Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Ende des SS 2015

0 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1 \in \mathbb{R} \right\}$

Spaltenvektoren der Länge n : $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)^t$

$a_1, \ldots, a_n$ *Komponente* der Spaltenvektoren.
Wie bei Matrizen:

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ (Multiplikation entspricht der Matrixmultiplikation und ist nicht möglich falls $n > 1$)

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Zahl (*Skalar*)

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$$

Addition+Abbildung : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n$ mit Addition und Multiplikation mit Skalaren : $\mathbb{R}$-*Vektorraum*
Die Vektoren im $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R}), \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ entsprechen Punkten auf der Zahlengerade, Ebene, dreidimensionalen Raums. Punkte des $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ lassen sich identifizieren mit, *Ortsvektoren* Pfeile mit Beginn in 0 (Komp = 0) und Ende im entsprechenden Punkt
Addition von Spaltenvektoren entspricht der Addition von Ortsvektoren entsprechend der Parallelogrammregel. Multiplikation mit Skalaren a :
Streckung (falls $|a| > 1$)
Stauchung (falls $0 \geq |a| \geq 1$)
Richtungspunkt, falls $a < 0$ TODO: Steckung und Stauchung

Abbildung 1: Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor

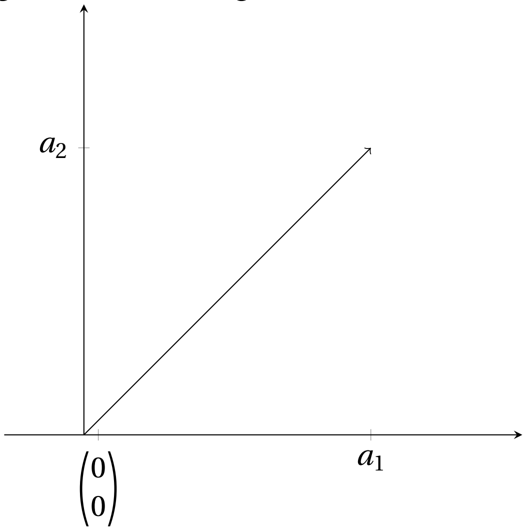
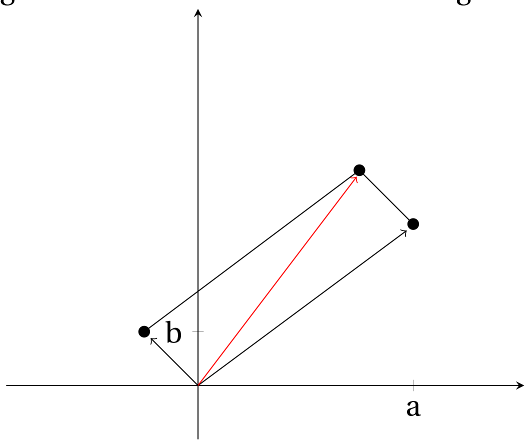


Abbildung 2: Vektoraddition durch Parallelogrammbildung



0.1 Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ Dann gilt:

a)

(1.1)	$u+(v+w)=(u+v)+w$	
(1.2)	$v+0=0+v=v,$ wobei 0 *Nullvektor*	
(1.3)	$v+-v=0$	$\mathbb{R}^n$ kommutative
(1.4)	$u+v=v+u$	Gruppe
(2.1)	$(a+b)v=av+bv$	
(2.2)	$a(u+v)=au+av$	
(2.3)	$(a\cdot b)v=a(bv)$	
(2.4)	$1v=v$	

b) $0\cdot v=0$ und $a\cdot 0=0$
Beweis folgt aus entsprechenden Rechenregeln in 0

0.2 Definition

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{U}\supset\mathbb{R}^n$ heißt *Unterraum* (oder *Teilraum* von $\mathbb{R}^n$), falls gilt:

(1) $\forall u_1, u_2\in\mathcal{U}: u_1+u_2\in\mathcal{U}$ (Abgeschlossenheit bezüglich +)

(2) $\forall u\in\mathcal{U}\forall a\in\mathbb{R}: au\in\mathcal{U}$ (Abgeschlossenheit bezüglich Mult. mit Skalaren)

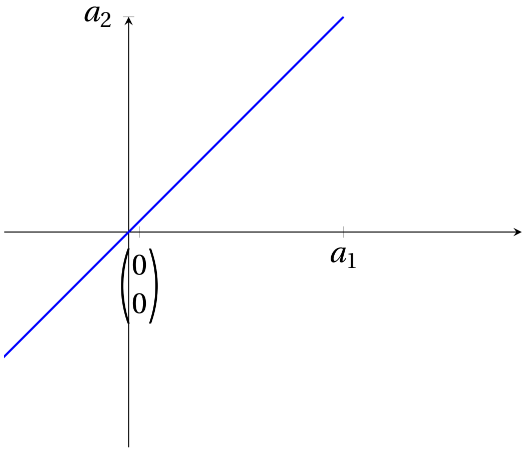
$\mathcal{U}$ enthält Nullvektor {0} Unterraum von $\mathbb{R}^n$ (Nullraum)
$\mathbb{R}^n$ ist Unterraum von $\mathbb{R}$

0.3 Beispiele

a) $0\neq v\in\mathbb{R}^2$ $G=\{av: a\in\mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$ $(a_1v, a_2v \in G, (a_1+a_2)v\in G$ 2.1 in 0.2 $av\in G, b\in\mathbb{R}(ba)v\in G)$

G = Ursprungsgerade durch $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und v = $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ $n=2$:

Abbildung 3: Gerade dargestellt durch Vektoren



b) $v, w \in \mathbb{R}^n$
$E = \{av + bw : a, b \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$
$v = o, w = o : E = \{o\}$
$v \neq o \quad w \notin \{av : a \in \mathbb{R}\}$
$E = \mathbb{R}^2$ $n = 3 :$ Ebene durch $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ und durch v, w
Ist $w \in \{av : a \in \mathbb{R}\}$, so ist $E = G$ (aus a))

c) $v, w \neq o$
$G' = \{w + av : a \in \mathbb{R}\}$
$[v \in G' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w + av \in o \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w = (-a)v \in G]$

0.4 Satz

Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ Unterräume von $\mathbb{R}^n$

a) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$

b) $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ ist im Allgemeinen KEIN Unterraum von $\mathbb{R}^n$

c) $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 : \mathcal{U}_1, u_2 : \mathcal{U}_2\}$ (Summe von $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$) ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

d) $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \quad \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ und $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ ist der kleinste Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ enthält. (d.h ist w Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in w$, so $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq W$)

Beweis. a) ✓

b) TODO

c) TODO □

0.5 Beispiel

a) **??**b) $G_1 = \{av : a \in \mathbb{R}\}$

$G_2 = \{aw : a\}$

$G_1 + G_2 = E$

b) $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t + u \\ u \end{pmatrix} \right\}$$

$E_1 + E_2$ Unterräume von $\mathbb{R}^3$ (10.3.b)

$E_1 \cap E_2 = ?$

$$v \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t + u \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = u, t + u = 0, s = u$$

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$E_1 + E_2 = ?$

$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, denn :

Es gilt sogar:

$\mathbb{R}^3 = E_1 + G_2$, wobei

$$G_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq E_@$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z-y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ z-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

0.6 Definition

a) $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n, a_1, \dots a_m \in \mathbb{R}$
Dann heißt $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i$
Linearkombination von $v_1, \dots, v_m$ (mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_m$).
[Zwei formal verschiedene Linearkombinationen der gleichen $v_1, \dots, v_m$ können den gleichen Vektor darstellen
$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$]

b) Ist $M \subseteq R^n$, so ist der von M *erzeugte* (oder *aufgespannte*) Unterraum $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ (oder $\langle M \rangle$) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann.
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \right\}$ falls $M \neq \varnothing$

$\langle \varnothing \rangle_{\mathbb{R}} := \{\varnothing\}$
$M = \{v_1, \dots v_m\}$, so TODO...

0.7 Beispiel

a) $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
$\langle e_1, \dots e_n \rangle = \mathbb{R}^n$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

b) $\mathscr{U} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$
Ist $\mathscr{U} = \mathbb{R}^3$?
Für welche $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gibt es geeignete Skalare $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

$$\begin{array}{cccc} a & +3b & +2c & = x \\ 2a & +2b & +3c & = y \\ 3a & +b & +4c & = z \end{array}$$

LGS für die Unbekannten a, b, c mit variabler rechter Seite : Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & -4 & -1 & y-2x \\ 0 & -8 & -2 & z-3x \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & & x-2y+z \end{pmatrix}$$

LGS ist lösbar $\Leftrightarrow x-2y+z=0$.

Dass heißt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x-2y=z=0$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x-2y+z=0, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$$

Lösungen des LGS: c frei wählen, b, a ergeben sich, (falls $x-2y+z=0$) z.B $c=0, b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y, a=x-3b=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y$

Ist $x-2y+z=0$, so ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{llll} 6x^2 & -3xy & +y^3 & =5 \\ 7x^3 & +3x^2y^2 & -xy & =7 \end{array}$$

0.9 Definition

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear abhängig*. falls $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ existieren, *nicht alle = 0*, mit $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$.
Gibt es solche Skalare nicht, so heiSSen $v_1, \dots, v_m$ *linear unabhängig* (d.h. aus $a_1 v_1 \dots a_n v_n = 0 folgt a_1 = \dots = a_n = 0$).
(Entsprechend $\{v_1 \dots v_n\}$ linear abhängig/linear unabhängig)
Per Definition : ∅ is linear unabhängig.

0.10 Beispiel

a) σ + v $\in \mathbb{R}^n$ Dann ist v linear unabhängig:
   Zu zeigen : Ist av = $\sigma \Rightarrow a = 0$
   Sei $v \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Da $v \neq \sigma$,
   existiert mindestens ein i mit $b_i \neq 0$.
   Angenommen $\sigma v = \begin{pmatrix} 0 b_1 \\ \vdots \\ 0 b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma$.
   Dann $ab_i = 0$ Da $b_i \neq 0$, folgt a = 0.
   σ ist linear abhängig:

$$1 \cdot \sigma = \sigma$$

b) $v_1 = \sigma . v_2 \dots, v_m$ ist linear abhängig :
   $\sigma = 1 \cdot \sigma + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_m$

c) $v, w \in \mathbb{R}^n$
   $v \neq \sigma \neq w$
   ① v,w sind linear abhängig $\Leftrightarrow$
   ② $v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$
   ③ $w \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$
   ④ $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$
   ①

v, w linear abhängig $\to \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, nicht beide = 0, $a_1 v + a_2 w = \sigma$. Dann beide $(a_1, a_2) \neq 0$
$a_1 v = -a_2 w \mid \cdot \frac{1}{a_1}$
$v = -\frac{-a_2}{-a_1} w \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ ②
②
$v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ dass heißt $v = aw$ für ein $a \in \mathbb{R}$ Dann $a \neq 0$, da $v \neq \sigma$. $w = \frac{1}{a} \cdot v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ ③
③
$w = bv$ für ein $b \in \mathbb{R} b \neq 0$,da $w \neq \sigma$.
$aw \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow aW = (ab)v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$
$\langle w \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$
$w = \frac{1}{b} w$ Dann analog $\langle v \rangle \mathbb{R} \subseteq \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$
Also $\langle v \rangle \mathbb{R} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ ④
④
$v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$, dass heißt.
$v = a \cdot w$ für ein $a \in \mathbb{R}$
$a \cdot v + (-a) w = \sigma \Rightarrow v, w$ sind linear abhängig ①

d) $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig.

$$\sigma = a_1 e_1 + \ldots a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

e) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ sind linear abhängig $\mathbb{R}^2$:

Gesucht sind alle $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Führt auf LGS für a,b,c:

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 6 & 0\\2 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -3 & 6 & 0\\0 & 7 & -10 & 0\end{pmatrix}$$

c ist frei wählbar

f) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ sind linear abhängig in $\mathbb{R}^3$,

10.8b) : $\frac{5}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

0.11 Satz

Seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$

a) $v_1, \ldots, v_m$ sind linear abhängig ①
$\Leftrightarrow \exists i \ldots v_i = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} b_j v_j$②
$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+!}, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$③

b) $v_1, \ldots, v_m$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Jedes $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ lässt sich auf *genau eine* Weise als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$ schreiben.

c) Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig und es existiert $v \in \mathbb{R}^n mit v \neq \langle v_1, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ dann sind auch $v_1, \ldots, v_m, v$ linear unabhängig

Beweis. a) ① $\Rightarrow$ ②
$v_1, \ldots v_m$ sind linear abhängig
$\Rightarrow \exists a_1, \ldots, a_m$ nicht alle $= 0$,
$a_a v_i + \ldots + a_m v_m = 0$
Sei $a_i \neq 0$

$a_i v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} -a_j v_j$

$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} -\frac{a_j}{a_i} v_j$ ②

② ⇒ ③

Klar : $\langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, v_m\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v_1, \dots, v_m\rangle_{\mathbb{R}}$

Zeige ⊇ $\quad v = \langle v_1, \dots, v_m\rangle_{\mathbb{R}}$, d.h

$v = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} a_j v_j + a_i (\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} b_j v_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (a_j + a_i b_j) v_j \in \langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots, v_m\rangle_{\mathbb{R}}$②

③ ⇒ ①

$v_i \in \langle v_1 \dots v_m\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \rangle_{\mathbb{R}}$, dass heißt es existiert

$a_1, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_m \in \mathbb{R}$ mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} a_j v_j$$

$\Rightarrow \sigma = a_1 + v_1 + \ldots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \ldots a_m v_m \qquad v_1 \dots v_m$ linear abhängig □

0.12 Satz

Sind $v_i, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, so

sin $v_i, \dots, v_{n+1}$ linear abhängig.

(Insbesondere ist $m > n$ und $v_i, v_m \in \mathbb{R}^n$, so sind $v_1, \dots, v_m$ linear abhängig)

Beweis. Suche alle $a_1, \dots, an+1 \in \mathbb{R}$ mit $a_i v_1 + \ldots a_{n+1} v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt zu LGS für $a_1, \dots, a_{n+1}$ mit Koeffizientenmatrix $(v_1, \dots, v_2, \dots, v_{n+1}) = A$

Frage : Hat $A \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ nicht triviale Lösung?

Gauß :

$$\left(\mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow\right)$$ □

0.13 Definition

Sei $\mathscr{U}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$
$B \subseteq \mathscr{U}$ heißt Basis von $\mathscr{U}$ falls:

(1) $\langle B\rangle_{\mathbb{R}} = U$

(2) B ist linear unabhängig

($\mathscr{U} = \{\sigma\}, B = \varnothing$)

0.14 Beispiel

a) $e_1, \ldots, e_n$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$ (kanonische Basis)

$$e_1 = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix}a_i\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ist Basis von R^2:

Sei $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in R^2$. Gesucht: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
LGS mit variabler rechter Seite

$$\begin{array}{lll} 1a & +3b & = x \\ 2a & +2b & = y \end{array}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösung: $b = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x \quad a = x - 3b = x + \frac{3}{4}y - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$

z.B $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbb{R}^2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig nach 0.10c)

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ Basis.

c) $\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (0.10c))

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $\mathcal{U}$

0.15 Satz

Jeder Unterraum $\mathcal{U}$ des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Basis.

Beweis. Ist $\mathcal{U} = \{\sigma\}$,so $b = \varnothing$.
Sei also $\mathcal{U} \neq \{\sigma\}$.

v_1 ist linear unabhängig.
$\langle v_1\rangle_\mathbb{R} \subseteq \mathcal{U}$.
Ist $\mathcal{U} = \langle v_1\rangle_\mathbb{R}$, so ist $\{v_1\}$ Basis von $\mathcal{U}$
Ist $\langle v_1\rangle_\mathbb{R} \subsetneq \mathcal{U}$.
Sei $v_2 \in \mathcal{U} \setminus \langle v_1\rangle_\mathbb{R}$.
Nach 0.11c) ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig. Ist $\rangle v_1, v_2\rangle = \mathcal{U}$, so ist $\{v_1.v_2\}$ Basis von $\mathcal{U}$.
Ist $\langle v_1, v_2\rangle_\mathbb{R} \subsetneq U$ so wähle v_3 usw.
Es existiert $m \neq n$ mit $\langle v_1, \dots v_m\rangle_\mathbb{R} = \mathcal{U}$ und $v_1 \dots, v_m$ sind linear unabhängig.
(Denn noch 0.12 gibt es im $\mathbb{R}^n$ keine n+1 linear unabhängige Vektoren) □

0.16 Satz

Je zwei Basen B_1, B_2 eines Unterraums $\mathcal{U}$ des $\mathbb{R}^n$ enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren $|B_1| = |B_2|$.
Insbesondere:
Je zwei Basen des $\mathbb{R}^n$ enthalten n Vektoren

0.17 Definition

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$, B Basis von $\mathcal{U}$, $|B| = m$.
Dann ist m die *Dimension* von $\mathcal{U}$, $\dim(u) = m$.
$\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathcal{U}) \neq n$.

0.18 Satz (Basisergänzungssatz)

Sei $\mathcal{U}$ Unterraum der $\mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathcal{U}$ eine Menge m linear unabhängiger Vektoren. Dann lässt sich M zu einer Basis von $\mathcal{U}$ ergänzen.

Beweis. Analog zu 0.15 □

0.19 Korollar

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $\dim(\mathcal{U}) = n$, dann ist $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

Beweis. Sei B Basis von $\mathscr{U}$, also $|B| = n$.
Nach 0.18 (dort mit $\mathscr{U} = \mathbb{R}^n, M = B$) lässt sich B zu Basis B' von $\mathbb{R}^n$ ergänzen.
$\dim(\mathbb{R}^n) = n \Rightarrow |B'| = n$.
Also B = B'
$\mathbb{R}^n = \langle B' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathscr{U}$ □

0.20 Definition

Ist $\mathscr{U}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$, B = $(u_1 \ldots, u_m)$ eine geordnete Basis von $\mathscr{U}$. Nach 0.11b), lässt sich jeder Vektorraum $\mathscr{U} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$ *eindeutig* als Linearkombination

$$\mathscr{U} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

schreiben.
$(a_1 \ldots, a_m)$ heißen *Koordinaten* von u bzgl. der Basis B.

0.21 Beispiele

a) B$(e_1 \ldots, e_m)$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$.
   Koordinaten von $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ bzgl. B:
   $(a_1 \ldots, a_n)$ *kartesische* Koordinaten. (*Rene Descartes, 1596-1650*)

Anfang des WS 2015/16

1 Algebraische Strukturen

13.10.2015

1.1 Definition

Sei $X \neq \emptyset$. Eine *Verknüpfung* auf X ist :

$$\begin{cases} X \times X & \longrightarrow X \\ (a,b) & \longrightarrow a \star b \end{cases} \text{ ('Produkt' von a und b)}$$

$\star$ ist Platzhalter für andere Verknüpfungssymbole, die in speziellen Beispielen auftreten können.

1.2 Beispiele

a) Addition + und Multiplikation $\cdot$ sind Verknüpfungen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ Multiplikation ist *keine* Verknüpfung auf der Menge der negativen ganzen Zahlen.

b) Division ist keine Verknüpfung auf $\mathbb{N}$. Division ist Verknüpfung auf $\mathbb{Q} \setminus \{Q\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c) $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$
$a \oplus b := (a+b) \mod n \in \mathbb{Z}_n$
$a \odot b := (a \cdot b) \mod n \in \mathbb{Z}_n$
Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}_n$
$n = 7:$ $\quad 5 \odot 6 = 2$
$\quad 5 \oplus 6 = 4$
$n = 2:$ $\quad \mathbb{Z}_n = \{0, 1\}$
$\quad 0 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 = 0$
$\quad \odot = \cdot$

d) M Menge, X = Menge aller Abbildungen $M \longrightarrow M$. Verknüpfung auf X: Hintereinanderausführung von Abbildungen: $\circ$
$(f, g) : M \longrightarrow M$, So $f \circ g : M \rightarrow M$
$(f \circ g)(m) = f(g(m)) \in M, m \in M$
Im Allgemeinen ist $g \circ f \neq f \circ g$

e) $X = \{0,1\}$
2-stellige Aussagen, Junktoren wie $\wedge, \vee$, XOR $, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ heißen Verknüpfungen auf X. 0 entspricht f, 1 entspricht w
$0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 1 = 1$
$0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1$ (= 'Multiplikation')
$0 \text{ XOR } 0 = 0, 1 \text{ XOR } 0 = 1, 0 \text{ XOR } 1 = 1, 1 \text{ XOR } 1 = 0$ (= Addition mod 2)

f) $X = M_n(\mathbb{R})$ = Menge der $n \times n$- Matrizen über $\mathbb{R}$.
Matrizenaddition ist Verknüpfung auf X
Matrizenmultiplikation ist Verknüpfung auf X.

g) M Menge, X, Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus M ('Wörter' über M)
Verknüpfung: Hintereinanderausführung zweier Folgen (Konkatenation)
$M = \{0,1\} w_1 = 1101 w_2 = 001$
$w_1 w_2 = 110111$
$w_2 w_1 = 0011101$

1.3 Definition

Sei $X \neq 0$ eine Menge mit Verknüpfung $\star$.

a) X, genauer $(X, \star)$ ist *Halbgruppe*, falls $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ für alle $a, b, c \in X$. ()*Assoziativgesetz*

b) $(X, \star)$ heißt *Monoid*, falls $(X, \star)$ Halbgruppe ist und ein $e \in X$ existiert mit $e \star a = a$ und $a \star e = a$ für alle $a \in X$. e heißt *neutrales Element* (später, e ist eindeutig bestimmt)

c) Sei $(X, \star)$ ein Monoid. Ein Element $a \in X$ heißt *invertierbar*, falls $b \in X$ existiert (abhängig von a) mit $a \star b = b \star a = e$. b heißt *inverses Element* (das *Inverse*) zu a. (später: wenn b existiert, so ist es eindeutig bestimmt)

d) Monoid $(X, \star)$ heißt *Gruppe*, falls jedes Element in X bezüglich $\star$ invertierbar ist.

e) Halbgruppe, Monoid, Gruppe $(X, \star)$ bezüglich kommutativ (oder *abelsch*) falls $a \star b = b \star a$ für alle $a, b \in X$ (Kommutativgesetz)
(Nach: Abel, 1802-1829)

14.10.2015

Index