

# 第6章 图

#数据结构与算法

## 6.1 图的定义与术语

**定义：**图G是由表示数据元素的集合V和表示数据元素之间关系的集合E组成。

$$G = (V, E)$$

### 基本概念

- **顶点**：图中的数据元素，也称节点。
- **边**：顶点之间的关系。无向图中用  $(v, w)$  表示，有向图中用  $\langle v, w \rangle$  表示弧，v为弧尾或起点，w为弧头或终点。
- **权**：与图的边或弧相关的数值，可以表示距离、成本等。
- **顶点的度**：
  - 无向图：与顶点v相关联的边的数目，记为  $TD(v)$ 。
  - 有向图：分为**入度(In-degree)  $ID(v)$** （以v为终点的弧的数目）和**出度(Out-degree)  $OD(v)$** （以v为起点的弧的数目）。

$$TD(v) = ID(v) + OD(v)$$

### 边数与顶点，度之间的关系

设图  $G = (V, E)$  有n个顶点和e条边。

- **无向图**：所有顶点的度之和等于边数的2倍。

$$\sum_{i=1}^n TD(v_i) = 2e$$

- **有向图**：所有顶点的入度之和等于出度之和，等于边数。

$$\sum_{i=1}^n ID(v_i) = \sum_{i=1}^n OD(v_i) = e$$

### 图的分类

- **无向图**：图中任意两个顶点之间的边都是无向边。
- **有向图**：图中任意两个顶点之间的边都是有向边，也称有向弧。
- **网**：带权的图。

### 完全图

- **无向完全图**: 在无向图中, 任意两个顶点之间都存在边。含有 $n$ 个顶点的无向完全图有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边。
- **有向完全图**: 在有向图中, 任意两个顶点之间都存在方向相反的两条弧。含有 $n$ 个顶点的有向完全图有 $n(n - 1)$ 条弧。

## 路径与连通性

路径:

- **路径**: 从顶点 $v$ 到顶点 $w$ 的一个顶点序列。
- **路径长度**: 路径上边或弧的数目。
- **回路 或 环**: 第一个顶点和最后一个顶点相同的路径。

连通性:

- **连通图**: 在**无向图**中, 如果任意两个顶点之间都存在路径, 则称该图是连通图。
- **强连通图**: 在**有向图**中, 如果对于每一对顶点 $v$ 和 $w$ , 都存在从 $v$ 到 $w$ 和从 $w$ 到 $v$ 的路径。
- **生成树**: 一个连通图的极小连通子图, 它含有图中全部 $n$ 个顶点, 但只有足以构成一棵树的 $n - 1$ 条边。

## 树与图的关系

树是一种特殊的图, 可以看作是**无环的连通图**。

树是图的一种特殊情况, 树是一种连通的无环图。当图称为树时, 它的根不明确, 所以将其称为自由树



## 数据结构与算法

### 算法6.1：图的类定义

```

class Graph{
public:
    int numVertex;           //图中顶点的个数
    int numEdge;             //图中边的个数
    bool *Visited;           //Visited指针指向保存图的顶点的标志位数组
    int *InDegree;           //InDegree指针指向保存图的顶点的入度的数组

    Graph(int numVert);      //构造函数
    ~Graph();                //析构函数
    virtual int FirstAdj(int oneVertex) = 0; //返回与顶点oneVertex相关联的第一个邻接点
    virtual int NextAdj(int oneVertex, int preVertex) = 0;
    int VerticesNum() {return numVertex;}       //返回图的顶点个数
    int EdgesNum() {return numEdge;}            //返回图的边数
    virtual int weight(int from,int to) = 0;
    virtual void setEdge(int from,int to,int weight) = 0;
    virtual void delEdge(int from,int to) = 0;
};

```

2025/11/12

西安交通大学计算机科学与技术系

17

图的主要操作：

1. 图的创建
2. 求邻接点
3. 顶点数与边数
4. Insert()与delete()
5. weight

## 6.2 图的存储结构

### 6.2.1 邻接矩阵存储方法

邻接矩阵是用一个一维数组存储顶点信息，一个二维数组（称为邻接矩阵）存储图中边或弧的信息的存储方式。

#### 定义

假设图  $G=(V, E)$  有  $n$  个顶点，则邻接矩阵  $A$  是一个  $n \times n$  的方阵，定义为：

**对于无权图：**

$$A[i][j] = \begin{cases} 1, & \text{若 } \langle v_i, v_j \rangle \text{ 是 } E \text{ 中的边} \\ 0, & \text{反之} \end{cases}$$

对于带权图（网）：

$$A[i][j] = \begin{cases} w_{ij}, & \text{若 } < v_i, v_j > \text{ 是E中的边} \\ \infty, & \text{若两顶点间没有边} \\ 0, & \text{若 } i = j \end{cases}$$

其中 $w_{ij}$ 是边或弧的权值。 $\infty$ 通常用一个极大的值来表示。

## 存储结构

通常用一个结构体来封装顶点数组、邻接矩阵以及顶点数和边数。这里换成C++的 `std::vector` 来实现，更安全也更方便喵~

```
#include <vector>

// 使用C++的vector来动态管理内存
struct MGraph {
    std::vector<char> Vex; // 顶点表
    std::vector<std::vector<int>> Edge; // 邻接矩阵
    int vexnum, arcnum; // 当前顶点数和弧数
};
```



## 数据结构与算法

根据上述讨论，图的邻接矩阵的数据结构形式描述如下：

```
#define MAX_VEX_NUM <顶点个数> // 最大顶点个数
typedef enum {DG, AG, WDG, WAG} GraphKind; // 有向, 无向, 带权有向, 带权无向
typedef struct AdjType {
    ArcValType ArcVal; // 若为无权图, 用1或0表示是否邻接;
                        // 若为带权图, 则为权值类型。
    ArcInfoType ArcInfo; // 与弧(或边)相关的其它信息。
} AdjType;
typedef struct {
    GraphKind kind; // 图的种类标志
    int vexnum; // 图的当前顶点数
    Vextype vextype; // 顶点向量
    AdjType adj[MAX_VEX_NUM][MAX_VEX_NUM]; // 邻接矩阵
} AdjGraph;
```

## 特点

**优点:** 直观、简单, 易于理解和实现。访问效率高

**缺点:** 空间复杂度高: 对于稀疏图, 会浪费大量存储空间, 空间复杂度为 $O(n^2)$ 。

增删顶点不便: 增加或删除顶点, 效率低。

对于顶点集合相对稳定, 而边的关系变动频繁的图, 邻接矩阵是很不错的选择哦。

## 6.2.2 邻接表存储方法

邻接表是为图中每个顶点建立一个单链表, 存储所有邻接于该顶点的顶点。我们用一个顶点数组来存放每个链表的头指针。

### 存储结构

这种方法需要两种数据结构:

- 顶点表节点 (VNode):** 通常是一个数组, 每个元素包含顶点的数据和指向第一条邻接边的指针。
- 边表节点 (ArcNode):** 链表中的节点, 代表一条边, 包含邻接点在顶点表中的下标和指向下一条边的指针。

```
#include <vector>

// 边表节点
struct ArcNode {
    int adjvex;           // 该弧所指向的顶点的位置
    ArcNode *nextarc;     // 指向下一条弧的指针
    // int weight;         // 网的边权值可以放在这里
};

// 顶点表节点
struct VNode {
    char data;            // 顶点信息
    ArcNode *firstarc;   // 指向第一条依附该顶点的弧的指针
};

// 用邻接表表示的图
struct ALGraph {
    std::vector<VNode> vertices; // 顶点表, 使用vector代替C风格数组
    int vexnum, arcnum;        // 图的当前顶点数和弧数
};
```



## 数据结构与算法

根据上述讨论，图的邻接表的数据结构形式描述如下：

```
#define MAX_VEX_NUM <顶点个数>           // 最大顶点个数
typedef enum {DG, AG, WDG, WAG} GraphKind;    // 有向, 无向, 带权有向, 带权无向

typedef struct LinkNode {
    int             Adjvex;          // 邻接点在头结点数组中的位置(下标)
    InfoType        Info;            // 与弧(或边)相关的信息
    struct LinkNode *nextArc;       // 指向下一个表结点
} LinkNode;

typedef struct VexNode {
    VexType        Vertex;          // 顶点数据信息
    LinkNode      *FirstArc;        // 指向第一个表结点
} VexNode;

typedef struct {
    GraphKind     kind;            // 图的种类标志
    int           vexnum;          // 图的当前顶点数
    VexNode      Adjlist[MAX_VEX_NUM];
} ALGraph;
```

### 6.2.3 图的边表存储结构

## 6.3 图的遍历

图的遍历可能出现两个问题：

1. 回路问题：遍历过程中可能会反复经过同一个顶点。
2. 连通问题：如果图不是连通的，从一个顶点出发无法访问到所有顶点。

为了解决这些问题，我们需要设置一个辅助数组 `visited[]` 来标记已访问过的顶点。图的遍历实质就是查找每个顶点的邻接点的过程。通常有**DFS**和**BFS**两种方法，对于有向图和无向图都适用。

### 6.3.1 深度优先搜索 (DFS)

**基本思想：**

深度优先搜索 (DFS) 类似于树的先序遍历。从图中某个顶点  $v$  出发，访问该顶点，然后选择一个与  $v$  邻接且未被访问过的顶点  $w$ ，再从  $w$  出发进行深度优先遍历，直到一个路径走到底，再回溯到上一个顶点，继续寻找其他未被访问的邻接点。

```
#include <vector>

// 假设 ALGraph 结构体已定义
// visit() 函数用于访问顶点
```

```

void DFS(const ALGraph& G, int v, std::vector<bool>& visited) {
    visited[v] = true;
    // visit(G.vertices[v]); // 访问顶点v

    // 遍历v的所有邻接点
    for (ArcNode* p = G.vertices[v].firstarc; p != nullptr; p = p->nextarc) {
        int w = p->adjvex;
        if (!visited[w]) {
            DFS(G, w, visited); // 对w进行递归调用
        }
    }
}

// 对整个图进行深度优先遍历
void DFSTraverse(const ALGraph& G) {
    // 初始化访问标记数组
    std::vector<bool> visited(G.vexnum, false);
    // 遍历所有顶点，防止图不连通
    for (int v = 0; v < G.vexnum; ++v) {
        if (!visited[v]) {
            DFS(G, v, visited);
        }
    }
}

```

思考：

1. 如何改为一重循环？
2. 时间和空间的最好情况和最坏情况？

**时间复杂度：**

- 邻接矩阵：每个顶点都需要入队出队一次，并且查找其邻接点，时间复杂度为  $O(n^2)$ 。
- 邻接表：每个顶点入队一次，每条边访问一次，时间复杂度为  $O(n+e)$ 。

**空间复杂度：**需要一个辅助队列，最坏情况下所有顶点同时在队列中，空间复杂度为  $O(n)$ 。

## 6.3.2 广度优先搜索 (BFS)

**基本思想：**

广度优先搜索 (BFS) 类似于树的层序遍历。从图中某个顶点  $v$  出发，访问  $v$  后，依次访问  $v$  的所有未被访问过的邻接点，然后再按照这些邻接点被访问的顺序，逐一访问它们各自的邻接点。

```

#include <vector>
#include <queue>

// 假设 ALGraph 结构体已定义
// visit() 函数用于访问顶点，这里省略其具体实现

// 从顶点v开始广度优先遍历单个连通分量
void BFS(const ALGraph& G, int v, std::vector<bool>& visited) {
    std::queue<int> q;
    // visit(G.vertices[v]); // 访问v
    visited[v] = true;
    q.push(v); // v入队
    while (!q.empty()) {
        int u = q.front(); // 队头元素出队
        q.pop();
        // 遍历u的所有邻接点
        for (ArcNode* p = G.vertices[u].firstarc; p != nullptr; p = p->nextarc) {
            int w = p->adjvex;
            if (!visited[w]) {
                // visit(G.vertices[w]); // 访问w
                visited[w] = true;
                q.push(w); // w入队
            }
        }
    }
}

// 对整个图进行广度优先遍历
void BFSTraverse(const ALGraph& G) {
    // 初始化访问标记数组
    std::vector<bool> visited(G.vexnum, false);
    // 遍历所有顶点，防止图不连通
    for (int v = 0; v < G.vexnum; ++v) {
        if (!visited[v]) {
            BFS(G, v, visited);
        }
    }
}

```

## 6.4 图的应用：拓扑排序

把子项目、工序或课程看成是图中的一个顶点，称之为**活动**。

用图中的**有向边表示各种活动的先后关系**。若存在<u,v>则表示活动u一定在v之前进

行。这样的有向图称为**顶点表示活动的网**，简称**AOV网**。AOV网中不应存在任何回路，即它必须是一个**有向无环图 DAG**。

## 拓扑排序的定义

**拓扑排序**是对一个有向无环图（DAG）的顶点进行排序，使得对图中每一条有向边  $(u, v)$ ，顶点  $u$  都排在顶点  $v$  的前面。最终得到的是一个顶点的线性序列。这个序列通常不是唯一的。

## 拓扑排序算法设计



数据结构与算法

### 拓扑排序算法的设计

按照拓扑排序的定义，假设存在一个AOV网G， $n$ 为G的顶点数， $m$ 为输出顶点计数器，初始值为0，则拓扑排序的大致**算法**为：

- S<sub>1</sub>、如果G中每一个顶点都有前趋，则说明G中有环，算法结束。
- S<sub>2</sub>、否则，在G中选取一个无前趋的顶点v。
- S<sub>3</sub>、输出顶点v， $m++$ 。
- S<sub>4</sub>、把顶点v以及由顶点v发出的边从G中删除。
- S<sub>5</sub>、重复执行上述步骤，直到 $m=n$ 为止。

2025/11/19

西安交通大学计算机科学与技术系

69

### 优化：

1. 使用临时缓冲区存储入度为0的结点
2. 采用邻接表存储有向图

### 3. 数据结构添加入度



#### 数据结构与算法

拓扑排序具体算法如下：// 有向图G采用邻接表存储结构，n为图G的顶点数，数组topol中产生一个拓扑序列

```

int Topol_Order( ALGraph *G, int topol[], int n )
{ m = 0; InitStack(&S);
  for(i=0; i<n; i++) if( G[i].Indegree[i] == 0 ) push(&S, i); // 入度为0的顶点进栈
  while(!StackEmpty(&S)) {
    pop(&S, i); topol[m++] = i; // 将第i个顶点放入拓扑序列中
    p = G->adjlist[i].FirstArc;
    while(p != NULL) { // 对第i个顶点的各个邻接点入度减1
      j = p->adjvex;
      if((--G[j].Indegree[j]) == 0) push(&S, j); // 入度为0的顶点进栈
      p = p->NextArc;
    }
  }
  if (m != n) return(-1); // 图中存在回路
  else return(1);
}

```

2025/11/19

西安交通大学计算机科学与技术系

72

## 6.5 图的应用：关键路径（不作要求）

核心思想是并行操作的完成时间。

## 6.6 图的应用：图的最小生成树

对于一个带权的连通无向图 $G=(V, E)$ ，**最小生成树**是其一个子图，如果这个子图包含 $G$ 中所有的顶点，并且是一棵树，同时所有边的权值之和最小。

一个连通无向图的生成树是不唯一的，但最小生成树的权值之和是唯一的。

### Prim算法

**基本思想：**从一个初始顶点开始，逐步将新的顶点加入到正在生长的树中。每一步都选择一个与当前树相连且权值最小的边，直到所有顶点都被包含进来。这是一种“加点”的策略。

### Kruskal算法

**基本思想：**将图中所有的边按权值从小到大排序。依次考察每条边，如果这条边连接的两个顶点当前不属于同一个连通分量（即加入这条边不会形成环），就将它加入到生成树中。这是一种“加边”的策略。

[上一章](#) [第5章 树与二叉树](#)

[下一章](#) [第7章 排序算法](#)