

# **Paikallisuus hajautetuissa verkkoalgoritmeissa**

Juhana Laurinharju

Tieteellinen kirjoittaminen  
HELSINGIN YLIOPISTO  
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 7. toukokuuta 2013

# 1 Johdanto

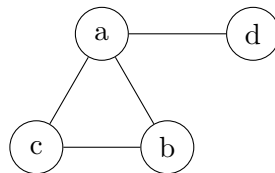
## 2 Määritelmiä

### 2.1 Verkko

*Suuntaamaton verkko* on pari  $G = (V, E)$ , missä  $V$  on *solmujoukko* ja  $E$  on *kaarijoukko*. Kaari solmusta  $v \in V$  solmuun  $u \in V$  on kaksikko  $\{v, u\} \in E$ . Kaarta voidaan myös merkitä lyhyemmin  $vu$ . Esimerkiksi verkko  $G = (V, E)$ , missä

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d\} \text{ ja} \\ E &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, d\}\} \\ &= \{ab, bc, ca, ad\} \end{aligned}$$

näyttää seuraavalta



### 2.2 Laskennan malli

Olkoon  $G = (V, E)$  suuntaamaton verkko. Verkon jokaisessa solmussa  $v \in V$  on tietokone. Laskenta koostuu *kommunikaatiokierroksista*. Yhden kommunikaatiokierroksen aikana jokainen solmu voi:

1. suorittaa mielivaltaista laskentaa
2. lähettää viestin jokaiselle naapurilleen
3. vastaanottaa naapureiden lähettämät viestit

Lisäksi jokaiselle solmulle  $v \in V$  on annettu yksikäsitteinen tunniste  $ID(v) \in \{1, \dots, |V|\}$ . Laskennan päätyttyä jokaisen solmun tulee tietää oma tulosteensa.

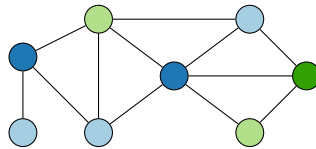
TODO: motivointia sille, että tarkastellaan vain kommunikaatiokierrosten lukumäärää aikavaativuutena.

### 2.3 Verkon väritys

Verkko on *väritetty*, jos jokaiseen solmuun  $v \in V$  on liitetty jokin *väri*  $c(v) \in \mathbb{N}$  ja kahdella vierekkäisellä solmulla ei koskaan ole samaa väriä. Tarkemmin, verkon  $G = (V, E)$  *solmuväritys* on kuvaus  $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$

jollain luonnollisella luvulla  $k \in \mathbb{N}$ . Lisäksi vaaditaan, että jos verkossa on kaari solmusta  $v$  solmuun  $u$ , eli  $vu \in E$ , niin  $c(v) \neq c(u)$ .

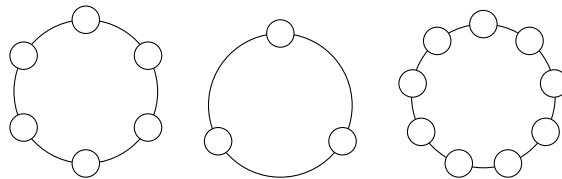
Verkon voi värittää  $k$ :lla värillä jos löytyy yllä olevan ehdon täyttävä kuvaus  $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Tällaista väritystä kutsutaan  $k$ -väritykseksi.



Jos verkkoa väritetään hajautetulla algoritmilla, niin jokaisen solmun tulee tietää oma värinsä laskennan päätyttyä.

## 2.4 Sykli

Verkko on *sykli*, jos se on yhtenäinen ja sen jokaisella solmulla on tasan kaksi naapuria.



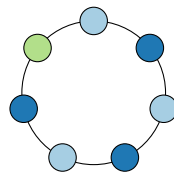
Tarkemmin sanoen,  $n$ -sykli, missä  $n \geq 3$ , on verkko  $C_n = (V, E)$  jolla

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\}$$

Syklin voi aina värittää kolmella värillä.

TODO: tälle lähde?



## 2.5 Iteroitu logaritmi $\log^*$

*Iteroitu logaritmi*  $\log^*$  kertoo kuinka monta kertaa luvusta täytyy ottaa logaritmi, kunnes lopputulos on korkeintaan yksi. Tarkemmin,

$$\log^* x = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq 1, \\ 1 + \log^*(\log x), & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned}\log^* 16 &= \log^* 2^{2^2} = 1 + \log^* 2^2 \\ &= 2 + \log^* 2 = 3 + \log^* 1 = 3\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\log^* 65536 &= \log^* 2^{2^{2^2}} = 1 + \log^* 16 \\ &= 4,\end{aligned}$$

joten  $\log^* n$  on arvoltaan pienempi kuin 5 kun  $n < 2^{65536}$ . Iteroitu logaritmi on siis äärimmäisen hitaasti kasvava funktio.

## 2.6 Näkymä

**Määritelmä 1.** Verkon  $G$  *polku* on jono  $P = (p_1, \dots, p_n)$ , missä jokainen  $p_i \in V(G)$  on verkon  $G$  solmu ja lisäksi kahden jonon perättäisen solmun välillä täytyy aina olla kaari. Siis kaikilla  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  täytyy olla voimassa ehto  $u_i u_{i+1} \in E(G)$ . Polku  $P$  on polku solmusta  $p_1$  solmuun  $p_n$ .

TODO: kuva polusta

**Määritelmä 2.** Polun  $P = (p_1, \dots, p_n)$  pituus on sen kaarten lukumäärä. Siis polun  $P$  pituus on  $n-1$ .

TODO: kuvan polun pituus

**Määritelmä 3.** Kahden verkon  $G$  solmun  $u, v \in V(G)$  välinen *etäisyys* verkossa  $G$ ,  $d_G(u, v)$ , on lyhimmän solmusta  $u$  solmuun  $v$  kulkevan polun pituus.

TODO: tarvitaanko notaatiota  $d_G(u, v)$ ?

TODO: kuva lyhimmästä polusta ja etäisyydestä

Hajautetussa algoritmissa solmu  $v \in V$  saa  $k$ :ssa kierroksessa selville oman  $k$ -ympäristönsä. Toisaalta solmu ei pysty tässä ajassa saamaan mitään selville solmuista, joiden etäisyys  $v$ :stä on yli  $k$ .

TODO: kuvasarja havainnollistamaan tätä

Hajautettu algoritmi, jonka ajoaika on  $k$  kierrosta on siis funktio, jonka lähtöjoukkona on solmujen mahdolliset  $k$ -ympäristöt.

TODO: tää kaipaa varmaan vähän selvennystä

Erityisesti syklissä algoritmi, jonka ajoaika on  $k$  kierrosta, tekee päätöksensä  $k$ :n edeltäjän,  $k$ :n seuraajan ja oman tunnisteensa perusteella. Toisin sanoen solmun  $v_l \in V(C_n)$  tuloste on funktio arvoilta

$$(\text{ID}(v_{l-k}), \text{ID}(v_{l-k+1}), \dots, \text{ID}(v_{l-1}), \text{ID}(v_l), \text{ID}(v_{l+1}), \dots, \text{ID}(v_{l+k})),$$

Missä yhteen- ja vähennyslaskut suoritetaan modulo  $n$ .

TODO: Kuvasarja solmun näkymästä syklissä.

Erityisesti jos algoritmi tuottaa 3-värityksen syklissä  $k$ :ssa kierroksessa, niin täytyy olla olemassa sellainen funktio  $f : [n]^{2k+1} \rightarrow [3]$ , joka tuottaa laillisen 3-värityksen riippumatta siitä miten solmuille on annettu tunnisteet.

## 2.7 Naapurustoverkot

TODO: liitä tää syklien näkymiin

Naapurustoverkko  $B_{t,n} = (V, E)$ , missä  $V$  on kaikkien vektoreiden  $(x_1, \dots, x_{2t+1})$  joukko joilla  $x_i$ :t ovat keskenään erisuuria kokonaislukuja joukosta  $[n]$ . Verkossa  $B_{t,n}$  solmut muotoa

$$(x_1, \dots, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_2, \dots, x_{2t})$$

ovat naapureita, kun  $y \neq x_{2t+1}$ .

TODO: esittele  $[n]$  merkintä, tai älä käytä sitä ollenkaan

TODO: pari kuvaa näistä verkoista pienillä parametrien arvoilla

**Määritelmä 4.** Solmun  $v \in V(G)$  *asteluku* on sen naapureiden lukumäärä verkossa  $G$ . Tarkemmin, solmun  $v \in V(G)$  asteluku on  $|\{e \in E(G) \mid v \in e\}|$ .

Verkossa  $B_{t,n}$  on  $n(n-1)(n-2)\dots(n-2t)$  solmua ja sen kaikkien solmujen asteluku on  $2(n-2t-1)$ .

TODO: onko asteluvusta puhuminen olennaista?

TODO: epäkonsistenttia: kierrosmäärä on välillä  $k$  ja välillä  $t$

Hajautettu algoritmi, joka 3-värittää syklin  $t$  kierroksessa on funktio  $c : V(B_{t,n}) \rightarrow [3]$ .

TODO: tätä vois perustella

Nyt  $c$  on myös laillinen 3-väritys verkolle  $B_{t,n}$ , sillä jos  $c$  antaa solmuille

$$(x_1, \dots, x_{2t}, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_1, \dots, x_{2t})$$

saman värin, niin se antaa myös syklissä kahdelle vierekkäiselle solmulle saman värin kun syklissä esiintyy pätkä

$$y, x_1, x_2, \dots, x_{2t+1}.$$

Siis jos näytetään, että verkkoa  $B_{t,n}$  ei voi 3-värittää, niin ei voi myöskään olla hajautettua algoritmia joka värittäisi  $n$ -syklin kolmella värillä  $t$  kierroksessa.

## 2.8 Suunnattu verkko

*Suunnatto verkko*  $G = (V, E)$  on verkko, jossa kaarilla on suunta. Suunnatussa verkossa on kaari solmusta  $u \in V$  solmuun  $v \in V$  jos  $(u, v) \in E$ . Suunnatulla kaarella  $e = (u, v) \in E$  on *kärki*

$$\text{head}(e) = v$$

ja häntä

$$\text{tail}(e) = u$$

TODO: onks kärki ja häntä oikeet käännökset?

TODO: kuva suunnatusta verkosta ja havainnollistava kuva kärjestä ja hännästä

## 2.9 Väritysluku $\chi(G)$

Verkon  $G$  väritysluku  $\chi(G)$  on pienin määrä värejä, jolla sen voi värittää.

## 3 Sykliä ei voi 3-värittää alle $\log^* n$ kierroksessa

Väritysluvun  $\chi(B_{t,n})$  alaraja todistetaan käyttäen suunnattujen verkkojen  $D_{s,n}$  perhettä. Suunnatut verkot  $D_{s,n}$  liittyvät läheisesti naapurustoverkkoihin  $B_{t,n}$ . Verkon  $D_{s,n}$  solmujoukon  $V$  muodostavat kaikki vektorit muotoa

$$(a_1, a_2, \dots, a_s),$$

joilla pätee

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_s \leq n.$$

Solmusta  $(a_1, \dots, a_s)$  lähtee kaari muotoa

$$(a_2, \dots, a_s, b)$$

oleviin solmuihin, joilla  $a_s < b \leq n$ .

**Lemma 5.** *Naapurustoverkko  $B_{t,n}$  pitää sisällään aliverkkona suunnatun verkon  $D_{2t+1,n}$ .*

*Todistus.* Olkoon

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{2t+1}) \in V(D_{2t+1,n})$$

verkon  $D_{2t+1,n}$  solmu. Koska verkossa  $D_{2t+1,n}$  on solmuvektoreilla suuruusjärjestysehto

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{2t+1},$$

niin erityisesti nämä vektorin alkiot ovat keskenään erisuuria, joten vektori  $\bar{x}$  on myös verkon  $B_{t,n}$  solmu.

Lisäksi jos solmulla  $\bar{x}$  on verkossa  $D_{2t+1,n}$  naapuri

$$\bar{y} = (x_2, \dots, x_{2t+1}, y) \in V(D_{2t+1,n}),$$

eli verkossa  $D_{2t+1,n}$  on suunnattu kaari  $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{2t+1,n})$ , niin tällöin myös verkossa  $B_{t,n}$  on näiden solmujen välillä kaari. Tämä johtuu siitä, että suunnatun verkon  $D_{2t+1,n}$  kaarien suuruusjärjestysehdon nojalla  $y > x_1$ , joten erityisesti  $y \neq x_1$ .  $\square$

Tästä erityisesti seuraa, että jokainen verkon  $B_{t,n}$  väritys on myös verkon  $D_{2t+1,n}$  väritys.

**Lemma 6.**

$$\chi(B_{t,n}) \geq \chi(D_{2t+1,n})$$

*Todistus.* Olkoon  $c: V(B_{t,n}) \rightarrow [k]$  verkon  $B_{t,n}$  väritys. Nyt jos

$$(x, y) \in E(D_{2t+1,n})$$

on verkon  $D_{2t+1,n}$  kaari, niin äskeisen lemmän nojalla solmujen  $x$  ja  $y$  välillä on kaari myös verkossa  $B_{t,n}$ . Koska  $c$  on verkon  $B_{t,n}$  väritys, niin  $c(x) \neq c(y)$ . Siis  $c$  on väritys myös verkolle  $D_{2t+1,n}$  ja erityisesti verkon  $D_{2t+1,n}$  voi siis myös värittää  $k$ :lla värillä.  $\square$

### 3.1 Suunnatun verkon kaariverkko

Suunnatun verkon  $G$  *kaariverkko*  $DL(G)$  on verkko, jonka solmuja ovat alkuperäisen verkon  $G$  kaaret ja kahden kaariverkon solmun

$$u, v \in V(DL(G)) = E(G)$$

välillä on kaari, jos  $\text{head}(u) = \text{tail}(v)$ .

TODO: havainnollistava kuva

Tarkemmin ilmaistuna,

$$V(DL(G)) = E(G)$$

$$E(DL(G)) = \{(v, u) \in E(G) \times E(G) \mid \text{head}(v) = \text{tail}(u)\}.$$

**Lemma 7.**  $D_{1,n}$  on  $n:n$  solmun täydellinen verkko, jossa kaaret on suunnattu pienemmästä solmusta suurempaan.

*Todistus.* Verkon  $D_{s,n}$  määritelmä  $s$ :n arvolla 1 antaa seuraavan verkon:

$$\begin{aligned} V(D_{1,n}) &= \{(k) \mid 1 \leq k \leq n\} \\ E(D_{1,n}) &= \{((k), (l)) \mid k < l\}. \end{aligned}$$

Tässä verkossa jokaisen kahden solmun välillä on kaari tasan yhteen suuntaan.  $\square$

**Määritelmä 8.** Kaksi suunnattua verkkoa  $G$  ja  $H$  ovat *isomorfiset* jos niiden solmujoukkojen välillä on olemassa kuvaus  $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$  joka toteuttaa seuraavat ehdot

1.  $\varphi$  on bijektio
2.  $(u, v) \in E(G)$  jos ja vain jos  $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H)$ .

Nämä ehdot toteuttavaa kuvausta kutsutaan *isomorfismiksi*.

**Lemma 9.** *Verkko  $D_{s+1,n}$  on verkon  $D_{s,n}$  kaariverkko. Tarkemmin,*

$$D_{s+1,n} = \text{DL}(D_{s,n}).$$

*Todistus.* Ideana on samaistaa kaariverkon  $\text{DL}(D_{s,n})$  kaari

$$((x_1, \dots, x_s), (x_2, \dots, x_s, y))$$

verkon  $D_{s+1,n}$  solmun  $(x_1, \dots, x_s, y)$  kanssa. Määritellään siis verkkojen välille kuvaus

$$\varphi: V(\text{DL}(D_{s,n})) \rightarrow V(D_{s+1,n})$$

asettamalla

$$\varphi((x_1, \dots, x_s), (x_2, \dots, x_s, y)) = (x_1, \dots, x_s, y).$$

Näytetään, että  $\varphi$  on isomorfismi. Ensinnäkin  $\varphi$  on bijektio, sillä sille löytyy seuraava käänteiskuvaus  $\psi: D_{s+1,n} \rightarrow \text{DL}(D_{s,n})$ :

$$\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = ((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_{n+1})).$$

Kuvaus  $\psi$  on kuvauksen  $\varphi$  käänteiskuvaus, sillä

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, y)) &= \psi(\varphi((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, y))) \\ &= \psi(x_1, \dots, x_n, y) \\ &= ((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, y)) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= \varphi(\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) \\ &= \varphi((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, x_{n+1})) \\ &= (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Vielä täytyy näyttää, että kuvaus toteuttaa isomorfiaehdon. Olkoon

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (x_1, \dots, x_n) \in V(D_{s,n}), \\ \bar{x}_2 &= (x_2, \dots, x_{n+1}) \in V(D_{s,n}), \\ \bar{y}_1 &= (y_1, \dots, y_n) \in V(D_{s,n}) \text{ ja} \\ \bar{y}_2 &= (y_2, \dots, y_{n+1}) \in V(D_{s,n}) \end{aligned}$$

verkon  $D_{s,n}$  solmuja. Tällöin erityisesti

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) &\in V(\text{DL}(D_{s,n})) \text{ ja} \\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) &\in V(\text{DL}(D_{s,n})) \end{aligned}$$



ovat kaariverkon  $DL(D_{s,n})$  solmuja. Jos  $((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)) \in E(DL(D_{s,n}))$  on kaariverkon  $DL(D_{s,n})$  kaari, niin kaariverkon määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} \text{head}((\bar{x}_1, \bar{x}_2)) &= \text{tail}((\bar{y}_1, \bar{y}_2)) && \implies \\ \bar{x}_2 &= \bar{y}_1 && \implies \\ (x_2, \dots, x_{n+1}) &= (y_1, \dots, y_n) && \implies \\ y_1 &= x_2, \dots \text{ ja } y_n = x_{n+1}. \end{aligned}$$

Koska  $\bar{x}_1 \in V(D_{s,n})$  ja  $\bar{y}_2 \in V(D_{s,n})$ , niin  $x_1 < y_1 = x_2$  ja  $y_n < y_{n+1}$ . Tällöin

$$\begin{aligned} (\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2)) &= ((x_1, \dots, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_{n+1})) \\ &= ((x_1, y_1, y_2, \dots, y_n), (y_1, \dots, y_{n+1})) \in E(D_{s+1,n}). \end{aligned}$$

Ollaan siis näytetty ensimmäinen kahdesta implikaatiosta:

$$((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)) \in E(DL(D_{s,n})) \implies (\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2)) \in E(D_{s+1,n}).$$

Toisaalta jos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x_1, \dots, x_{n+1}) \in V(D_{s+1,n}) \text{ ja} \\ \bar{y} &= (y_1, \dots, y_{n+1}) \in V(D_{s+1,n}). \end{aligned}$$

ovat verkon  $D_{s+1,n}$  solmuja joiden välillä on kaari, eli  $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n})$ , niin tällöin

$$x_2 = y_1, \dots \text{ ja } x_{n+1} = y_n.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (x_1, \dots, x_n), \\ \bar{x}_2 &= (x_2, \dots, x_{n+1}), \\ \bar{y}_1 &= (y_1, \dots, y_n) \text{ ja} \\ \bar{y}_2 &= (y_2, \dots, y_{n+1}) \end{aligned}$$

ovat verkon  $D_{s,n}$  solmuja joilla pätee

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in E(D_{s,n}) &\implies (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in V(DL(D_{s,n})) \text{ ja} \\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in E(D_{s,n}) &\implies (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in V(DL(D_{s,n})). \end{aligned}$$

Koska  $\bar{x}_2 = \bar{y}_1$ , niin kaariverkossa  $DL(D_{s,n})$  on kaari

$$((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)) \in E(DL(D_{s,n})).$$

Koska

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \varphi^{-1}(\bar{x}) \text{ ja} \\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \varphi^{-1}(\bar{y}) \end{aligned}$$

niin väite on todistettu. Ollaan siis näytetty, että jos  $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n})$  on verkon  $D_{s+1,n}$  kaari, niin sen solmujen alkukuvien välillä on myös kaari. Tarkemmin sanottuna

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n}) \implies (\varphi^{-1}(\bar{x}), \varphi^{-1}(\bar{y})) \in E(\text{DL}(D_{s,n})).$$

Ollaan siis näytetty, että löytyy bijektio  $\varphi: V(\text{DL}(D_{s,n})) \rightarrow D_{s+1,n}$  joka toteuttaa isomorfiaehdon, joten verkot  $\text{DL}(D_{s,n})$  ja  $D_{s+1,n}$  ovat isomorfisina olennaisesti sama verkko.  $\square$

TODO: todista erikseen, että  $D_{2,n} = \text{DL}(D_{2t+1,n1,n})$ ?

Verkkojen  $D_{s,n}$  välillä on nyt siis tarkkaan tunnettu yhteys, kun  $s$ :n arvot vaihtelevat. Lisäksi verkko  $D_{1,n}$  on rakenteeltaan yksinkertainen täydellinen verkko. Koska täydellisessä verkossa on kaari verkon jokaisen solmuparin välillä, täytyy sen jokaisella solmulla olla eri väri kuin millään muulla solmulla. Siispä verkon  $D_{2t+1,n1,n}$  värittämiseen tarvitaan  $n$  väriä. Tarkemmin ilmaistuna,

$$\chi(D_{1,n}) = n.$$

TODO: pitäiskö äskeisen olla huomautus?

Seuraavan lemmän avulla saadaan yhteys verkkojen  $D_{s,n}$  ja  $D_{s+1,n}$  värityslukujen välille.

**Lemma 10.** *Olkoon  $G$  kaariverkko. Tällöin*

$$\chi(\text{DL}(G)) \geq \log \chi(G).$$

*Todistus.* Olkoon  $\Psi: \text{DL}(G) \rightarrow [k]$  kaariverkon  $\text{DL}(G)$   $k$ -väritys. Koska verkko  $\text{DL}(G)$  on verkon  $G$  kaariverkko, niin kuvaus  $\Psi$  antaa jokaiselle verkon  $G$  kaarelle värin. Jos  $u, v \in E(G)$  ovat verkon  $G$  perättäisiä kaaria, eli  $\text{head}(u) = \text{tail}(v)$ , niin  $\Psi$  antaa niille eri värit,  $\Psi(u) \neq \Psi(v)$ .

Muodostetaan verkolle  $G$  väritys  $c: G \rightarrow \mathcal{P}([k])$  joka värittää  $G$ :n  $2^k$  värillä. Olkoon  $x \in V(G)$  verkon  $G$  solmu. Määritellään  $x$ :n väri seuraavasti:

$$c(x) = \{\Psi(u) \mid \text{tail}(u) = x\}.$$

Solmun  $x$  väri on siis joukko, jossa on kaikkien solmusta  $x$  lähtevien kaarten värit värityksessä  $\Psi$ . Jotta  $c$  olisi laillinen väritys, se ei saa antaa samaa väriä kahdelle naapurisolmulle. Olkoon  $u = (x, y) \in E(G)$  verkon  $G$  kaari ja siis  $y \in V(G)$  solmun  $x$  naapuri. Nyt  $\text{tail}(u) = x$ , joten  $u$ :n väri kuuluu  $x$ :n värijoukkoon. Tarkemmin ilmaistuna,  $\Psi(u) \in c(x)$ . Toisaalta jos  $\Psi(u) \in c(y)$ , niin tällöin löytyy kaari  $v \in E(G)$ , joka lähtee solmusta  $y$ , eli  $\text{tail}(v) = y$  ja lisäksi jolle  $\Psi$  antaa saman värin kuin  $u$ :lle, eli  $\Psi(x) = \Psi(y)$ . Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä  $\text{head}(u) = y = \text{tail}(v)$ , jolloin  $\Psi$  ei olisikaan laillinen verkon  $\text{DL}(G)$  väritys. Siis  $c$  antaa vierekkäisille solmuille aina toisistaan eroavan värin, joten se täyttää väritysehdon.

TODO: Yllä oleva kappale on pitkä, luettavuutta voisi parantaa ainakin siirtämällä jotain yhtälöympäristöön

Väritys  $c$  antaa verkon  $G$  solmuille väriksi jonkin osajoukon väriyksen  $\Psi$  väreistä. Koska  $k$ :n alkion joukolla on yhteensä  $2^k$  osajoukkoa, niin  $c$  värittää verkon  $G$  korkeintaan  $2^k$  värillä.

Ollaan siis näytetty, että jos verkon  $G$  kaariverkon  $DL(G)$  voi värittää  $k$ :lla värillä, niin  $G$ :n voi värittää  $2^k$  värillä. Toisin sanoen

$$\begin{aligned}\chi(G) &\leq 2^{\chi(DL(G))} \implies \\ \log \chi(G) &\leq \chi(DL(G))\end{aligned}$$

□

Aikaisemmista lemmoista saadaan nyt lopulta verkkojen  $D_{s,n}$  väritysluvulle  $\chi(D_{s,n})$  alaraja.

**Korollaari 11.**

$$\chi(D_{s+1,n}) \geq \log \chi(D_{s,n}).$$

Erityisesti, koska  $\chi(D_{1,n}) = n$ , niin edellisestä korollarista seuraa, että

$$\begin{aligned}\chi(D_{s,n}) &\geq \log^{(s)} \chi(D_{1,n}) \implies \\ \chi(D_{s,n}) &\geq \log^{(s)} n\end{aligned}$$

TODO: esittele notaatio  $\log^{(n)}$

**Lause 12.** Hajautettu algoritmi ei voi värittää  $n$ :n solmun sykliä kolmella värillä alle  $\log^* n$  kierroksessa.

*Todistus.* Hajautettu algoritmi voi värittää  $n$ -syklin kolmella värillä  $t$  kierroksessa jos verkon  $B_{t,n}$  voi värittää kolmella värillä. Yhdistämällä edellisten lemmaiden tulokset saadaan seuraava yhtälö:

$$3 \geq \chi(B_{t,n}) \geq D_{2t+1,n} \geq \log^{(2t)} n.$$

Josta voidaan edelleen päätellä seuraavaa:

$$\begin{aligned}\log^{(2t)} n &\leq 3 \implies \\ \log^{(2t+1)} n &\leq 2 \implies \\ \log^{(2t+2)} n &\leq 1.\end{aligned}$$

Luku  $\log^* n$  on pienin määrä toistokertoja, jolla luvusta  $n$  saadaan logaritmeja ottamalla korkeintaan 1. Äskeisen nojalla  $2(t+1)$  toistokertaa varmasti riittää tähän, joten

$$\begin{aligned}\log^* n &\leq 2(t+1) \implies \\ \frac{1}{2} \log^* n - 1 &\leq t.\end{aligned}$$

Ollaan siis näytetty, että hajautettu algoritmi joka värittää  $n$ -syklin kolmella värillä käyttää siihen aikaa vähintään  $\frac{1}{2} \log^* n - 1$  kierrosta.

□

## 4 Läheteet