

## Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Der Vektorraum <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>3</b>
0.1	Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	4
0.2	Definition . . . . .	5
0.3	Beispiele . . . . .	5
0.4	Satz . . . . .	6
0.5	Beispiel . . . . .	7
0.6	Definition . . . . .	8
0.7	Beispiel . . . . .	9
0.9	Definition . . . . .	11
0.10	Beispiel . . . . .	11
0.11	Satz . . . . .	13
0.12	Satz . . . . .	14
0.13	Definition . . . . .	15
0.14	Beispiel . . . . .	15
0.15	Satz . . . . .	16
0.16	Satz . . . . .	17
0.17	Definition . . . . .	17
0.18	Satz (Basisergänzungssatz) . . . . .	17
0.19	Korollar . . . . .	17
0.20	Definition . . . . .	18
0.21	Beispiele . . . . .	18
<b>1</b>	<b>Algebraische Strukturen</b>	<b>19</b>
1.1	Definition . . . . .	19
1.2	Beispiele . . . . .	19
1.3	Definition . . . . .	20
1.4	Bemerkung . . . . .	21
1.5	Proposition . . . . .	21
1.6	Beispiel . . . . .	22

## Abbildungsverzeichnis

1	Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor . . . . .	4
2	Vektoraddition durch Parallelogrammbildung . . . . .	4
3	Gerade dargestellt durch Vektoren . . . . .	6

# Ende des SS 2015

## 0 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Spaltenvektoren der Länge  $n$  :  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t$

$a_1, \dots, a_n$  Komponente der Spaltenvektoren.

Wie bei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Multiplikation entspricht der Matrix-} \\ \text{multiplikation und ist nicht möglich} \\ \text{falls } n > 1) \end{array}$$

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Zahl (Skalar)

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$$

Addition+Abbildung :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$  mit Addition und Multiplikation mit Skalaren :  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

Die Vektoren im  $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  entsprechen Punkten auf der Zahlengerade, Ebene, dreidimensionalen Raums. Punkte des  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  lassen sich identifizieren mit, Ortsvektoren Pfeile mit Beginn in 0 (Komp = 0) und Ende im entsprechenden Punkt

Addition von Spaltenvektoren entspricht der Addition von Ortsvektoren entsprechend der Parallelogrammregel. Multiplikation mit Skalaren  $a$  :

Streckung (falls  $|a| > 1$ )

Stauchung (falls  $0 \leq |a| \leq 1$ )

Richtungspunkt, falls  $a < 0$

Abbildung 1: Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor

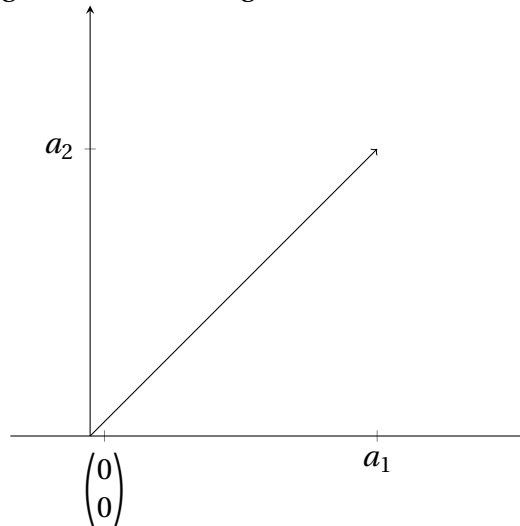
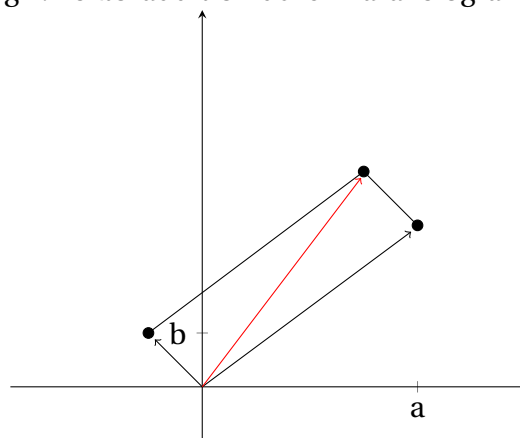


Abbildung 2: Vektoraddition durch Parallelogrammbildung



## 0.1 Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$ )

Seien  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  Dann gilt:

a)

$$(1.1) \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$(1.2) \quad v + 0 = 0 + v = v, \text{ wobei } 0 \text{ Nullvektor}$$

$$(1.3) \quad v + -v = 0$$

$$(1.4) \quad u + v = v + u$$

$$(2.1) \quad (a + b)v = av + bv$$

$$(2.2) \quad a(u + v) = au + av$$

$$(2.3) \quad (a \cdot b)v = a(bv)$$

$$(2.4) \quad 1v = v$$

$\mathbb{R}^n$  kommutative  
Gruppe

b)  $0 \cdot v = 0$  und  $a \cdot 0 = 0$ 

Beweis folgt aus entsprechenden Rechenregeln in 0

## 0.2 Definition

Eine nicht-leere Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Unterraum* (oder *Teilraum* von  $\mathbb{R}^n$ ), falls gilt:

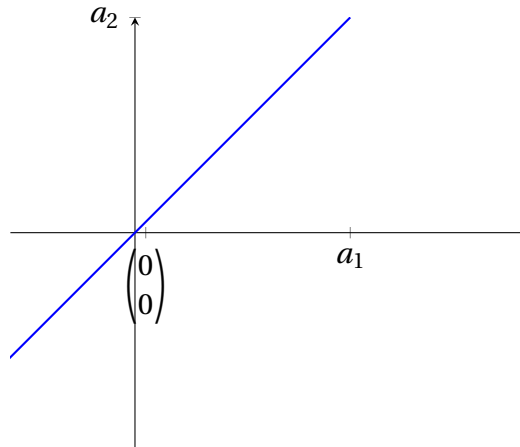
(1)  $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} : u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$  (Abgeschlossenheit bezüglich +)(2)  $\forall u \in \mathcal{U} \forall a \in \mathbb{R} : au \in \mathcal{U}$  (Abgeschlossenheit bezüglich Mult. mit Skalaren) $\mathcal{U}$  enthält Nullvektor  $\{0\}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  (Nullraum) $\mathbb{R}^n$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}$ 

## 0.3 Beispiele

a)  $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$   $G = \{av : a \in \mathbb{R}\}$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^2$  2.1 in 0.2  
 $(a_1 v, a_2 v) \in G, (a_1 + a_2)v \in G$   
 $av \in G, b \in \mathbb{R} (ba)v \in G$

$G =$  Ursprungsgerade durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} n = 2:$

Abbildung 3: Gerade dargestellt durch Vektoren

b)  $v, w \in \mathbb{R}^n$  $E = \{av + bw : a, b \in \mathbb{R}\}$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  $v = o, w = o : E = \{o\}$  $v \neq o \quad w \notin \{av : a \in \mathbb{R}\}$  $E = \mathbb{R}^2 \quad n = 3$ : Ebene durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und durch  $v, w$ Ist  $w \in \{av : a \in \mathbb{R}\}$ , so ist  $E = G$  (aus a))c)  $v, w \neq o$  $G' = \{w + av : a \in \mathbb{R}\}$  $[v \in G' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w + av \in o \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w = (-a)v \in G]$ **0.4 Satz**Seien  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  Unterräume von  $\mathbb{R}^n$ a)  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ b)  $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$  ist im Allgemeinen KEIN Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ c)  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2\}$  (Summe von  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$ ) ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ .

- d)  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$   $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  und  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  ist der kleinste Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , der  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$  enthält. (d.h ist  $w$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in w$ , so  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq w$ )

*Beweis.* a) ✓

b) c)

□

## 0.5 Beispiel

- a) ??b)  $G_1 = \{av : a \in \mathbb{R}\}$

$$G_2 = \{aw : a\}$$

$$G_1 + G_2 = E$$

- b)  $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \right\}$$

$E_1 + E_2$  Unterräume von  $\mathbb{R}^3$  (10.3.b)

$$E_1 \cap E_2 = ?$$

$$v \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = u, t+u = 0, s = u$$

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_1 + E_2 = ?$$

$$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3, \text{ denn :}$$

Es gilt sogar:

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + G_2, \text{ wobei}$$

$$G_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq E_{@}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z - y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ z - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

## 0.6 Definition

a)  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

Dann heißt  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i$

*Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_m$  (mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_m$ ).

[Zwei formal verschiedene Linearkombinationen der gleichen  $v_1, \dots, v_m$  können den gleichen Vektor darstellen

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}]$$

b) Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , so ist der von M *erzeugte* (oder *aufgespannte*) Unterraum  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  (oder  $\langle M \rangle$ ) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann.

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \right\} \text{ falls } M \neq \emptyset$$



$$\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} := \{\emptyset\}$$

$$M = \{v_1, \dots, v_m\}, \text{ so}$$

## 0.7 Beispiel

$$\text{a) } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\text{b) } \mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\text{Ist } \mathcal{U} = \mathbb{R}^3?$$

$$\text{Für welche } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ gibt es geeignete Skalare } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}?$$

$$a + 3b + 2c = x$$

$$2a + 2b + 3c = y$$

$$3a + b + 4c = z$$

LGS für die Unbekannten  $a, b, c$  mit variabler rechter Seite : Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & -4 & -1 & y-2x \\ 0 & -8 & -2 & z-3x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

LGS ist lösbar  $\Leftrightarrow x-2y+z=0$ .

Dass heißt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x-2y+z=0$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x-2y+z=0, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$$

Lösungen des LGS:  $c$  frei wählen,  $b, a$  ergeben sich, (falls  $x-2y+z=0$ ) z.B

$$c=0, b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y, a=x-3b=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y$$

Ist  $x-2y+z=0$ , so ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{rcl} 6x^2 & -3xy & +y^3 = 5 \\ 7x^3 & +3x^2y^2 & -xy = 7 \end{array}$$

## 0.9 Definition

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  heißen *linear abhängig*, falls  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  existieren, *nicht alle*  $= 0$ , mit  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ .

Gibt es solche Skalare nicht, so heißen  $v_1, \dots, v_m$  *linear unabhängig* (d.h. aus  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$  folgt  $a_1 = \dots = a_n = 0$ ).

(Entsprechend  $\{v_1 \dots v_n\}$  linear abhängig/linear unabhängig)

Per Definition :  $\emptyset$  ist linear unabhängig.

## 0.10 Beispiel

a)  $\sigma + v \in \mathbb{R}^n$  Dann ist  $v$  linear unabhängig:

Zu zeigen : Ist  $av = \sigma \Rightarrow a = 0$

Sei  $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  Da  $v \neq \sigma$ ,

existiert mindestens ein  $i$  mit  $b_i \neq 0$ .

Angenommen  $\sigma v = \begin{pmatrix} 0b_1 \\ \vdots \\ 0b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma$ .

Dann  $ab_i = 0$  Da  $b_i \neq 0$ , folgt  $a = 0$ .

$\sigma$  ist linear abhängig:

$$1 \cdot \sigma = \sigma$$

b)  $v_1 = \sigma, v_2, \dots, v_m$  ist linear abhängig :

$$\sigma = 1 \cdot \sigma + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_m$$

c)  $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v \neq \sigma \neq w$$

$v, w$  sind linear  
① abhängig  $\Leftrightarrow$

$$\textcircled{2} v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$$

$$\textcircled{3} w \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$$

$$\textcircled{4} \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$$

①

$v, w$  linear abhängig  $\rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , nicht beide  $= 0$ ,  $a_1 v + a_2 w = \sigma$ . Dann beide  $(a_1, a_2) \neq 0$

$$a_1 v = -a_2 w \mid \cdot \frac{1}{a_1}$$

$$v = -\frac{-a_2}{-a_1} w \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{2}$$

②

$v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$  dass heißt  $v = aw$  für ein  $a \in \mathbb{R}$  Dann  $a \neq 0$ , da  $v \neq \sigma$ .  $w = \frac{1}{a} \cdot v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{3}$

③

$w = bv$  für ein  $b \in \mathbb{R} b \neq 0$ , da  $w \neq \sigma$ .

$$aw \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow aW = (ab)v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\langle w \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$w = \frac{1}{b} w \text{ Dann analog } \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\text{Also } \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{4}$$

④

$v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ , dass heißt.

$v = a \cdot w$  für ein  $a \in \mathbb{R}$

$a \cdot v + (-a)w = \sigma \Rightarrow v, w$  sind linear abhängig ①

$$\text{d) } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$e_1, \dots, e_n$  sind linear unabhängig.

$$\sigma = a_1 e_1 + \dots a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

e)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig  $\mathbb{R}^2$ :

Gesucht sind alle  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt auf LGS für a,b,c:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$c$  ist frei wählbar

f)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig in  $\mathbb{R}^3$ ,

$$10.8b) : \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 0.11 Satz

Seien  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

a)  $v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig ①

$$\Leftrightarrow \exists i \dots v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \text{ ②}$$

$$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \text{ ③}$$

b)  $v_1, \dots, v_m$  sind linear unabhängig  $\Leftrightarrow$  Jedes  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$  lässt sich auf *genau eine* Weise als Linearkombination von  $v_1, \dots, v_m$  schreiben.

c) Sind  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig und es existiert  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$  dann sind auch  $v_1, \dots, v_m, v$  linear unabhängig

*Beweis.* a) ①  $\Rightarrow$  ②

$v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig

$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m$  nicht alle  $= 0$ ,

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

Sei  $a_i \neq 0$

$$a_i v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m -a_j v_j$$

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m -\frac{a_j}{a_i} v_j \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Klar:  $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$

Zeige  $\supseteq$   $v = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ , d.h.

$$v = \sum_{j=1}^m a_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_j v_j + a_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (a_j + a_i b_j) v_j \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \quad (2)$$

$$(3) \Rightarrow (1)$$

$v_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ , dass heißt es existiert

$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_j v_j$$

$\Rightarrow \sigma = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_m v_m$   $v_1, \dots, v_m$  linear abhängig □

## 0.12 Satz

Sind  $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ , so

$v_1, \dots, v_{n+1}$  linear abhängig.

(Insbesondere ist  $m > n$  und  $v_i, v_m \in \mathbb{R}^n$ , so sind  $v_1, \dots, v_m$  linear abhängig)

*Beweis.* Suche alle  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$  mit  $a_1 v_1 + \dots + a_{n+1} v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt zu LGS für  $a_1, \dots, a_{n+1}$  mit Koeffizientenmatrix  $(v_1, \dots, v_{n+1}) = A$

Frage: Hat  $A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  nicht triviale Lösung?

Gauß:

$$\left( \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \right)$$

□

### 0.13 Definition

Sei  $\mathcal{U}$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$

$B \subseteq \mathcal{U}$  heißt Basis von  $\mathcal{U}$  falls:

(1)  $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$

(2)  $B$  ist linear unabhängig

( $\mathcal{U} = \{\sigma\}, B = \emptyset$ )

### 0.14 Beispiel

a)  $e_1, \dots, e_n$  ist Basis von  $\mathbb{R}^n$  (kanonische Basis)

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist Basis von  $\mathbb{R}^2$ :

Sei  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Gesucht:  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

LGS mit variabler rechter Seite

$$\begin{array}{rcl} 1a & +3b & = x \\ 2a & +2b & = y \end{array}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösung:  $b = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x$   $a = x - 3b = x + \frac{3}{4}y - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig nach 0.10c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis.}$$

$$\text{c) } \mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  linear unabhängig (0.10c))

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis von } \mathcal{U}$$

### 0.15 Satz

Jeder Unterraum  $\mathcal{U}$  des  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine Basis.

*Beweis.* Ist  $\mathcal{U} = \{\sigma\}$ , so  $b = \emptyset$ .

Sei also  $\mathcal{U} \neq \{\sigma\}$ .



$v_1$  ist linear unabhängig.

$\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{U}$ .

Ist  $\mathcal{U} = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ , so ist  $\{v_1\}$  Basis von  $\mathcal{U}$

Ist  $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$ .

Sei  $v_2 \in \mathcal{U} \setminus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ .

Nach 0.11c) ist  $\{v_1, v_2\}$  linear unabhängig. Ist  $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{U}$ , so ist  $\{v_1, v_2\}$  Basis von  $\mathcal{U}$ .

Ist  $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$  so wähle  $v_3$  usw.

Es existiert  $m \neq n$  mit  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$  und  $v_1, \dots, v_m$  sind linear unabhängig.

(Denn noch 0.12 gibt es im  $\mathbb{R}^n$  keine  $n+1$  linear unabhängige Vektoren)  $\square$

## 0.16 Satz

Je zwei Basen  $B_1, B_2$  eines Unterraums  $\mathcal{U}$  des  $\mathbb{R}^n$  enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren  $|B_1| = |B_2|$ .

Insbesondere:

Je zwei Basen des  $\mathbb{R}^n$  enthalten  $n$  Vektoren

## 0.17 Definition

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  Basis von  $\mathcal{U}$ ,  $|B| = m$ .

Dann ist  $m$  die *Dimension* von  $\mathcal{U}$ ,  $\dim(\mathcal{U}) = m$ .

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ ,  $\dim(\mathcal{U}) \neq n$ .

## 0.18 Satz (Basisergänzungssatz)

Sei  $\mathcal{U}$  Unterraum der  $\mathbb{R}^n$ ,  $M \subseteq \mathcal{U}$  eine Menge  $m$  linear unabhängiger Vektoren.

Dann lässt sich  $M$  zu einer Basis von  $\mathcal{U}$  ergänzen.

*Beweis.* Analog zu 0.15  $\square$

## 0.19 Korollar

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und  $\dim(\mathcal{U}) = n$ , dann ist  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

*Beweis.* Sei  $B$  Basis von  $\mathcal{U}$ , also  $|B| = n$ .

Nach 0.18 (dort mit  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ ,  $M = B$ ) lässt sich  $B$  zu Basis  $B'$  von  $\mathbb{R}^n$  ergänzen.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \Rightarrow |B'| = n.$$

Also  $B = B'$

$$\mathbb{R}^n = \langle B' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$$

□

## 0.20 Definition

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = (u_1 \dots, u_m)$  eine geordnete Basis von  $\mathcal{U}$ . Nach 0.11b), lässt sich jeder Vektorraum  $\mathcal{U} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$  *eindeutig* als Linearkombination

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^m a_i u_i \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

schreiben.

$(a_1 \dots, a_m)$  heißen *Koordinaten* von  $u$  bzgl. der Basis  $B$ .

## 0.21 Beispiele

a)  $B(e_1 \dots, e_m)$  kanonische Basis von  $\mathbb{R}^n$ .

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  bzgl.  $B$ :

$(a_1 \dots, a_n)$  *kartesische* Koordinaten.

(Rene Descartes, 1596-1650)

# Anfang des WS 2015/16

## 1 Algebraische Strukturen

13.10.2015

### 1.1 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$ . Eine *Verknüpfung* auf  $X$  ist :

$$\begin{cases} X \times X & \longrightarrow X \\ (a, b) & \longrightarrow a \star b \end{cases} \quad (\text{'Produkt' von a und b})$$

$\star$  ist Platzhalter für andere Verknüpfungssymbole, die in speziellen Beispielen auftreten können.

### 1.2 Beispiele

a) Addition  $+$  und Multiplikation  $\cdot$  sind Verknüpfungen auf  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Multiplikation ist *keine* Verknüpfung auf der Menge der negativen ganzen Zahlen.

b) Division ist keine Verknüpfung auf  $\mathbb{N}$ . Division ist Verknüpfung auf  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c)  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$a \oplus b := (a + b) \bmod n \quad n \in \mathbb{Z}_n$$

$$a \odot b := (a \cdot b) \bmod n \quad n \in \mathbb{Z}_n$$

Verknüpfungen auf  $\mathbb{Z}_n$

$$n = 7: \quad 5 \odot 6 = 2$$

$$5 \oplus 6 = 4$$

$$n = 2: \quad \mathbb{Z}_n = \{0, 1\}$$

$$0 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 = 0$$

$$\odot = \cdot$$

d)  $M$  Menge,  $X =$  Menge aller Abbildungen  $M \longrightarrow M$ . Verknüpfung auf  $X$ : Hintereinanderausführung von Abbildungen:  $\circ$

$$(f, g): M \longrightarrow M, \text{ So } f \circ g: M \rightarrow M$$

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) \in M, m \in M$$

Im Allgemeinen ist  $g \circ f \neq f \circ g$

e)  $X = \{0, 1\}$

2-stellige Aussagen, Junktoren wie  $\wedge, \vee, \text{XOR}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  heißen Verknüpfungen auf  $X$ . 0 entspricht f, 1 entspricht w

$$0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 1 = 1$$

$$0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1 \quad (= \text{'Multiplikation'})$$

$$0 \text{ XOR } 0 = 0, 1 \text{ XOR } 0 = 1, 0 \text{ XOR } 1 = 1, 1 \text{ XOR } 1 = 0 \quad (= \text{Addition mod } 2)$$

f)  $X = M_n(\mathbb{R}) =$  Menge der  $n \times n$ - Matrizen über  $\mathbb{R}$ .

Matrizenaddition ist Verknüpfung auf  $X$

Matrizenmultiplikation ist Verknüpfung auf  $X$ .

g)  $M$  Menge,  $X$ , Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus  $M$  ('Wörter' über  $M$ )

Verknüpfung: Hintereinanderausführung zweier Folgen (Konkatenation)

$$M = \{0, 1\} w_1 = 1101 w_2 = 001$$

$$w_1 w_2 = 110111$$

$$w_2 w_1 = 0011101$$

### 1.3 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge mit Verknüpfung  $\star$ .

a)  $X$ , genauer  $(X, \star)$  ist *Halbgruppe*, falls  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$  für alle  $a, b, c \in X$ .  
(Assoziativgesetz)

b)  $(X, \star)$  heißt *Monoid*, falls  $(X, \star)$  Halbgruppe ist und ein  $e \in X$  existiert mit  $e \star a = a$  und  $a \star e = a$  für alle  $a \in X$ .  $e$  heißt *neutrales Element* (später,  $e$  ist eindeutig bestimmt)

c) Sei  $(X, \star)$  ein Monoid. Ein Element  $a \in X$  heißt *invertierbar*, falls  $b \in X$  existiert (abhängig von  $a$ ) mit  $a \star b = b \star a = e$ .  $b$  heißt *inverses Element* (das *Inverse*) zu  $a$ . (später: wenn  $b$  existiert, so ist es eindeutig bestimmt)

d) Monoid  $(X, \star)$  heißt *Gruppe*, falls jedes Element in  $X$  bezüglich  $\star$  invertierbar ist.

- e) Halbgruppe, Monoid, Gruppe  $(X, \star)$  bezüglich kommutativ (oder *abelsch*) falls  $a \star b = b \star a$  für alle  $a, b \in X$  (Kommutativgesetz)  
(Nach: Abel, 1802-1829)

14.10.2015

## 1.4 Bemerkung

In Halbgruppe liefert jede sinnvolle Klammerung eines Produktes mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element.

(n = 4)

$$(a \star (b \star c)) \star d \underset{\text{AG}^1}{=} ((a \star b) \star c) \star d \underset{\text{AG}^1}{=} (a \star b) \star (c \star d) \underset{\text{AG}^1}{=} a \star (b \star (c \star d)) \underset{\text{AG}^1}{=} a \star ((b \star c) \star d)$$

Klammern werden daher meist weggelassen

$$a^n = a \underset{n \in \mathbb{R}}{\overset{\leftarrow n}{\star} \dots \star \overset{\rightarrow n}{a}} \text{ "Potenzen eindeutig definiert"}$$

## 1.5 Proposition

- a) In einem Monoid  $(X, \star)$  ist das neutrale Element eindeutig bestimmt
- b) Ist  $(X, \star)$  Monoid und ist  $a \in X$  invertierbar, so ist das Inverse zu  $a$  eindeutig bestimmt. Bezeichnung:  $a^{-1}$
- c) Ist  $(X, \star)$  Monoid und wenn  $a, b \in X$  invertierbar sind, so auch  $a \star b$ .  
 $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$
- d) Die Menge der invertierbaren Elemente in einem Monoid  $(X, \star)$  bilden bezüglich  $\star$  eine Gruppe.

*Beweis.* a) Angenommen:  $e_1, e_2$  sind neutrale Elemente. Dann:

$$e_1 = e_1 \star e_2 = e_1 \star e_2 = e_2 \quad \nexists$$

---

<sup>1</sup>Assoziativgesetz

b) Angenommen  $a$  hat 2 inverse Elemente  $b_1, b_2$  also.

$$\begin{aligned} a \star b_1 &= e, b_2 \star a = e \\ b_1 &= e \star b_1 = (b_2 \star a) \star b_1 = b_2 \star (a \star b_1) = b_2 \star e = b_2 \quad \neq \end{aligned}$$

c)

$$(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = a \star (b \star b^{-1}) \star a^{-1} = a \star e \star a^{-1} = e$$

Analog:  $(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = e$

Also:  $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$

d)  $\mathcal{I}$  = Menge der inversen Elemente in  $(X, \star)$ ,

$e \in \mathcal{I}$ , dann  $e \star e = e$ , dass heißt  $e^{-1} = e$ ,  $\star$  ist Verknüpfung auf  $\mathcal{I}$ . Zu zeigen:  
 $a, b \in \mathcal{I} \Rightarrow a \star b \in \mathcal{I}$  Folgt aus c).

Assoziativgesetz gilt in  $\mathcal{I}$ ,  $a \in \mathcal{I} \Rightarrow a^{-1} \in \mathcal{I}$ , denn  $(a^{-1})^{-1} = a$  □

*Bemerkung:* Multiplikation mit  $a^{-1}$  macht Multiplikation mit  $a$  (Verknüpfung) rückgängig.

## 1.6 Beispiel

a)  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Halbgruppen bezüglich  $+$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind bezüglich  $+$  Monoide mit neutralen Element 0.

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  ist kein Monoid bezüglich  $+$ , aber  $\mathbb{N}_0$ .

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Gruppen bezüglich  $+$ . Inverses Element zu  $a$ :  $-a$

$\mathbb{N}$  ist keine Gruppe bezüglich  $+$ , Inverse Elemente in  $\mathbb{N}_0$ :  $\{0\}$ ,

b)  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Monoide bezüglich  $\cdot$  (neutrales Element 1). Keine Gruppen  
 (in  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ist 0 nicht invertierbar).

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$  Gruppen.

Invertierbare Elemente in  $\mathbb{Z}$ :  $\{1, -1\}$   $\leftarrow$  Gruppe bezüglich  $\cdot$   
↑  
Eigenes Inverses

c)  $M$  Menge.

$X$  = Menge aller Abbildungen  $M \longrightarrow M$  mit Hintereinanderausführung  $\circ$  als

Verknüpfung.

Monoid, neutrales Element.  $id_M$

$$f \circ id_M = f = id_M \circ f$$

$$id_M(m) = m \text{ für alle } m \in M.$$

Invertierbar sind genau die bijektiven Abbildungen  $M \longrightarrow M$ , Inverse = Umkehrabbildung.

$f : M \longrightarrow M$  bijektiv

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$$

‘Proposition’ on page 21 d): Die bijektiven Abbildung,  $M \longrightarrow M$  bilden bezüglich  $\circ$  eine Gruppe

## **Index**

Abbildung, 19

abelsch, 21

Assoziativgesetz, 20

Gruppe, 20

Halbgruppe, 20

Inverse, 20

inverses Element, 20

invertierbar, 20

Komponente, 3

Konkatenation, 20

Matrixmultiplikation, 3

Matrizenaddition, 20

Matrizenmultiplikation, 20

Monoid, 20

neutrales Element, 20

Ortsvektoren, 3

Parallelogrammregel, 3

Spaltenvektoren, 3

Vektor, 4

Vektorraum, 3

Verknüpfung, 19

Verknüpfungssymbole, 19

Zahlengerade, 3