# Paikallisuus hajautetuissa verkkoalgoritmeissa

Juhana Laurinharju

Tieteellinen kirjoittaminen
Helsingin Yliopisto
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 28. helmikuuta 2013

# Johdanto

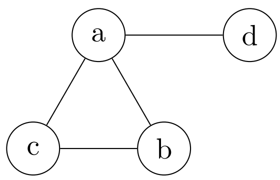
# 1 Määritelmiä

## 1.1 Verkko

*Suuntaamaton verkko* on pari $G = (V, E)$, missä $V$ on *solmujoukko* ja $E$ on *kaarijoukko*. *Kaari* solmusta $v \in V$ solmuun $u \in V$ on kaksikko $\{v, u\} \in E$. Kaarta voidaan myös merkitä lyhyemmin $vu$. Esimerkiksi verkko $G = (V, E)$, missä

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d\} \text{ ja} \\ E &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, d\}\} \\ &= \{ab, bc, ca, ad\} \end{aligned}$$

näyttää seuraavalta




## 1.2 Laskennan malli

Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton verkko. Verkon jokaisessa solmussa $v \in V$ on tietokone. Laskenta koostuu *kommunikointikierroksista*. Yhden kommunikaatiokierroksen aikana jokainen solmu voi:

1. suorittaa mielivaltaista laskentaa
2. lähettää viestin jokaiselle naapurilleen
3. vastaanottaa naapureiden lähettämät viestit

Lisäksi jokaiselle solmulle $v \in V$ on annettu yksikäsitteinen tunniste $\mathrm{ID}(v) \in \{1, \ldots, |V|\}$. Laskennan päätyttyä jokaisen solmun tulee tietää oma tulosteensa.

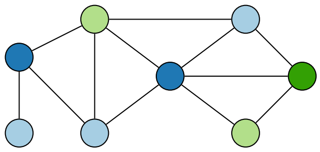
TODO: motivointia sille, että tarkastellaan vain kommunikaatiokierrosten lukumäärää aikavaativuutena.

## 1.3 Verkon väritys

Verkko on *väritetty*, jos jokaiseen solmuun $v \in V$ on liitetty jokin *väri* ja kahdella vierekkäisellä solmulla ei koskaan ole samaa väriä. Tarkemmin, verkon

$G = (V, E)$ *solmuväritys* on kuvaus $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ jollain luonnollisella luvulla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi vaaditaan, että jos verkossa on kaari solmusta $v$ solmuun $u$, eli $vu \in E$, niin $c(v) \neq c(u)$.

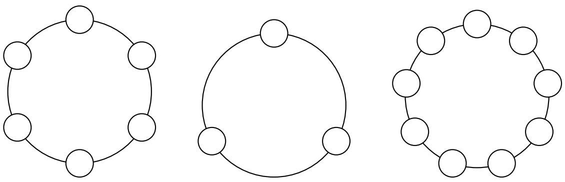
Verkon voi värittää $k$:lla värillä jos löytyy yllä olevan ehdon täyttävä kuvaus $c : V \to \{1, \ldots, k\}$. Tällaista väritystä kutsutaan *$k$-väritykseksi*.



Jos verkkoa väritetään hajautetulla algoritmilla, niin jokaisen solmun tulee tietää oma värinsä laskennan päätyttyä.

## 1.4 Sykli

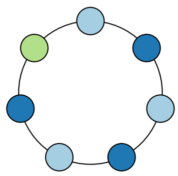
Verkko on *sykli*, jos se on yhtenäinen ja sen jokaisella solmulla on tasan kaksi naapuria.



Tarkemmin sanoen, $n$-sykli, missä $n \geq 3$, on verkko $C_n = (V, E)$ jolla

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \\ E &= \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\} \end{aligned}$$

Syklin voi aina värittää kolmella värillä.



## 1.5 Iteroitu logaritmi $\log^*$

*Iteroitu logaritmi* $\log^*$ kertoo kuinka monta kertaa luvusta täytyy ottaa logaritmi, kunnes lopputulos on korkeintaan yksi. Tarkemmin,

$$\log^* x = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq 1, \\ 1 + \log^*(\log x), & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned}\log^* 16 &= \log^* 2^{2^2} = 1 + \log^* 2^2 \\ &= 2 + \log^* 2 = 3 + \log^* 1 = 3\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\log^* 65536 &= \log^* 2^{2^{2^2}} = 1 + \log^* 16 \\ &= 4,\end{aligned}$$

joten $\log^* n$ on arvoltaan pienempi kuin 5 kun $n < 2^{65536}$. Iteroitu logaritmi on siis äärimmäisen hitaasti kasvava funktio.

## 1.6 Näkymä

Hajautetussa algoritmissa solmu $v \in V$ saa $k$:ssa kierroksessa selville oman $k$-ympäristönsä. Toisaalta solmu ei pysty tässä ajassa saamaan mitään selville solmuista, joiden etäisyys $v$:stä on yli $k$. Hajautettu algoritmi, jonka ajoaika on $k$ kierrosta on siis funktio, jonka lähtöjoukkona on solmujen mahdolliset $k$-ympäristöt.

TODO: määrittele etäisyys

TODO: tää kaipaa varmaan vähän selvennystä

TODO: kuvasarja havainnollistamaan tätä

Erityisesti syklissä algoritmi, jonka ajoaika on $k$ kierrosta, tekee päätöksensä $k$:n edeltäjän, $k$:n seuraajan ja oman solmun tunnisteiden perusteella. Toisin sanoen solmun $v_l \in V(C_n)$ tuloste on funktio arvoilta

$$(\mathrm{ID}(v_{l-k}), \mathrm{ID}(v_{l-k+1}), \ldots, \mathrm{ID}(v_{l-1}), \mathrm{ID}(v_l), \mathrm{ID}(v_{l+1}), \ldots, \mathrm{ID}(v_{l+k}))\,,$$

Missä yhteen- ja vähennyslaskut suoritetaan modulo $n$.

TODO: Kuvasarja solmun näkymästä syklissä.

Erityisesti jos algoritmi tuottaa 3-värityksen syklissä $k$:ssa kierroksessa, niin täytyy olla olemassa sellainen funktio $f : [n]^{2k+1} \to [3]$, joka tuottaa laillisen 3-värityksen riippumatta siitä miten solmuille on annettu tunnisteet.

## 1.7 Naapurustoverkot

TODO: liitä tää syklien näkymiin

Naapurustoverkko $B_{t,n} = (V, E)$, missä $V$ on kaikkien vektoreiden $(x_1, \ldots, x_{2t+1})$ joukko joilla $x_i$:t ovat keskenään erisuuria kokonaislukuja joukosta $[n]$. Verkossa $B_{t,n}$ solmut muotoa

$$(x_1, \ldots, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_2, \ldots, x_{2t})$$

ovat naapureita, kun $y \neq x_{2t+1}$.

TODO: esittele $[n]$ merkintä

Verkossa $B_{t,n}$ on $n(n-1)(n-2)\cdots(n-2t)$ solmua ja sen kaikkien kaarten asteluku on $2(n-2t-1)$.

TODO: termi asteluku esittelemättä

TODO: kierrosmäärä on välillä $k$ ja välillä $t$

Hajautettu algoritmi, joka 3-värittää syklin $t$ kierroksessa on funktio $c : V(B_{t,n}) \to [3]$.

TODO: tätä vois perustella

Nyt $c$ on myös laillinen 3-väritys verkolle $B_{t,n}$, sillä jos $c$ antaa solmuille

$$(x_1, \ldots, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_2, \ldots, x_{2t})$$

saman värin, niin se antaa myös syklissa kahdelle vierekkäiselle solmulle saman värin kun syklissä esiintyy pätkä

$$y, x_1, x_2, \ldots, x_{2t+1}.$$

Siis jos näytetään, että verkkoa $B_{t,n}$ ei voi 3-värittää, niin ei voi myöskään olla hajautettua algoritmia joka värittäisi $n$-syklin kolmella värillä $t$ kierroksessa.

### 1.8 Suunnattu verkko

*Suunnatto verkko* $G = (V, E)$ on verkko, jossa kaarilla on suunta. Suunnatussa verkossa on kaari solmusta $u \in V$ solmuun $v \in V$ jos $(u, v) \in E$. Suunnatulla kaarella $e = (u, v) \in E$ on *kärki*

$$\mathrm{head}(e) = v$$

ja *häntä*

$$\mathrm{tail}(e) = u$$

TODO: onks kärki ja häntä oikeet käännökset?

TODO: kuva suunnatusta verkosta ja havainnollistava kuva kärjestä ja hännästä

### 1.9 Väritysluku $\chi(G)$

Verkon $G$ väritysluku $\chi(G)$ on pienin määrä värejä, jolla sen voi värittää.

## 2 Sykliä ei voi 3-värittää alle $\log^* n$ kierroksessa

Väritysluvun $\chi(B_{t,n})$ alaraja todistetaan käyttäen suunnattujen verkkojen $D_{s,n}$ perhettä. Suunnatut verkot $D_{s,n}$ liittyvät läheisesti naapurustoverkkoihin $B_{t,n}$. Verkon $D_{s,n}$ solmujoukon $V$ muodostavat kaikki vektorit muotoa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_s),$$

joilla pätee

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_s \leq n.$$

Solmusta $(a_1, \ldots, a_s)$ lähtee kaari muotoa

$$(a_2, \ldots, a_s, b)$$

oleviin solmuihin, joilla $a_s < b \leq n$.

Nyt naapurustoverkko $B_{t,n}$ pitää sisällään aliverkkona suunnatun verkon $d_{2t+1,n}$.

TODO: avaa tätä

TODO: pitäskö aliverkko määritellä?

Tästä erityisesti seuraa, että $\chi(B_{t,n}) \geq \chi(D_{2t+1})$.

TODO: selvennä tätä

## 2.1 Suunnatun verkon kaariverkko

Suunnatun verkon $G$ *kaariverkko* $DL(G)$ on verkko, jonka solmuja ovat alkuperäisen verkon $G$ kaaret ja kahden kaariverkon solmun

$$u, v \in V(DL(G)) = E(G)$$

välillä on kaari, jos $\mathrm{head}(u) = \mathrm{tail}(v)$.

TODO: havainnollistava kuva

Tarkemmin ilmaistuna,

$$\begin{aligned} V(DL(G)) &= E(G) \\ E(DL(G)) &= \{(v,u) \in E(G) \times E(G) \mid \mathrm{head}(v) = \mathrm{tail}(u)\}. \end{aligned}$$

**Lemma 1.** *$D_{1,n}$ on $n$:n solmun täydellinen verkko, jossa on kaikki kaaret molempiin suuntiin. Lisäksi*

$$D_{s+1,n} = DL(D_{s,n}).$$

**Lemma 2.**

$$\chi(D_{s+1,n}) \geq \log \chi(D_{s,n}).$$