

Paikallisuus hajautetuissa verkkoalgoritmeissa

Juhana Laurinharju

Tieteellinen kirjoittaminen
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 8. toukokuuta 2013

1 Johdanto

2 Määritelmiä

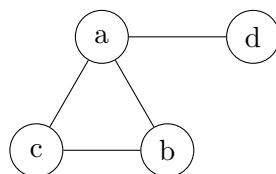
2.1 Verkko

Määritelmä 1. *Suuntaamaton verkko* on pari $G = (V, E)$, missä V on *solmujoukko* ja E on *kaarijoukko*. *Kaari* solmusta $v \in V$ solmuun $u \in V$ on kaksikko $\{v, u\} \in E$. Kaarta voidaan myös merkitä lyhyemmin vu . Jos G on suuntaamaton verkko, niin sen solmujoukkoon voidaan viitata myös merkinnällä $V(G)$ ja kaarijoukkoon merkinnällä $E(G)$.

Esimerkiksi verkko $G = (V, E)$, missä

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d\} \text{ ja} \\ E &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, d\}\} \\ &= \{ab, bc, ca, ad\} \end{aligned}$$

näyttää seuraavalta



Määritelmä 2. Lukujoukosta $\{1, \dots, k\}$ käytetään seuraavaa lyhyempää merkintää:

$$[k] = \{1, \dots, k\}$$

2.2 Laskennan malli

Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton verkko. Verkon jokaisessa solmussa $v \in V$ on tietokone. Laskenta koostuu *kommunikaatiokierroksista*. Yhden kommunikaatiokierroksen aikana jokainen solmu voi:

1. suorittaa mielivaltaista laskentaa
2. lähettää viestin jokaiselle naapurilleen
3. vastaanottaa naapureiden lähettämät viestit

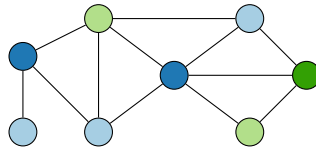
Lisäksi jokaiselle solmulle $v \in V$ on annettu yksikäsitteinen tunniste $ID(v) \in [|V|]$. Laskennan päätyttyä jokaisen solmun tulee tietää oma tulostensa.

TODO: motivointia sille, että tarkastellaan vain kommunikaatiokierrosten lukumäärää aikavaativuutena.

2.3 Verkon väritys

Määritelmä 3. Verkko on *väritetty*, jos jokaiseen solmuun $v \in V$ on liitetty jokin *väri* $c(v) \in \mathbb{N}$ ja kahdella vierekkäisellä solmulla ei koskaan ole samaa väriä. Tarkemmin, verkon $G = (V, E)$ *solmuväritys* on kuvaus $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ jollain luonnollisella luvulla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi vaaditaan, että jos verkossa on kaari solmusta v solmuun u , eli $vu \in E$, niin $c(v) \neq c(u)$.

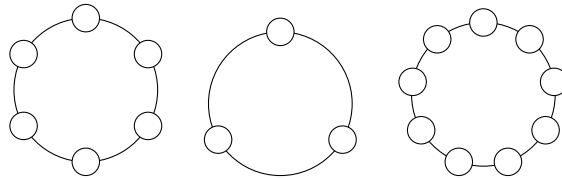
Verkon voi värittää k :lla värillä jos löytyy yllä olevan ehdon täyttävä kuvaus $c: V \rightarrow [k]$. Tällaista väritystä kutsutaan *k-väritykseksi*.



Jos verkkoa väritetään hajautetulla algoritmilla, niin jokaisen solmun tulee tietää oma värinsä laskennan päätyttyä.

2.4 Sykli

Määritelmä 4. Verkko on *sykli*, jos se on yhtenäinen ja sen jokaisella solmulla on tasan kaksi naapuria.



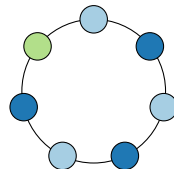
Tarkemmin sanoen, n -sykli, missä $n \geq 3$, on verkko $C_n = (V, E)$ jolla

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\}$$

Syklin voi aina värittää kolmella värillä.

TODO: tälle lähde?



2.5 Iteroitu logaritmi \log^*

Määritelmä 5. *Iteroitu logaritmi* \log^* kertoo kuinka monta kertaa luvusta täytyy ottaa logaritmi, kunnes lopputulos on korkeintaan yksi. Tarkemmin,

$$\log^* x = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq 1, \\ 1 + \log^*(\log x), & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} \log^* 16 &= \log^* 2^{2^2} = 1 + \log^* 2^2 \\ &= 2 + \log^* 2 = 3 + \log^* 1 = 3 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \log^* 65536 &= \log^* 2^{2^{2^2}} = 1 + \log^* 16 \\ &= 4, \end{aligned}$$

joten $\log^* n$ on arvoltaan pienempi kuin 5 kun $n < 2^{65536}$. Iteroitu logaritmi on siis äärimmäisen hitaasti kasvava funktio.

2.6 Näkymä

Määritelmä 6. Verkon G *polku* on jono $P = (p_1, \dots, p_n)$, missä jokainen $p_i \in V(G)$ on verkon G solmu ja lisäksi kahden jonon perättäisen solmun välillä täytyy aina olla kaari. Siis kaikilla $i \in \{1, \dots, n-1\}$ täytyy olla voimassa ehto $u_i u_{i+1} \in E(G)$. Polku P on polku solmusta p_1 solmuun p_n .

TODO: kuva polusta

Määritelmä 7. Polun $P = (p_1, \dots, p_n)$ pituus on sen kaarten lukumäärä. Siis polun P pituus on $n - 1$.

TODO: kuvan polun pituus

Määritelmä 8. Kahden verkon G solmun $u, v \in V(G)$ välinen *etäisyys* verkossa G , on lyhimmän solmusta u solmuun v kulkevan polun pituus.

TODO: kuva lyhimmästä polusta ja etäisyydestä

TODO: Määrittele k -ympäristö

TODO: kuvia naapurustoista eri säteillä

Hajautetussa algoritmossa solmu $v \in V$ saa k :ssa kierroksessa selville oman k -ympäristönsä. Toisaalta solmu ei pysty tässä ajassa saamaan mitään selville solmuista, joiden etäisyys v :stä on yli k .

TODO: kuvasarja havainnollistamaan tätä

Hajautettu algoritmi, jonka ajoaika on k kierrosta on siis funktio, jonka lähtöjoukkona on solmujen mahdolliset k -ympäristöt.

TODO: tää kaipaa varmaan vähän selvennystä

Erityisesti syklissä algoritmi, jonka ajoaika on k kierrosta, tekee päätöksensä k :n edeltäjän, k :n seuraajan ja oman tunnisteensa perusteella. Toisin sanoen solmun $v_l \in V(C_n)$ tuloste on funktio arvoilta

$$(\text{ID}(v_{l-k}), \text{ID}(v_{l-k+1}), \dots, \text{ID}(v_{l-1}), \text{ID}(v_l), \text{ID}(v_{l+1}), \dots, \text{ID}(v_{l+k})),$$

Missä yhteen- ja vähennyslaskut suoritetaan modulo n .

TODO: Kuvasarja solmun näkymästä syklissä.

Erityisesti jos algoritmi tuottaa 3-väriytyksen syklissä k :ssa kierroksessa, niin täytyy olla olemassa sellainen funktio $f : [n]^{2k+1} \rightarrow [3]$, joka tuottaa laillisen 3-väriytyksen riippumatta siitä miten solmuille on annettu tunnisteet.

TODO: onko karteesinen potenssi kohdeyleisölle tuttu?

2.7 Naapurustoverkot

TODO: liitä tää syklien näkyisiin

Määritelmä 9. Naapurustoverkko $B_{t,n} = (V, E)$ on verkko, jonka solmujoukon V muodostaa vektoreiden (x_1, \dots, x_{2t+1}) joukko, missä x_i :t ovat keskenään erisuuria kokonaislukuja joukosta $[n]$. Verkossa $B_{t,n}$ solmut muotoa

$$(x_1, \dots, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_2, \dots, x_{2t})$$

ovat naapureita, kun $y \neq x_{2t+1}$.

TODO: pari kuvaa näistä verkoista pienillä parametrien arvoilla

Naapurustoverkon $B_{t,n}$ solmu on siis syklissä ajetun hajautetun algoritmin näkymä t kierroksen jälkeen. Kahden näkymän välillä on naapurustoverkossa kaari, jos ne ovat vierekkäisten solmujen näkymät jossain yksikäsitteisillä tunnisteilla varustetussa n -syklissä.

TODO: havainnollista kuvalla syklin naapurisolmujen näkymiä ja naapurustoverkon vastaavia solmuja

Määritelmä 10. Solmun $v \in V(G)$ *asteluku* on sen naapureiden lukumäärä verkossa G . Tarkemmin, solmun $v \in V(G)$ asteluku on

$$|\{e \in E(G) \mid v \in e\}|.$$

Verkossa $B_{t,n}$ on

$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-2t)$$

solmua ja sen kaikkien solmujen asteluku on $2(n-2t-1)$.

TODO: onko asteluvusta puhuminen olennaista?

TODO: epäkonsistenttia: kierrosmäärä on välillä k ja välillä t

Hajautettu algoritmi, joka 3-värittää syklin t kierroksessa antaa jokaiselle solmulle värin tarkastelemalla vain sen t -ympäristön tunnisteita.

Väritysalgoritmi on siis todellisuudessa funktio $c : V(B_{t,n}) \rightarrow [3]$, sillä naapurustoverkossa $B_{t,n}$ on solmuina kaikki mahdolliset t -naapurustot.

Nyt c on myös laillinen 3-väritys verkolle $B_{t,n}$, sillä jos c antaa solmuille

$$(x_1, \dots, x_{2t}, x_{2t+1}) \text{ ja } (y, x_1, \dots, x_{2t})$$

saman värin, niin se antaa myös syklissä kahdelle vierekkäiselle solmulle saman värin kun syklissä esiintyy pätkä

$$y, x_1, x_2, \dots, x_{2t+1}.$$

Siis jos näytetään, että verkkoa $B_{t,n}$ ei voi 3-värittää, niin ei voi myöskään olla hajautettua algoritmia joka värittäisi n -syklin kolmella värillä t kierroksessa.

2.8 Suunnattu verkko

Suunnatto verkko $G = (V, E)$ on verkko, jossa kaarilla on suunta. Suunnatussa verkossa on kaari solmusta $u \in V$ solmuun $v \in V$ jos $(u, v) \in E$. Suunnatulla kaarella $e = (u, v) \in E$ on *kärki*

$$\text{head}(e) = v$$

ja *häntä*

$$\text{tail}(e) = u$$

TODO: onks kärki ja häntä oikeet käännökset?

TODO: kuva suunnatusta verkosta ja havainnollistava kuva kärjestä ja hännästä

2.9 Väritysluku $\chi(G)$

Verkon G väritysluku $\chi(G)$ on pienin määrä värejä, jolla sen voi värittää.

3 Sykliä ei voi 3-värittää alle $\log^* n$ kierroksessa

Väritysluvun $\chi(B_{t,n})$ alaraja todistetaan käyttäen suunnattujen verkkojen $D_{s,n}$ perhettä. Suunnatut verkot $D_{s,n}$ liittyvät läheisesti naapurustoverkkoihin $B_{t,n}$. Verkon $D_{s,n}$ solmujoukon V muodostavat kaikki vektorit muotoa

$$(a_1, a_2, \dots, a_s),$$

joilla pätee

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_s \leq n.$$

Solmusta (a_1, \dots, a_s) lähtee kaari muotoa

$$(a_2, \dots, a_s, b)$$

oleviin solmuihin, joilla $a_s < b \leq n$.

Lemma 11. *Naapurustoverkko $B_{t,n}$ pitää sisällään aliverkkona suunnatun verkon $D_{2t+1,n}$.*

Todistus. Olkoon

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{2t+1}) \in V(D_{2t+1,n})$$

verkon $D_{2t+1,n}$ solmu. Koska verkossa $D_{2t+1,n}$ on solmuvektoreilla suuruusjärjestysehto

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{2t+1},$$

niin erityisesti nämä vektorin alkiot ovat keskenään erisuuria, joten vektori \bar{x} on myös verkon $B_{t,n}$ solmu.

Lisäksi jos solmulla \bar{x} on verkossa $D_{2t+1,n}$ naapuri

$$\bar{y} = (x_2, \dots, x_{2t+1}, y) \in V(D_{2t+1,n}),$$

eli verkossa $D_{2t+1,n}$ on suunnattu kaari $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{2t+1,n})$, niin tällöin myös verkossa $B_{t,n}$ on näiden solmujen välillä kaari. Tämä johtuu siitä, että suunnatun verkon $D_{2t+1,n}$ kaarien suuruusjärjestysehdon nojalla $y > x_1$, joten erityisesti $y \neq x_1$. \square

Tästä erityisesti seuraa, että jokainen verkon $B_{t,n}$ väritys on myös verkon $D_{2t+1,n}$ väritys.

Lemma 12.

$$\chi(B_{t,n}) \geq \chi(D_{2t+1,n})$$

Todistus. Olkoon $c: V(B_{t,n}) \rightarrow [k]$ verkon $B_{t,n}$ väritys. Nyt jos

$$(x, y) \in E(D_{2t+1,n})$$

on verkon $D_{2t+1,n}$ kaari, niin äskeisen lemmän nojalla solmujen x ja y välillä on kaari myös verkossa $B_{t,n}$. Koska c on verkon $B_{t,n}$ väritys, niin $c(x) \neq c(y)$. Siis c on väritys myös verkolle $D_{2t+1,n}$ ja erityisesti verkon $D_{2t+1,n}$ voi siis myös värittää k :lla värillä. \square

3.1 Suunnatun verkon kaariverkko

Suunnatun verkon G *kaariverkko* $DL(G)$ on verkko, jonka solmuja ovat alkuperäisen verkon G kaaret ja kahden kaariverkon solmun

$$u, v \in V(DL(G)) = E(G)$$

välillä on kaari, jos $\text{head}(u) = \text{tail}(v)$.

TODO: havainnollistava kuva

Tarkemmin ilmaistuna,

$$V(DL(G)) = E(G)$$

$$E(DL(G)) = \{(v, u) \in E(G) \times E(G) \mid \text{head}(v) = \text{tail}(u)\}.$$

Lemma 13. $D_{1,n}$ on $n:n$ solmun täydellinen verkko, jossa kaaret on suunnattu pienemmästä solmusta suurempaan.

Todistus. Verkon $D_{s,n}$ määritelmä s :n arvolla 1 antaa seuraavan verkon:

$$\begin{aligned} V(D_{1,n}) &= \{(k) \mid 1 \leq k \leq n\} \\ E(D_{1,n}) &= \{((k), (l)) \mid k < l\}. \end{aligned}$$

Tässä verkossa jokaisen kahden solmun välillä on kaari tasan yhteen suuntaan. \square

Määritelmä 14. Kaksi suunnattua verkkoa G ja H ovat *isomorfiset* jos niiden solmujoukkojen välillä on olemassa kuvaus $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$ joka toteuttaa seuraavat ehdot

1. φ on bijektio
2. $(u, v) \in E(G)$ jos ja vain jos $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H)$.

Nämä ehdot toteuttavaa kuvausta kutsutaan *isomorfismiksi*.

Lemma 15. Verkko $D_{s+1,n}$ on verkon $D_{s,n}$ kaariverkko. Tarkemmin,

$$D_{s+1,n} = \text{DL}(D_{s,n}).$$

Todistus. Ideana on samaistaa kaariverkon $\text{DL}(D_{s,n})$ kaari

$$((x_1, \dots, x_s), (x_2, \dots, x_s, y))$$

verkon $D_{s+1,n}$ solmun (x_1, \dots, x_s, y) kanssa. Määritellään siis verkkojen välille kuvaus

$$\varphi: V(\text{DL}(D_{s,n})) \rightarrow V(D_{s+1,n})$$

asettamalla

$$\varphi((x_1, \dots, x_s), (x_2, \dots, x_s, y)) = (x_1, \dots, x_s, y).$$

Näytetään, että φ on isomorfismi. Ensinnäkin φ on bijektio, sillä sille löytyy seuraava käänteiskuvaus $\psi: D_{s+1,n} \rightarrow \text{DL}(D_{s,n})$:

$$\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = ((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_{n+1})).$$

Kuvaus ψ on kuvauksen φ käänteiskuvaus, sillä

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, y)) &= \psi(\varphi((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, y))) \\ &= \psi(x_1, \dots, x_n, y) \\ &= ((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, y)) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= \varphi(\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) \\
&= \varphi((x_1, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n, x_{n+1})) \\
&= (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Vielä täytyy näyttää, että kuvaus toteuttaa isomorfiaehdon. Olkoon

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= (x_1, \dots, x_n) \in V(D_{s,n}), \\
\bar{x}_2 &= (x_2, \dots, x_{n+1}) \in V(D_{s,n}), \\
\bar{y}_1 &= (y_1, \dots, y_n) \in V(D_{s,n}) \text{ ja} \\
\bar{y}_2 &= (y_2, \dots, y_{n+1}) \in V(D_{s,n})
\end{aligned}$$

verkon $D_{s,n}$ solmuja. Tällöin erityisesti

$$\begin{aligned}
(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &\in V(\text{DL}(D_{s,n})) \text{ ja} \\
(\bar{y}_1, \bar{y}_2) &\in V(\text{DL}(D_{s,n}))
\end{aligned}$$

ovat kaariverkon $\text{DL}(D_{s,n})$ solmuja. Jos $((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)) \in E(\text{DL}(D_{s,n}))$ on kaariverkon $\text{DL}(D_{s,n})$ kaari, niin kaariverkon määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
\text{head}((\bar{x}_1, \bar{x}_2)) &= \text{tail}((\bar{y}_1, \bar{y}_2)) && \implies \\
\bar{x}_2 &= \bar{y}_1 && \implies \\
(x_2, \dots, x_{n+1}) &= (y_1, \dots, y_n) && \implies \\
y_1 &= x_2, \dots \text{ ja } y_n &= x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Koska $\bar{x}_1 \in V(D_{s,n})$ ja $\bar{y}_2 \in V(D_{s,n})$, niin $x_1 < y_1 = x_2$ ja $y_n < y_{n+1}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2)) &= ((x_1, \dots, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_{n+1})) \\
&= ((x_1, y_1, y_2, \dots, y_n), (y_1, \dots, y_{n+1})) \in E(D_{s+1,n}).
\end{aligned}$$

Ollaan siis näytetty ensimmäinen kahdesta implikaatiosta:

$$((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)) \in E(\text{DL}(D_{s,n})) \implies (\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2)) \in E(D_{s+1,n}).$$

Toisaalta jos

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= (x_1, \dots, \bar{x}_{n+1}) \in V(D_{s+1,n}) \text{ ja} \\
\bar{y} &= (y_1, \dots, \bar{y}_{n+1}) \in V(D_{s+1,n}).
\end{aligned}$$

ovat verkon $D_{s+1,n}$ solmuja joiden välillä on kaari, eli $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n})$, niin tällöin

$$x_2 = y_1, \dots \text{ ja } x_{n+1} = y_n.$$

Nyt

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= (x_1, \dots, x_n), \\ \bar{x}_2 &= (x_2, \dots, x_{n+1}), \\ \bar{y}_1 &= (y_1, \dots, y_n) \text{ ja} \\ \bar{y}_2 &= (y_2, \dots, y_{n+1})\end{aligned}$$

ovat verkon $D_{s,n}$ solmuja joilla pätee

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in E(D_{s,n}) &\implies (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in V(\text{DL}(D_{s,n})) \text{ ja} \\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in E(D_{s,n}) &\implies (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in V(\text{DL}(D_{s,n})).\end{aligned}$$

Koska $\bar{x}_2 = \bar{y}_1$, niin kaariverkossa $\text{DL}(D_{s,n})$ on kaari

$$((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)) \in E(\text{DL}(D_{s,n})).$$

Koska

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \varphi^{-1}(\bar{x}) \text{ ja} \\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \varphi^{-1}(\bar{y})\end{aligned}$$

niin väite on todistettu. Ollaan siis näytetty, että jos $(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n})$ on verkon $D_{s+1,n}$ kaari, niin sen solmujen alkukuvien välillä on myös kaari. Tarkemmin sanottuna

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in E(D_{s+1,n}) \implies (\varphi^{-1}(\bar{x}), \varphi^{-1}(\bar{y})) \in E(\text{DL}(D_{s,n})).$$

Ollaan siis näytetty, että löytyy bijektio $\varphi: V(\text{DL}(D_{s,n})) \rightarrow D_{s+1,n}$ joka toteuttaa isomorfiaehdon, joten verkot $\text{DL}(D_{s,n})$ ja $D_{s+1,n}$ ovat isomorfisina olennaisesti sama verkko. \square

TODO: todista erikseen, että $D_{2,n} = \text{DL}(D_{2t+1,n1,n})$?

Verkkojen $D_{s,n}$ välillä on nyt siis tarkkaan tunnettu yhteys, kun s :n arvot vaihtelevat. Lisäksi verkko $D_{1,n}$ on rakenteeltaan yksinkertainen täydellinen verkko. Koska täydellisessä verkossa on kaari verkon jokaisen solmuparin välillä, täytyy sen jokaisella solmulla olla eri väri kuin millään muulla solmulla. Siispä verkon $D_{2t+1,n1,n}$ värittämiseen tarvitaan n väriä. Tarkemmin ilmaistuna,

$$\chi(D_{1,n}) = n.$$

TODO: pitäiskö äskeisen olla huomautus?

Seuraavan lemmän avulla saadaan yhteys verkkojen $D_{s,n}$ ja $D_{s+1,n}$ värityslukujen välille.

Lemma 16. *Olkoon G kaariverkko. Tällöin*

$$\chi(\text{DL}(G)) \geq \log \chi(G).$$

Todistus. Olkoon $\Psi: \text{DL}(G) \rightarrow [k]$ kaariverkon $\text{DL}(G)$ k -väritys. Koska verkko $\text{DL}(G)$ on verkon G kaariverkko, niin kuvaus Ψ antaa jokaiselle verkon G kaarelle värin. Jos $u, v \in E(G)$ ovat verkon G perättäisiä kaaria, eli $\text{head}(u) = \text{tail}(v)$, niin Ψ antaa niille eri värit, $\Psi(u) \neq \Psi(v)$.

Muodostetaan verkolle G väritys $c: G \rightarrow \mathcal{P}([k])$ joka värittää G :n 2^k värillä. Olkoon $x \in V(G)$ verkon G solmu. Määritellään x :n väri seuraavasti:

$$c(x) = \{\Psi(u) \mid \text{tail}(u) = x\}.$$

Solmun x väri on siis joukko, jossa on kaikkien solmusta x lähtevien kaarten värit värityksessä Ψ . Jotta c olisi laillinen väritys, se ei saa antaa samaa väriä kahdelle naapurisolmulle. Olkoon $u = (x, y) \in E(G)$ verkon G kaari ja siis $y \in V(G)$ solmun x naapuri. Nyt $\text{tail}(u) = x$, joten u :n väri kuuluu x :n värijoukkoon. Tarkemmin ilmaistuna, $\Psi(u) \in c(x)$. Toisaalta jos $\Psi(u) \in c(y)$, niin tällöin löytyy kaari $v \in E(G)$, joka lähtee solmusta y , eli $\text{tail}(v) = y$ ja lisäksi jolle Ψ antaa saman värin kuin u :lle, eli $\Psi(x) = \Psi(y)$. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä $\text{head}(u) = y = \text{tail}(v)$, jolloin Ψ ei olisikaan laillinen verkon $\text{DL}(G)$ väritys. Siis c antaa vierekkäisille solmuille aina toisistaan eroavan värin, joten se täyttää väritysehdon.

TODO: Yllä oleva kappale on pitkä, luettavuutta voisi parantaa ainakin siirtämällä jotain yhtälöympäristöön

Väritys c antaa verkon G solmuille väriksi jonkin osajoukon värituksen Ψ väreistä. Koska k :n alkion joukolla on yhteensä 2^k osajoukkoa, niin c värittää verkon G korkeintaan 2^k värillä.

Ollaan siis näytetty, että jos verkon G kaariverkon $\text{DL}(G)$ voi värittää k :lla värillä, niin G :n voi värittää 2^k värillä. Toisin sanoen

$$\begin{aligned} \chi(G) \leq 2^{\chi(\text{DL}(G))} &\implies \\ \log \chi(G) \leq \chi(\text{DL}(G)) \end{aligned}$$

□

Aikaisemmista lemmoista saadaan nyt lopulta verkkojen $D_{s,n}$ väritysluvulle $\chi(D_{s,n})$ alaraja.

Korollari 17.

$$\chi(D_{s+1,n}) \geq \log \chi(D_{s,n}).$$

Erityisesti, koska $\chi(D_{1,n}) = n$, niin edellisestä korollarista seuraa, että

$$\begin{aligned} \chi(D_{s,n}) &\geq \log^{(s)} \chi(D_{1,n}) \implies \\ \chi(D_{s,n}) &\geq \log^{(s)} n \end{aligned}$$

TODO: esittele notaatio $\log^{(n)}$

Lause 18. *Hajautettu algoritmi ei voi värittää n :n solmun sykliä kolmella värillä alle $\log^* n$ kierroksessa.*

Todistus. Hajautettu algoritmi voi värittää n -syklin kolmella värillä t kierroksessa jos verkon $B_{t,n}$ voi värittää kolmella värillä. Yhdistämällä edellisten lemmojen tulokset saadaan seuraava yhtälö:

$$3 \geq \chi(B_{t,n}) \geq D_{2t+1,n} \geq \log^{(2t)} n.$$

Josta voidaan edelleen päätellä seuraavaa:

$$\begin{aligned} \log^{(2t)} n \leq 3 &\implies \\ \log^{(2t+1)} n \leq 2 &\implies \\ \log^{(2t+2)} n \leq 1. \end{aligned}$$

Luku $\log^* n$ on pienin määrä toistokertoja, jolla luvusta n saadaan logaritmeja ottamalla korkeintaan 1. Äskeisen nojalla $2(t+1)$ toistokertaa varmasti riittää tähän, joten

$$\begin{aligned} \log^* n \leq 2(t+1) &\implies \\ \frac{1}{2} \log^* n - 1 &\leq t. \end{aligned}$$

Ollaan siis näytetty, että hajautettu algoritmi joka värittää n -syklin kolmella värillä käyttää siihen aikaa vähintään $\frac{1}{2} \log^* n - 1$ kierrosta. □

4 Lähteet