

## Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Der Vektorraum <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>5</b>
0.1	Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	6
0.2	Definition . . . . .	7
0.3	Beispiele . . . . .	7
0.4	Satz . . . . .	8
0.5	Beispiel . . . . .	9
0.6	Definition . . . . .	10
0.7	Beispiel . . . . .	11
0.9	Definition . . . . .	13
0.10	Beispiel . . . . .	13
0.11	Satz . . . . .	15
0.12	Satz . . . . .	16
0.13	Definition . . . . .	17
0.14	Beispiel . . . . .	17
0.15	Satz . . . . .	18
0.16	Satz . . . . .	19
0.17	Definition . . . . .	19
0.18	Satz (Basisergänzungssatz) . . . . .	19
0.19	Korollar . . . . .	19
0.20	Definition . . . . .	20
0.21	Beispiele . . . . .	20
<b>1</b>	<b>Algebraische Strukturen</b>	<b>21</b>
1.1	Definition . . . . .	21
1.2	Beispiele . . . . .	21
1.3	Definition . . . . .	22
1.4	Bemerkung . . . . .	23
1.5	Bemerkung . . . . .	23
1.6	Proposition . . . . .	23
1.7	Beispiel . . . . .	24
1.8	Satz . . . . .	26

1.9 Beispiel . . . . .	27
1.10 Beispiel . . . . .	27
1.11 Satz (Gleichungslösen in Gruppen) . . . . .	28
1.12 Beispiel . . . . .	28
1.13 Definition . . . . .	29
1.14 Beispiele . . . . .	29
1.15 Proposition . . . . .	30
1.16 Bemerkung . . . . .	30
1.17 Definition . . . . .	31
1.18 Beispiel . . . . .	31
1.19 Proposition (Nullteilerfreiheit in Körpern) . . . . .	31
1.20 Definition . . . . .	31
1.21 Satz und Definition . . . . .	32
1.22 Bemerkung . . . . .	33
1.23 Definition . . . . .	33
1.24 Satz . . . . .	33
1.25 Korollar . . . . .	33
1.26 Bemerkung . . . . .	34
1.27 Definition . . . . .	35
1.28 Satz . . . . .	35
1.29 Beispiel . . . . .	36
1.30 Korollar . . . . .	36
1.31 Definition . . . . .	37
1.32 Beispiel . . . . .	37
1.33 Satz . . . . .	37
1.34 Korollar . . . . .	38
1.35 Bemerkung . . . . .	38
1.36 Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	39
<b>2 Vektorräume</b>	<b>39</b>
2.1 Definition . . . . .	39
2.2 Beispiel . . . . .	39
2.3 Proposition . . . . .	41

2.4	Definition . . . . .	41
2.5	Proposition . . . . .	41
2.6	Beispiel . . . . .	42
2.7	Proposition . . . . .	42
2.8	Definition . . . . .	42
2.9	Satz . . . . .	43
2.10	Definition . . . . .	43
2.11	Beispiel . . . . .	43
2.12	Definition . . . . .	44
2.13	Beispiel . . . . .	44
2.14	Bemerkung . . . . .	46
2.15	Satz !!! . . . . .	46
2.16	Definition . . . . .	46
2.17	Beispiel . . . . .	47
2.18	Satz (Existenz von Basen) . . . . .	48
2.19	Lemma . . . . .	48
2.20	Satz (Austauschsatz von Steinitz) . . . . .	49
2.21	Korollar . . . . .	49
2.22	Satz . . . . .	50
2.23	Definition . . . . .	51
2.24	Korollar . . . . .	51
2.25	Beispiel . . . . .	51
2.26	Satz . . . . .	52
2.27	Definition . . . . .	53
2.28	Beispiel . . . . .	53
2.29	Definition . . . . .	55
2.30	Satz . . . . .	55

## Abbildungsverzeichnis

1	Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor . . . . .	6
2	Vektoraddition durch Parallelogrammbildung . . . . .	6
3	Gerade dargestellt durch Vektoren . . . . .	8

---



---

4	Eindimensionale Unterräume im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	54
---	--------------------------------------------------------	----

# Ende des SS 2015

## 0 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Spaltenvektoren der Länge  $n$  :  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t$

$a_1, \dots, a_n$  Komponente der Spaltenvektoren.

Wie bei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Multiplikation entspricht der Matri-} \\ \text{zenmultiplikation und ist nicht mög-} \\ \text{lich falls } n > 1) \end{array}$$

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Zahl (Skalar)

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$$

Addition+Abbildung :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$  mit Addition und Multiplikation mit Skalaren :  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

Die Vektoren im  $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  entsprechen Punkten auf der Zahlengerade, Ebene, dreidimensionalen Raums. Punkte des  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  lassen sich identifizieren mit, Ortsvektoren Pfeile mit Beginn in 0 (Komp = 0) und Ende im entsprechenden Punkt

Addition von Spaltenvektoren entspricht der Addition von Ortsvektoren entsprechend der Parallelogrammregel. Multiplikation mit Skalaren  $a$  :

Streckung (falls  $|a| > 1$ )

Stauchung (falls  $0 < |a| < 1$ )

Richtungspunkt, falls  $a < 0$

Abbildung 1: Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor

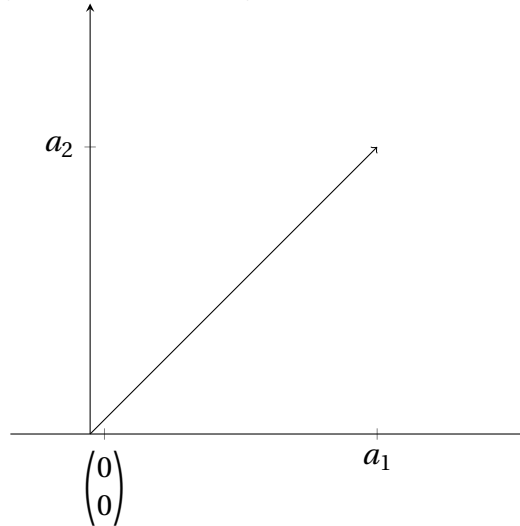
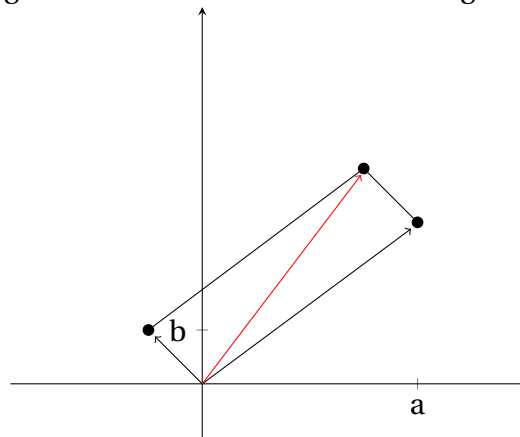


Abbildung 2: Vektoraddition durch Parallelogrammbildung



## 0.1 Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$ )

Seien  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  Dann gilt:

a)

$$(1.1) \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$(1.2) \quad v + 0 = 0 + v = v, \text{ wobei } 0 \text{ Nullvektor}$$

$$(1.3) \quad v + -v = 0$$

$$(1.4) \quad u + v = v + u$$

$$(2.1) \quad (a + b)v = av + bv$$

$$(2.2) \quad a(u + v) = au + av$$

$$(2.3) \quad (a \cdot b)v = a(bv)$$

$$(2.4) \quad 1v = v$$

 $\mathbb{R}^n$  kommutative

Gruppe

b)  $0 \cdot v = 0$  und  $a \cdot 0 = 0$ 

Beweis folgt aus entsprechenden Rechenregeln in 0

## 0.2 Definition

Eine nicht-leere Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Unterraum* (oder *Teilraum* von  $\mathbb{R}^n$ ), falls gilt:

(1)  $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} : u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$  (Abgeschlossenheit bezüglich +)(2)  $\forall u \in \mathcal{U} \forall a \in \mathbb{R} : au \in \mathcal{U}$  (Abgeschlossenheit bezüglich Mult. mit Skalaren) $\mathcal{U}$  enthält Nullvektor  $\{0\}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  (Nullraum) $\mathbb{R}^n$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}$ 

## 0.3 Beispiele

a)  $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$   $G = \{av : a \in \mathbb{R}\}$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^2$ 

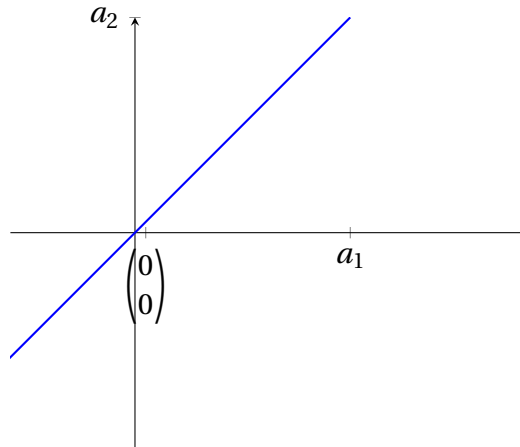
$$(a_1 v, a_2 v \in G, (a_1 +$$

$$a_2)v \in G \quad 2.1 \text{ in } 0.2$$

$$av \in G, b \in \mathbb{R} (ba)v \in G)$$

$G =$  Ursprungsgerade durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} n = 2:$

Abbildung 3: Gerade dargestellt durch Vektoren

b)  $v, w \in \mathbb{R}^n$  $E = \{av + bw : a, b \in \mathbb{R}\}$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  $v = o, w = o : E = \{o\}$  $v \neq o \quad w \notin \{av : a \in \mathbb{R}\}$  $E = \mathbb{R}^2 \quad n = 3$  : Ebene durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und durch  $v, w$ Ist  $w \in \{av : a \in \mathbb{R}\}$ , so ist  $E = G$  (aus a))c)  $v, w \neq o$  $G' = \{w + av : a \in \mathbb{R}\}$  $[v \in G' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w + av = o \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w = (-a)v \in G]$ **0.4 Satz**Seien  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  Unterräume von  $\mathbb{R}^n$ a)  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ b)  $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$  ist im Allgemeinen KEIN Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ c)  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2\}$  (Summe von  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$ ) ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ .



- d)  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$   $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  und  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  ist der kleinste Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , der  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$  enthält. (d.h ist  $w$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in w$ , so  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq w$ )

*Beweis.* a) ✓

b) c)

□

## 0.5 Beispiel

- a) ??b)  $G_1 = \{av : a \in \mathbb{R}\}$

$$G_2 = \{aw : a\}$$

$$G_1 + G_2 = E$$

- b)  $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \right\}$$

$E_1 + E_2$  Unterräume von  $\mathbb{R}^3$  (10.3.b)

$$E_1 \cap E_2 = ?$$

$$v \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = u, t+u = 0, s = u$$

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_1 + E_2 = ?$$

$$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3, \text{ denn :}$$

Es gilt sogar:

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + G_2, \text{ wobei}$$

$$G_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq E_{@}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z - y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ z - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

## 0.6 Definition

a)  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

Dann heißt  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i$

*Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_m$  (mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_m$ ).

[Zwei formal verschiedene Linearkombinationen der gleichen  $v_1, \dots, v_m$  können den gleichen Vektor darstellen

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}]$$

b) Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , so ist der von M *erzeugte* (oder *aufgespannte*) Unterraum  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  (oder  $\langle M \rangle$ ) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann.

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \right\} \text{ falls } M \neq \emptyset$$

$$\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} := \{\emptyset\}$$

$$M = \{v_1, \dots, v_m\}, \text{ so}$$

## 0.7 Beispiel

$$\text{a) } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\text{b) } \mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\text{Ist } \mathcal{U} = \mathbb{R}^3?$$

$$\text{Für welche } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ gibt es geeignete Skalare } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}?$$

$$a + 3b + 2c = x$$

$$2a + 2b + 3c = y$$

$$3a + b + 4c = z$$

LGS für die Unbekannten  $a, b, c$  mit variabler rechter Seite : Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & -4 & -1 & y-2x \\ 0 & -8 & -2 & z-3x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

LGS ist lösbar  $\Leftrightarrow x-2y+z=0$ .

Dass heißt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x-2y+z=0$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x-2y+z=0, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$$

Lösungen des LGS:  $c$  frei wählen,  $b, a$  ergeben sich, (falls  $x-2y+z=0$ ) z.B

$$c=0, b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y, a=x-3b=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y$$

Ist  $x-2y+z=0$ , so ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{rcl} 6x^2 & -3xy & +y^3 = 5 \\ 7x^3 & +3x^2y^2 & -xy = 7 \end{array}$$

## 0.9 Definition

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  heißen *linear abhängig*, falls  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  existieren, *nicht alle*  $= 0$ , mit  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ .

Gibt es solche Skalare nicht, so heißen  $v_1, \dots, v_m$  *linear unabhängig* (d.h. aus  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$  folgt  $a_1 = \dots = a_n = 0$ ).

(Entsprechend  $\{v_1 \dots v_n\}$  linear abhängig/linear unabhängig)

Per Definition :  $\emptyset$  ist linear unabhängig.

## 0.10 Beispiel

a)  $\sigma + v \in \mathbb{R}^n$  Dann ist  $v$  linear unabhängig:

Zu zeigen : Ist  $av = \sigma \Rightarrow a = 0$

Sei  $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  Da  $v \neq \sigma$ ,

existiert mindestens ein  $i$  mit  $b_i \neq 0$ .

Angenommen  $\sigma v = \begin{pmatrix} 0b_1 \\ \vdots \\ 0b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma$ .

Dann  $ab_i = 0$  Da  $b_i \neq 0$ , folgt  $a = 0$ .

$\sigma$  ist linear abhängig:

$$1 \cdot \sigma = \sigma$$

b)  $v_1 = \sigma, v_2, \dots, v_m$  ist linear abhängig :

$$\sigma = 1 \cdot \sigma + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_m$$

c)  $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v \neq \sigma \neq w$$

$v, w$  sind linear

① abhängig  $\Leftrightarrow$

②  $v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$

③  $w \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$

④  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$

①

$v, w$  linear abhängig  $\rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , nicht beide  $= 0$ ,  $a_1 v + a_2 w = \sigma$ . Dann beide  $(a_1, a_2) \neq 0$

$$a_1 v = -a_2 w \mid \cdot \frac{1}{a_1}$$

$$v = -\frac{-a_2}{-a_1} w \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{2}$$

②

$v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$  dass heißt  $v = aw$  für ein  $a \in \mathbb{R}$  Dann  $a \neq 0$ , da  $v \neq \sigma$ .  $w = \frac{1}{a} \cdot v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{3}$

③

$w = bv$  für ein  $b \in \mathbb{R} b \neq 0$ , da  $w \neq \sigma$ .

$$aw \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow aW = (ab)v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\langle w \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$w = \frac{1}{b} w \text{ Dann analog } \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\text{Also } \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{4}$$

④

$v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ , dass heißt.

$v = a \cdot w$  für ein  $a \in \mathbb{R}$

$a \cdot v + (-a)w = \sigma \Rightarrow v, w$  sind linear abhängig ①

$$\text{d) } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$e_1, \dots, e_n$  sind linear unabhängig.

$$\sigma = a_1 e_1 + \dots a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

e)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig  $\mathbb{R}^2$ :

Gesucht sind alle  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt auf LGS für a,b,c:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$c$  ist frei wählbar

f)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig in  $\mathbb{R}^3$ ,

$$10.8b) : \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 0.11 Satz

Seien  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

a)  $v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig ①

$$\Leftrightarrow \exists i \dots v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \text{ ②}$$

$$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \text{ ③}$$

b)  $v_1, \dots, v_m$  sind linear unabhängig  $\Leftrightarrow$  Jedes  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$  lässt sich auf *genau eine* Weise als Linearkombination von  $v_1, \dots, v_m$  schreiben.

c) Sind  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig und es existiert  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$  dann sind auch  $v_1, \dots, v_m, v$  linear unabhängig

*Beweis.* a) ①  $\Rightarrow$  ②

$v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig

$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m$  nicht alle  $= 0$ ,

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

Sei  $a_i \neq 0$

$$a_i v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m -a_j v_j$$

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m -\frac{a_j}{a_i} v_j \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$$

Klar:  $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$

Zeige  $\supseteq$   $v = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ , d.h.

$$v = \sum_{j=1}^m a_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_j v_j + a_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (a_j + a_i b_j) v_j \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$$

$v_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ , dass heißt es existiert

$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_j v_j$$

$\Rightarrow \sigma = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_m v_m$   $v_1, \dots, v_m$  linear abhängig □

## 0.12 Satz

Sind  $v_i, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ , so

$v_i, \dots, v_{n+1}$  linear abhängig.

(Insbesondere ist  $m > n$  und  $v_i, v_m \in \mathbb{R}^n$ , so sind  $v_1, \dots, v_m$  linear abhängig)

*Beweis.* Suche alle  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$  mit  $a_i v_i + \dots + a_{n+1} v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt zu LGS für  $a_1, \dots, a_{n+1}$  mit Koeffizientenmatrix  $(v_1, \dots, v_{n+1}) = A$

Frage: Hat  $A \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  nicht triviale Lösung?

Gauß:



$$\left( \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \right)$$

□

### 0.13 Definition

Sei  $\mathcal{U}$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$

$B \subseteq \mathcal{U}$  heißt Basis von  $\mathcal{U}$  falls:

(1)  $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$

(2)  $B$  ist linear unabhängig

( $\mathcal{U} = \{\sigma\}, B = \emptyset$ )

### 0.14 Beispiel

a)  $e_1, \dots, e_n$  ist Basis von  $\mathbb{R}^n$  (kanonische Basis)

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist Basis von  $\mathbb{R}^2$ :

Sei  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Gesucht:  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

LGS mit variabler rechter Seite

$$\begin{array}{rcl} 1a & +3b & = x \\ 2a & +2b & = y \end{array}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösung:  $b = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x$   $a = x - 3b = x + \frac{3}{4}y - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig nach 0.10c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis.}$$

$$\text{c) } \mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  linear unabhängig (0.10c))

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis von } \mathcal{U}$$

### 0.15 Satz

Jeder Unterraum  $\mathcal{U}$  des  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine Basis.

*Beweis.* Ist  $\mathcal{U} = \{\sigma\}$ , so  $b = \emptyset$ .

Sei also  $\mathcal{U} \neq \{\sigma\}$ .

$v_1$  ist linear unabhängig.

$\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{U}$ .

Ist  $\mathcal{U} = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ , so ist  $\{v_1\}$  Basis von  $\mathcal{U}$

Ist  $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$ .

Sei  $v_2 \in \mathcal{U} \setminus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ .

Nach 0.11c) ist  $\{v_1, v_2\}$  linear unabhängig. Ist  $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{U}$ , so ist  $\{v_1, v_2\}$  Basis von  $\mathcal{U}$ .

Ist  $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$  so wähle  $v_3$  usw.

Es existiert  $m \neq n$  mit  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$  und  $v_1, \dots, v_m$  sind linear unabhängig.

(Denn noch 0.12 gibt es im  $\mathbb{R}^n$  keine  $n+1$  linear unabhängige Vektoren)  $\square$

## 0.16 Satz

Je zwei Basen  $B_1, B_2$  eines Unterraums  $\mathcal{U}$  des  $\mathbb{R}^n$  enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren  $|B_1| = |B_2|$ .

Insbesondere:

Je zwei Basen des  $\mathbb{R}^n$  enthalten  $n$  Vektoren

## 0.17 Definition

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  Basis von  $\mathcal{U}$ ,  $|B| = m$ .

Dann ist  $m$  die *Dimension* von  $\mathcal{U}$ ,  $\dim(\mathcal{U}) = m$ .

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ ,  $\dim(\mathcal{U}) \neq n$ .

## 0.18 Satz (Basisergänzungssatz)

Sei  $\mathcal{U}$  Unterraum der  $\mathbb{R}^n$ ,  $M \subseteq \mathcal{U}$  eine Menge  $m$  linear unabhängiger Vektoren.

Dann lässt sich  $M$  zu einer Basis von  $\mathcal{U}$  ergänzen.

*Beweis.* Analog zu 0.15  $\square$

## 0.19 Korollar

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und  $\dim(\mathcal{U}) = n$ , dann ist  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

*Beweis.* Sei  $B$  Basis von  $\mathcal{U}$ , also  $|B| = n$ .

Nach 0.18 (dort mit  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ ,  $M = B$ ) lässt sich  $B$  zu Basis  $B'$  von  $\mathbb{R}^n$  ergänzen.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \Rightarrow |B'| = n.$$

Also  $B = B'$

$$\mathbb{R}^n = \langle B' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$$

□

## 0.20 Definition

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = (u_1 \dots, u_m)$  eine geordnete Basis von  $\mathcal{U}$ . Nach 0.11b), lässt sich jeder Vektorraum  $\mathcal{U} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$  *eindeutig* als Linearkombination

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^m a_i u_i \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

schreiben.

$(a_1 \dots, a_m)$  heißen *Koordinaten* von  $u$  bzgl. der Basis  $B$ .

## 0.21 Beispiele

a)  $B(e_1 \dots, e_m)$  kanonische Basis von  $\mathbb{R}^n$ .

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  bzgl.  $B$ :

$(a_1 \dots, a_n)$  *kartesische* Koordinaten.

(Rene Descartes, 1596-1650)

# Anfang des WS 2015/16

## 1 Algebraische Strukturen

13.10.2015

### 1.1 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$ . Eine *Verknüpfung* auf  $X$  ist :

$$\begin{cases} X \times X & \longrightarrow X \\ (a, b) & \longrightarrow a \star b \end{cases} \quad (\text{'Produkt' von a und b})$$

$\star$  ist Platzhalter für andere Verknüpfungssymbole, die in speziellen Beispielen auftreten können.

### 1.2 Beispiele

a) Addition  $+$  und Multiplikation  $\cdot$  sind Verknüpfungen auf  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Multiplikation ist *keine* Verknüpfung auf der Menge der negativen ganzen Zahlen.

b) Division ist keine Verknüpfung auf  $\mathbb{N}$ . Division ist Verknüpfung auf  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c)  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$a \oplus b := (a + b) \bmod n \quad n \in \mathbb{Z}_n$$

$$a \odot b := (a \cdot b) \bmod n \quad n \in \mathbb{Z}_n$$

Verknüpfungen auf  $\mathbb{Z}_n$

$$n = 7: \quad 5 \odot 6 = 2$$

$$5 \oplus 6 = 4$$

$$n = 2: \quad \mathbb{Z}_n = \{0, 1\}$$

$$0 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 = 0$$

$$\odot = \cdot$$

d)  $M$  Menge,  $X =$  Menge aller Abbildungen  $M \longrightarrow M$ . Verknüpfung auf  $X$ : Hintereinanderausführung von Abbildungen:  $\circ$

$$(f, g): M \longrightarrow M, \text{ So } f \circ g: M \rightarrow M$$

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) \in M, m \in M$$

Im Allgemeinen ist  $g \circ f \neq f \circ g$

e)  $X = \{0, 1\}$

2-stellige Aussagen, Junktoren wie  $\wedge, \vee, \text{XOR}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  heißen Verknüpfungen auf  $X$ . 0 entspricht f, 1 entspricht w.

$$0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 1 = 1$$

$$0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1 \text{ (= 'Multiplikation')}$$

$$0 \text{ XOR } 0 = 0, 1 \text{ XOR } 0 = 1, 0 \text{ XOR } 1 = 1, 1 \text{ XOR } 1 = 0 \text{ (= Addition mod 2)}$$

f)  $X = M_n(\mathbb{R})$  = Menge der  $n \times n$ - Matrizen über  $\mathbb{R}$ .

Matrizenaddition ist Verknüpfung auf  $X$ .

Matrizenmultiplikation ist Verknüpfung auf  $X$ .

g)  $M$  Menge.  $X$  Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus  $M$  ('Wörter' über  $M$ ).

Verknüpfung: Hintereinanderausführung zweier Folgen (Konkatenation).

$$M = \{0, 1\}, w_1 = 1101, w_2 = 001$$

$$w_1 w_2 = 110111$$

$$w_2 w_1 = 0011101$$

### 1.3 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge mit Verknüpfung  $\star$ .

a)  $X$ , genauer  $(X, \star)$  ist *Halbgruppe*, falls  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$  für alle  $a, b, c \in X$ .  
(Assoziativgesetz)

b)  $(X, \star)$  heißt *Monoid*, falls  $(X, \star)$  Halbgruppe ist und ein  $e \in X$  existiert mit  $e \star a = a$  und  $a \star e = a$  für alle  $a \in X$ .  $e$  heißt *neutrales Element* (später,  $e$  ist eindeutig bestimmt).

c) Sei  $(X, \star)$  ein Monoid. Ein Element  $a \in X$  heißt *invertierbar*, falls  $b \in X$  existiert (abhängig von  $a$ ) mit  $a \star b = b \star a = e$ .  $b$  heißt *inverses Element* (das *Inverse*) zu  $a$  (später: wenn  $b$  existiert, so ist es eindeutig bestimmt).

d) Monoid  $(X, \star)$  heißt *Gruppe*, falls jedes Element in  $X$  bezüglich  $\star$  invertierbar ist.

- e) Halbgruppe, Monoid, Gruppe  $(X, \star)$  bezüglich kommutativ (oder *abelsch*) falls  $a \star b = b \star a$  für alle  $a, b \in X$  (Kommutativgesetz).

(Nach: Abel, 1802-1829)

14.10.2015

«««< HEAD

## 1.4 Bemerkung

In Halbgruppe liefert jede sinnvolle Klammerung eines Produktes mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element. =====

## 1.5 Bemerkung

In Halbgruppe liefert jede sinnvolle Klammerung eines Produktes mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element.

»»»> dbd12bd4a4b0c211913e023b2cc43fbc6e314244

(n = 4)

$$(a \star (b \star c)) \star d \underset{\text{AG}^1}{=} ((a \star b) \star c) \star d \underset{\text{AG}^1}{=} (a \star b) \star (c \star d) \underset{\text{AG}^1}{=} a \star (b \star (c \star d)) \underset{\text{AG}^1}{=} a \star ((b \star c) \star d)$$

Klammern werden daher meist weggelassen.

$a^n = a \star \dots \star a$  "Potenzen eindeutig definiert"  
 $\xleftarrow[n \in \mathbb{R}]{n}$

## 1.6 Proposition

- In einem Monoid  $(X, \star)$  ist das neutrale Element eindeutig bestimmt.
- Ist  $(X, \star)$  Monoid und ist  $a \in X$  invertierbar, so ist das Inverse zu  $a$  eindeutig bestimmt. Bezeichnung:  $a^{-1}$
- Ist  $(X, \star)$  Monoid und wenn  $a, b \in X$  invertierbar sind, so auch  $a \star b$ .  
 $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$
- Die Menge der invertierbaren Elemente in einem Monoid  $(X, \star)$  bilden bezüglich  $\star$  eine Gruppe.

---

<sup>1</sup>Assoziativgesetz

*Beweis.* a) Angenommen:  $e_1, e_2$  sind neutrale Elemente. Dann:

$$e_1 = e_1 \star e_2 = e_1 \star e_2 = e_2 \quad \neq$$

b) Angenommen  $a$  hat 2 inverse Elemente  $b_1, b_2$  also.

$$\begin{aligned} a \star b_1 &= e, b_2 \star a = e \\ b_1 &= e \star b_1 = (b_2 \star a) \star b_1 = b_2 \star (a \star b_1) = b_2 \star e = b_2 \quad \neq \end{aligned}$$

c)

$$(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = a \star (b \star b^{-1}) \star a^{-1} = a \star e \star a^{-1} = e$$

Analog:  $(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = e$

Also:  $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$

d)  $\mathcal{J}$  = Menge der inversen Elemente in  $(X, \star)$ ,

$e \in \mathcal{J}$ , dann  $e \star e = e$ , dass heißt  $e^{-1} = e$ ,  $\star$  ist Verknüpfung auf  $\mathcal{J}$ .

Zu zeigen:  $a, b \in \mathcal{J} \Rightarrow a \star b \in \mathcal{J}$  Folgt aus c).

Assoziativgesetz gilt in  $\mathcal{J}$ ,  $a \in \mathcal{J} \Rightarrow a^{-1} \in \mathcal{J}$ , denn  $(a^{-1})^{-1} = a$  □

*Bemerkung:* Multiplikation mit  $a^{-1}$  macht Multiplikation mit  $a$  (Verknüpfung) rückgängig.

## 1.7 Beispiel

a)  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Halbgruppen bezüglich  $+$ .

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind bezüglich  $+$  Monoide mit neutralen Element 0.

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  ist kein Monoid bezüglich  $+$ , aber  $\mathbb{N}_0$ .

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Gruppen bezüglich  $+$ . Inverses Element zu  $a$ :  $-a$

$\mathbb{N}$  ist keine Gruppe bezüglich  $+$ , Inverse Elemente in  $\mathbb{N}_0$ :  $\{0\}$

b)  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Monoide bezüglich  $\cdot$  (neutrales Element 1). Keine Gruppen (in  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ist 0 nicht invertierbar).

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$  Gruppen.



Invertierbare Elemente in  $\mathbb{Z} :: \{1, -1\} \leftarrow$  Gruppe bezüglich  $\cdot$   
 $\uparrow$   
 Eigenes Inverses

c)  $M$  Menge.

$X =$  Menge aller Abbildungen  $M \longrightarrow M$  mit Hintereinanderausführung  $\circ$  als Verknüpfung.

Monoid, neutrales Element.  $id_M$

$$f \circ id_M = f = id_M \circ f$$

$$id_M(m) = m \text{ für alle } m \in M.$$

Invertierbar sind genau die bijektiven Abbildungen  $M \longrightarrow M$ , Inverse = Umkehrabbildung.

$f : M \longrightarrow M$  bijektiv

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$$

‘Proposition’ on page 23 d): Die bijektive n Abbildung,  $M \longrightarrow M$  bilden bezüglich  $\circ$  eine Gruppe

d)  $M =$  Menge z.B  $\{0, 1\}$ , x Menge aller endlichen Folgen über  $m$ . Halbgruppe mit Verknüpfung Konkatination . Nimmt man die leere Folge mit hinzu, ist es das neutrale Element. Dann: Monoid.

e)  $M_n(\mathbb{R})$  Menge der Matrizen über  $\mathbb{R}$ .

Addition: neutrales Element  $0 - Matrix$ , Inverse zu  $A$  ist  $-A$ .  $(M, Addition)$  ist Gruppe

Multiplikation:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  Halbgruppe mit neutralem Element  $I_m$

f)  $n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\} \quad$  Verknüpfung  $\oplus$

$$a \oplus b = a + b \mod n$$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  ist Gruppe.

Assoziativgesetz:  $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= (a + b \mod n) \mod n \\ &= ((a + b) + c) \mod n \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{=} (a + (b + c)) \mod n \\ &= (a + (b + c) \mod n) \mod n \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{=} (a + (b \oplus c)) \mod n \\ &= (a \oplus (b \oplus c)) \end{aligned}$$

0 ist neutrales Element bezüglich  $\oplus$

0 ist sein eigenes Inverse.

$1 \leq i \leq n$   $n - i \in \mathbb{Z}_n$  Inverses zu  $i$

$$i \oplus (n - i)$$

$$= (i + (n - i)) \bmod n = n \bmod n = 0$$

g)  $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_0$  Verknüpfung  $\odot$   $n > 1$

$$a \odot b = a \cdot b \bmod n$$

$(\mathbb{Z}_n, \odot)$  ist Monoid

Assoziativgesetz wie bei  $\oplus$ .

1 ist neutrales Element bei  $\odot$  Keine Gruppe bezüglich  $\odot$ , denn 0 hat kein Inverses

## 1.8 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}, n > 1$

a) Die Elemente in  $(\mathbb{Z}_n, \odot)$ , die invertierbar bezüglich  $\odot$  sind, sind genau diejenigen  $a \in \mathbb{Z}_n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$ .

Für solche  $a$  bestimmt man das Inverse folgendermaßen:

Bestimme  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $s \cdot a + t \cdot n = 1$  (Erweiterter Euklidischer Algorithmus)

Dann ist  $a^{-1} = s \bmod n$

b)  $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n : \text{ggT}(a, n) = 1\}$  ist Gruppe bezüglich  $\odot$ .

$|\mathbb{Z}_n^*| =: \varphi(n)$  Euler'sche  $\varphi$ -Funktion (Leonard Euler 1707-1783)

c) Ist  $p$  eine Primzahl so ist  $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \odot)$  eine Gruppe. *Beweis* folgt aus b)

*Beweis.* a) Angenommen  $a \in \mathbb{Z}_n$  invertierbar bezüglich  $\odot$

D.h es existiert  $b \in \mathbb{Z}_n$  mit  $a \odot b = 1$

$a \cdot b \bmod n = 1$ , d.h es existiert  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $a \cdot b = 1 + k \cdot n, 1 = a \cdot b - k \cdot n$

Sei  $d = \text{ggT}(a, n)$ :

$$d \mid a \Rightarrow d \mid a \cdot b$$

$$d \mid n \Rightarrow d \mid k \cdot n$$

$$\Rightarrow d \mid a \cdot b - k \cdot n = 1$$

$$\Rightarrow d = 1 \quad \text{ggT}(a, n) = 1.$$

Umgekehrt sei  $a \in \mathbb{Z}_n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$

EEA liefert  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $s \cdot a + t \cdot n = 1$ .

$$\begin{aligned}
 & (s \bmod n) \odot a &= ((s \bmod n) \cdot a) \bmod n \\
 \stackrel{\text{Mathe I}}{=} & (s \cdot a) \bmod n &= (1 - t \cdot n) \bmod n \\
 = & (1 - \underbrace{(t \cdot n) \bmod n}_{=0}) \bmod n &= 1 \bmod n = 1
 \end{aligned}$$

b) 'Proposition' on page 23 d)

□

## 1.9 Beispiel

$n = 24$ ,  $a = 7$  ist invertierbar in  $(\mathbb{Z}_{24}, \odot)$

EEA:

$$\begin{aligned}
 1 &= (-2) \cdot 24 + 7 \cdot 7 \\
 a^{-1} &= 7 \bmod 24 = 7 = a
 \end{aligned}$$

## 1.10 Beispiel

Sei  $M = \{1, \dots, n\}$

Die Menge der bijektiven Abbildungen auf  $M$  (*Permutationen*) bilden nach 1.7c) eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung  $\circ$ .

Bezeichnung:  $S_n$  *systematische Gruppe von Grad  $n$*

Es ist  $|S_n| = n!$

(Mathe I)

$$\text{z.B.: } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi$$

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\varrho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \varrho^{-1} = id$$

$$\pi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$S_n$  ist für  $n \geq 3$  nicht abelsch (nicht kommutativ)

### 1.11 Satz (Gleichungslösen in Gruppen)

Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe  $a, b \in G$  (in allgemeinen Gruppen schreibt man Verknüpfungen oft als  $\cdot$  statt  $\star$ , oft auch ab statt  $a \cdot b$ )

- a) Es gibt genau ein  $x \in G$  mit  $ax = b$  (nämlich  $x = a^{-1}b$ ) [ "Teilen durch"  $a$  von links = Multiplikation von links mit  $a^{-1}$  ]
- b) Es gibt genau ein  $y \in G$  mit  $ya = b$  (nämlich  $y = ba^{-1}$ )
- c) Ist  $ax = bx$  für ein  $x \in G$ , so ist  $a = b$   
Ist  $ya = yb$  für ein  $y \in G$ , so ist  $a = b$

*Beweis.* a) Setze  $x = a^{-1}b \in G$ .

$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1})b = a \cdot b = b$  Eindeutigkeit : Sei  $x \in G$  mit  $ax = b$

Multiplikation beide Seiten mit  $a^{-1}$ ,

$$x = (a^{-1}a)x = a^{-1}b$$

b) analog

c)  $ax = bx$  Multiplikation mit  $x^{-1}$  Dann  $a = b$

□

### 1.12 Beispiel

- a) Suche Permutation  $\xi \in S_3$  mit  $\varrho \circ \xi = \pi$  (vgl. 1.10). 'Satz (Gleichungslösen in Gruppen)' on page 28a):

$$\begin{aligned} \xi = \varrho^{-1} \circ \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) 1.11c) gilt in Monoiden, die keine Gruppen sind, im Allgemeinen nicht:

Beispiel:  $(\mathbb{Z}_0, \odot)$

$$2 \odot 3 - 0 = 3 \odot 3, \text{ aber } 2 \neq 4$$

### 1.13 Definition

a)  $R \neq \emptyset$  Menge mit 2 Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  heißt *Ring*, falls

(1)  $(R, +)$  ist kommutative Gruppe (neutrales Element: 0, *Nullelement*, Inverses zu  $a$ :  $-a$   $b + (-a) =: b - a$ )

(2)  $(R, \cdot)$  ist Halbgruppe

(3)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  und  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  ( $\cdot$  vor  $+$ )  
*Distributivgesetz*

b) Ring  $R$  heißt *kommutativer Ring* falls  $(R, \cdot)$  kommutative Halbgruppe ist.

c) Ring  $R$  heißt *Ring mit Eins*, falls  $(R, \cdot)$  Monoid, neutrales Element  $1 \neq 0$  (*Eins-element*, *Eins*)

### 1.14 Beispiele

a)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kommutativer Ring mit 1, invertierbare Elemente bezüglich  $\cdot$  sind 1 und  $-1$ .

b)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$  sind kommutative Ringe mit Eins.  
Alle Elemente  $\neq 0$  sind invertierbar bezüglich  $\cdot$ .

c)  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ .

$$\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  ist kommutativer Ring mit Eins:

Wegen 'Beispiel' on page 24 f),g) sind nur die Distributivgesetz zu zeigen:

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \odot c &= ((a \oplus b) \cdot c) \bmod n \\ &= (((a + b) \bmod n) \cdot c) \bmod n \\ &= ((a + b) \cdot c) \bmod n \\ \text{Mathe I} \quad &= (a \cdot c + b \cdot c) \bmod n \\ &= ((a \cdot c) \bmod n + (b \cdot c) \bmod n) \bmod n \\ \text{Mathe I} \quad &= a \odot c \oplus b \odot c \end{aligned}$$

d)  $M_n(\mathbb{R}), n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$ , mit Matrizenaddition  $+$  und, Multiplikation  $\cdot$  ist Ring mit Eins.

(Folgt aus Rechenregeln für Matrizen, Mathe II) Eins :  $E_n$   $n \times n$ -Einheitsmatrix

Für  $n \geq 2$  ist  $M_n(\mathbb{R})$  kein kommutativer Ring

### 1.15 Proposition

Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring. Dann gilt für alle  $a, b \in R$ .

a)  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

b)  $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

c)  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

*Beweis.*

a)  $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a \stackrel{\text{DG}^2}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a$

Addiere auf beiden Seiten  $-(0 \cdot a)$

$$0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$$

b)  $(-a) \cdot b + ab = ((-a) + a) \cdot b \stackrel{\text{a)}}{=} 0 \cdot b = 0$

$$\Rightarrow (-a) \cdot b = -(ab) \text{ Analog } a \cdot (-b) = -(ab)$$

c)  $(-a) \cdot (-b) \stackrel{\text{b)}}{=} -(a \cdot (-b)) \stackrel{\text{b)}}{=} -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$

□

### 1.16 Bemerkung

a) In einem Ring mit Eins sind 1 und  $-1$  bezüglich  $\cdot$  invertierbar.

$$1 \cdot 1 = 1 \quad (1^{-1} = 1)$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \quad (1.15c)), \text{ dass heißt. } (-1)^{-1} = -1$$

0 ist nie bezüglich Multiplikation invertierbar, denn  $0 \cdot a = 0 \neq 1$ . 1.15a)

b) Es kann sein dass  $1 = -1$  gilt. Zum Beispiel:

$$(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot) \quad 1 \oplus 1 = 0 \quad 1 = -1$$

---

<sup>2</sup>Distributivgesetz

### 1.17 Definition

Ein kommutativer Ring  $(R, +, \cdot)$  mit Eins heißt *Körper*, wenn jedes Element  $\neq 0$  bezüglich Multiplikation invertierbar ist.

### 1.18 Beispiel

a)  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Körper,  $\mathbb{Z}$  nicht.

b)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  ist genau dann ein Körper, wenn  $n$  eine Primzahl.

$\mathbb{Z}_n$  ist kommutativer Ring mit 1.

‘Beispiele’ on page 29c: Die invertierbaren Elemente in  $\mathbb{Z}_n$  sind alle  $a \in \mathbb{Z}_n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$

### 1.19 Proposition (Nullteilerfreiheit in Körpern)

Ist  $K$  ein Körper,  $a, b \in K$ , mit  $a \cdot b = 0$ , so ist  $a = 0$  oder  $b = 0$

*Beweis.*

Sei  $a \cdot b = 0$  Angenommen  $a \neq 0$ . Dann existiert  $a^{-1} \in K$

$$0 \underset{1.15a)}{=} a^{-1} \cdot 0 \underset{\text{Vor.}}{=} a^{-1}(a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b$$

□

*Beispiel:*  $R = (\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$

$$2 \odot 3 = 0 \quad 2 \neq 0, 3 \neq 0$$

### 1.20 Definition

Sei  $K$  ein Körper,

a) Ein (Formales) *Polynom* über  $K$  ist ein Ausdruck  $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots +$

$a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  wobei  $n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K$ . (Manchmal  $f(x)$  statt  $f$ ,  $+$ -Zeichen hat zunächst nichts mit einer Addition zu tun.  $a_i$  *Koeffizienten* von  $f$ )

Ist  $a_i = 0$  so kann man in der Schreibweise von  $f$   $0 \cdot x^i$  auch weglassen.

Statt  $a_0x^0$  schreibt man  $a_0$ , statt  $a_1x^1$  schreibt man  $a_1x$ . Sind alle  $a_i = 0$ , so  $f = 0$ , *Nullpolynom*.

Ist  $a_i = 1$ , so schreibt man  $x^i$  statt  $1x^i$

- b) Zwei Polynome  $f$  und  $g$  sind *gleich*, wenn *entweder*  $f = 0$  und  $g = 0$  oder  $f \neq 0$  und  $g \neq 0$

$$\text{d.h. } f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0$$

$$g = \sum_{i=0}^m a_i x^i, b_m \neq 0$$

und  $n = m$  und  $a_i = b_i$  für  $i = 0 \dots n$

- c) Menge aller Polynome über  $K$ .  $K[x]$

Wir wollen  $K[x]$  zu einem Ring machen. Wie?

$$\text{Beispiel: } f = 3x^2 + 2x + 1,$$

$$g = 5x^3 + x^2 + x \in Q[x]$$

$$f + g = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$$

$$f \cdot g = (3x^2 + 2x + 1) \cdot (5x^3 + x^2 + x)$$

$$= 15x^5 + 10x^4 + 5x^3 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x^2 + 2x^2 + x$$

$$= 15x^5 + 13x^4 + 10x^3 + 3x^2 + x$$

27.10.2015

## 1.21 Satz und Definition

$K$  Körper.  $K[x]$  wird zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgenden Verknüpfungen.

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{i=0}^m b_i x_i \text{ so}$$

$$f + g = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$$

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i, \text{ wobei } c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \quad (\text{Faltungsprodukt})$$

In beiden Fällen sind Koeffizienten  $a_i$  mit  $i > n$  bzw.  $b_i$  mit  $i > m$  gleich 0 zu setzen. Das Einselement ist  $1 (= 1x^0)$

Das Nullelement ist das Nullpolynom.

$$-f = \sum_{i=0}^n (-a_i) x^i$$

$(K[x], +, \cdot)$  heißt *Polynomring* in einer Variable *Beweis*: Nachrechnen



**1.22 Bemerkung**

$$\begin{aligned} \text{a) } f &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x], \quad a \in K \subseteq K[x] \\ a \cdot f &= \sum_{i=0}^n (a \cdot a_i) x^i \\ x \cdot f &= \sum_{i=0}^n a_i x^{i+1} = a_n x^{n+1} + \dots + a_0 x \end{aligned}$$

b) Das  $+$ - Zeichen in der Definition der Polynome entspricht genau der Addition der *Monome*  $a_i x^i$ .

$$(a_0 x^0 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad a_1 x^1) = a_0 x^0 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad a_1 x^1$$

$\uparrow$  Add. aus 1.21                       $\uparrow$  + aus 1.20

**1.23 Definition**

Sei  $0 \neq f \in k[x]$ ,  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,  $a_n \neq 0$ .

Dann heißt  $n$  der *Grad* in  $f$ ,  $\text{Grad}(f) = n$

$\text{Grad}(0) := -\infty$

$\text{Grad}(f) := 0$  : *Konstante Polynome*  $\neq 0$

**1.24 Satz**

Sei  $K$  ein Körper,  $f, g \in K[x]$ .

Dann ist  $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$

(Konvention:  $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty + \infty)$ ,

Sei  $f \neq 0$  und  $g \neq 0$

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_n \neq 0, \quad n = \text{Grad}(f)$$

$$g = \sum_{i=0}^m b_i x^i, \quad b_m \neq 0, \quad m = \text{Grad}(g)$$

Koeffizienten von  $x^{n+m}$  in  $f \cdot g$ :  $a_n b_m \neq 0$   
1.19

**1.25 Korollar**

Sei  $K$  ein Körper

- a) Genau die konstanten Polynome  $\neq 0$  sind in  $K[x]$  bezüglich  $\cdot$  invertierbar  
Insbesondere ist  $K[x]$  *kein* Körper
- b) Sind  $f, g \in K[x]$  mit  $f \cdot g = 0$ , so ist  $f = 0$  oder  $g = 0$  (Nullteilerfreiheit in  $K[x]$ )
- c) Sind  $f, g_1, g_2 \in K[x]$  mit  $f \cdot g_1$  und ist  $f \neq 0$ , so ist  $g_1 = g_2$

*Beweis.*

- a) Sei  $f \in K[x]$  invertierbar bezüglich  $\cdot$ . Dann ist  $f \neq 0$  und es existiert  $g \in K[x]$  mit  $f \cdot g = 1$ .

Mit 1.24:

$$\begin{aligned} 0 = \text{Grad}(1) &= \text{Grad}(f \cdot g) \\ &= \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g). \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \text{Grad}(f) = 0 (= \text{Grad}(g))$$

Dass heißt  $f$  ist konstantes Polynom.

Ist umgekehrt  $f = a \in K, a \neq 0$ , so  $f^{-1} = a^{-1} \in K$

- b) Folgt aus 1.24:

$$\begin{aligned} -\infty = \text{Grad}(0) &= \text{Grad}(f \cdot g) \\ &= \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Grad}(f) = -\infty \text{ oder } \text{Grad}(g) = -\infty, \text{ d.h. } f = 0, \text{ oder } g = 0$$

- c)  $f g_1 = f g_2$   
 $\Rightarrow 0 = f g_1 - f g_2 = f \cdot (g_1 - g_2)$   
 Da  $f \neq 0$ , folgt mit b)  
 $g_1 - g_2 = 0$ , d.h.  $g_1 = g_2$

□

## 1.26 Bemerkung

- a) Jedem Polynom  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x]$

kann man eine Funktion  $K \rightarrow K$  zuordnen.  $a \in K \mapsto f(a) = \sum_{i=0}^n a_i a^i \in K$

(Polynomfunktion aus Analysis  $K = \mathbb{R}$ )

Aufgrund der Definition von Addition/Multiplikation von Polynomen gilt:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$$

Es kann passieren, dass zwei verschiedene Polynome die gleiche Funktion beschreiben.

$$\text{Z.B. } K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$

$$f = x^2, g = x$$

$$f \neq g$$

$$f(1) = 1 = g(1)$$

$$f(0) = 0 = g(0)$$

Über unendlichen Körpern passiert das nicht (später)

b) Schnelle Berechnung von  $f(a)$ :

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$f(a) = a_0 + a(a_1 + a(a_2 + \dots + a(a_{n-1} + aa_n)))$$

### *Horner-Schema*

## 1.27 Definition

$K$  Körper,  $f, g \in K[x]$

$f$  teilt  $g$  ( $f \mid g$ ) falls  $q \in K[x]$  existiert mit  $g = q \cdot f$  (Falls  $g \neq 0 \pmod f \mid g$ , so ist  $\text{Grad}(f) \leq \text{Grad}(g)$  nach ‘Satz’ on page 33)

## 1.28 Satz

$K$  Körper,  $0 \neq f \in K[x], g \in K[x]$

Dann existiert eindeutig bestimmte Polynome  $q, r$

$$(1) \quad g = q \cdot f + r$$

$$(2) \quad \text{Grad}(r) < \text{Grad}(f)$$

(Beweis WHK, Satz 4.69)

*Division mit Rest*

28.10.2015

**1.29 Beispiel**

$$\text{a) } g = x^4 + 2x^3 - x + 2, f = 3x^2 - 1, f, g \in Q[x]$$

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2x^3 - x + 2) : (3x^2 - 1) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}{3x^2 - 1} \\ \underline{-x^4 \phantom{+ 2x^3} + \frac{1}{3}x^2} \\ 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x \\ \underline{-2x^3 \phantom{+ \frac{1}{3}x^2} + \frac{2}{3}x} \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \\ \underline{-\frac{1}{3}x^2 \phantom{- \frac{1}{3}x} + \frac{1}{9}} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} \end{array}$$

$$\text{b) } g = x^4 - x^2 + 1 \quad f = x^2 + x \quad f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 + 1 : x^2 + x = x^2 + 2x \\ \underline{-(x^4 + x^3)} \\ 2x^3 + 2x^2 + 1 \\ \underline{-(2x^3 + 2x^2)} \\ 1 \leftarrow r \end{array}$$

**1.30 Korollar**

$K$  Körper,  $a \in K$ .

$f \in K[x]$  ist genau dann durch  $(x - a)$  teilbar, wenn  $f(a) = 0$  (d.h.  $a$  ist Nullstelle von  $f$ )

$$[f = g \cdot (x - a), g \in K[x]]$$

*Beweis.*

Falls  $x - a \mid f$ , so existiert  $q \in K[x]$  mit  $f \stackrel{1.26}{=} q(x - a)$ .

$$\text{Dann } f(a) = q(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_{=0} = 0.$$

Umgekehrt: Angenommen  $f(a) = 0$ . Division mit Rest von  $f$  durch  $x - a$ :

$$f = q \cdot (x - a) + r, q, r \in K[x]$$

$$\text{Grad}(r) < \text{Grad}(x - a) = 1, r \in K$$

Zeige:  $r = 0$ .

$$r = f - q \cdot (x - a)$$

Setze  $a \in K$  ein.

$$\begin{aligned} r &= f(a) - q(a) \cdot (a - a) = 0 - 0 = 0 \\ f &= q \cdot (x - a) \end{aligned}$$

□

### 1.31 Definition

$K$  Körper  $a \in K$  heißt  $m$ -fache Nullstelle von  $f \in K[x]$ , falls  $(x - a)^m \mid f$  und  $(x - a)^{m+1} \nmid f$ .

Dass heißt  $f = q \cdot (x - a)^m$  und  $q(a) \neq 0$

### 1.32 Beispiel

$$x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

In  $\mathbb{Z}_3$  hat  $f$  die Nullstelle 1

‘Korollar’ on page 36:  $x - 1 (= x + 2)$  teilt  $f$

Dividiere  $f$  durch  $x - 1$ :

$$f = (x^4 + 2x^3 + 2x + 2) \cdot (x - 1)$$

### 1.33 Satz

$K$  Körper,  $f \in K[x]$ ,  $\text{Grad}(f) = n \geq 0$  (dass heißt  $f \neq 0$ ).

Dann hat  $f$  höchstens  $n$  Nullstellen in  $K$  (einschließend Vielfachheit). Genauer:

Sind  $a_1, \dots, a_k$  die verschiedenen Nullstellen von  $f$ , so ist

$f = g \cdot (x - a_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{m_k}$ ,  $m_i$  Vielfachheiten der Nullstellen  $a_i$ ,  $g$  hat keine Nullstelle in  $K$

*Beweis.* Durch Induktion nach  $n$ .

$n = 0$ :  $f = a_0 \neq 0$ , ohne Nullstelle. ✓

Sei  $n > 0$ . Behauptung sei richtig für alle Polynome von  $\text{Grad} < n$ .

Hat  $f$  keine Nullstellen,  $g = f$  ✓

Hat  $f$  Nullstellen  $a_1, \dots, a_k$ ,  $k \geq 1$

so  $f = q \cdot (x - a_1)^{m-1}$  (nach Definition)  $q(a_1) \neq 0$ .

$$\text{Grad}(q) = n - m_1 \underset{m_1 > 0}{<} n$$

Wir zeigen:

$q$  hat genau die Nullstellen  $a_2, \dots, a_k$  mit Vielfachheiten  $m_2, \dots, m_k$ .

Klar: Jede Nullstelle von  $q$  ist Nullstelle von  $f$ , Dass heißt  $q$  hat höchstens Nullstellen  $a_2, \dots, a_k$ .

Diese Nullstellen hat  $q$  mit Vielfachheit  $0 \geq n_i \geq m_i$ , denn  $(x - a_i)^{m_i} | q \Rightarrow (x - a_i)^{n_i} | f$

Sei  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Es ist  $f = s \cdot (x - a_i)^{m_i}$ ,  $s \in K[x]$ ,  $s(a_i) \neq 0$

$$q = q_1 \cdot (x - a_i)^{n_i}, q_1 \in K[x], q(a_i) \neq 0, \quad ((x - a_i)^0 = 1)$$

$$f = q_1 (x - a_1)^{n_i} \cdot (x - a_1)^{m_1} \text{ 'Korollar' on page 33c):}$$

$$s(x - a_i)^{m_i - n_i} = q_1 \cdot (x - a_1)^{m_1}$$

Ist  $m_i > n_i$ , so ist  $m_i - n_i > 0$

$$0 = s(a_i)(a_i - a_i)^{m_i - n_i} = q(a_i)(a_i - a_i) \neq 0E$$

Dass heißt  $n_i = m_i, i = 2, \dots, k$

$$q = g(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k}, g \text{ ohne Nullstelle in } K$$

$$f = g(x - a_1)^{m_2} \dots (x - a_2)^{m_1} \quad (\text{Nach Induktionsvoraussetzung}) \quad \square$$

### 1.34 Korollar

$K$  Körper,  $f, g \in K[x]$ ,  $m = \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$

Gibt es  $m + 1$  Elemente  $a_1, \dots, a_{m+1} \in K$ , paarweise verschieden, mit  $f(a_i) = g(a_i), i = 1, \dots, m + 1$  so  $f = g$ .

*Insbesondere:* Ist  $K$  unendlich,  $f, g \in K[x]$  mit  $f(a) = g(a)$  für alle  $a \in K$ , so ist  $f = g$

*Beweis.*  $f - g \in K[x]$ ,  $\text{Grad}(f - g) \leq m$ .

$f - g$  hat  $m + 1$  Nullstellen  $a_1, \dots, a_{m+1}$

$$1.33 \quad f - g = 0, f = g \quad \square$$

### 1.35 Bemerkung

Über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$  ( $p$  Primzahl) gibt es Polynome beliebig hohen Grades ohne Nullstellen

Über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ :  $(x^2 + 1)^m$  hat  $\text{Grad}(2m)$ , keine Nullstellen in  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

über  $\mathbb{Z}_p$  z.B.  $(x^p - x + 1)^m$  hat  $\text{Grad } pm$ , ohne Nullstellen (ohne Beweis)

### 1.36 Fundamentalsatz der Algebra

Ist  $f \in \mathbb{C}[x]$ ,  $f \neq 0$  so ist  $(f = a_n x^n + \dots + a_0)$

$f = a_n(x-c_1)^{m_1} \dots (x-c_k)^{m_k}$ ,  $a_n, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$  (Nullstellen mit Vielfachen  $m_1, m_2$ )

$m_1 + \dots + m_k = \text{Grad}(f)$

$\text{Grad}(f) = n$   $f$  hat  $n$  Nullstellen (einschließend Vielfachheit)

## 2 Vektorräume

3.11.2015

### 2.1 Definition

Sei  $K$  ein Körper. Ein  $K$ -Vektorraum  $V$  besitzt Verknüpfung  $+$  bezüglich derer eine kommutative Gruppe ist (Neutrales Element  $\sigma$ , Nullvektor, Inverses zu  $v \in V : -v$ ). Außerdem existiert Abbildung  $K \times V \rightarrow V$

$(a, v) \mapsto av, a \in K, v \in V$

(„Multiplikation“ von Elementen aus  $V$ , („Vektoren“) mit Körperelementen („Skalare“)), so dass gilt:

$(a + b)v = av + bv$  für alle  $a, b \in K, v \in V$

$a(v + w) = av + aw$  für alle  $a \in K, v, w \in V$

$(ab)v = a(bv)$  für alle  $a, b \in K, v \in V$

$1v = v$  für alle  $v \in V$ .

### 2.2 Beispiel

a)  $K$  Körper,  $n \in \mathbb{N}$

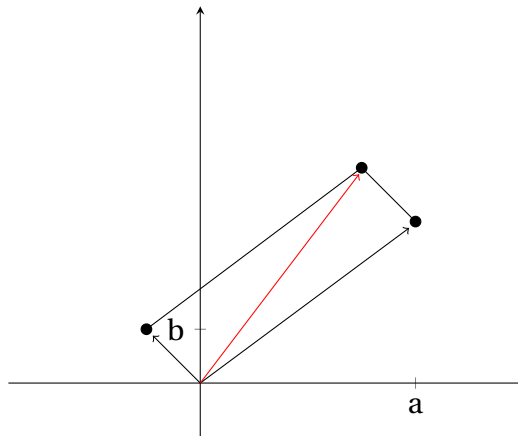
$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$  ist  $K$ -Vektorraum bezüglich  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$  für alle  $a \in K, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ . Raum der Spaltenvektoren der Länge  $n$  über  $K$ .

Entsprechend: Raum der Zeilenvektor,  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t$

Für  $K = \mathbb{R} : \mathbb{R}^n$

$n = 2, 3$  Elemente aus  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ , identifizierbar mit Ortsvektor der Ebene oder des 3-dimensionalen Raumes.



b) Sei  $K$  ein Körper Polynomring  $K[x]$  ist ein  $K$ -Vektorraum, bezüglich

- Addition von Polynomen
- Multiplikation von Körperelementen mit Polynomen

$$a \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) := \sum_{i=0}^n (a a_i) x^i \in K[x]$$

(Multiplikation von Polynomen mit Polynom Grad  $\leq 0$ )

2.1 folgt aus den Ringeigenschaften von  $K[x]$

c)  $K$  Körper.  $V = \text{Abbildung } (K, K) = \{ \alpha : K \rightarrow K : \alpha \text{ Abbildung} \}$  Addition auf  $V$

$\alpha + \beta \in V (\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$  für alle  $x \in K$

Skalare Multiplikation:

$a \in \mathbb{R}, \alpha \in V (a\alpha)(x) = a \cdot \alpha(x)$  Für alle  $x \in K$

Nachrechnen : Damit wird  $V$  ein  $K$ -Vektorraum



### 2.3 Proposition

$K$  Körper,  $V, K - VR$

a)  $a \cdot \sigma = \sigma$

b)  $0 \cdot v = \sigma$

c)  $(-1) \cdot v = -v$

a,b,c Für alle  $v \in V$

### 2.4 Definition

$K$  Körper,  $V, K - VR$ .

$\emptyset + U \subseteq V$  heißt *Unterraum* (*Untervektorraum*, oder *Teilraum*) von  $V$ , falls  $U$  bezüglich Addition auf  $V$  und der skalaren Multiplikation mit Elementen aus  $K$  selbst  $K$  Vektorraum ist.

### 2.5 Proposition

$U$  ist Unterraum von  $V$

$\Leftrightarrow$

(1)  $u_1 + u_2 \in U$  für alle  $u_1, u_2 \in U$

(2)  $au \in U$  für alle  $u \in U, a \in K$   
(Nullvektor in  $U$  = Nullvektor in  $V$ )

*Beweis.*  $\Rightarrow \checkmark \Leftarrow$ : Da  $U \neq \emptyset$ , existiert  $u \in U$ .

$\sigma = 0 \cdot u \in U$

$u \in U \Rightarrow -u = (-1)u \in U$

Mit (1):  $(U, +)$  ist kommutative Gruppe. Restliche Axiome gelten auch für  $U, K$ .

□

## 2.6 Beispiel

- a)  $V - K - VR$ , so ist  $V$  Unterraum von  $V$ .  
und  $\{0\}$  ist Unterraum von  $V$  (*Nullraum*)
- b) Betrachte  $K[x]$  als  $K - VR$ . (2.2).  
Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ .  
 $U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) \leq n\}$  Unterraum von  $K[x]$

## 2.7 Proposition

Seien  $U_1, U_2$  Unterräume von  $K$ -VR  $V$ .

- a)  $U_1 \cap U_2$  ist Unterraum
- b)  $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$  ist Unterraum von  $V$  (*Summe* von Unterräumen)
- c)  $U_1 + U_2$  ist der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $U_1 \cup U_2$  enthält.
- d)  $U_1 \cap U_2$  ist im Allgemeinen kein Unterraum.  
*Beweis:* 0.4

## 2.8 Definition

$V$   $K$ -VR

- a)  $v_1, \dots, v_m \in V, a_1, \dots, a_m \in K$

Dann heißt

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i \in V$$

*Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_m$  (mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_m$ ).

[ Beachte: Zwei formell verschiedene Linearkombinationen derselben Vektoren können den gleichen Vektor darstellen z.B. in  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Ist  $M \subseteq V$ , so ist der von  $M$  erzeugte oder aufgespannte Unterraum  $\langle M \rangle_K$  (oder kurz  $\langle M \rangle$ ) die Menge aller endlichen Linearkombination, die man mit Vektoren aus  $M$  bilden kann:

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in M \right\}$$

$$\langle \emptyset \rangle_K := \{\emptyset\}$$

$$M = \{v_1, \dots, v_m\} : \langle M \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$$

- c) Ist  $\langle M \rangle_K = V$ , so heißt  $M$  Erzeugungssystem

## 2.9 Satz

$V$   $K$ -VR,  $M \subseteq V$

- a)  $\langle M \rangle_K$  ist Unterraum von  $V$
- b)  $\langle M \rangle_K$  ist der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $M$  enthält.  
Insbesondere: Sind  $U_1, U_2$  Unterräume von  $V$ , so ist  $\langle U_1 \cup U_2 \rangle_K = U_1 + U_2$   
*Beweis:* 0.7

## 2.10 Definition

$V$   $K$ -VR  $V$  heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge  $M \subseteq V$  gibt mit  $V = \langle M \rangle_K$

## 2.11 Beispiel

- a)  $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$   
 $K^n$  ist endlich erzeugt.

$$e_1, \dots, e_n \text{ Einheitsvektor } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$K^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_K, \text{ denn } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

- b)  $K[x]$  als  $K$ -Vr ist nicht endlich erzeugt. Angenommen es existiert  $f_1, \dots, f_n \in K[x]$  mit  $K[x] = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$ .

Sei  $t, \max \text{Grad}(f_i) \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$

Dann haben alle Polynome in  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$  höchstens Grad  $t$ . Also  $x^{t+1} \in K[x] \setminus \langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$

$$M = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$$

$$K[x] = \langle M \rangle_K. \quad f = \sum_{n=0}^t a_i x^i$$

- c)  $n \in \mathbb{N}. \quad U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) = n\}$

Unterraum von  $K[x]$ , endlich erzeugt

## 2.12 Definition

Sei  $V$   $K$ -VR,  $v_1, \dots, v_m \in V$  heißen *linear abhängig*, wenn es  $a_1, \dots, a_n \in K$ , *nicht alle*  $= 0$ , gibt mit

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sigma$$

(Beachte: Immer mit  $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m = \sigma$ , aber bei linearer Abhängigkeit soll es noch eine andere Möglichkeit geben) Andernfalls nennt man  $v_1, \dots, v_m$  *linear unabhängig*:

(D.h. aus  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sigma$  folgt  $a_1 = \dots = a_m = 0$ )

Entsprechend:  $\{v_1, \dots, v_m\}$  linear abhängig, linear unabhängig.

$\emptyset$  per Definition linear unabhängig. Klar: Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren wieder linear unabhängig

## 2.13 Beispiel

- a)  $\sigma$  ist linear abhängig:  $1 \cdot \sigma = \sigma$

- b)  $v, w \in V, v \neq \sigma \neq w$ .

Wann sind  $v$  und  $w$  linear abhängig?

$v, w$  linear abhängig  $\Rightarrow \exists a, b \in K$ , nicht beide  $= 0$  mit  $a \cdot v + b \cdot w = \sigma$

Angenommen:  $a \neq 0$   $a \cdot v = -b \cdot w \mid a^{-1}$  (K Körper)

$$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1}(-bw) = (-a^{-1}b)w \in \langle w \rangle_K = \{cw : c \in K\}$$

$d \in K$

$$dv = (-da^{-1}b)w \in \langle w \rangle_K$$

$$\langle v \rangle_K \subseteq \langle w \rangle_K$$

Dann auch  $b \neq 0$ .

Angenommen  $b = 0$ ,  $a \cdot v = -0w = \sigma$

$$v = a^{-1}\sigma = \sigma E \text{ Vertausche Rollen von } v, w : \langle w \rangle_K \subseteq \langle v \rangle_K$$

$$v \in \langle w \rangle_K$$

$$v, w \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow \langle v \rangle_K = \langle w \rangle_K$$

*Beweis.*  $\Rightarrow \checkmark$

$$\Leftarrow v \in \langle v \rangle_K = \langle w \rangle_K$$

$$\Rightarrow v = c \cdot w \text{ für ein } c \in K.$$

$$\Rightarrow \sigma = -v + c \cdot w = (-1)v + c \cdot w$$

$$\Rightarrow v, w \text{ linear abhängig.} \quad \square$$

c)  $e_1, \dots, e_n \in K^n$  sind linear unabhängig.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$$

d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  linear abhängig, linear unabhängig? Für welche  $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\text{gilt } a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Führt auf LGS für die unbekannten  $a, b, c$

$$1a \quad 3b \quad 2c = 0$$

$$2a \quad 2b \quad 3c = 0$$

$$3a \quad 1b \quad 4c = 0$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c \text{ frei wählbar, } b = -\frac{1}{4}c \quad a = -3b - 2c = -\frac{3}{4}c - 2c = -\frac{5}{4}c$$

$$\text{z.B. } c = 4, b = -1, a = -5$$

$$(-5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Vektoren sind linear abhängig.

## 2.14 Bemerkung

Man kann auch für unendliche Mengen  $M \subseteq V$  lineare Unabhängigkeit definieren.

Jede endliche Teilmenge von  $M$  ist linear unabhängig. Zum Beispiel  $\{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$  linear unabhängig in  $K[x]$ .

## 2.15 Satz !!!

$V$   $K$ -VR,  $v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig

$$1. \Leftrightarrow \exists i : v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \text{ für geeignete } b_j \in K$$

$$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_K$$

$$2. v_1, \dots, v_m \text{ linear unabhängig}$$

$$\Leftrightarrow \text{jedes } v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \text{ lässt sich als } v_1, \dots, v_m \text{ schreiben.}$$

$$3. \text{ Sind } v_1, \dots, v_m \text{ linear unabhängig und ist } v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K, \text{ so sind } v_1, v_m, v \text{ linear unabhängig.}$$

*Beweis.* Wie in 0.11, aber  $v_1, \dots, v_m \in V$

□

## 2.16 Definition

Sei  $V$  endliche erzeugter  $K$ -VR.

Eine endliche Teilmenge  $B \subseteq V$  heißt *Basis* von  $V$ , falls

(1)  $V\langle B \rangle_K$

(2)  $B$  linear unabhängig

( $V = \{\sigma\} : \emptyset$  ist Basis von  $V$ )

## 2.17 Beispiel

a)  $e_1, \dots, e_n$  Basis  $K^n$  (*kanonische Basis*)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_5 :$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bilden Basis von } \mathbb{Z}_7^2$$

Lineare Unabhängigkeit:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Führt auf LGS für a,b:

$$1 \cdot a + 3 \cdot b = 0$$

$$2 \cdot a + 1 \cdot b = 0$$

Gauß-Algorithmus (funktioniert über jedem Körper  $K$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = 0, a + 3b = 0, a = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}_7} = \mathbb{Z}_7^2$$

$$\text{Sei } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^2$$

Gesucht sind  $a, b \in \mathbb{Z}_7$

Gauß:

$$1 \cdot a + 3 \cdot b = c$$

$$2 \cdot a + 1 \cdot b = d$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 2 & 1 & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & d-2c \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & 4d-2c \end{pmatrix}$$

$$b = 4d - c = 4d + 6c$$

$$a = c - 3b = 4c + 2d$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (4c + 2d) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (4d + 6c) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.18 Satz (Existenz von Basen)

Sei  $V$  endliches Erzeugter  $K$ -VR. Dann enthält jedes endliche Erzeugendensystem von  $V$  eine Basis von  $V$ .

*Beweis.* Sei  $M \subseteq V$  endlich mit  $V = \langle M \rangle_K$ . Ist  $M$  linear unabhängig, so ist  $M$  Basis ✓

ist  $M$  linear abhängig, so existiert nach 2.15a)

$v \in M$  mit  $V = \langle M \rangle_K = \langle M \setminus \{v\} \rangle_K$

Da  $M$  endlich, endet dieses Verfahren mit Basis □

## 2.19 Lemma

$V$  endlich erzeugter  $K$ -VR

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ . Sei  $\sigma \neq w \in V$ .

Dann  $w = \sum_{j=1}^n a_j v_j, a_j \in K$ .

Ist  $a_i \neq 0$ , so ist  $(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$  wieder eine Basis von  $V$

$$\text{Beweis. } w = \sum_{j=1}^n a_j v_j \Rightarrow a_i v_i = w - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j v_j$$

$$\Rightarrow v_i = a_i^{-1}(a_i v_i) = a_i^{-1} w + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i^{-1} a_j) v_j$$

$$v_i \in \langle (B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\} \rangle_K$$

$$V = \langle B \rangle_K = \langle B \cup \{w\} \rangle_K \stackrel{2.15}{=} \langle B \setminus \{v_i\} \cup \{w\} \rangle_K$$

Zeige  $(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$  ist linear unabhängig:

$$\text{Angenommen } \sigma = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 c_j v_j + c w = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 c_i v_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 c a_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 (c_j + c a_j) v_j + c a_i v_i$$



$v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig

$\Rightarrow (1) ca_i = 0$  und

(2)  $c_j + ca_j = 0$  für alle  $j \neq i$

(1)  $ca_i = 0, a_i \neq 0 \Rightarrow c = 0$

(2)  $c_j = 0$  für alle  $j \neq i$ .

Fertig. □

## 2.20 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

(Ernst Steinitz, 1871-1928, Kiel)

$V$  endlich erzeugter  $K$ -VR,  $B$  Basis von  $V$ ,  $M$  endliche linear unabhängige Teilmenge von  $V$ . Dann existiert  $C \subseteq B$  mit  $|C| = |M|$ , so dass  $(B \setminus C) \cup M$  Basis von  $V$  ist.

Insbesondere  $|M| \leq |B|$ .

*Beweis.* Sei  $|M| = k$

Induktionsnach  $k$ .

$k = 0$  ✓

$k > 0$ . Sei  $M = \tilde{M} \cup \{w\}$ ,  $|\tilde{M}| = k - 1$

Induktionsvoraussetzung: Existiert  $\tilde{C} \subseteq B$  mit  $|\tilde{C}| = |\tilde{M}|$  und  $(B \setminus \tilde{C}) \cup \tilde{M}$  ist Basis von  $V$

$$w = \sum_{u \in B \setminus \tilde{C}} a_u u + \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$$

Mindestens eines der  $a_u$  ist  $\neq 0$ , denn sonst  $w = \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$ , also  $M = \tilde{M} \cup \{w\}$

linear abhängig  $E$

Also sei  $a_i \neq 0$  für ein  $u \in B \setminus \tilde{C}$ .

Nach 2.19 ist  $(B \setminus C) \cup M$  Basis von  $V$  wobei  $c = \tilde{C} \cup \{w\}$ .

Fertig. □

## 2.21 Korollar

$V$  endlich erzeugte  $K$ -VR

a) Je zwei Basen von  $V$  enthalten gleich viele Vektoren

b) Jede linear unabhängige Teilmenge von  $V$  ist endlich

c) (Basisergänzungssatz)

Jede linear unabhängige Menge von Vektoren lässt sich zu Basis ergänzen.

*Beweis.* a)  $B, \tilde{B}$  Basen von  $V$ .

$$2.20: |B| \leq |\tilde{B}|$$

$$: |\tilde{B}| \leq |B|$$

$$\text{Also } |B| = |\tilde{B}|.$$

b) Angenommen  $V$  enthält unendlich linear abhängige Teilmenge  $M$ , Sei  $B$  Basis von  $V$ . Wähle  $M_0 \subset M$  mit  $M_0$  endlich,  $|M_0| > |B|$ .

Nach Voraussetzung ist  $M_0$  linear abhängig Widerspruch zu 2.20

c) Sei  $M$  linear unabhängige Teilmenge von  $V$ . Nach b) ist  $M$  endlich.

Sei  $B$  eine Basis von  $V$  2.20:  $\exists c \subseteq B, |c| = |M|$  so dass  $\underbrace{(B \setminus c)}_{\text{Basisergänzung}} \cup M$  Basis.  $\square$

Basisergänzung

## 2.22 Satz

$V$  endlich erzeugter  $K$ -VR,

$B \subseteq V$ . Dann sind äquivalent:

(1)  $B$  ist Basis von  $V$

(2)  $B$  ist maximal unabhängige Teilmenge von  $V$

(3)  $B$  ist minimales Erzeugendensystem von  $V$  (d.h.  $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K \neq V$  für alle  $w \in B$ .)

*Beweis.* (2)  $\Rightarrow$  (1)

Angenommen  $\langle B \rangle_K \neq V$

Sei  $v \in V \setminus \langle B \rangle_K$ .

2.15c):  $B \cup \{v\}$  linear abhängig  $\nexists$ .  $\langle B \rangle_K = V$   $B$  ist Basis

(1)  $\Rightarrow$  (2): Angenommen  $B \subseteq C$ ,  $C$  linear unabhängig.

2.21 c ist endlich.

2.20  $|c| \leq |B|$  Daher  $B = c$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1). Angenommen  $B$  ist linear abhängig

2.15a):  $\exists w \in B : V = \langle B \rangle_K = \langle B \setminus \{w\} \rangle_K \not\Rightarrow$

$B$  ist linear unabhängig also Basis.

(1)  $\Rightarrow$  (3). Angenommen  $\exists w \in B$  mit  $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K = V_i = \langle B \rangle_K$

2.15a):  $B$  ist linear abhängig  $\not\Rightarrow$

□

## 2.23 Definition

$V$   $K$ -VR.

a) Ist  $V$  endlich erzeugt,  $B$  ist Basis von  $V$ ,  $|B| = n$ , so hat  $V$  Dimension  $n$ ,  
 $\dim_K(V) = n$  (oder einfach  $\dim(V) = n$ )

b) ( $V$  heißt nicht endlich erzeugt, so heißt  $V$  *unendlich-dimensional*)  
 (Also endlich erzeugt = endlich-dimensional)

## 2.24 Korollar

$V$   $K$ -VR,  $\dim_K(V) = n$ ,  $B \subseteq V, |B| = n$

a) Ist  $B$  linear unabhängig, dann ist  $B$  Basis.

b) Ist  $\langle B \rangle_K = V$ , dann ist  $B$  Basis

*Beweis:* Folgt aus 2.22

## 2.25 Beispiel

a)  $\dim_K(K^n) = n$ , da  $e_1, \dots, e_n$  Basis.

b)  $V = \mathbb{R}^4$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\begin{matrix} = u_1 & = u_2 \end{matrix} \quad \mathbb{R}$

$u_1, u_2$  sind linear unabhängig.

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nur für } a, b = 0$$

$\{u_1, u_2\}$  Basis von  $U$   $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$ .

Ergänze  $u_1, u_2$  zu Basis von  $V = \mathbb{R}^4$ :

*Erste Möglichkeit:*

$e_1, e_2, e_3, e_4$  kanonische Basis des  $\mathbb{R}^4$

$$U_1 = 1e_1 + 2e_2 + 0e_3 + 1e_4$$

2.19:  $U_1, e_3, e_4$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

$$U_2 = au_1 + be_2 + ce_3 + de_4 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \quad c = 1$$

2.19:  $u_1, u_2, e_3, e_4$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

*Zweite Möglichkeit:*

2.15c):

$v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig

$$v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle \Rightarrow v_1, \dots, v_m \text{ linear unabhängig. } U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_1 \notin U$  (1. Koordinate  $\neq$  4. Koordinate)

2.15c)  $U_1, U_2, e_1$  linear unabhängig.

$\langle u_1, u_2, e_1 \rangle = ?$

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a+c \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_2 \notin U$

2.15c):  $u_1, U_2, e_1, e_2$  linear unabhängig

2.24:  $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

## 2.26 Satz

$V$   $K$ -VR,  $\dim_K(V) = n$ .

a) Ist  $U$  Unterraum von  $V$ , so ist  $\dim_K(U) \leq n$ . Ist  $\dim_K(U) = n$ , so ist  $U = V$ .

b) (Dimensionenformel)

$U, W$  Unterräume von  $V$ , so gilt:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$A, B$  endliche  
Mengen

$$(|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|)$$

*Beweis.* a) Ergänze Basis von  $U$  zu Basis von  $V$ . (2.21c)

b) Basis von  $U \cup W \rightarrow$  Basis von  $U$

$\rightarrow$  Basis von  $w$  (WHK 9.23)

□

## 2.27 Definition

$V$   $K$ -VR,  $\dim_K(V) = n$ ,  $B = (v_1, \dots, v_n)$  geordnete von  $V$ .

Jedes  $v \in V$  hat *eindeutige* Darstellung  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad a_i \in K \quad 2.15b)$

$(a_1, a_n)$  (in dieser Anordnung) heißen *Koordinaten* von  $V$  bezüglich  $B$ ) Insbesondere  $v_i$  hat Koordinaten  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

## 2.28 Beispiel

a)  $V = K^n, (e_1, \dots, e_n) = B$  kanonische Basis.

Koordinaten von  $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  bezüglich  $B: (a_1, \dots, a_n)$

*Kartesische Koordinaten*

(R. Decartes, 1596-1650)

b)  $V = \mathbb{Q}^3, B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$B$  ist geordnete Basis von  $V$ . (nachprüfen)

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  bezüglich  $B$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gauß Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.4 \end{pmatrix}$$

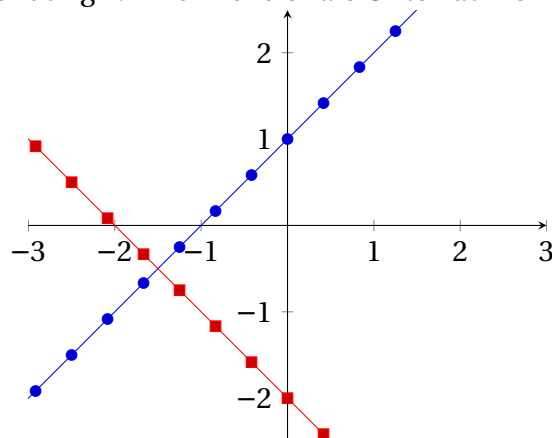
$$a_3 = -0,4$$

$$a_2 = 0.8$$

$$a_1 = 0.2$$

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  bezüglich  $B \left( \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5} \right)$

Abbildung 4: Eindimensionale Unterräume im  $\mathbb{R}^2$



**2.29 Definition**

$V$   $K$ -VR,  $U$  Unterraum von  $V$ ,  $w \in V$ . Dann heißt  $w + U := \{w + u : u \in U\}$  *affiner Unterraum* von  $v$ .

( $w +$  ist im allgemeinen kein Untervektorraum)

$$\dim(w + u) := \dim(U)$$

**2.30 Satz**

$V$   $K$ -VR,  $U, W$  Unterräume von  $V$ ,

- a)  $w + U$  ist Unterraum ①  
 $\Leftrightarrow W \in U$  ②  
 $\Leftrightarrow w + U = U$  ③
- b) Ist  $v \in w + U$ , so ist  $v + U = w + U$
- c) Sind  $v_1 + U, v_2 + W$  affine Unterräume, so ist entweder  $(v_1 + U) \cap (v_2 + W) = \emptyset$  oder es existiert  $v \in V$  mit  $(v_1 + U) \cup (v_2 + W) = v + (U \cup W)$  affiner Unterraum.

*Beweis.* ③  $\Rightarrow$  ① ✓

a) ①  $\Rightarrow$  ②

$$w + U \text{ Unterraum} \Rightarrow \sigma \in w + U$$

$$\Rightarrow \exists u \in U \text{ mit } w + u = \sigma$$

$$\Rightarrow w = -u \in U$$

②  $\Rightarrow$  ③:  $w \in U, w + U \subseteq U$  (da  $U$  Unterraum)

$$\text{Sei } u \in U. \text{ Dann } u - w \in U \quad u = w + (u - w) \in w + U$$

b)  $v \in w + U, v = w + u$  für ein  $u \in U$

$$v + U = w + \underbrace{u + U}_{=U \text{ nach a)}} = w + U$$

c) Angenommen  $(v_1 + U) \cup (v_2 + W) \neq \emptyset$

$$\text{Sei } v \in (v_1 + U) \cup (v_2 + W)$$

Nach b)  $v + U = v_1 + U$

$$v + W = v_2 + W$$

$$\begin{aligned}(v_1 + U) \cup (v_2 + W) &= (v + U) \cup (v + W) \\ &= v + (U \cap W)\end{aligned}$$

 $\supseteq \checkmark$ 

$\subset x \in (v + U) \cup (v + W), x = v + u = v + w, u \in U, w \in W$   
 $u - w \in U \cap W.$

$$x = v + u = v + (U \cap W)$$

□



## Index

- Abbildung, 21
- abelsch, 23
- affiner Unterraum, 55
- Assoziativgesetz, 22
- aufgespannte Unterraum, 43
  
- Basis, 46
- Basisergänzungssatz, 50
  
- Dimension, 51
- Dimensionenformel, 53
- Distributivgesetz, 29
- Division mit Rest, 35
  
- Einheitsvektor, 43
- Einselement, 29
- endlich erzeugt, 43
- Erweiterter Euklidischer  
Algorithmus, 26
- Erzeugungssystem, 43
- Euler'sche  $\varphi$ -Funktion, 26
  
- geordnete Basis, 53
- Grad, 33
- Gruppe, 22
  
- Halbgruppe, 22
- Horner-Schema, 35
  
- Inverse, 22
- inverses Element, 22
- invertierbar, 22
  
- K-Vektorraum, 39
  
- kanonische Basis, 47
- Kartesische Koordinaten, 53
- Koeffizienten, 31
- kommutativer Ring, 29
- Kommutativgesetz, 23
- Komponente, 5
- Konkatenation, 22
- Konstante Polynome, 33
- Koordinaten, 53
- Körper, 31
  
- linear abhängig, 44
- linear unabhängig, 44
- Linearkombination, 10, 42
  
- Matrizenaddition, 22, 29
- Matrizenmultiplikation, 5, 22, 29
- Monoid, 22
- Monome, 33
  
- neutrales Element, 22
- Nullelement, 29
- Nullpolynom, 31
- Nullraum, 7, 42
- Nullteilerfreiheit, 31, 34
- Nullvektor, 39
  
- Ortsvektoren, 5
  
- Parallelogrammregel, 5
- Permutationen, 27
- Polynom, 31
- Polynomring, 32

Ring, 29

Ring mit Eins, 29

Spaltenvektoren, 5, 39

systematische Gruppe, 27

Teilraum, 41

unendlich-dimensional, 51

Unterraum, 7, 41

Untervektorraum, 41

Vektor, 6

Vektorraum, 5

Verknüpfung, 21

Verknüpfungssymbole, 21

Zahlengerade, 5