Paikallisuus hajautetuissa verkkoalgoritmeissa

Juhana Laurinharju

Tieteellinen kirjoittaminen
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 14. toukokuuta 2013

1 Johdanto

2 Määritelmiä

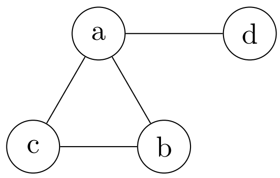
2.1 Verkko

Määritelmä 1. *Suuntaamaton verkko* on pari $G = (V, E)$, missä V on *solmujoukko* ja E on *kaarijoukko*. *Kaari* solmusta $v \in V$ solmuun $u \in V$ on kaksikko $\{v, u\} \in E$. Kaarta voidaan myös merkitä lyhyemmin vu. Jos G on suuntaamaton verkko, niin sen solmujoukkoon voidaan viitata myös merkinnällä $V(G)$ ja kaarijoukkoon merkinnällä $E(G)$.

Esimerkiksi verkko $G = (V, E)$, missä

$$
\begin{aligned}
V &= \{a, b, c, d\} \text{ ja} \\
E &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, d\}\} \\
&= \{ab, bc, ca, ad\}
\end{aligned}
$$

näyttää seuraavalta



Määritelmä 2. Kaikilla posiitivisilla kokonaisluvuilla k merkitään:

$$[k] = \{1, \ldots, k\}$$

2.2 Laskennan malli

Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton verkko. Verkon jokaisessa solmussa $v \in V$ on tietokone. Laskenta koostuu *kommunikaatiokierroksista*. Yhden kommunikaatiokierroksen aikana jokainen solmu voi

1. suorittaa mielivaltaista laskentaa,
2. lähettää viestin jokaiselle naapurilleen ja
3. vastaanottaa naapureiden lähettämät viestit.

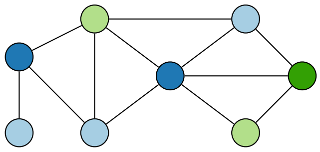
Lisäksi jokaiselle solmulle $v \in V$ on annettu yksikäsitteinen tunniste $\mathrm{ID}(v) \in [|V|]$. Laskennan päätyttyä jokaisen solmun tulee tietää oma tulosteensa.

TODO: motivointia sille, että tarkastellaan vain kommunikaatiokierrosten lukumäärää aikavaativuutena.

2.3 Verkon väritys

Määritelmä 3. Verkko on *väritetty*, jos jokaiseen solmuun $v \in V$ on liitetty jokin *väri* $c(v) \in \mathbb{N}$ ja kahdella vierekkäisellä solmulla ei koskaan ole samaa väriä. Tarkemmin, verkon $G = (V, E)$ *solmuväritys* on kuvaus $c\colon V \to [k]$ jollain luonnollisella luvulla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi vaaditaan, että jos verkossa on kaari solmusta v solmuun u, eli $vu \in E$, niin $c(v) \neq c(u)$.

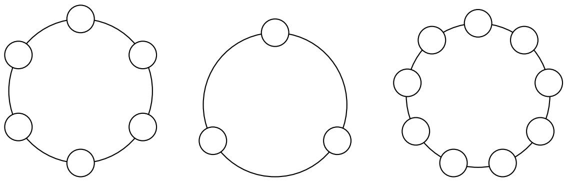
Verkon voi värittää k:lla värillä jos löytyy yllä olevan ehdon täyttävä kuvaus $c\colon V \to [k]$. Tällaista väritystä kutsutaan *k-värityskseksi*.



Jos verkkoa väritetään hajautetulla algoritmilla, niin jokaisen solmun tulee tietää oma värinsä laskennan päätyttyä.

2.4 Sykli

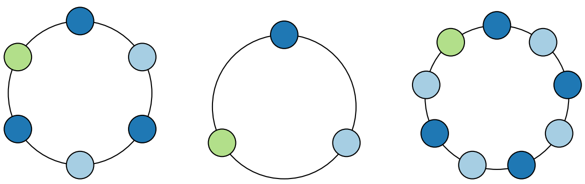
Määritelmä 4. Verkko on *sykli*, jos se on yhtenäinen ja sen jokaisella solmulla on tasan kaksi naapuria.



Tarkemmin sanoen, n-sykli, missä $n \geq 3$, on verkko $C_n = (V, E)$ jolla

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$
$$E = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\}$$

Syklin voi aina värittää kolmella värillä.
TODO: tälle lähde?



2.5 Iteroitu logaritmi $\log^*$

Määritelmä 5. *Iteroitu logaritmi* $\log^*$ kertoo kuinka monta kertaa luvusta täytyy ottaa logaritmi, kunnes lopputulos on korkeintaan yksi. Tarkemmin,

$$\log^* x = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq 1, \\ 1 + \log^*(\log x), & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} \log^* 16 &= \log^* 2^{2^2} = 1 + \log^* 2^2 \\ &= 2 + \log^* 2 = 3 + \log^* 1 = 3 \end{aligned}$$

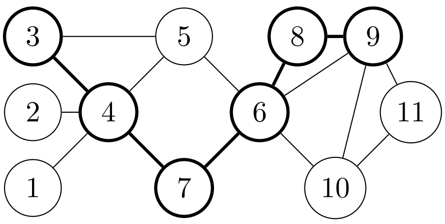
ja

$$\begin{aligned} \log^* 65536 &= \log^* 2^{2^{2^2}} = 1 + \log^* 16 \\ &= 4, \end{aligned}$$

joten $\log^* n$ on arvoltaan pienempi kuin 5 kun $n < 2^{65536}$. Iteroitu logaritmi on siis äärimmäisen hitaasti kasvava funktio.

2.6 Näkymä

Määritelmä 6. Verkon G *polku* on jono $P = (p_1, \ldots, p_n)$, missä jokainen $p_i \in V(G)$ on verkon G solmu, kahden jonon perättäisen solmun välillä täytyy aina olla kaari ja lisäksi sama solmu ei saa esiintyä jonossa kahdesti. Siis kaikilla $i \in [n-1]$ täytyy olla voimassa ehto $p_i p_{i+1} \in E(G)$. Lisäksi kaikilla $i, j \in [n], i \neq j$ täytyy olla voimassa ehto $p_i \neq p_j$. Polku P on polku solmusta p_1 solmuun p_n.



Yllä olevassa kuvassa on polku $(3, 4, 7, 6, 8, 9)$ solmusta 3 solmuun 9.

Määritelmä 7. Polun $P = (p_1, \ldots, p_n)$ pituus on sen kaarten lukumäärä. Siis polun P pituus on $n - 1$.

Edellisen kuvan polun pituus on 5.

Määritelmä 8. Kahden verkon G solmun $u, v \in V(G)$ välinen *etäisyys* verkossa G, on lyhimmän solmusta u solmuun v kulkevan polun pituus.

TODO: kuva lyhimmästä polusta ja etäisyydestä

TODO: Määrittele k-ympäristö

TODO: kuvia naapurustoista eri säteillä

Hajautetussa algoritmissa solmu $v \in V$ saa k:ssa kierroksessa selville oman k-ympäristönsä. Toisaalta solmu ei pysty tässä ajassa saamaan mitään selville solmuista, joiden etäisyys v:stä on yli k.

TODO: kuvasarja havainnollistamaan tätä

Hajautettu algoritmi, jonka ajoaika on k kierrosta on siis funktio, jonka lähtöjoukkona on solmujen mahdolliset k-ympäristöt.

TODO: tää kaipaa varmaan vähän selvennystä

Erityisesti syklissä algoritmi, jonka ajoaika on k kierrosta, tekee päätöksensä k:n edeltäjän, k:n seuraajan ja oman tunnisteensa perusteella. Toisin sanoen solmun $v_l \in V(C_n)$ tuloste on funktio arvoilta

$$(\mathrm{ID}(v_{l-k}), \mathrm{ID}(v_{l-k+1}), \ldots, \mathrm{ID}(v_{l-1}), \mathrm{ID}(v_l), \mathrm{ID}(v_{l+1}), \ldots, \mathrm{ID}(v_{l+k}))\,,$$

Missä yhteen- ja vähennyslaskut suoritetaan modulo n.

TODO: Kuvasarja solmun näkymästä syklissä.

Erityisesti jos algoritmi tuottaa 3-värityksen syklissä k:ssa kierroksessa, niin täytyy olla olemassa sellainen funktio $f : [n]^{2k+1} \to [3]$, joka tuottaa laillisen 3-värityksen riippumatta siitä miten solmuille on annettu tunnisteet.

TODO: onko karteesinen potenssi kohdeyleisölle tuttu?

2.7 Naapurustoverkot

Määritelmä 9. Naapurustoverkko $B_{t,n} = (V, E)$ on verkko, jonka solmujoukon V muodostaa vektoreiden $(x_1, \ldots, x_{2t+1})$ joukko, missä x_i:t ovat keskenään erisuuria kokonaislukuja joukosta $[n]$. Verkossa $B_{t,n}$ solmut muotoa

$$(x_1, \ldots, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_1, x_2, \ldots, x_{2t})$$

ovat naapureita, kun $y \neq x_{2t+1}$.

TODO: pari kuvaa näistä verkoista pienillä parametrien arvoilla

Naapurustoverkon $B_{t,n}$ solmu on siis syklissä ajetun hajautetun algoritmin näkymä t kierroksen jälkeen. Kahden näkymän välillä on naapurustoverkossa kaari, jos ne ovat vierekkäisten solmujen näkymät jossain yksikäsitteisillä tunnisteilla varustetussa n-syklissä.

TODO: havainnollista kuvalla syklin naapurisolmujen näkymiä ja naapurustoverkon vastaavia solmuja

Määritelmä 10. Solmun $v \in V(G)$ *asteluku* on sen naapureiden lukumäärä verkossa G. Tarkemmin, solmun $v \in V(G)$ asteluku on

$$|\,\{e \in E(G) \mid v \in e\}\,|.$$

Verkossa $B_{t,n}$ on

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-2t)$$

solmua ja sen kaikkien solmujen asteluku on $2(n-2t-1)$.

TODO: onko asteluvusta puhuminen olennaista?

TODO: epäkonsistenttia: kierrosmäärä on välillä k ja välillä t

Hajautettu algoritmi, joka 3-värittää syklin t kierroksessa antaa jokaiselle solmulle värin tarkastelemalla vain sen t-ympäristön tunnisteita. Väritysalgoritmi on siis todellisuudessa funktio $c : V(B_{t,n}) \to [3]$, sillä naapurustoverkossa $B_{t,n}$ on solmuina kaikki mahdolliset n-syklin t-naapurustot.

Nyt c on myös laillinen 3-väritys verkolle $B_{t,n}$, sillä jos c antaa solmuille

$$(x_1, \ldots, x_{2t}, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_1, \ldots, x_{2t})$$

saman värin, niin se antaa myös syklissa kahdelle vierekkäiselle solmulle saman värin kun syklissä esiintyy pätkä

$$y, x_1, x_2, \ldots, x_{2t+1}.$$

Siis jos näytetään, että verkkoa $B_{t,n}$ ei voi 3-värittää, niin ei voi myöskään olla hajautettua algoritmia joka värittäisi n-syklin kolmella värillä t kierroksessa.

2.8 Suunnattu verkko

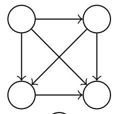
Suunnatto verkko $G = (V, E)$ on verkko, jossa kaarilla on suunta. Suunnatussa verkossa on kaari solmusta $u \in V$ solmuun $v \in V$ jos $(u, v) \in E$. Suunnatulla kaarella $e = (u, v) \in E$ on *kärki*

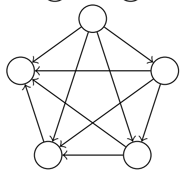
$$\text{head}(e) = v$$

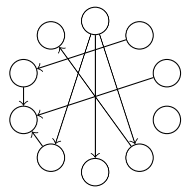
ja *häntä*

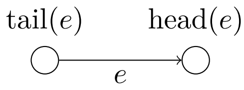
$$\text{tail}(e) = u$$

TODO: kuva suunnatusta verkosta ja havainnollistava kuva kärjestä ja hännästä









2.9 Väritysluku $\chi(G)$

Verkon G väritysluku $\chi(G)$ on pienin määrä värejä, jolla sen voi värittää.

3 Sykliä ei voi 3-värittää alle $\log^* n$ kierroksessa

Väritysluvun $\chi(B_{t,n})$ alaraja todistetaan käyttäen suunnattujen verkkojen $D_{s,n}$ perhettä. Suunnatut verkot $D_{s,n}$ liittyvät läheisesti naapurustoverkkoihin $B_{t,n}$. Verkon $D_{s,n}$ solmujoukon $V(D_{s,n})$ muodostavat kaikki vektorit muotoa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_s),$$

joilla pätee

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_s \leq n.$$

Solmusta $(a_1, \ldots, a_s)$ lähtee kaari muotoa

$$(a_2, \ldots, a_s, b)$$

oleviin solmuihin, joilla $a_s < b \leq n$.

Lemma 11. *Naapurustoverkko $B_{t,n}$ pitää sisällään aliverkkona suunnatun verkon $D_{2t+1,n}$.*

Todistus. Olkoon

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{2t+1}) \in V(D_{2t+1,n})$$

verkon $D_{2t+1,n}$ solmu. Koska verkossa $D_{2t+1,n}$ on solmuvektoreilla suuruusjärjestysehto

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{2t+1},$$

niin erityisesti nämä vektorin alkiot ovat keskenään erisuuria, joten vektori $\bar{x}$ on myös verkon $B_{t,n}$ solmu.

Lisäksi jos solmulla $\bar{x}$ on verkossa $D_{2t+1,n}$ naapuri

$$\bar{y} = (x_2, \ldots, x_{2t+1}, y) \in V(D_{2t+1,n}),$$

eli verkossa $D_{2t+1,n}$ on suunnattu kaari $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{2t+1,n})$, niin tällöin myös verkossa $B_{t,n}$ on näiden solmujen välillä kaari. Tämä johtuu siitä, että suunnatun verkon $D_{2t+1,n}$ kaarien suuruusjärjestysehdon nojalla $y > x_1$, joten erityisesti $y \neq x_1$. $\square$

Tästä erityisesti seuraa, että jokainen verkon $B_{t,n}$ väritys on myös verkon $D_{2t+1,n}$ väritys.

Lemma 12.

$$\chi(B_{t,n}) \geq \chi(D_{2t+1,n})$$

Todistus. Olkoon $c\colon V(B_{t,n}) \to [k]$ verkon $B_{t,n}$ väritys. Nyt jos

$$(x, y) \in E(D_{2t+1,n})$$

on verkon $D_{2t+1,n}$ kaari, niin äskeisen lemman nojalla solmujen x ja y välillä on kaari myös verkossa $B_{t,n}$. Koska c on verkon $B_{t,n}$ väritys, niin $c(x) \neq c(y)$. Siis c on väritys myös verkolle $D_{2t+1,n}$ ja erityisesti verkon $D_{2t+1,n}$ voi siis myös värittää k:lla värillä. $\square$

3.1 Suunnatun verkon kaariverkko

Suunnatun verkon G *kaariverkko* $\mathrm{DL}(G)$ on verkko, jonka solmuja ovat alkuperäisen verkon G kaaret ja kahden kaariverkon solmun

$$u, v \in V(\mathrm{DL}(G)) = E(G)$$

välillä on kaari, jos $\mathrm{head}(u) = \mathrm{tail}(v)$.

TODO: havainnollistava kuva

Tarkemmin ilmaistuna,

$$\begin{aligned} V(\mathrm{DL}(G)) &= E(G) \\ E(\mathrm{DL}(G)) &= \{(v, u) \in E(G) \times E(G) \mid \mathrm{head}(v) = \mathrm{tail}(u)\}. \end{aligned}$$

Lemma 13. *$D_{1,n}$ on n:n solmun täydellinen verkko, jossa kaaret on suunnattu pienemmästä solmusta suurempaan.*

Todistus. Verkon $D_{s,n}$ määritelmä s:n arvolla 1 antaa seuraavan verkon:

$$\begin{aligned} V(D_{1,n}) &= \{(k) \mid 1 \leq k \leq n\} \\ E(D_{1,n}) &= \{((k), (l)) \mid k < l\}. \end{aligned}$$

Tässä verkossa jokaisen kahden solmun välillä on kaari tasan yhteen suuntaan. $\square$

Määritelmä 14. Kaksi suunnattua verkkoa G ja H ovat *isomorfiset* jos niiden solmujoukkojen välillä on olemassa kuvaus $\varphi\colon V(G) \to V(H)$ joka toteuttaa seuraavat ehdot

1. φ on bijektio
2. $(u, v) \in E(G)$ jos ja vain jos $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H)$.

Nämä ehdot toteuttavaa kuvausta kutsutaan *isomorfismiksi.*

Lemma 15. *Verkko $D_{s+1,n}$ on verkon $D_{s,n}$ kaariverkko. Tarkemmin,*

$$D_{s+1,n} = \mathrm{DL}(D_{s,n}).$$

Todistus. Ideana on samaistaa kaariverkon $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ kaari

$$\big((x_1, \dots, x_s), (x_2, \dots, x_s, y)\big)$$

verkon $D_{s+1,n}$ solmun $(x_1, \dots, x_s, y)$ kanssa. Määritellään siis verkkojen välille kuvaus

$$\varphi \colon V(\mathrm{DL}(D_{s,n}) \to V(D_{s+1,n})$$

asettamalla

$$\varphi\big((x_1, \dots, x_s), (x_2, \dots, x_s, y)\big) = (x_1, \dots, x_s, y).$$

Näytetään, että φ on isomorfismi. Ensinnäkin φ on bijektio, sillä sille löytyy seuraava käänteiskuvaus $\psi \colon D_{s+1,n} \to \mathrm{DL}(D_{s,n})$:

$$\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \big((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_{n+1})\big).$$

Kuvaus ψ on kuvauksen φ käänteiskuvaus, sillä

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)\big((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, y)\big) &= \psi\big(\varphi\big((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, y)\big)\big) \\
&= \psi(x_1, \dots, x_n, y) \\
&= \big((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, y)\big)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= \varphi\big(\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\big) \\
&= \varphi\big((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, x_{n+1})\big) \\
&= (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Vielä täytyy näyttää, että kuvaus toteuttaa isomorfiaehdon. Olkoon

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= (x_1, \dots, x_n) \in V(D_{s,n}), \\
\bar{x}_2 &= (x_2, \dots, x_{n+1}) \in V(D_{s,n}), \\
\bar{y}_1 &= (y_1, \dots, y_n) \in V(D_{s,n}) \text{ ja} \\
\bar{y}_2 &= (y_2, \dots, y_{n+1}) \in V(D_{s,n})
\end{aligned}$$

verkon $D_{s,n}$ solmuja. Tällöin erityisesti

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &\in V(\mathrm{DL}(D_{s,n})) \text{ ja}\\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) &\in V(\mathrm{DL}(D_{s,n}))\end{aligned}$$

ovat kaariverkon $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ solmuja. Jos $\big((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) \in E(\mathrm{DL}(D_{s,n}))$ on kaariverkon $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ kaari, niin kaariverkon määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}&\mathrm{head}\,\big((\bar{x}_1, \bar{x}_2)\big) = \mathrm{tail}\,\big((\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) && \implies\\ &\bar{x}_2 = \bar{y}_1 && \implies\\ &(x_2, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, \ldots, y_n) && \implies\\ &y_1 = x_2, \ldots \text{ ja } y_n = x_{n+1}.\end{aligned}$$

Koska $\bar{x}_1 \in V(D_{s,n})$ ja $\bar{y}_2 \in V(D_{s,n})$, niin $x_1 < y_1 = x_2$ ja $y_n < y_{n+1}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\big(\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) &= \big((x_1, \ldots, x_{n+1}), (y_1, \ldots, y_{n+1})\big)\\ &= \big((x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n), (y_1, \ldots, y_{n+1})\big) \in E(D_{s+1,n}).\end{aligned}$$

Ollaan siis näytetty ensimmäinen kahdesta implikaatiosta:

$$\big((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) \in E(\mathrm{DL}(D_{s,n})) \implies \big(\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) \in E(D_{s+1,n}).$$

Toisaalta jos

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x_1, \ldots, \bar{x}_{n+1}) \in V(D_{s+1,n}) \text{ ja}\\ \bar{y} &= (y_1, \ldots, \bar{y}_{n+1}) \in V(D_{s+1,n}).\end{aligned}$$

ovat verkon $D_{s+1,n}$ solmuja joiden välillä on kaari, eli $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n})$, niin tällöin

$$x_2 = y_1, \ldots \text{ ja } x_{n+1} = y_n.$$

Nyt

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= (x_1, \ldots, x_n),\\ \bar{x}_2 &= (x_2, \ldots, x_{n+1}),\\ \bar{y}_1 &= (y_1, \ldots, y_n) \text{ ja}\\ \bar{y}_2 &= (y_2, \ldots, y_{n+1})\end{aligned}$$

ovat verkon $D_{s,n}$ solmuja joilla pätee

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in E(D_{s,n}) &\implies (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in V(\mathrm{DL}(D_{s,n})) \text{ ja}\\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in E(D_{s,n}) &\implies (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in V(\mathrm{DL}(D_{s,n})).\end{aligned}$$

Koska $\bar{x}_2 = \bar{y}_1$, niin kaariverkossa $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ on kaari

$$\big((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)\big) \in E(\mathrm{DL}(D_{s,n})).$$

Koska

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \varphi^{-1}(\bar{x}) \text{ ja}$$
$$(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \varphi^{-1}(\bar{y})$$

niin väite on todistettu. Ollaan siis näytetty, että jos $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n})$ on verkon $D_{s+1,n}$ kaari, niin sen solmujen alkukuvien välillä on myös kaari. Tarkemmin sanottuna

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n}) \implies (\varphi^{-1}(\bar{x}), \varphi^{-1}(\bar{y})) \in E(\mathrm{DL}(D_{s,n})).$$

Ollaan siis näytetty, että löytyy bijektio $\varphi\colon V(\mathrm{DL}(D_{s,n})) \to D_{s+1,n}$ joka toteuttaa isomorfiaehdon, joten verkot $\mathrm{DL}(D_{s,n})$ ja $D_{s+1,n}$ ovat isomorfisina olennaisesti sama verkko. □

TODO: todista erikseen, että $D_{2,n} = \mathrm{DL}(D_{1,n})$?

Verkkojen $D_{s,n}$ välillä on nyt siis tarkkaan tunnettu yhteys, kun s:n arvot vaihtelevat. Lisäksi verkko $D_{1,n}$ on rakenteeltaan yksinkertainen täydellinen verkko.

Lemma 16.

$$\chi(D_{1,n}) = n.$$

Todistus. Koska täydellisessä verkossa on kaari verkon jokaisen solmuparin välillä, täytyy sen jokaisella solmulla olla eri väri kuin millään muulla solmulla. Siispä verkon $D_{1,n}$ värittämiseen tarvitaan n väriä. □

Seuraavan lemman avulla saadaan yhteys verkkojen $D_{s,n}$ ja $D_{s+1,n}$ värityslukujen välille.

Lemma 17. *Olkoon G kaariverkko. Tällöin*

$$\chi(\mathrm{DL}(G)) \geq \log \chi(G).$$

Todistus. Olkoon $\Psi\colon \mathrm{DL}(G) \to [k]$ kaariverkon $\mathrm{DL}(G)$ k-väritys. Koska verkko $\mathrm{DL}(G)$ on verkon G kaariverkko, niin kuvaus Ψ antaa jokaiselle verkon G kaarelle värin. Jos $u, v \in E(G)$ ovat verkon G perättäisiä kaaria, eli $\mathrm{head}(u) = \mathrm{tail}(v)$, niin Ψ antaa niille eri värit, $\Psi(u) \neq \Psi(v)$.

Muodostetaan verkolle G väritys $c\colon G \to \mathcal{P}([k])$ joka värittää G:n 2^k värillä. Olkoon $x \in V(G)$ verkon G solmu. Määritellään x:n väri seuraavasti:

$$c(x) = \{\Psi(u) \mid \mathrm{tail}(u) = x\}.$$

Solmun x väri on siis joukko, jossa on kaikkien solmusta x lähtevien kaarten värit värityksessä Ψ. Jotta c olisi laillinen väritys, se ei saa antaa samaa väriä kahdelle naapurisolmulle. Olkoon $u = (x, y) \in E(G)$ verkon G kaari ja siis $y \in V(G)$ solmun x naapuri. Nyt $\mathrm{tail}(u) = x$, joten u:n väri kuuluu x:n värijoukkoon. Tarkemmin ilmaistuna, $\Psi(u) \in c(x)$.

Toisaalta jos $\Psi(u) \in c(y)$, niin tällöin löytyy kaari $v \in E(G)$, joka lähtee solmusta y, eli $\text{tail}(v) = y$ ja lisäksi jolle Ψ antaa saman värin kuin u:lle, eli $\Psi(x) = \Psi(y)$. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä $\text{head}(u) = y = \text{tail}(v)$, jolloin Ψ ei olisikaan laillinen verkon $\text{DL}(G)$ väritys. Siis c antaa vierekkäisille solmuille aina toisistaan eroavan värin, joten se täyttää väritysehdon.

TODO: Tämä on vähän wall of text, voisi keventää jotenkin

Väritys c antaa verkon G solmuille väriksi jonkin osajoukon värityksen Ψ väreistä. Koska k:n alkion joukolla on yhteensä 2^k osajoukkoa, niin c värittää verkon G korkeintaan 2^k värillä.

Ollaan siis näytetty, että jos verkon G kaariverkon $\text{DL}(G)$ voi värittää k:lla värillä, niin G:n voi värittää 2^k värillä. Toisin sanoen

$$\begin{aligned} \chi(G) &\leq 2^{\chi(\text{DL}(G))} \implies \\ \log \chi(G) &\leq \chi(\text{DL}(G)) \end{aligned}$$

□

Aikaisemmista lemmoista saadaan nyt lopulta verkkojen $D_{s,n}$ väritysluvulle $\chi(D_{s,n})$ alaraja.

Korollaari 18.

$$\chi(D_{s+1,n}) \geq \log \chi(D_{s,n}).$$

Erityisesti, koska $\chi(D_{1,n}) = n$, niin edellisestä korollaarista seuraa, että

$$\begin{aligned} \chi(D_{s,n}) &\geq \log^{(s)} \chi(D_{1,n}) \implies \\ \chi(D_{s,n}) &\geq \log^{(s)} n \end{aligned}$$

TODO: esittele notaatio $\log^{(n)}$

Lause 19. *Hajautettu algoritmi ei voi värittää n:n solmun sykliä kolmella värillä alle $\log^* n$ kierroksessa.*

Todistus. Hajautettu algoritmi voi värittää n-syklin kolmella värillä t kierroksessa jos verkon $B_{t,n}$ voi värittää kolmella värillä. Yhdistämällä edellisten lemmojen tulokset saadaan seuraava yhtälö:

$$3 \geq \chi(B_{t,n}) \geq D_{2t+1,n} \geq \log^{(2t)} n.$$

Josta voidaan edelleen päätellä seuraavaa:

$$\begin{aligned} \log^{(2t)} n &\leq 3 \implies \\ \log^{(2t+1)} n &\leq 2 \implies \\ \log^{(2t+2)} n &\leq 1. \end{aligned}$$

Luku $\log^* n$ on pienin määrä toistokertoja, jolla luvusta n saadaan logaritmeja ottamalla korkeintaan 1. Äskeisen nojalla $2(t+1)$ toistokertaa varmasti riittää tähän, joten

$$\begin{aligned}&\log^* n \leq 2(t+1) \implies \\ &\frac{1}{2}\log^* n - 1 \leq t.\end{aligned}$$

Ollaan siis näytetty, että hajautettu algoritmi joka värittää n-syklin kolmella värillä käyttää siihen aikaa vähintään $\frac{1}{2}\log^* n - 1$ kierrosta.

$\square$

4 Lähteet