard ja Uzi Vishkin: *Deterministic coin tossing with applications to optimal parallel list ranking*. Information and Control, 70(1):32–53, 1986.

- [2] Linial, Nathan: *Locality in Distributed Graph Algorithms*. SIAM Journal on Computing, 21(1):193–201, 1992.