

## Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Der Vektorraum <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>6</b>
0.1	Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	7
0.2	Definition . . . . .	8
0.3	Beispiele . . . . .	8
0.4	Satz . . . . .	9
0.5	Beispiel . . . . .	10
0.6	Definition . . . . .	11
0.7	Beispiel . . . . .	12
0.9	Definition . . . . .	14
0.10	Beispiel . . . . .	14
0.11	Satz . . . . .	16
0.12	Satz . . . . .	17
0.13	Definition . . . . .	18
0.14	Beispiel . . . . .	18
0.15	Satz . . . . .	19
0.16	Satz . . . . .	20
0.17	Definition . . . . .	20
0.18	Satz (Basisergänzungssatz) . . . . .	20
0.19	Korollar . . . . .	20
0.20	Definition . . . . .	21
0.21	Beispiele . . . . .	21
<b>1</b>	<b>Algebraische Strukturen</b>	<b>22</b>
1.1	Definition . . . . .	22
1.2	Beispiele . . . . .	22
1.3	Definition . . . . .	23
1.4	Bemerkung . . . . .	24
1.5	Proposition . . . . .	24
1.6	Beispiel . . . . .	25
1.7	Satz . . . . .	27
1.8	Beispiel . . . . .	28

1.9 Beispiel . . . . .	28
1.10 Satz (Gleichungslösen in Gruppen) . . . . .	29
1.11 Beispiel . . . . .	29
1.12 Definition . . . . .	29
1.13 Beispiele . . . . .	30
1.14 Proposition . . . . .	31
1.15 Bemerkung . . . . .	31
1.16 Definition . . . . .	31
1.17 Beispiel . . . . .	32
1.18 Proposition (Nullteilerfreiheit in Körpern) . . . . .	32
1.19 Definition . . . . .	32
1.20 Satz und Definition . . . . .	33
1.21 Bemerkung . . . . .	33
1.22 Definition . . . . .	34
1.23 Satz . . . . .	34
1.24 Korollar . . . . .	34
1.25 Bemerkung . . . . .	35
1.26 Definition . . . . .	36
1.27 Satz . . . . .	36
1.28 Beispiel . . . . .	37
1.29 Korollar . . . . .	37
1.30 Definition . . . . .	38
1.31 Beispiel . . . . .	38
1.32 Satz . . . . .	38
1.33 Korollar . . . . .	39
1.34 Bemerkung . . . . .	39
1.35 Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	40
<b>2 Vektorräume</b>	<b>40</b>
2.1 Definition . . . . .	40
2.2 Beispiel . . . . .	40
2.3 Proposition . . . . .	42
2.4 Definition . . . . .	42

2.5 Proposition . . . . .	42
2.6 Beispiel . . . . .	43
2.7 Proposition . . . . .	43
2.8 Definition . . . . .	43
2.9 Satz . . . . .	44
2.10 Definition . . . . .	44
2.11 Beispiel . . . . .	44
2.12 Definition . . . . .	45
2.13 Beispiel . . . . .	45
2.14 Bemerkung . . . . .	47
2.15 Satz !!! . . . . .	47
2.16 Definition . . . . .	47
2.17 Beispiel . . . . .	48
2.18 Satz (Existenz von Basen) . . . . .	49
2.19 Lemma . . . . .	49
2.20 Satz (Austauschsatz von Steinitz) . . . . .	50
2.21 Korollar . . . . .	51
2.22 Satz . . . . .	51
2.23 Definition . . . . .	52
2.24 Korollar . . . . .	52
2.25 Beispiel . . . . .	52
2.26 Satz . . . . .	54
2.27 Definition . . . . .	54
2.28 Beispiel . . . . .	54
2.29 Definition . . . . .	56
2.30 Satz . . . . .	56
2.31 Bemerkung . . . . .	57
2.32 Bemerkung . . . . .	57
2.33 Satz . . . . .	58
2.34 Beispiel . . . . .	59
<b>3 Lineare Abbildungen</b>	<b>59</b>
3.1 Definition . . . . .	59

3.2	Bemerkung . . . . .	60
3.3	Beispiel . . . . .	60
3.4	Satz . . . . .	61
3.5	Satz . . . . .	62
3.6	Satz . . . . .	63
3.7	Definition . . . . .	63
3.8	Satz . . . . .	64
3.9	Beispiel . . . . .	65
3.10	Satz . . . . .	66
3.11	Beispiel . . . . .	67
3.12	Satz . . . . .	67
3.13	Korollar . . . . .	68
3.14	Korollar – Wichtigster Spezialfall . . . . .	68
3.15	Satz (Dimensionsformel) . . . . .	68
3.16	Korollar . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Der Rang einer Matrix und lineare Gleichungssysteme</b>	<b>70</b>
4.1	Definition . . . . .	70
4.2	Satz . . . . .	70
4.3	Bemerkung . . . . .	70
4.4	Korollar . . . . .	71
4.5	Satz . . . . .	71
4.6	Satz und Definition . . . . .	72
4.7	Korollar . . . . .	72
4.8	Satz . . . . .	72
4.9	Beispiel . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Matrizen und lineare Abbildungen</b>	<b>73</b>
5.1	Definition . . . . .	73
5.2	Bemerkung . . . . .	74
5.3	Beispiel . . . . .	74
5.4	Satz . . . . .	75
5.5	Beispiel . . . . .	75
5.6	Korollar . . . . .	76

5.7 Satz . . . . .	76
5.8 Beispiel . . . . .	77
5.9 Definition . . . . .	77
5.10 Korollar . . . . .	78
5.11 Satz . . . . .	78
5.12 Lemma . . . . .	78
5.13 Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix (Gauß-Jordan- Verfahren) . . . . .	79
5.14 Beispiel . . . . .	79
5.15 Bemerkung . . . . .	80
5.16 Definition . . . . .	80
5.17 Satz . . . . .	80
5.18 Satz . . . . .	81
5.19 Beispiel . . . . .	81
5.20 Satz . . . . .	81
5.21 Korollar . . . . .	82
5.22 Beispiel . . . . .	82

## Abbildungsverzeichnis

1 Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor . . . . .	7
2 Vektoraddition durch Parallelogrammbildung . . . . .	7
3 Gerade dargestellt durch Vektoren . . . . .	9
4 Eindimensionale Unterräume im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	55

# Ende des SS 2015

## 0 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Spaltenvektoren der Länge } n : \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t$$

$a_1, \dots, a_n$  Komponente der Spaltenvektoren.

Wie bei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Multiplikation entspricht der Matri-} \\ \text{zenmultiplikation und ist nicht mög-} \\ \text{lich falls } n > 1) \end{array}$$

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Zahl (*Skalar*)

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$$

Addition+Abbildung :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$  mit Addition und Multiplikation mit Skalaren :  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

Die Vektoren im  $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  entsprechen Punkten auf der Zahlengerade, Ebene, dreidimensionalen Raums. Punkte des  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  lassen sich identifizieren mit, *Ortsvektoren* Pfeile mit Beginn in 0 (Komp = 0) und Ende im entsprechenden Punkt

Addition von Spaltenvektoren entspricht der Addition von Ortsvektoren entsprechend der Parallelogrammregel. Multiplikation mit Skalaren a :

Streckung (falls  $|a| > 1$ )

Stauchung (falls  $0 \leq |a| < 1$ )

Richtungspunkt, falls  $a < 0$

Abbildung 1: Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor

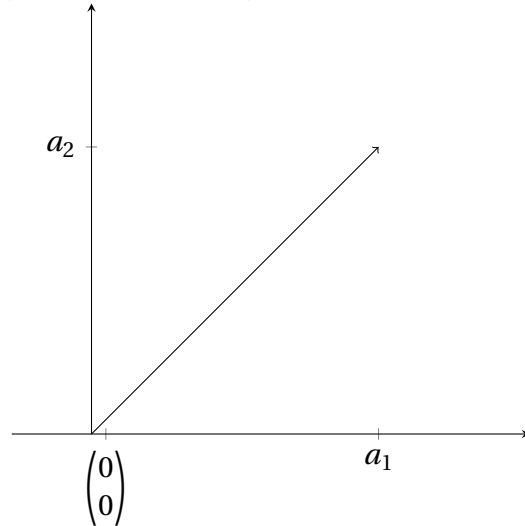
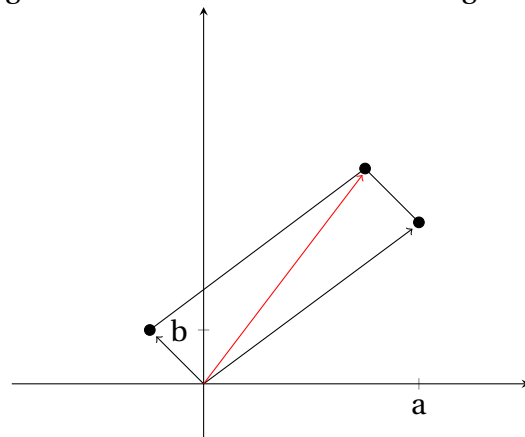


Abbildung 2: Vektoraddition durch Parallelogrammbildung



## 0.1 Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$ )

Seien  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  Dann gilt:

a)

$$(1.1) \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$(1.2) \quad v + 0 = 0 + v = v, \text{ wobei } 0 \text{ Nullvektor}$$

$$\mathbb{R}^n \text{ kommutative} \quad (1.3) \quad v + -v = 0$$

$$\text{Gruppe} \quad (1.4) \quad u + v = v + u$$

$$(2.1) \quad (a + b)v = av + bv$$

$$(2.2) \quad a(u + v) = au + av$$

$$(2.3) \quad (a \cdot b)v = a(bv)$$

$$(2.4) \quad 1v = v$$

b)  $0 \cdot v = 0$  und  $a \cdot 0 = 0$ Beweis folgt aus entsprechenden Rechenregeln in  $\mathbb{R}$ 

## 0.2 Definition

Eine nicht-leere Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Unterraum* (oder *Teilraum* von  $\mathbb{R}^n$ ), falls gilt:

(1)  $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} : u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$  (Abgeschlossenheit bezüglich +)

(2)  $\forall u \in \mathcal{U} \forall a \in \mathbb{R} : au \in \mathcal{U}$  (Abgeschlossenheit bezüglich Mult. mit Skalaren)

$\mathcal{U}$  enthält Nullvektor  $\{0\}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  (Nullraum)

$\mathbb{R}^n$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}$

## 0.3 Beispiele

a)  $0 \neq v \in \mathbb{R}^2 \quad G = \{av : a \in \mathbb{R}\}$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^2$

$$(a_1 v, a_2 v \in G, (a_1 +$$

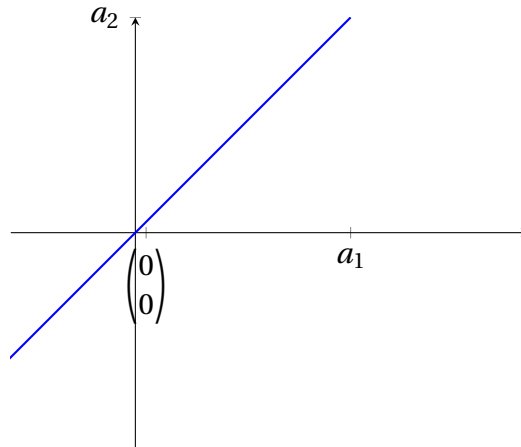
$$a_2)v \in G \quad 2.1 \text{ in } 0.2$$

$$av \in G, b \in \mathbb{R} (ba)v \in G)$$

$$G = \text{Ursprungsgerade durch } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} n = 2:$$



Abbildung 3: Gerade dargestellt durch Vektoren

b)  $v, w \in \mathbb{R}^n$  $E = \{av + bw : a, b \in \mathbb{R}\}$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  $v = o, w = o : E = \{o\}$  $v \neq o \quad w \notin \{av : a \in \mathbb{R}\}$  $E = \mathbb{R}^2 \quad n = 3 : \text{Ebene durch } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und durch } v, w$ Ist  $w \in \{av : a \in \mathbb{R}\}$ , so ist  $E = G$  (aus a))c)  $v, w \neq o$  $G' = \{w + av : a \in \mathbb{R}\}$  $[v \in G' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w + av = o \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w = (-a)v \in G]$ **0.4 Satz**Seien  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  Unterräume von  $\mathbb{R}^n$ a)  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ b)  $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$  ist im Allgemeinen KEIN Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ c)  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2\}$  (Summe von  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$ ) ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ .

- d)  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$   $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  und  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  ist der kleinste Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , der  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$  enthält. (d.h ist  $w$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in w$ , so  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq w$ )

*Beweis.* a) ✓

b) c)

□

## 0.5 Beispiel

- a) ??b)  $G_1 = \{av : a \in \mathbb{R}\}$

$$G_2 = \{aw : a\}$$

$$G_1 + G_2 = E$$

- b)  $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \right\}$$

$E_1 + E_2$  Unterräume von  $\mathbb{R}^3$  (10.3.b)

$$E_1 \cap E_2 = ?$$

$$v \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = u, t+u = 0, s = u$$

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_1 + E_2 = ?$$

$$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3, \text{ denn :}$$

Es gilt sogar:

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + G_2, \text{ wobei}$$

$$G_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq E_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z - y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ z - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

## 0.6 Definition

a)  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

Dann heißt  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i$

*Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_m$  (mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_m$ ).

[Zwei formal verschiedene Linearkombinationen der gleichen  $v_1, \dots, v_m$  können den gleichen Vektor darstellen

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}]$$

b) Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , so ist der von M *erzeugte* (oder *aufgespannte*) Unterraum  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  (oder  $\langle M \rangle$ ) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann.

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \right\} \text{ falls } M \neq \emptyset$$

$$\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} := \{\emptyset\}$$

$$M = \{v_1, \dots, v_m\}, \text{ so}$$

## 0.7 Beispiel

$$\text{a) } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ (at position } i) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\text{b) } \mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

Ist  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ ?

Für welche  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  gibt es geeignete Skalare  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} +$

$$c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}?$$

$$a + 3b + 2c = x$$

$$2a + 2b + 3c = y$$

$$3a + b + 4c = z$$

LGS für die Unbekannten  $a, b, c$  mit variabler rechter Seite : Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & -4 & -1 & y-2x \\ 0 & -8 & -2 & z-3x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

LGS ist lösbar  $\Leftrightarrow x-2y+z=0$ .

Dass heißt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x-2y+z=0$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x-2y+z=0, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$$

Lösungen des LGS:  $c$  frei wählen,  $b, a$  ergeben sich, (falls  $x-2y+z=0$ ) z.B.

$$c=0, b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y, a=x-3b=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y$$

Ist  $x-2y+z=0$ , so ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{rrcr} 6x^2 & -3xy & +y^3 & =5 \\ 7x^3 & +3x^2y^2 & -xy & =7 \end{array}$$

**0.9 Definition**

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  heißen *linear abhängig*, falls  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  existieren, *nicht alle*  $= 0$ , mit  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ .

Gibt es solche Skalare nicht, so heißen  $v_1, \dots, v_m$  *linear unabhängig* (d.h. aus  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$  folgt  $a_1 = \dots = a_n = 0$ ).

(Entsprechend  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linear abhängig/linear unabhängig)

Per Definition :  $\emptyset$  ist linear unabhängig.

**0.10 Beispiel**

a)  $\sigma + v \in \mathbb{R}^n$  Dann ist  $v$  linear unabhängig:

Zu zeigen : Ist  $av = \sigma \Rightarrow a = 0$

Sei  $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  Da  $v \neq \sigma$ ,

existiert mindestens ein  $i$  mit  $b_i \neq 0$ .

Angenommen  $\sigma v = \begin{pmatrix} 0b_1 \\ \vdots \\ 0b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma$ .

Dann  $ab_i = 0$  Da  $b_i \neq 0$ , folgt  $a = 0$ .

$\sigma$  ist linear abhängig:

$$1 \cdot \sigma = \sigma$$

b)  $v_1 = \sigma, v_2, \dots, v_m$  ist linear abhängig :

$$\sigma = 1 \cdot \sigma + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_m$$

c)  $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v \neq \sigma \neq w$$

$v, w$  sind linear

① abhängig  $\Leftrightarrow$

②  $v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$

③  $w \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$

④  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$

①

$v, w$  linear abhängig  $\rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , nicht beide  $= 0$ ,  $a_1 v + a_2 w = \sigma$ . Dann beide  $(a_1, a_2) \neq 0$

$$a_1 v = -a_2 w \mid \cdot \frac{1}{a_1}$$

$$v = -\frac{-a_2}{-a_1} w \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{2}$$

②

$v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$  dass heißt  $v = aw$  für ein  $a \in \mathbb{R}$  Dann  $a \neq 0$ , da  $v \neq \sigma$ .  $w = \frac{1}{a} \cdot v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{3}$

③

$w = bv$  für ein  $b \in \mathbb{R} b \neq 0$ , da  $w \neq \sigma$ .

$$aw \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow aW = (ab)v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\langle w \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$$

$w = \frac{1}{b} w$  Dann analog  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\text{Also } \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{4}$$

④

$v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ , dass heißt.

$v = a \cdot w$  für ein  $a \in \mathbb{R}$

$a \cdot v + (-a)w = \sigma \Rightarrow v, w$  sind linear abhängig ①

$$\text{d) } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$e_1, \dots, e_n$  sind linear unabhängig.

$$\sigma = a_1 e_1 + \dots a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

e)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig  $\mathbb{R}^2$ :

Gesucht sind alle  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt auf LGS für a,b,c:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$c$  ist frei wählbar

f)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig in  $\mathbb{R}^3$ ,

$$10.8b) : \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 0.11 Satz

Seien  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

a)  $v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig ①

$$\Leftrightarrow \exists i \dots v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \text{ ②}$$

$$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \text{ ③}$$

b)  $v_1, \dots, v_m$  sind linear unabhängig  $\Leftrightarrow$  Jedes  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$  lässt sich auf *genau eine* Weise als Linearkombination von  $v_1, \dots, v_m$  schreiben.

c) Sind  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig und es existiert  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$  dann sind auch  $v_1, \dots, v_m, v$  linear unabhängig

*Beweis.* a) ①  $\Rightarrow$  ②

$v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig

$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m$  nicht alle  $= 0$ ,

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

Sei  $a_i \neq 0$



$$a_i v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m -a_j v_j$$

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m -\frac{a_j}{a_i} v_j \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$$

Klar:  $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$

Zeige  $\supseteq$   $v = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ , d.h.

$$v = \sum_{j=1}^m a_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_j v_j + a_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (a_j + a_i b_j) v_j \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$$

$v_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ , dass heißt es existiert

$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_j v_j$$

$\Rightarrow \sigma = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_m v_m$   $v_1, \dots, v_m$  linear abhängig □

## 0.12 Satz

Sind  $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ , so

$v_1, \dots, v_{n+1}$  linear abhängig.

(Insbesondere ist  $m > n$  und  $v_i, v_m \in \mathbb{R}^n$ , so sind  $v_1, \dots, v_m$  linear abhängig)

*Beweis.* Suche alle  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$  mit  $a_1 v_1 + \dots + a_{n+1} v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt zu LGS für  $a_1, \dots, a_{n+1}$  mit Koeffizientenmatrix  $(v_1, \dots, v_{n+1}) = A$

Frage: Hat  $A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  nicht triviale Lösung?

Gauß:

$$\left( \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \right)$$

□

### 0.13 Definition

Sei  $\mathcal{U}$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$

$B \subseteq \mathcal{U}$  heißt Basis von  $\mathcal{U}$  falls:

(1)  $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$

(2)  $B$  ist linear unabhängig

( $\mathcal{U} = \{\sigma\}, B = \emptyset$ )

### 0.14 Beispiel

a)  $e_1, \dots, e_n$  ist Basis von  $\mathbb{R}^n$  (kanonische Basis)

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist Basis von  $\mathbb{R}^2$ :

Sei  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Gesucht:  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

LGS mit variabler rechter Seite

$$1a + 3b = x$$

$$2a + 2b = y$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösung:  $b = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x$   $a = x - 3b = x + \frac{3}{4}y - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig nach 0.10c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis.}$$

$$\text{c) } \mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig (0.10c)}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis von } \mathcal{U}$$

## 0.15 Satz

Jeder Unterraum  $\mathcal{U}$  des  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine Basis.

*Beweis.* Ist  $\mathcal{U} = \{\sigma\}$ , so  $b = \emptyset$ .

Sei also  $\mathcal{U} \neq \{\sigma\}$ .

$v_1$  ist linear unabhängig.

$\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{U}$ .

Ist  $\mathcal{U} = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ , so ist  $\{v_1\}$  Basis von  $\mathcal{U}$

Ist  $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$ .

Sei  $v_2 \in \mathcal{U} \setminus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ .

Nach 0.11c) ist  $\{v_1, v_2\}$  linear unabhängig. Ist  $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{U}$ , so ist  $\{v_1, v_2\}$  Basis von  $\mathcal{U}$ .

Ist  $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$  so wähle  $v_3$  usw.

Es existiert  $m \neq n$  mit  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$  und  $v_1, \dots, v_m$  sind linear unabhängig.

(Denn noch 0.12 gibt es im  $\mathbb{R}^n$  keine  $n+1$  linear unabhängige Vektoren)  $\square$

## 0.16 Satz

Je zwei Basen  $B_1, B_2$  eines Unterraums  $\mathcal{U}$  des  $\mathbb{R}^n$  enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren  $|B_1| = |B_2|$ .

Insbesondere:

Je zwei Basen des  $\mathbb{R}^n$  enthalten  $n$  Vektoren

## 0.17 Definition

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  Basis von  $\mathcal{U}$ ,  $|B| = m$ .

Dann ist  $m$  die *Dimension* von  $\mathcal{U}$ ,  $\dim(\mathcal{U}) = m$ .

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ ,  $\dim(\mathcal{U}) \neq n$ .

## 0.18 Satz (Basisergänzungssatz)

Sei  $\mathcal{U}$  Unterraum der  $\mathbb{R}^n$ ,  $M \subseteq \mathcal{U}$  eine Menge  $m$  linear unabhängiger Vektoren.

Dann lässt sich  $M$  zu einer Basis von  $\mathcal{U}$  ergänzen.

*Beweis.* Analog zu 0.15  $\square$

## 0.19 Korollar

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und  $\dim(\mathcal{U}) = n$ , dann ist  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

*Beweis.* Sei  $B$  Basis von  $\mathcal{U}$ , also  $|B| = n$ .

Nach 0.18 (dort mit  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ ,  $M = B$ ) lässt sich  $B$  zu Basis  $B'$  von  $\mathbb{R}^n$  ergänzen.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \Rightarrow |B'| = n.$$

Also  $B = B'$

$$\mathbb{R}^n = \langle B' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$$

□

## 0.20 Definition

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = (u_1 \dots, u_m)$  eine geordnete Basis von  $\mathcal{U}$ . Nach 0.11b), lässt sich jeder Vektorraum  $\mathcal{U} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$  *eindeutig* als Linearkombination

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^m a_i u_i, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

schreiben.

$(a_1 \dots, a_m)$  heißen *Koordinaten* von  $u$  bzgl. der Basis  $B$ .

## 0.21 Beispiele

a)  $B(e_1 \dots, e_m)$  kanonische Basis von  $\mathbb{R}^n$ .

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  bzgl.  $B$ :

$(a_1 \dots, a_n)$  *kartesische* Koordinaten.

(Rene Descartes, 1596-1650)

# Anfang des WS 2015/16

## 1 Algebraische Strukturen

13.10.2015

### 1.1 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$ . Eine *Verknüpfung* auf  $X$  ist :

$$\begin{cases} X \times X & \longrightarrow X \\ (a, b) & \longrightarrow a \star b \end{cases} \quad (\text{'Produkt' von a und b})$$

$\star$  ist Platzhalter für andere Verknüpfungssymbole, die in speziellen Beispielen auftreten können.

### 1.2 Beispiele

a) Addition  $+$  und Multiplikation  $\cdot$  sind Verknüpfungen auf  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Multiplikation ist *keine* Verknüpfung auf der Menge der negativen ganzen Zahlen.

b) Division ist keine Verknüpfung auf  $\mathbb{N}$ . Division ist Verknüpfung auf  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c)  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$a \oplus b := (a + b) \bmod n \in \mathbb{Z}_n$$

$$a \odot b := (a \cdot b) \bmod n \in \mathbb{Z}_n$$

Verknüpfungen auf  $\mathbb{Z}_n$

$$n = 7: \quad 5 \odot 6 = 2$$

$$5 \oplus 6 = 4$$

$$n = 2: \quad \mathbb{Z}_n = \{0, 1\}$$

$$0 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 = 0$$

$$\odot = \cdot$$

d)  $M$  Menge,  $X =$  Menge aller Abbildungen  $M \longrightarrow M$ . Verknüpfung auf  $X$ : Hintereinanderausführung von Abbildungen:  $\circ$

$$(f, g): M \longrightarrow M, \text{ So } f \circ g: M \rightarrow M$$

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) \in M, m \in M$$

Im Allgemeinen ist  $g \circ f \neq f \circ g$

e)  $X = \{0, 1\}$

2-stellige Aussagen, Junktoren wie  $\wedge, \vee, \text{XOR}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  heißen Verknüpfungen auf  $X$ . 0 entspricht f, 1 entspricht w.

$$0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 1 = 1$$

$$0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1 \text{ (= 'Multiplikation')}$$

$$0 \text{ XOR } 0 = 0, 1 \text{ XOR } 0 = 1, 0 \text{ XOR } 1 = 1, 1 \text{ XOR } 1 = 0 \text{ (= Addition mod 2)}$$

f)  $X = M_n(\mathbb{R})$  = Menge der  $n \times n$ - Matrizen über  $\mathbb{R}$ .

Matrizenaddition ist Verknüpfung auf  $X$ .

Matrizenmultiplikation ist Verknüpfung auf  $X$ .

g)  $M$  Menge.  $X$  Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus  $M$  ('Wörter' über  $M$ ).

Verknüpfung: Hintereinanderausführung zweier Folgen (Konkatenation).

$$M = \{0, 1\}, w_1 = 1101, w_2 = 001$$

$$w_1 w_2 = 110111$$

$$w_2 w_1 = 0011101$$

### 1.3 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge mit Verknüpfung  $\star$ .

a)  $X$ , genauer  $(X, \star)$  ist *Halbgruppe*, falls  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$  für alle  $a, b, c \in X$ .  
(Assoziativgesetz)

b)  $(X, \star)$  heißt *Monoid*, falls  $(X, \star)$  Halbgruppe ist und ein  $e \in X$  existiert mit  $e \star a = a$  und  $a \star e = a$  für alle  $a \in X$ .  $e$  heißt *neutrales Element* (später,  $e$  ist eindeutig bestimmt).

c) Sei  $(X, \star)$  ein Monoid. Ein Element  $a \in X$  heißt *invertierbar*, falls  $b \in X$  existiert (abhängig von  $a$ ) mit  $a \star b = b \star a = e$ .  $b$  heißt *inverses Element* (das *Inverse*) zu  $a$  (später: wenn  $b$  existiert, so ist es eindeutig bestimmt).

d) Monoid  $(X, \star)$  heißt *Gruppe*, falls jedes Element in  $X$  bezüglich  $\star$  invertierbar ist.

- e) Halbgruppe, Monoid, Gruppe  $(X, \star)$  bezüglich kommutativ (oder *abelsch*) falls  $a \star b = b \star a$  für alle  $a, b \in X$  (Kommutativgesetz).

(Nach: Abel, 1802-1829)

14.10.2015

## 1.4 Bemerkung

In Halbgruppe liefert jede sinnvolle Klammerung eines Produktes mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element.

(n = 4)

$$(a \star (b \star c)) \star d \underset{\text{AG}^1}{=} ((a \star b) \star c) \star d \underset{\text{AG}^1}{=} (a \star b) \star (c \star d) \underset{\text{AG}^1}{=} a \star (b \star (c \star d)) \underset{\text{AG}^1}{=} a \star ((b \star c) \star d)$$

Klammern werden daher meist weggelassen.

$a^n = a \star \dots \star a$  "Potenzen eindeutig definiert"  
 $\xleftarrow[n \in \mathbb{R}]{n}$

## 1.5 Proposition

- a) In einem Monoid  $(X, \star)$  ist das neutrale Element eindeutig bestimmt.
- b) Ist  $(X, \star)$  Monoid und ist  $a \in X$  invertierbar, so ist das Inverse zu  $a$  eindeutig bestimmt. Bezeichnung:  $a^{-1}$
- c) Ist  $(X, \star)$  Monoid und wenn  $a, b \in X$  invertierbar sind, so auch  $a \star b$ .  
 $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$
- d) Die Menge der invertierbaren Elemente in einem Monoid  $(X, \star)$  bilden bezüglich  $\star$  eine Gruppe.

*Beweis.* a) Angenommen:  $e_1, e_2$  sind neutrale Elemente. Dann:

$$e_1 = e_1 \star e_2 = e_1 \star e_2 = e_2 \quad \text{!}$$

---

<sup>1</sup>Assoziativgesetz



b) Angenommen  $a$  hat 2 inverse Elemente  $b_1, b_2$  also.

$$\begin{aligned} a \star b_1 &= e, b_2 \star a = e \\ b_1 &= e \star b_1 = (b_2 \star a) \star b_1 = b_2 \star (a \star b_1) = b_2 \star e = b_2 \quad \neq \end{aligned}$$

c)

$$(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = a \star (b \star b^{-1}) \star a^{-1} = a \star e \star a^{-1} = e$$

Analog:  $(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = e$

Also:  $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$

d)  $\mathcal{J}$  = Menge der inversen Elemente in  $(X, \star)$ ,

$e \in \mathcal{J}$ , dann  $e \star e = e$ , dass heißt  $e^{-1} = e$ ,  $\star$  ist Verknüpfung auf  $\mathcal{J}$ .

Zu zeigen:  $a, b \in \mathcal{J} \Rightarrow a \star b \in \mathcal{J}$  Folgt aus c).

Assoziativgesetz gilt in  $\mathcal{J}$ ,  $a \in \mathcal{J} \Rightarrow a^{-1} \in \mathcal{J}$ , denn  $(a^{-1})^{-1} = a$  □

*Bemerkung:* Multiplikation mit  $a^{-1}$  macht Multiplikation mit  $a$  (Verknüpfung) rückgängig.

## 1.6 Beispiel

a)  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Halbgruppen bezüglich  $+$ .

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind bezüglich  $+$  Monoide mit neutralen Element 0.

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  ist kein Monoid bezüglich  $+$ , aber  $\mathbb{N}_0$ .

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Gruppen bezüglich  $+$ . Inverses Element zu  $a$ :  $-a$

$\mathbb{N}$  ist keine Gruppe bezüglich  $+$ , Inverse Elemente in  $\mathbb{N}_0 : \{0\}$

b)  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Monoide bezüglich  $\cdot$  (neutrales Element 1). Keine Gruppen (in  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ist 0 nicht invertierbar).

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$  Gruppen.

Invertierbare Elemente in  $\mathbb{Z} :: \quad \{1, -1\} \quad \leftarrow \text{Gruppe bezüglich } \cdot$   
↑  
Eigenes Inverses

c)  $M$  Menge.

$X$  = Menge aller Abbildungen  $M \longrightarrow M$  mit Hintereinanderausführung  $\circ$  als

Verknüpfung.

Monoid, neutrales Element.  $id_M$

$$f \circ id_M = f = id_M \circ f$$

$$id_M(m) = m \text{ für alle } m \in M.$$

Invertierbar sind genau die bijektiven Abbildungen  $M \longrightarrow M$ , Inverse = Umkehrabbildung.

$f : M \longrightarrow M$  bijektiv

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$$

‘Proposition’ on page 24 d): Die bijektive n Abbildung,  $M \longrightarrow M$  bilden bezüglich  $\circ$  eine Gruppe

- d)  $M =$  Menge z.B  $\{0, 1\}$ , x Menge aller endlichen Folgen über  $m$ . Halbgruppe mit Verknüpfung Konkatenation . Nimmt man die leere Folge mit hinzu, ist es das neutrale Element. Dann: Monoid.

- e)  $M_n(\mathbb{R})$  Menge der Matrizen über  $\mathbb{R}$ .

Addition: neutrales Element  $0$  – *Matrix*, Inverse zu  $A$  ist  $-A$ .  $(M, \text{Addition})$  ist Gruppe

Multiplikation:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  Halbgruppe mit neutralem Element  $I_m$

- f)  $n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\} \quad \text{Verknüpfung } \oplus$

$$a \oplus b = a + b \mod n$$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  ist Gruppe.

Assoziativgesetz:  $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= (a + b \mod n) \mod n \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{=} ((a + b) + c) \mod n \\ &= (a + (b + c)) \mod n \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{=} (a + (b + c) \mod n) \mod n \\ &= (a + (b \oplus c)) \mod n \\ &= (a \oplus (b \oplus c)) \end{aligned}$$

$0$  ist neutrales Element bezüglich  $\oplus$

$0$  ist sein eigenes Inverse.

$1 \leq i \leq n \quad n - i \in \mathbb{Z}_n$  Inverses zu  $i$

$$i \oplus (n - i)$$

$$= (i + (n - i)) \bmod n = n \bmod n = 0$$

g)  $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_0$  Verknüpfung  $\odot$   $n > 1$

$$a \odot b = a \cdot b \bmod n$$

$(\mathbb{Z}_n, \odot)$  ist Monoid

Assoziativgesetz wie bei  $\oplus$ .

1 ist neutrales Element bei  $\odot$  Keine Gruppe bezüglich  $\odot$ , denn 0 hat kein Inverses

## 1.7 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}, n > 1$

a) Die Elemente in  $(\mathbb{Z}_n, \odot)$ , die invertierbar bezüglich  $\odot$  sind, sind genau diejenigen  $a \in \mathbb{Z}_n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$ .

Für solche  $a$  bestimmt man das Inverse folgendermaßen:

Bestimme  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $s \cdot a + t \cdot n = 1$  (Erweiterter Euklidischer Algorithmus)

Dann ist  $a^{-1} = s \bmod n$

b)  $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n : \text{ggT}(a, n) = 1\}$  ist Gruppe bezüglich  $\odot$ .

$|\mathbb{Z}_n^*| =: \varphi(n)$  Euler'sche  $\varphi$ -Funktion (Leonard Euler 1707-1783)

c) Ist  $p$  eine Primzahl so ist  $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \odot)$  eine Gruppe. Beweis folgt aus b)

*Beweis.* a) Angenommen  $a \in \mathbb{Z}_n$  invertierbar bezüglich  $\odot$

D.h es existiert  $b \in \mathbb{Z}_n$  mit  $a \odot b = 1$

$a \cdot b \bmod n = 1$ , d.h es existiert  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $a \cdot b = 1 + k \cdot n, 1 = a \cdot b - k \cdot n$

Sei  $d = \text{ggT}(a, n)$ :

$$d \mid a \Rightarrow d \mid a \cdot b$$

$$d \mid n \Rightarrow d \mid k \cdot n$$

$$\Rightarrow d \mid a \cdot b - k \cdot n = 1$$

$$\Rightarrow d = 1 \quad \text{ggT}(a, n) = 1.$$

Umgekehrt sei  $a \in \mathbb{Z}_n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$

EEA liefert  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $s \cdot a + t \cdot n = 1$ .

$$\begin{aligned}
& (s \bmod n) \odot a &= ((s \bmod n) \cdot a) \bmod n \\
& \stackrel{\text{Mathe I}}{=} (s \cdot a) \bmod n &= (1 - t \cdot n) \bmod n \\
& = \underbrace{(1 - (t \cdot n) \bmod n)}_{=0} \bmod n = 1 \bmod n = 1
\end{aligned}$$

b) 'Proposition' on page 24 d)

□

## 1.8 Beispiel

$n = 24$ ,  $a = 7$  ist invertierbar in  $(Z_{24}, \odot)$

EEA:

$$\begin{aligned}
1 &= (-2) \cdot 24 + 7 \cdot 7 \\
a^{-1} &= 7 \bmod 24 = 7 = a
\end{aligned}$$

## 1.9 Beispiel

Sei  $M = \{1, \dots, n\}$

Die Menge der bijektiven Abbildungen auf  $M$  (*Permutationen*) bilden nach 1.6c) eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung  $\circ$ .

Bezeichnung:  $S_n$  *systematische Gruppe von Grad  $n$*

Es ist  $|S_n| = n!$

(Mathe I)

$$\text{z.B.: } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi$$

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\varrho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \varrho^{-1} = id$$

$$\pi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$S_n$  ist für  $n \geq 3$  nicht abelsch (nicht kommutativ)

### 1.10 Satz (Gleichungslösen in Gruppen)

Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe  $a, b \in G$  (in allgemeinen Gruppen schreibt man Verknüpfungen oft als  $\cdot$  statt  $\star$ , oft auch  $ab$  statt  $a \cdot b$ )

- a) Es gibt genau ein  $x \in G$  mit  $ax = b$  (nämlich  $x = a^{-1}b$ ) [ "Teilen durch"  $a$  von links = Multiplikation von links mit  $a^{-1}$  ]
- b) Es gibt genau ein  $y \in G$  mit  $ya = b$  (nämlich  $y = ba^{-1}$ )
- c) Ist  $ax = bx$  für ein  $x \in G$ , so ist  $a = b$   
Ist  $ya = yb$  für ein  $y \in G$ , so ist  $a = b$

*Beweis.* a) Setze  $x = a^{-1}b \in G$ .

$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1})b = a \cdot b = b$  Eindeutigkeit : Sei  $x \in G$  mit  $ax = b$

Multiplikation beide Seiten mit  $a^{-1}$ ,

$$x = (a^{-1}a)x = a^{-1}b$$

b) analog

c)  $ax = bx$  Multiplikation mit  $x^{-1}$  Dann  $a = b$

□

### 1.11 Beispiel

- a) Suche Permutation  $\xi \in S_3$  mit  $\varrho \circ \xi = \pi$  (vgl. 1.9). 'Satz (Gleichungslösen in Gruppen)' on page 29a):

$$\begin{aligned} \xi = \varrho^{-1} \circ \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) 1.10c) gilt in Monoiden, die keine Gruppen sind, im Allgemeinen nicht:

Beispiel:  $(\mathbb{Z}_0, \odot)$

$$2 \odot 3 - 0 = 3 \odot 3, \text{ aber } 2 \neq 4$$

### 1.12 Definition

- a)  $R \neq \emptyset$  Menge mit 2 Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  heißt *Ring*, falls

- (1)  $(R, +)$  ist kommutative Gruppe (neutrales Element: 0, *Nullelement*, Inverses zu  $a$ :  $-a$   $b + (-a) =: b - a$ )
- (2)  $(R, \cdot)$  ist Halbgruppe
- (3)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  und  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  ( $\cdot$  vor  $+$ )  
*Distributivgesetz*
- b) Ring  $R$  heißt *kommutativer Ring* falls  $(R, \cdot)$  kommutative Halbgruppe ist.
- c) Ring  $R$  heißt *Ring mit Eins*, falls  $(R, \cdot)$  Monoid, neutrales Element  $1 \neq 0$  (*Eins-element*, *Eins*)

### 1.13 Beispiele

- a)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kommutativer Ring mit 1, invertierbare Elemente bezüglich  $\cdot$  sind 1 und  $-1$ .
- b)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$  sind kommutative Ringe mit Eins.  
 Alle Elemente  $\neq 0$  sind invertierbar bezüglich  $\cdot$ .

- c)  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ .

$$\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes)$  ist kommutativer Ring mit Eins:

Wegen 'Beispiel' on page 25 f),g) sind nur die Distributivgesetz zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 (a \oplus b) \otimes c &= ((a \oplus b) \cdot c) \bmod n \\
 &= (((a + b) \bmod n) \cdot c) \bmod n \\
 &= ((a + b) \cdot c) \bmod n \\
 \text{Mathe I} \quad &= (a \cdot c + b \cdot c) \bmod n \\
 &= ((a \cdot c) \bmod n + (b \cdot c) \bmod n) \bmod n \\
 \text{Mathe I} \quad &= a \otimes c \oplus b \otimes c
 \end{aligned}$$

- d)  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$ , mit Matrizenaddition  $+$  und, Multiplikation  $\cdot$  ist Ring mit Eins.

(Folgt aus Rechenregeln für Matrizen, Mathe II) Eins:  $E_n$   $n \times n$ -Einheitsmatrix

Für  $n \geq 2$  ist  $M_n(\mathbb{R})$  kein kommutativer Ring

### 1.14 Proposition

Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring. Dann gilt für alle  $a, b \in R$ .

a)  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

b)  $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

c)  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

*Beweis.*

a)  $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a \stackrel{\text{DG}^2}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a$

Addiere auf beiden Seiten  $-(0 \cdot a)$

$$0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$$

b)  $(-a) \cdot b + ab = ((-a) + a) \cdot b \stackrel{\text{a)}}{=} 0 \cdot b = 0$   
 $\Rightarrow (-a) \cdot b = -(ab)$  Analog  $a \cdot (-b) = -(ab)$

c)  $(-a) \cdot (-b) \stackrel{\text{b)}}{=} -(a \cdot (-b)) \stackrel{\text{b)}}{=} -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$

□

### 1.15 Bemerkung

a) In einem Ring mit Eins sind 1 und  $-1$  bezüglich  $\cdot$  invertierbar.

$$1 \cdot 1 = 1 \quad (1^{-1} = 1)$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \quad (1.14c)), \text{ dass heißt. } (-1)^{-1} = -1$$

0 ist nie bezüglich Multiplikation invertierbar, denn  $0 \cdot a = 0 \neq 1$ . 1.14a)

b) Es kann sein dass  $1 = -1$  gilt. Zum Beispiel:

$$(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot) \quad 1 \oplus 1 = 0 \quad 1 = -1$$

### 1.16 Definition

Ein kommutativer Ring  $(R, +, \cdot)$  mit Eins heißt *Körper*, wenn jedes Element  $\neq 0$  bezüglich Multiplikation invertierbar ist.

---

<sup>2</sup>Distributivgesetz

### 1.17 Beispiel

- a)  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Körper,  $\mathbb{Z}$  nicht.
- b)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  ist genau dann ein Körper, wenn  $n$  eine Primzahl.  
 $\mathbb{Z}_n$  ist kommutativer Ring mit 1.  
 'Beispiele' on page 30c: Die invertierbaren Elemente in  $\mathbb{Z}_n$  sind alle  $a \in \mathbb{Z}_n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$

### 1.18 Proposition (Nullteilerfreiheit in Körpern)

Ist  $K$  ein Körper,  $a, b \in K$ , mit  $a \cdot b = 0$ , so ist  $a = 0$  oder  $b = 0$

*Beweis.*

Sei  $a \cdot b = 0$  Angenommen  $a \neq 0$ . Dann existiert  $a^{-1} \in K$

$$0 \underset{1.14a)}{=} a^{-1} \cdot 0 \underset{\text{Vor.}}{=} a^{-1}(a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b$$

□

*Beispiel:*  $R = (\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$

$$2 \odot 3 = 0 \quad 2 \neq 0, 3 \neq 0$$

### 1.19 Definition

Sei  $K$  ein Körper,

- a) Ein (Formales) *Polynom* über  $K$  ist ein Ausdruck  $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  wobei  $n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K$ . (Manchmal  $f(x)$  statt  $f$ , +-Zeichen hat zunächst nichts mit einer Addition zu tun.  $a_i$  *Koeffizienten* von  $f$   
 Ist  $a_i = 0$  so kann man in der Schreibweise von  $f$   $0 \cdot x^i$  auch weglassen.  
 Statt  $a_0x^0$  schreibt man  $a_0$ , statt  $a_1x^1$  schreibt man  $a_1x$ . Sind alle  $a_i = 0$ , so  $f = 0$ , *Nullpolynom*.  
 Ist  $a_i = 1$ , so schreibt man  $x^i$  statt  $1x^i$
- b) Zwei Polynome  $f$  und  $g$  sind *gleich*, wenn *entweder*  $f = 0$  und  $g = 0$  oder  $f \neq 0$  und  $g \neq 0$   
 d.h  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0$



$$g = \sum_{i=0}^m a_i x^i, b_m \neq 0$$

und  $n = m$  und  $a_i = b_i$  für  $i = 0 \dots n$

c) Menge aller Polynome über  $K$ .  $K[x]$

Wir wollen  $K[x]$  zu einem Ring machen. Wie?

*Beispiel:*  $f = 3x^2 + 2x + 1,$

$$g = 5x^3 + x^2 + x \in Q[x]$$

$$f + g = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (3x^2 + 2x + 1) \cdot (5x^3 + x^2 + x) \\ &= 15x^5 + 10x^4 + 5x^3 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x^2 + 2x^2 + x \\ &= 15x^5 + 13x^4 + 10x^3 + 3x^2 + x \end{aligned}$$

27.10.2015

## 1.20 Satz und Definition

$K$  Körper.  $K[x]$  wird zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgenden Verknüpfungen.

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{i=0}^m b_i x_i \text{ so}$$

$$f + g = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$$

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i, \text{ wobei } c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \quad (\text{Faltungsprodukt})$$

In beiden Fällen sind Koeffizienten  $a_i$  mit  $i > n$  bzw.  $b_i$  mit  $i > m$  gleich 0 zu setzen. Das Einselement ist 1 ( $= 1x^0$ )

Das Nullelement ist das Nullpolynom.

$$-f = \sum_{i=0}^n (-a_i) x^i$$

$(K[x], +, \cdot)$  heißt *Polynomring* in einer Variable *Beweis*: Nachrechnen

## 1.21 Bemerkung

$$\text{a) } f = \sum_{i=0}^n a^i x^i \in K[x], a \in K \subseteq K[x]$$

$$a \cdot f = \sum_{i=0}^n (a \cdot a_i) x^i$$

$$x \cdot f = \sum_{i=0}^n a_i x^{i+1} = a_n x^{n+1} + \dots + a_0 x$$

- b) Das  $+$ - Zeichen in der Definition der Polynome entspricht genau der Addition der *Monome*  $a_i x^i$ .

$$(a_0 x^0 + a_1 x^1) = a_0 x^0 + a_1 x^1$$

$\uparrow$  Add. aus 1.20                       $\uparrow$  + aus 1.19

## 1.22 Definition

Sei  $0 \neq f \in k[x]$ ,  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,  $a_n \neq 0$ .

Dann heißt  $n$  der *Grad* in  $f$ ,  $\text{Grad}(f) = n$

$\text{Grad}(0) := -\infty$

$\text{Grad}(f) := 0$  : *Konstante Polynome*  $\neq 0$

## 1.23 Satz

Sei  $K$  ein Körper,  $f, g \in K[x]$ .

Dann ist  $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$

(Konvention:  $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty + \infty)$ ,

Sei  $f \neq 0$  und  $g \neq 0$

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0, n = \text{Grad}(f)$$

$$g = \sum_{i=0}^m b_i x^i, b_m \neq 0, m = \text{Grad}(g)$$

Koeffizienten von  $x^{n+m}$  in  $f \cdot g$ :  $a_n b_m \neq 0$   
1.18

## 1.24 Korollar

Sei  $K$  ein Körper

- Genau die konstanten Polynome  $\neq 0$  sind in  $K[x]$  bezüglich  $\cdot$  invertierbar  
Insbesondere ist  $K[x]$  *kein* Körper
- Sind  $f, g \in K[x]$  mit  $f \cdot g = 0$ , so ist  $f = 0$  oder  $g = 0$  (Nullteilerfreiheit in  $K[x]$ )
- Sind  $f, g_1, g_2 \in K[x]$  mit  $f \cdot g_1 = f \cdot g_2$  und ist  $f \neq 0$ , so ist  $g_1 = g_2$

*Beweis.*

- a) Sei  $f \in K[x]$  invertierbar bezüglich  $\cdot$ . Dann ist  $f \neq 0$  und es existiert  $g \in K[x]$  mit  $f \cdot g = 1$ .

Mit 1.23:

$$\begin{aligned} 0 = \text{Grad}(1) &= \text{Grad}(f \cdot g) \\ &= \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g). \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \text{Grad}(f) = 0 (= \text{Grad}(g))$$

Dass heißt  $f$  ist konstantes Polynom.

Ist umgekehrt  $f = a \in L, a \neq 0$ , so  $f^{-1} = a^{-1} \in K$

- b) Folgt aus 1.23:

$$\begin{aligned} -\infty &= \text{Grad}(0) = \text{Grad}(f \cdot g) \\ &= \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Grad}(f) = -\infty \text{ oder } \text{Grad}(g) = -\infty, \text{ d.h. } f = 0, \text{ oder } g = 0$$

- c)  $f g_1 = f g_2$

$$\Rightarrow 0 = f g_1 - f g_2 = f \cdot (g_1 - g_2)$$

Da  $f \neq 0$ , folgt mit b)

$$g_1 - g_2 = 0, \text{ d.h. } g_1 = g_2$$

□

## 1.25 Bemerkung

- a) Jedem Polynom  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x]$

kann man eine Funktion  $K \rightarrow K$  zuordnen.  $a \in K \mapsto f(a) = \sum_{i=0}^n a_i a^i \in K$

(Polynomfunktion aus Analysis  $K = \mathbb{R}$ )

Aufgrund der Definition von Addition/Multiplikation von Polynomen gilt:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$$

Es kann passieren, dass zwei verschiedene Polynome die gleiche Funktion beschreiben.

Z.B  $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$$f = x^2, g = x$$

$$f \neq g$$

$$f(1) = 1 = g(1)$$

$$f(0) = -g(0)$$

Über unendlichen Körpern passiert das nicht (später)

b) Schnelle Berechnung von  $f(a)$ :

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$f(a) = a_0 + a(a_1 + a(a_2 + \dots + a(a_{n-1} + a a_n)))$$

*Horner-Schema*

## 1.26 Definition

$K$  Körper,  $f, g \in K[x]$

$f$  teilt  $g$  ( $f \mid g$ ) falls  $q \in K[x]$  existiert mit  $g = q \cdot f$  (Falls  $g \neq 0 \pmod f \mid g$ , so ist  $\text{Grad}(f) \leq \text{Grad}(g)$  nach 'Satz' on page 34)

## 1.27 Satz

$K$  Körper,  $0 \neq f \in K[x], g \in K[x]$

Dann existiert eindeutig bestimmte Polynome  $q, r$

$$(1) \quad g = q \cdot f + r$$

$$(2) \quad \text{Grad}(r) < \text{Grad}(f)$$

(Beweis WHK, Satz 4.69)

*Division mit Rest*

**1.28 Beispiel**

a)  $g = x^4 + 2x^3 - x + 2, f = 3x^2 - 1, f, g \in Q[x]$

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2x^3 - x + 2) : (3x^2 - 1) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}{3x^2 - 1} \\ \underline{-x^4 \quad + \frac{1}{3}x^2} \phantom{-x + 2} \\ 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x \phantom{+ 2} \\ \underline{-2x^3 \quad + \frac{2}{3}x} \phantom{+ 2} \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \phantom{+ 2} \\ \underline{-\frac{1}{3}x^2 \quad + \frac{1}{9}} \phantom{+ 2} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} \end{array}$$

b)  $g = x^4 - x^2 + 1, f = x^2 + x, f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 + 1 : x^2 + x = x^2 + 2x \\ \underline{-(x^4 + x^3)} \phantom{+ 1} \\ 2x^3 + 2x^2 + 1 \phantom{+ 1} \\ \underline{-(2x^3 + 2x^2)} \phantom{+ 1} \\ 1 \leftarrow r \end{array}$$

**1.29 Korollar**

$K$  Körper,  $a \in K$ .

$f \in K[x]$  ist genau dann durch  $(x - a)$  teilbar, wenn  $f(a) = 0$  (d.h.  $a$  ist Nullstelle von  $f$ )

$$[f = g \cdot (x - a), q \in K[x]]$$

*Beweis.*

Falls  $x - a \mid f$ , so existiert  $q \in K[x]$  mit  $f \stackrel{1.25}{=} q(x - a)$ .

$$\text{Dann } f(a) = q(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_{=0} = 0.$$

Umgekehrt: Angenommen  $f(a) = 0$ . Division mit Rest von  $f$  durch  $x - a$ :

$$f = q \cdot (x - a)r, q, r \in K[x]$$

$$\text{Grad}(r) < \text{Grad}(x - a) = 1, r \in K$$

Zeige:  $r = 0$ .

$$r = f - q \cdot (x - a)$$

Setze  $a \in K$  ein.

$$\begin{aligned} r &= f(a) - q(a) \cdot (a - a) = 0 - 0 = 0 \\ f &= q \cdot (x - a) \end{aligned}$$

□

### 1.30 Definition

$K$  Körper  $a \in K$  heißt  $m$ -fache Nullstelle von  $f \in K[x]$ , falls  $(x - a)^m \mid f$  und  $(x - a)^{m+1} \nmid f$ .

Dass heißt  $f = q \cdot (x - a)^m$  und  $q(a) \neq 0$

### 1.31 Beispiel

$$x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

In  $\mathbb{Z}_3$  hat  $f$  die Nullstelle 1

‘Korollar’ on page 37:  $x - 1 (= x + 2)$  teilt  $f$

Dividiere  $f$  durch  $x - 1$ :

$$f = (x^4 + 2x^3 + 2x + 2) \cdot (x - 1)$$

### 1.32 Satz

$K$  Körper,  $f \in K[x]$ ,  $\text{Grad}(f) = n \geq 0$  (dass heißt  $f \neq 0$ ).

Dann hat  $f$  höchstens  $n$  Nullstellen in  $K$  (einschließend Vielfachheit). Genauer:

Sind  $a_1, \dots, a_k$  die verschiedenen Nullstellen von  $f$ , so ist

$f = g \cdot (x - a_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{m_k}$ ,  $m_i$  Vielfachheiten der Nullstellen  $a_i$ ,  $g$  hat keine Nullstelle in  $K$

*Beweis.* Durch Induktion nach  $n$ .

$n = 0$ :  $f = a_0 \neq 0$ , ohne Nullstelle. ✓

Sei  $n > 0$ . Behauptung sei richtig für alle Polynome von  $\text{Grad} < n$ .

Hat  $f$  keine Nullstellen,  $g = f$  ✓

Hat  $f$  Nullstellen  $a_1, \dots, a_k$ ,  $k \geq 1$

so  $f = q \cdot (x - a_1)^{m_1}$  (nach Definition)  $q(a_1) \neq 0$ .

$$\text{Grad}(q) = n - m_1 \underset{1.23}{<} n \quad m_1 > 0$$

Wir zeigen:

$q$  hat genau die Nullstellen  $a_2, \dots, a_k$  mit Vielfachheiten  $m_2, \dots, m_k$ .

Klar: Jede Nullstelle von  $q$  ist Nullstelle von  $f$ , Dass heißt  $q$  hat höchstens Nullstellen  $a_2, \dots, a_k$ .

Diese Nullstellen hat  $q$  mit Vielfachheit  $0 \geq n_i \geq m_i$ , denn  $(x - a_i)^{m_i} | q \Rightarrow (x - a_i)^{n_i} | f$

Sei  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Es ist  $f = s \cdot (x - a_i)^{m_i}$ ,  $s \in K[x]$ ,  $s(a_i) \neq 0$

$$q = q_1 \cdot (x - a_i)^{n_i}, q_1 \in K[x], q(a_i) \neq 0, \quad ((x - a_i)^0 = 1)$$

$$f = q_1(x - a_1)^{n_i} \cdot (x - a_1)^{m_1} \text{ 'Korollar' on page 34c):}$$

$$s(x - a_i)^{m_i - n_i} = q_1 \cdot (x - a_1)^{m_1}$$

Ist  $m_i > n_i$ , so ist  $m_i - n_i > 0$

$$0 = s(a_i)(a_i - a_i)^{m_i - n_i} = q(a_i)(a_i - a_i) \neq 0E$$

Dass heißt  $n_i = m_i, i = 2, \dots, k$

$$q = g(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k}, g \text{ ohne Nullstelle in } K$$

$$f = g(x - a_1)^{m_2} \dots (x - a_2)^{m_1} \quad (\text{Nach Induktionsvoraussetzung}) \quad \square$$

### 1.33 Korollar

$K$  Körper,  $f, g \in K[x]$ ,  $m = \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$

Gibt es  $m + 1$  Elemente  $a_1, \dots, a_{m+1} \in K$ , paarweise verschieden, mit  $f(a_i) = g(a_i), i = 1, \dots, m + 1$  so  $f = g$ .

*Insbesondere:* Ist  $K$  unendlich,  $f, g \in K[x]$  mit  $f(a) = g(a)$  für alle  $a \in K$ , so ist  $f = g$

*Beweis.*  $f - g \in K[x]$ ,  $\text{Grad}(f - g) \leq m$ .

$f - g$  hat  $m + 1$  Nullstellen  $a_1, \dots, a_{m+1}$

$$1.32 \quad f - g = 0, f = g \quad \square$$

### 1.34 Bemerkung

Über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$  ( $p$  Primzahl) gibt es Polynome beliebig hohen Grades ohne Nullstellen

Über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ :  $(x^2 + 1)^m$  hat  $\text{Grad}(2m)$ , keine Nullstellen in  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

über  $\mathbb{Z}_p$  z.B.  $(x^p - x + 1)^m$  hat  $\text{Grad } pm$ , ohne Nullstellen (ohne Beweis)

### 1.35 Fundamentalsatz der Algebra

Ist  $f \in \mathbb{C}[x]$ ,  $f \neq 0$  so ist ( $f = a_n x^n + \dots + a_0$ )

$f = a_n(x-c_1)^{m_1} \dots (x-c_k)^{m_k}$ ,  $a_n, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$  (Nullstellen mit Vielfachen  $m_1, m_2$ )

$m_1 + \dots + m_k = \text{Grad}(f)$

$\text{Grad}(f) = n$  hat  $n$  Nullstellen (einschließend Vielfachheit)

## 2 Vektorräume

3.11.2015

### 2.1 Definition

Sei  $K$  ein Körper. Ein  $K$ -Vektorraum  $V$  besitzt Verknüpfung  $+$  bezüglich derer eine kommutative Gruppe ist (Neutrales Element  $0$ , Nullvektor, Inverses zu  $v \in V$ :  $-v$ ). Außerdem existiert Abbildung  $K \times V \longrightarrow V$

$(a, v) \longmapsto av, a \in K, v \in V$

(„Multiplikation“ von Elementen aus  $V$ , („Vektoren“) mit Körperelementen („Skalare“)), so dass gilt:

$(a + b)v = av + bv$  für alle  $a, b \in K, v \in V$

$a(v + w) = av + aw$  für alle  $a \in K, v, w \in V$

$(ab)v = a(bv)$  für alle  $a, b \in K, v \in V$

$1v = v$  für alle  $v \in V$ .

### 2.2 Beispiel

a)  $K$  Körper,  $n \in \mathbb{N}$

$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$  ist  $K$ -Vektorraum bezüglich  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

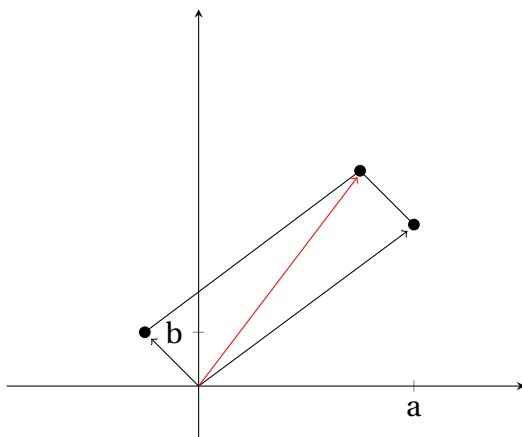
$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$  für alle  $a \in K, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ . Raum der Spaltenvektoren der Länge  $n$  über  $K$ .



Entsprechend: Raum der Zeilenvektor,  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t$

Für  $K = \mathbb{R} : \mathbb{R}^n$

$n = 2, 3$  Elemente aus  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ , identifizierbar mit Ortsvektor der Ebene oder des 3-dimensionalen Raumes.



b) Sei  $K$  ein Körper Polynomring  $K[x]$  ist ein  $K$ -Vektorraum, bezüglich

- Addition von Polynomen
- Multiplikation von Körperelementen mit Polynomen

$$a \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) := \sum_{i=0}^n (a a_i) x^i \in K[x]$$

(Multiplikation von Polynomen mit Polynom Grad  $\leq 0$ )

2.1 folgt aus den Ringeigenschaften von  $K[x]$

c)  $K$  Körper.  $V =$  Abbildung  $(K, K) = \{\alpha : K \rightarrow K : \alpha \text{ Abbildung}\}$  Addition auf  $V$

$\alpha + \beta \in V (\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$  für alle  $x \in K$

Skalare Multiplikation:

$a \in \mathbb{R}, \alpha \in V (a\alpha)(x) = a \cdot \alpha(x)$  Für alle  $x \in K$

Nachrechnen : Damit wird  $V$  ein  $K$ -Vektorraum

### 2.3 Proposition

$K$  Körper,  $V, K - VR$

a)  $a \cdot \sigma = \sigma$

b)  $0 \cdot v = \sigma$

c)  $(-1) \cdot v = -v$

a,b,c Für alle  $v \in V$

### 2.4 Definition

$K$  Körper,  $V, K - VR$ .

$\emptyset + U \subseteq V$  heißt *Unterraum* (*Untervektorraum*, oder *Teilraum*) von  $V$ , falls  $U$  bezüglich Addition auf  $V$  und der skalaren Multiplikation mit Elementen aus  $K$  selbst  $K$  Vektorraum ist.

### 2.5 Proposition

$U$  ist Unterraum von  $V$

$\Leftrightarrow$

(1)  $u_1 + u_2 \in U$  für alle  $u_1, u_2 \in U$

(2)  $au \in U$  für alle  $u \in U, a \in K$   
(Nullvektor in  $U$  = Nullvektor in  $V$ )

*Beweis.*  $\Rightarrow \checkmark \Leftarrow$ : Da  $U \neq \emptyset$ , existiert  $u \in U$ .

$\sigma = 0 \cdot u \in U$

$u \in U \Rightarrow -u = (-1)u \in U$

Mit (1):  $(U, +)$  ist kommutative Gruppe. Restliche Axiome gelten auch für  $U, K$ .

□

## 2.6 Beispiel

- a)  $V = K = VR$ , so ist  $V$  Unterraum von  $V$ .  
und  $\{0\}$  ist Unterraum von  $V$  (*Nullraum*)
- b) Betrachte  $K[x]$  als  $K = VR$ . (2.2).  
Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ .  
 $U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) \leq n\}$  Unterraum von  $K[x]$

## 2.7 Proposition

Seien  $U_1, U_2$  Unterräume von  $K$ -VR  $V$ .

- a)  $U_1 \cap U_2$  ist Unterraum
- b)  $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$  ist Unterraum von  $V$  (*Summe* von Unterräumen)
- c)  $U_1 + U_2$  ist der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $U_1 \cup U_2$  enthält.
- d)  $U_1 \cap U_2$  ist im Allgemeinen kein Unterraum.  
*Beweis:* 0.4

## 2.8 Definition

$V$   $K$ -VR

- a)  $v_1, \dots, v_m \in V, a_1, \dots, a_m \in K$

Dann heißt

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i \in V$$

*Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_m$  (mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_m$ ).

[ Beachte: Zwei formell verschiedene Linearkombinationen derselben Vektoren können den gleichen Vektor darstellen z.B. in  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Ist  $M \subseteq V$ , so ist der von  $M$  erzeugte oder aufgespannte Unterraum  $\langle M \rangle_K$  (oder kurz  $\langle M \rangle$ ) die Menge aller endlichen Linearkombination, die man mit Vektoren aus  $M$  bilden kann:

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in M \right\}$$

$$\langle \emptyset \rangle_K := \{\emptyset\}$$

$$M = \{v_1, \dots, v_m\} : \langle M \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$$

- c) Ist  $\langle M \rangle_K = V$ , so heißt  $M$  Erzeugungssystem

## 2.9 Satz

$V$   $K$ -VR,  $M \subseteq V$

- a)  $\langle M \rangle_K$  ist Unterraum von  $V$

- b)  $\langle M \rangle_K$  ist der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $M$  enthält.

Insbesondere: Sind  $U_1, U_2$  Unterräume von  $V$ , so ist  $\langle U_1 \cup U_2 \rangle_K = U_1 + U_2$

*Beweis:* 0.7

## 2.10 Definition

$V$   $K$ -VR  $V$  heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge  $M \subseteq V$  gibt mit  $V = \langle M \rangle_K$

## 2.11 Beispiel

$$a) \quad K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$$

$K^n$  ist endlich erzeugt.

$$e_1, \dots, e_n \text{ Einheitsvektor } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$K^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_K, \text{ denn } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

- b)  $K[x]$  als  $K$ -Vr ist nicht endlich erzeugt. Angenommen es existiert  $f_1, \dots, f_n \in K[x]$  mit  $K[x] = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$ .

Sei  $t, \max \text{Grad}(f_i) \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$

Dann haben alle Polynome in  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$  höchstens Grad  $t$ . Also  $x^{t+1} \in$

$$K[x] \setminus \langle f_1, \dots, f_n \rangle_K \neq \emptyset$$

$$M = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$$

$$K[x] = \langle M \rangle_K. \quad f = \sum_{n=0}^t a_i x^i$$

- c)  $n \in \mathbb{N}. \quad U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) = n\}$

Unterraum von  $K[x]$ , endlich erzeugt

## 2.12 Definition

Sei  $V$   $K$ -VR,  $v_1, \dots, v_m \in V$  heißen *linear abhängig*, wenn es  $a_1, \dots, a_n \in K$ , *nicht alle*  $= 0$ , gibt mit

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sigma$$

(Beachte: Immer mit  $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m = \sigma$ , aber bei linearer Abhängigkeit soll es noch eine andere Möglichkeit geben) Andernfalls nennt man  $v_1, \dots, v_m$  *linear unabhängig*:

(D.h. aus  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sigma$  folgt  $a_1 = \dots = a_m = 0$ )

Entsprechend:  $\{v_1, \dots, v_m\}$  linear abhängig, linear unabhängig.

$\emptyset$  per Definition linear unabhängig. Klar: Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren wieder linear unabhängig

## 2.13 Beispiel

- a)  $\sigma$  ist linear abhängig:  $1 \cdot \sigma = \sigma$

- b)  $v, w \in V, v \neq \sigma \neq w$ .

Wann sind  $v$  und  $w$  linear abhängig?

$v, w$  linear abhängig  $\Rightarrow \exists a, b \in K$ , nicht beide  $= 0$  mit  $a \cdot v + b \cdot w = \sigma$

Angenommen:  $a \neq 0$   $a \cdot v = -b \cdot w \mid a^{-1}$  (K Körper)

$$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1}(-bw) = (-a^{-1}b)w \in \langle w \rangle_K = \{cw : c \in K\}$$

$$d \in K$$

$$dv = (-da^{-1}b)w \in \langle w \rangle_K$$

$$\langle v \rangle_K \subseteq \langle w \rangle_K$$

Dann auch  $b \neq 0$ .

Angenommen  $b = 0$ ,  $a \cdot v = -0w = \sigma$

$$v = a^{-1}\sigma = \sigma E \text{ Vertausche Rollen von } v, w : \langle w \rangle_K \subseteq \langle v \rangle_K$$

$$v \in \langle w \rangle_K$$

$$v, w \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow \langle v \rangle_K = \langle w \rangle_K$$

*Beweis.*  $\Rightarrow \checkmark$

$$\Leftarrow v \in \langle v \rangle_K = \langle w \rangle_K$$

$$\Rightarrow v = c \cdot w \text{ für ein } c \in K.$$

$$\Rightarrow \sigma = -v + c \cdot w = (-1)v + c \cdot w$$

$$\Rightarrow v, w \text{ linear abhängig.} \quad \square$$

c)  $e_1, \dots, e_n \in K^n$  sind linear unabhängig.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$$

d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  linear abhängig, linear unabhängig? Für welche  $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\text{gilt } a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

Führt auf LGS für die unbekannten  $a, b, c$

$$1a \quad 3b \quad 2c = 0$$

$$2a \quad 2b \quad 3c = 0$$

$$3a \quad 1b \quad 4c = 0$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c \text{ frei wählbar, } b = -\frac{1}{4}c \quad a = -3b - 2c = -\frac{3}{4}c - 2c = -\frac{5}{4}c$$

$$\text{z.B. } c = 4, b = -1, a = -5$$

$$(-5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Vektoren sind linear abhängig.

## 2.14 Bemerkung

Man kann auch für unendliche Mengen  $M \subseteq V$  lineare Unabhängigkeit definieren.

Jede endliche Teilmenge von  $M$  ist linear unabhängig. Zum Beispiel  $\{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$  linear unabhängig in  $K[x]$ .

## 2.15 Satz !!!

$V$   $K$ -VR,  $v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig

1.  $\Leftrightarrow \exists i : v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j$  für geeignete  $b_j \in K$   
 $\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_K$
2.  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig  
 $\Leftrightarrow$  jedes  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  lässt sich als  $v_1, \dots, v_m$  schreiben.
3. Sind  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig und ist  $V \not\subseteq \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K$ , so sind  $v_1, v_m, v$  linear unabhängig.

*Beweis.* Wie in 0.11, aber  $v_1, \dots, v_m \in V$

□

## 2.16 Definition

Sei  $V$  endliche erzeugter  $K$ -VR.

Eine endliche Teilmenge  $B \subseteq V$  heißt *Basis* von  $V$ , falls

$$(1) V\langle B \rangle_K$$

(2)  $B$  linear unabhängig

( $V = \{\sigma\} : \emptyset$  ist Basis von  $V$ )

## 2.17 Beispiel

a)  $e_1, \dots, e_n$  Basis  $K^n$  (kanonische Basis)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_5 :$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bilden keine Basis von } \mathbb{Z}_5^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_7 :$$

Lineare Unabhängigkeit:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Führt auf LGS für a,b:

$$1 \cdot a + 3 \cdot b = 0$$

$$2 \cdot a + 1 \cdot b = 0$$

Gauß-Algorithmus (funktioniert über jedem Körper  $K$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = 0, a + 3b = 0, a = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}_5} = \mathbb{Z}_7^2$$

$$\text{Sei } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^2$$

Gesucht sind  $a, b \in \mathbb{Z}_7$

Gauß:



$$\begin{aligned}
1 \cdot a + 3 \cdot b &= c \\
2 \cdot a + 1 \cdot b &= d \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 2 & 1 & d \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & d-2c \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & 4d-2c \end{pmatrix} \\
b = 4d - c &= 4d + 6c \\
a = c - 3b = 4c + 2d \\
\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= (4c + 2d) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (4d + 6c) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## 2.18 Satz (Existenz von Basen)

Sei  $V$  endliches Erzeugter  $K$ -VR. Dann enthält jedes endliche Erzeugendensystem von  $V$  eine Basis von  $V$ .

*Beweis.* Sei  $M \subseteq V$  endlich mit  $V = \langle M \rangle_K$ . Ist  $M$  linear unabhängig, so ist  $M$  Basis ✓

ist  $M$  linear abhängig, so existiert nach 2.15a)

$$v \in M \text{ mit } V = \langle M \rangle_K = \langle M \setminus \{v\} \rangle_K$$

Da  $M$  endlich, endet dieses Verfahren mit Basis □

## 2.19 Lemma

$V$  endlich erzeugter  $K$ -VR

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ . Sei  $\sigma \neq w \in V$ .

Dann  $w = \sum_{j=1}^n a_j v_j, a_j \in K$ .

Ist  $a_i \neq 0$ , so ist  $(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$  wieder eine Basis von  $V$

$$\text{Beweis. } w = \sum_{j=1}^n a_j v_j \Rightarrow a_i v_i = w - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j v_j$$

$$\Rightarrow v_i = a_i^{-1} (a_i v_i) = a_i^{-1} w + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i^{-1} a_j) v_j$$

$$v_i \in \langle (B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\} \rangle_K$$

$$V = \langle B \rangle_K = \langle B \cup \{w\} \rangle_K \stackrel{2.15}{=} \langle B \setminus \{v_i\} \cup \{w\} \rangle_K$$

Zeige  $(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$  ist linear unabhängig:

$$\text{Angenommen } \sigma = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 c_j v_j + c w = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 c_i v_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 c a_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 (c_j + c a_j) v_j + c a_i v_i$$

$v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig

$\Rightarrow (1) c a_i = 0$  und

(2)  $c_j + c a_j = 0$  für alle  $j \neq i$

(1)  $c a_i = 0, a_i \neq 0 \Rightarrow c = 0$

(2)  $c_j = 0$  für alle  $i \neq j$ .

Fertig. □

## 2.20 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

(Ernst Steinitz, 1871-1928, Kiel)

$V$  endlich. erzeugter  $K$ -VR,  $B$  Basis von  $V$ ,  $M$  endliche linear unabhängige Teilmenge von  $V$ . Dann existiert  $C \subseteq B$  mit  $|C| = |M|$ , so dass  $(B \setminus C) \cup M$  Basis von  $V$  ist.

Insbesondere  $|M| \leq |B|$ .

*Beweis.* Sei  $|M| = k$

Induktions nach  $k$ .

$k = 0 \checkmark$

$k > 0$ . Sei  $M = \tilde{M} \cup \{w\}$ ,  $|\tilde{M}| = k - 1$

Induktionsvoraussetzung: Existiert  $\tilde{C} \subseteq B$  mit  $|\tilde{C}| = |\tilde{M}|$  und  $(B \setminus \tilde{C}) \cup \tilde{M}$  ist Basis von  $V$

$$w = \sum_{u \in B \setminus \tilde{C}} a_u u + \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$$

Mindestens eines der  $a_u$  ist  $\neq 0$ , denn sonst  $w = \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$ , also  $M = \tilde{M} \cup \{w\}$

linear abhängig  $\square$

Also sei  $a_i \neq 0$  für ein  $u \in B \setminus \tilde{C}$ .

Nach 2.19 ist  $(B \setminus C) \cup M$  Basis von  $V$  wobei  $C = \tilde{C} \cup \{w\}$ .

Fertig. □

## 2.21 Korollar

$V$  endlich erzeugte  $K$ -VR

- a) Je zwei Basen von  $V$  enthalten gleich viele Vektoren
- b) Jede linear unabhängige Teilmenge von  $V$  ist endlich
- c) (Basisergänzungssatz)  
Jede linear unabhängige Menge von Vektoren lässt sich zu Basis ergänzen.

*Beweis.* a)  $B, \tilde{B}$  Basen von  $V$ .

$$2.20: |B| \leq |\tilde{B}|$$

$$: |\tilde{B}| \leq |B|$$

Also  $|B| = |\tilde{B}|$ .

b) Angenommen  $V$  enthält unendlich linear abhängige Teilmenge  $M$ , Sei  $B$  Basis von  $V$ . Wähle  $M_0 \subset M$  mit  $M_0$  endlich,  $|M_0| > |B|$ .

Nach Voraussetzung ist  $M_0$  linear abhängig Widerspruch zu 2.20

c) Sei  $M$  linear unabhängig Teilmenge von  $V$ . Nach b) ist  $M$  endlich.

Sei  $B$  eine Basis von  $V$  2.20:  $\exists c \subseteq B, |c| = |M|$  so dass  $\underbrace{(B \setminus c)}_{\text{Basisergänzung}} \cup M$  Basis.  $\square$

## 2.22 Satz

$V$  endlich erzeugter  $K$ -VR,

$B \subseteq V$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $B$  ist Basis von  $V$
- (2)  $B$  ist maximal unabhängige Teilmenge von  $V$
- (3)  $B$  ist minimales Erzeugungssystem von  $V$  (d.h.  $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K \neq V$  für alle  $w \in B$ .)

*Beweis.* (2)  $\Rightarrow$  (1)

Angenommen  $\langle B \rangle_K \neq V$

Sei  $v \in V \setminus \langle B \rangle_K$ .

2.15c):  $B \cup \{v\}$  linear abhängig  $\nexists$ .  $\langle B \rangle_K = V$   $B$  ist Basis

(1)  $\Rightarrow$  (2): Angenommen  $B \subseteq C$ ,  $C$  linear unabhängig.

2.21  $c$  ist endlich.

2.20  $|c| \leq |B|$  Daher  $B = c$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1). Angenommen  $B$  ist linear abhängig

2.15a):  $\exists w \in B : V = \langle B \rangle_K = \langle B \setminus \{w\} \rangle_K \nexists$

$B$  ist linear unabhängig also Basis.

(1)  $\Rightarrow$  (3). Angenommen  $\exists w \in B$  mit  $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K = V_i = \langle B \rangle_K$

2.15a):  $B$  ist linear abhängig  $\nexists$  □

## 2.23 Definition

$V$   $K$ -VR.

a) Ist  $V$  endlich erzeugt,  $B$  ist Basis von  $V$ ,  $|B| = n$ , so hat  $V$  Dimension  $n$ ,  
 $\dim_K(V) = n$  (oder einfach  $\dim(V) = n$ )

b) ( $V$  heißt nicht endlich erzeugt, so heißt  $V$  *unendlich-dimensional*)  
 (Also endlich erzeugt = endlich-dimensional)

## 2.24 Korollar

$V$   $K$ -VR,  $\dim_K(V) = n$ ,  $B \subseteq V$ ,  $|B| = n$

a) Ist  $B$  linear unabhängig, dann ist  $B$  Basis.

b) Ist  $\langle B \rangle_K = V$ , dann ist  $B$  Basis

*Beweis:* Folgt aus 2.22

## 2.25 Beispiel

a)  $\dim_K(K^n) = n$ , da  $e_1, \dots, e_n$  Basis.

b)  $V = \mathbb{R}^4$   
 $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$   
 $\quad \quad \quad = u_1 \quad = u_2 \quad \mathbb{R}$

$u_1, u_2$  sind linear unabhängig.

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nur für } a, b = 0$$

$\{u_1, u_2\}$  Basis von  $U$   $\dim_R(U) = 2$ .

Ergänze  $u_1, u_2$  zu Basis von  $V = \mathbb{R}^4$ :

*Erste Möglichkeit:*

$e_1, e_2, e_3, e_4$  kanonische Basis des  $\mathbb{R}^4$

$$U_1 = 1e_1 + 2e_2 + 0e_3 + 1e_4$$

2.19:  $U_1, e_3, e_4$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

$$U_2 = au_1 + be_2 + ce_3 + de_4 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \quad c = 1$$

2.19:  $u_1, u_2, e_3, e_4$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

*Zweite Möglichkeit:*

2.15c):

$v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig

$$v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle \Rightarrow v_1, \dots, v_m \text{ linear unabhängig. } U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_1 \notin U$  (1. Koordinate  $\neq$  4. Koordinate)

2.15c)  $U_1, U_2, e_1$  linear unabhängig.

$\langle u_1, u_2, e_1 \rangle = ?$

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a+c \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_2 \notin U$

2.15c):  $u_1, U_2, e_1, e_2$  linear unabhängig

2.24:  $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

**2.26 Satz**

$V$   $K$ -VR,  $\dim_K(V) = n$ .

a) Ist  $U$  Unterraum von  $V$ , so ist  $\dim_K(U) \leq n$ . Ist  $\dim_K(U) = n$ , so ist  $U = V$ .

b) (Dimensionenformel)

$U, W$  Unterräume von  $V$ , so gilt:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$A, B$  endliche

Mengen

$$(|A \cup B| =$$

$$|A| + |B| - |A \cap B|)$$

*Beweis.* a) Ergänze Basis von  $U$  zu Basis von  $V$ . (2.21c)

b) Basis von  $U \cup W \rightarrow$  Basis von  $U$

$\rightarrow$  Basis von  $w$  (WHK 9.23)

□

**2.27 Definition**

$V$   $K$ -VR,  $\dim_K(V) = n$ ,  $B = (v_1, \dots, v_n)$  geordnete von  $V$ .

Jedes  $v \in V$  hat *eindeutige* Darstellung  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad a_i \in K \quad 2.15b)$

$(a_1, a_n)$  (in dieser Anordnung) heißen *Koordinaten* von  $V$  bezüglich  $B$ ) Insbesondere  $v_i$  hat Koordinaten  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

**2.28 Beispiel**

a)  $V = K^n, (e_1, \dots, e_n) = B$  kanonische Basis.

Koordinaten von  $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  bezüglich  $B: (a_1, \dots, a_n)$

*Kartesische Koordinaten*

(R. Decartes, 1596-1650)

$$b) V = \mathbb{Q}^3, B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$B$  ist geordnete Basis von  $V$ . (nachprüfen)

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  bezüglich  $B$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gauß Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.4 \end{pmatrix}$$

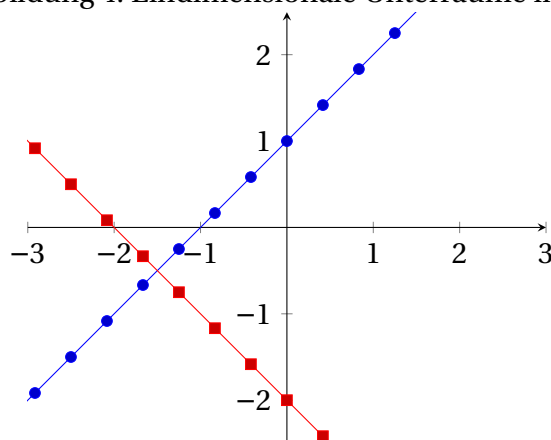
$$a_3 = -0,4$$

$$a_2 = 0,8$$

$$a_1 = 0,2$$

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  bezüglich  $B \left( \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5} \right)$

Abbildung 4: Eindimensionale Unterräume im  $\mathbb{R}^2$



**2.29 Definition**

$V$   $K$ -VR,  $U$  Unterraum von  $V$ ,  $w \in V$ . Dann heißt  $w + U := \{w + u : u \in U\}$  *affiner Unterraum* von  $V$ .

( $w + U$  ist im allgemeinen kein Untervektorraum)

$$\dim(w + U) := \dim(U)$$

**2.30 Satz**

$V$   $K$ -VR,  $U, W$  Unterräume von  $V$ ,

- a)  $w + U$  ist Unterraum ①  
 $\Leftrightarrow W \in U$  ②  
 $\Leftrightarrow w + U = U$  ③
- b) Ist  $v \in w + U$ , so ist  $v + U = w + U$
- c) Sind  $v_1 + U, v_2 + W$  affine Unterräume, so ist entweder  $(v_1 + U) \cap (v_2 + W) = \emptyset$  oder es existiert  $v \in V$  mit  $(v_1 + U) \cup (v_2 + W) = v + (U \cup W)$  affiner Unterraum.

*Beweis.* ③  $\Rightarrow$  ① ✓

a) ①  $\Rightarrow$  ②

$$w + U \text{ Unterraum} \Rightarrow \sigma \in w + U$$

$$\Rightarrow \exists u \in U \text{ mit } w + u = \sigma$$

$$\Rightarrow w = -u \in U$$

②  $\Rightarrow$  ③:  $w \in U, w + U \subseteq U$  (da  $U$  Unterraum)

$$\text{Sei } u \in U. \text{ Dann } u - w \in U \quad u = w + (u - w) \in w + U$$

b)  $v \in w + U, v = w + u$  für ein  $u \in U$

$$v + U = w + \underbrace{u + U}_{=U \text{ nach a)}} = w + U$$

c) Angenommen  $(v_1 + U) \cup (v_2 + W) \neq \emptyset$

$$\text{Sei } v \in (v_1 + U) \cup (v_2 + W)$$

$$\text{Nach b) } v + U = v_1 + U$$

$$v + W = v_2 + W$$



$$\begin{aligned} (v_1 + U) \cup (v_2 + W) &= (v + U) \cup (v + W) \\ &= v + (U \cap W) \end{aligned}$$

$\supseteq \checkmark$

$$\subset x \in (v + U) \cup (v + W), x = v + u = v + w, u \in U, w \in W$$

$$u - w \in U \cap W.$$

$$x = v + u = v + (U \cap W)$$

□

### 2.31 Bemerkung

affine Unterräume:

spezielle Rolle von  $\sigma$  ist aufgehoben. Zur Beschreibung eines  $x \in K^n$  kann man jeden Punkt  $p$  als „Nullpunkt“ wählen und dann die Koordinaten von  $x$  bezüglich einer nach  $p$  „verschobenen“ Basis berechnen.  $p$  hat Koordinaten  $(p_1, \dots, p_n)$  bezüglich Basis  $v_1, \dots, v_n$

Ursprüngliche Koordinatensystem I :  $\sigma, v_1, \dots, v_n$

Neues Koordinatensystem II:  $:p, v_1 + p, \dots, v_n + p$

$x$  hat Koordinaten  $(a_1, \dots, a_n)$  bezüglich I

$\Rightarrow$  Koordinaten von  $x$  bezüglich II =  $(a_1 - p_1, \dots, a_n - p_n)$

= Koordinaten von  $x - p$  bezüglich I

$x$  hat Koordinaten  $(a'_1, \dots, a'_n)$  bezüglich II

$\Rightarrow x$  hat Koordinaten  $(a'_1 + p_1, \dots, a'_n + p_n)$  bezüglich I. (Robotik)

### 2.32 Bemerkung

a) In Mathe II:

$x \times m$  über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Das geht auch bei den Körpern  $K$ .

Addition, Multiplikation mit Skalaren, Matrixmultiplikation werden analog definiert.

Es gelten die gleichen Rechenregeln wie in (Mathe II, 9.5 [www.ffgti.org](http://www.ffgti.org))

b) In Mathe II, wurden Matrizen verwendet zur Beschreibung von LGS  $\begin{matrix} A \\ m \times n \end{matrix} x =$

$$\begin{matrix} b \\ n \times 1 \end{matrix} x =$$

Analog: LGS über beliebigen Körpern  $K$ . GaußAlgorithmus funktioniert analog.

$$(a_1, \dots, a_n), a_1 \neq 0$$

$$\rightarrow (1, a_1^{-1}, a_2, \dots)$$

(K Körper!)

**2.33 Satz**a) Die Menge der Lösungen eines *homogenen* LGS.

$$A \cdot x = 0$$

$$(A \in \mathcal{M}_{n,m}(K), x \in K^m$$

$$0 \text{ ist Nullvektor in } K^n)$$

b) Ist das *inhomogene* LGS

$$A \cdot x = b$$

lösbar und ist  $x_0 \in K^n$  eine spezielle Lösung (d.h.  $A \cdot x_0 = b$ ), so erhält man alle Lösungen von  $A \cdot x = b$  durch  $\{x_0 + y : Ay = 0\}$ ,  $y$  = Zugehöriges homogenes LGS.

Ist  $U$  der Lösungsraum von  $Ax = 0$ , so ist die Lösungsmenge von  $Ax = B$  gerade der affine Unterraum  $x_0 + U$  von  $K^n$

*Beweis.* a) Folgt aus Rechenregeln für Matrizen: $x_1, x_2 \in K^m$  Lösungen von  $A \cdot x = 0$ .

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$$

 $x_1 + x_2$  Lösung. $a \in K$ .

$$A(a \cdot x_1) = a \cdot (Ax_1) = a \cdot 0 = 0$$

 $a \cdot x_1$  Lösung.Null-Lösung existiert. b)  $Ax_0 = b$ . Sei  $y \in K^m$  mit  $Ay = 0$ .

$$A \cdot (x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$$

 $x_0 + y$  ist Lösung von  $Ax = b$ Zeige: Jede Lösung von  $Ax = b$  ist von der Form  $x_0 + y$  für ein  $y$  mit  $Ay = 0$ .Sei  $x$  Lösung von  $Ax = b$ .

$$x = x_0 + (x - x_0)$$

$$A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$$

□

## 2.34 Beispiel

gegebenes LGS:

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & & x_4 & = 1 \end{array}$$

Über  $\mathbb{Q}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$x_3, x_4$  Frei wählbar.

Zugehöriges homogenes System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge = Unterraum.

Basis des Lösungsraum:

Setze die frei wählbaren  $x_4, x_3$ .

- $x_4 = 1, x_3 = 0 \quad \leadsto \quad \text{Lösung}$
- $x_4 = 0, x_3 = 1 \quad \leadsto \quad \text{Lösung}$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ** \\ ** \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jede Lösung  $d \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Lösungsraum vom zugehörigen homogenen LGS:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

## 3 Lineare Abbildungen

### 3.1 Definition

$V, W, K$ -VR

a)  $\alpha : V \longrightarrow$  heißt ( $K$ -) *lineare Abbildung* (oder *Vektorraum-Homomorphismus*)

falls:

$$\text{Additivität} \quad \leftarrow (1) \quad \alpha(u + v) = \alpha(u) + \alpha(v) \text{ für alle } u, v \in V$$

$$\text{Homogenität} \quad \leftarrow (2) \quad \alpha(kv) = k\alpha(v) \text{ für alle } k \in K, v \in V$$

### 3.2 Bemerkung

$\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung.

a)  $\alpha(\sigma) = \sigma$

b)  $\alpha\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i \alpha(v_i)$

*Beweis.* a)  $\alpha(\sigma) = \alpha(\sigma + \sigma) = \alpha(\sigma$

b) Definition + Induktion nach  $n$ . □

### 3.3 Beispiel

a) Nullabbildung  $\alpha : V \rightarrow W$

$$\alpha(v) = 0 \text{ für alle } v \in V$$

b)  $c \in K$

$$\alpha : V \rightarrow V, \alpha(v) = c \cdot v \text{ lineare Abbildung } c = 1 : id_v$$

$$\text{c) } \zeta : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - x_3 \end{cases}$$

Spiegelung an der  $\{x_1, x_2\}$ -Ebene in  $\mathbb{R}^3$

$$\text{d) } \alpha = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \rightarrow x_1^2 \end{cases}$$

nicht linear

**3.4 Satz**

Sei  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ .

Definiere  $\alpha : K^n \rightarrow K^m$  (Spaltenvektor)

durch  $\alpha(x) = A \cdot x \in K^m$  für alle  $x \in K^n$

Dann ist  $\alpha$  lineare Abbildung

*Beweis.* folgt aus Rechenregeln für Matrizenmultiplikation.:

$$\begin{aligned}\alpha(x+y) &= A(x+y) = Ax + Ay \\ &= \alpha(x) + \alpha(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(k \cdot x) &= A(kx) = k \cdot (Ax) \\ &= k\alpha(x)\end{aligned}$$

□

Beispiel aus 3.3 a)-c)

- $V = K^n$  Nullabbildung  $K^n \rightarrow K^m$

Von der Form in 3.4 mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  Nullmatrix

- $\alpha = \begin{cases} K^n & \rightarrow K^n \\ x & \mapsto cx (c \in K) \end{cases}$

3.4 mit  $A = \begin{pmatrix} c & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c \end{pmatrix}$

- Spiegelung aus 3.3c)

3.4 mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

Später: Alle linear Abbildung.  $K^n \rightarrow K^m$  sind von der Form 3.4

**3.5 Satz**

$U, V, W$   $K$ -VR.

- a)  $\alpha, \beta : V \rightarrow W$  linear so *auch*  $\alpha + \beta$  (definiert durch  $(\alpha + \beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v) \forall v \in V$ ),  
und  $k \cdot \alpha$  (definiert durch  $(k \cdot \alpha)(v) := k \cdot \alpha(v) \forall v \in V$  linear von  $V$  nach  $W$ )
- b)  $\alpha : V \rightarrow W, \gamma : W \rightarrow U$  linear. so auch  $\gamma \circ \alpha : V \rightarrow U$  linear A (oft  $\gamma\alpha$  statt  $\gamma \circ \alpha$ )

*Beweis.* a) ADDITIVITÄT:

$$\begin{aligned} u, v &\in V \\ (\alpha + \beta)(u) + (\alpha + \beta)(v) &= \alpha(u) + \beta(u) + \alpha(v) + \beta(v) \\ &= \alpha(u) + \alpha(v) + \beta(v) + \beta(u) \\ &= \alpha(u + v) + \beta(u + v) \\ &= (\alpha + \beta)(u + v) \end{aligned}$$

HOMOGENITÄT:

$$\begin{aligned} v &\in V \quad k \in K \\ (\alpha + \beta)(kv) &= (k\alpha + k\beta)(v) \\ &= k(\alpha + \beta)(v) \end{aligned}$$

- b)  $U, V, W$   $K$  Vektorräume

ADDITIVITÄT:

$$\begin{aligned} u, v &\in V \\ (\gamma \circ \alpha)(u) + (\gamma \circ \alpha)(v) &= \gamma(\alpha(u)) + \gamma(\alpha(v)) \\ &= \gamma(\alpha(u) + \alpha(v)) \\ &= \gamma(\alpha(u + v)) \\ &= (\gamma \circ \alpha)(u + v) \end{aligned}$$

HOMOGENITÄT:

$$v \in V \quad k \in K$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha \circ \gamma)(kv) \\
&= \gamma(\alpha(kv)) \\
&= \gamma(k\alpha(v)) \\
&= k\gamma(\alpha(v)) \\
&= k(\gamma \circ \alpha)(v)
\end{aligned}$$

□

### 3.6 Satz

$\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung

- a) Ist  $U$  Unterraum von  $V$ , so ist  $\alpha(U) := \{\alpha(u), u \in U\}$  Unterraum von  $W$ .  
 Insbesondere ist  $\alpha(V)$ , *Bild von  $\alpha$* , Unterraum von  $W$ ,
- b) Ist  $U$  endlich-dimensional, so auch  $\alpha(U)$  und es gilt  $\dim(\alpha(U)) \leq \dim(U)$

*Beweis.* a),  $\alpha(U_1), \alpha(U_2) \in \alpha(U)$

dass heißt  $u_1, u_2 \in U$ , so  $\alpha(U_1) + \alpha(U_2) = \alpha(u_1 + u_2) \in \alpha(U)$

$k \in K$

$k \cdot \alpha(U_1) = \alpha(ku_1) \in \alpha(U)$

b) Sei  $u_1, \dots, u_k$  Basis von  $U$

$u \in U, u = \sum_{i=1}^k c_i u_i, c_i \in K$

$\alpha(u) = \sum_{i=1}^k c_i \alpha(u_i)$

Also :  $\alpha(U) = \langle \alpha(u_1), \dots, \alpha(u_k) \rangle_K$

Nach ??  $\{\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_k)\}$

$\dim(\alpha(U)) \leq k \leq \dim(U)$

□

### 3.7 Definition

$V, W$   $K$ -VR,  $V$  endlich dimensional.  $\alpha : V \rightarrow W$  linear Abbildung.

Dann  $\dim(\alpha(V)) =: \text{rg}(\alpha)$ , *Rang von  $\alpha$*

**3.8 Satz**

$V, W$   $K$ -VR,  $\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung

a)  $\ker(\alpha) := \{v \in V : \alpha(v) = \sigma\},$

*Kern von  $\alpha$ , ist Unterraum von  $V$ .*

b)  $\alpha$  injektiv  $\Leftrightarrow \ker(\alpha) = \{\sigma\}$

c) Ist  $\alpha$  bijektiv, so ist die Umkehrabbildung  $\alpha^{-1} : W \rightarrow V$  bijektiv *und linear*

*Beweis.* a)  $v_1, v_2 \in \ker(\alpha)$

$$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$$

$$= \sigma + \sigma = \sigma$$

Also:  $v_1 + v_2 \in \ker(\alpha)$

$$\alpha(k \cdot v_1) = k \cdot \alpha(v_1) = k \cdot \sigma = \sigma$$

Also  $k v_1 \in \ker(\alpha)$  b)  $\Rightarrow: \checkmark$ , denn falls  $\sigma \neq v \in \ker(\alpha)$  so  $\alpha(v) = \sigma = \alpha(\sigma)$ ,  $\alpha(\sigma), \alpha$  nicht injektiv.  $\nexists$

$\Leftarrow$ : Angenommen  $v_1, v_2 \in V$  mit  $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$ .

Zu zeigen:  $v_1 = v_2$ .

$$\sigma = \alpha(v_1) - \alpha(v_2)$$

$$= \alpha(v_1 - v_2)$$

$\alpha$  linear.

$$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker(\alpha) = \{\sigma\}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = \sigma, v_1 = v_2.$$

c) Zu zeigen:  $\alpha^{-1}$  ist linear.

Seien  $w_1, w_2 \in W$ .

$$\text{Zeige } \alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^{-1}(w_1) + \alpha^{-1}(w_2)$$

$$\alpha \text{ bijektiv} \Rightarrow v_1, v_2 \in V \text{ mit } \alpha(v_1) = w_1, \alpha(v_2) = w_2. v_1 = \alpha^{-1}(w_1), v_2 = \alpha^{-1}(w_2).$$

$$\alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^{-1}(\alpha(v_1) + \alpha(v_2)) = v_1 + v_2 = \alpha^{-1}(w_1) + \alpha^{-1}(w_2)$$

Homogenität analog. □



### 3.9 Beispiel

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \text{ ist lineare Abbildung, da}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad 3.4$$

$$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bild von  $\alpha(e_1), \alpha(e_2), \alpha(e_3)$  linear abhängig.

$$\alpha(\mathbb{R}^3) = \langle \alpha(e_1), \alpha(e_2) \rangle$$

$$\text{rg} = 2$$

$U = \langle e_2, e_3 \rangle$  2-dimensional Unterraum von  $\mathbb{R}^3$

$\alpha(U) = \langle \alpha(e_2) \rangle = \langle e_3 \rangle$  1-dimensional.

$$\ker \alpha = ?$$

$$\text{Suche alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{LGS : } x_1 = 0$$

$$2x_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\ker(\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2c \\ c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ 1-dimensional.}$$

**3.10 Satz**

$V, W$   $K$ -VR,  $\dim(V) = n$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sei Basis von  $V$ .

$w_1, \dots, w_n \in W$  beliebig (nicht notwendig verschieden). Dann existiert genau eine lineare Abbildung  $\alpha : V \rightarrow W$  mit  $\alpha(v_i) = w_i, i = 1, \dots, n$ , nämlich

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) := \sum_{i=1}^n c_i w_i, (\star)$$

Also: kennt man die Bilder einer Basis so kennt man die lineare Abbildung vollständig.

*Beweis.* Die in  $(\star)$  definiert Abbildung  $\alpha$  ist linear und es gilt  $\alpha(v_i) = w_i$  für  $i = 1 \dots n$  (Nachrechnen)

$\alpha$  eindeutig:

Angenommen  $\beta : V \rightarrow W$  linear mit  $\beta(v_i) = w_i$ , so gilt  $\beta\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i \beta(v_i) =$

$$\sum_{i=1}^n c_i w_i = \alpha\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right)$$

$$\alpha = \beta$$

□

Beispiel:

$$V = W = \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = ?$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -51 \\ 9 \end{pmatrix}$$

### 3.11 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^n, \alpha : V \rightarrow V$$

Drehung um Winkel  $\phi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ , um Nullpunkt (entgegen Uhrzeigersinn).

$\alpha$  ist linear Abbildung (elementar geometrisch).

$$\alpha(e_1) = \alpha \phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\alpha(e_2) = \alpha \phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

3.10

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(x) = x_1 \alpha(e_1) + x_2 \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) x_1 - \sin(\phi) x_2 \\ \sin(\phi) x_1 + \cos(\phi) x_2 \end{pmatrix}$$

Drehmatrix

### 3.12 Satz

$\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung:

$\dim(V) = n$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ .

a)  $\alpha$  ist injektiv  $\Rightarrow \{\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)\}$  ist linear unabhängig.

b)  $\alpha$  surjektiv  $\Leftrightarrow W = \langle \alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n) \rangle_K$

c)  $\alpha$  bijektiv  $\Leftrightarrow \{\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)\}$  Basis von  $W$

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$

$$\text{Zeige } \sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) = \sigma$$

$$\Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i \in \ker(\alpha) = \{\sigma\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i = \sigma \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

$$\Leftarrow: \text{Zeige } \ker(\alpha) = \{\sigma\}$$

Angenommen  $\sum_{i=1}^n c_i v_i \in \ker(\alpha) \Rightarrow \alpha(\sum_{i=1}^n c_i v_i) = 0$   
 $\stackrel{\alpha \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) \stackrel{\alpha(v_1) \dots \alpha(v_n) \text{ linear unabhängig}}{=} 0$   
 $c_1 = \dots = c_n = 0$   
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i v_i = 0 \checkmark$  b)  $\alpha(V) = \langle \alpha(v_1) \dots \alpha(v_n) \rangle$  Behauptung folgt. c) Folgt aus a) und b) □

### 3.13 Korollar

Seien  $V, W$   $K$ -VR,  $\dim(V) = \dim(W)$ .

Dann sind  $V$  und  $W$  isomorph.

*Beweis.* Sei  $v_1, \dots, v_n$  Basis von  $V$ ,  $w_1, \dots, w_n$  Basis von  $W$ . Nach 3.10 existiert genau eine lineare Abbildung  $\alpha(v_i) = w_i$ . Nach 3.12c) ist  $\alpha$  bijektiv  $V \cong W$ . □

### 3.14 Korollar – Wichtigster Spezialfall

$V = n - \dim$ . VR über  $K$ ,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  geordnete Basis von  $V$ . Dann ist die Abbildung.

$$\kappa_{\mathcal{B}} : \begin{cases} V & \rightarrow K^n \text{ Zeilenvektor} \\ \sum_{i=1}^n c_i v_i & \mapsto (c_1, \dots, c_n) \end{cases}$$

(Koordinatenabbildung bezüglich  $\mathcal{B}$ ) ein Isomorphismus. Dass heißt  $V \cong K^n$ .

*Beweis.*

$$\kappa_{\mathcal{B}} = (0, \dots, 0, \underset{\downarrow}{1}, 0, \dots, 0)$$

$v_i$  werden auf die kanonische Basis des  $K^n$  abgebildet.  $\kappa_{\mathcal{B}}$  ist Isomorph □

### 3.15 Satz (Dimensionsformel)

$V$  endlich dimensional.  $K$ -VR  $\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung.

$$\begin{aligned} \text{Dann: } \dim(V) &= \text{rg}(\alpha) + \dim(\ker(\alpha)) \\ &= \dim(\alpha(V)) + \dim(\ker(\alpha)) \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $u_1, \dots, u_k$

Basis von  $\ker(\alpha)$  Basisergänzungssatz 2.21

Ergänze zu Basis  $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$  von  $V$ . Sei  $U = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle_K$  Unterraum von  $V$ .

$$\ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}:$$

Angenommen  $V \in \ker(\alpha) \cap U$

$$v = \sum_{i=1}^k c_i u_i = \sum_{i=k+1}^n c_i u_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k c_i u_i + \sum_{i=k+1}^n (-c_i) u_i = \sigma$$

$$c_1 \dots c_n = 0$$

□

$\ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}$ , also  $\alpha|_U$  ist injektiv, dass heißt  $\dim(V) = \dim(\alpha(U))$

$$v \in V, v = \sum_{i=1}^k c_i u_i + \sum_{i=k+1}^n c_i u_i$$

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^k c_i \alpha(u_i) + \sum_{i=k+1}^n c_i \alpha(u_i) \in \alpha(U)$$

$$V = \ker(\alpha) + U$$

$$\dim(v) = \dim(\ker(\alpha)) + \dim(U) - \dim(\ker(\alpha) \cap U)$$

$$= \dim(\ker(\alpha)) + \dim(\alpha(U)) = \dim(\ker(\alpha)) + \dim(\alpha(V)) = \dim(\ker(\alpha)) + \text{rg}(\alpha)$$

### 3.16 Korollar

$V, W$  endlich-dimensionaler  $K$ -VR mit  $\dim(V) = \dim(W)$ ,  $\alpha : V \rightarrow W$  linear.

Dann gilt:

$\alpha$  ist injektiv  $\Rightarrow \alpha$  ist surjektiv  $\Rightarrow \alpha$  ist bijektiv.

*Beweis.*

$$\alpha \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow \alpha(V) = W$$

$$\Leftrightarrow \dim(\alpha(V)) = \dim(W) = \dim(V)$$

$$\stackrel{3.15}{\Leftrightarrow} \dim(\ker(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \{\sigma\} \Leftrightarrow \alpha \text{ ist injektiv}$$

□

## 4 Der Rang einer Matrix und lineare Gleichungssysteme

### 4.1 Definition

Der *Zeilenrang* einer Matrix  $A$  über Körper ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen in  $A$ . Dass heißt sind  $z_1, \dots, z_m$  die Zeilen von  $A$  so ist Zeilenrang von  $A = \dim = (\langle z_1, \dots, z_m \rangle)$

Analog : Spaltenrang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Spaltenrang von  $A = 2$

Zeilenrang von  $A = 2$

### 4.2 Satz

Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der Zeilenrang einer Matrix nicht.

(Analog Spaltenumformung/Spaltenrang)

*Beweis.*  $\dim(\langle z_1, \dots, a \cdot z_i, \dots, z_m \rangle, a \neq 0$   
 $\langle z_1, \dots, z_m \rangle = \langle z_1, \dots, z_i + az_j, \dots, z_m \rangle, i \neq j$

□

### 4.3 Bemerkung

Zeilenrangbestimmung von  $A$ :

Bringe  $A$  mit Gauß auf Zeilenstufenform (ändert Zeilenrang nicht)

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\star \neq 0$

Zeilenrang = Anzahl der von Nullzeilen  
verschiedenen Zeilen

#### 4.4 Korollar

Sei  $Ax = b$  ein LGS über  $K$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ ,  $x \in K^n$ ,  $b \in K^m$  ( $m$  Gleichungen,  $n$  Unbekannte)

- a)  $Ax = b$  ist genau dann lösbar, wenn Zeilenrang von  $A = \text{Zeilenrang von } (A \mid b)$
- b)  $Ax = b$  ist genau dann eindeutig lösbar, wenn: Zeilenrang von  $A = \text{Zeilenrang von } (A \mid b) = n$  (= Anzahl der Unbekannten)
- c) Dimension des Lösungsraums von  $Ax = 0 = n - \text{Zeilenrang von } A$ .

#### 4.5 Satz

Sei  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ ,

$$\alpha = \begin{cases} K^n & \rightarrow K^m \\ x & \mapsto Ax \end{cases}$$

$\alpha$  ist lineare Abbildung und es gilt:

$\text{rg}(\alpha) = \text{Spaltenrang von } A$ .

*Beweis.*  $\alpha(K^n) = \langle \alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n) \rangle$

$e_1, \dots, e_n$  kanonische Basis von  $K^n$

$$\alpha(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 i \\ a_2 i \\ \vdots \\ a_m i \\ = \end{pmatrix} \text{ i-te Spalte von } A =: s_i$$

$$\text{rg} = \dim(\alpha(K^m)) = \dim(\langle \alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n) \rangle) = \text{Spaltenrang von } A.$$

□

## 4.6 Satz und Definition

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ .

Dann ist Zeilenrang von  $A$  = Spaltenrang von  $A$ .

Diese gemeinsame Zahl heißt *Rang von A*,  $\text{rg}(A)$ .

*Beweis.* Betrachte homogenes LGS

$$Ax = 0 \quad (*)$$

Dimension des Lösungsraumes von  $(*)$  = Dimension von  $\ker(\alpha)$ ,  $\alpha$  in 4.5

‘Satz (Dimensionsformel)’ on page 68  $\dim(\ker(\alpha)) = n - \text{rg}(\alpha) = n - \text{Spaltenrang von } A$ . Korollar  $\dim$  Lösungsraum von  $Ax = 0 = n - \text{Zeilenrang von } A$  □

## 4.7 Korollar

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K).$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$$

*Beweis.* Zeilenrang von  $A$  = Spaltenrang von  $A^t$  □

## 4.8 Satz

Sei  $V$  endlich dimensionaler VR

$\mathcal{B}$  geordnete Basis von  $V$   $u_1, \dots, u_m \in V$  beliebig.

Seien  $K_{\mathcal{B}}(u_i)$  die Koordinatenvektoren von  $u_i$  bezüglich  $\mathcal{B}$  (Zeilenvektoren).



Dann gilt :  $\dim(\langle u_1, \dots, u_m \rangle) = \text{rg} \begin{pmatrix} K_{\mathcal{B}}(u_1) \\ \vdots \\ K_{\mathcal{B}}(u_m) \end{pmatrix}$  lässt sich durch Gauß Algorithmus bestimmen.

*Beweis.* Sei  $U = \langle u_1, u_m \rangle$

$K_{\mathcal{B}} : V \rightarrow K^n$  wie in 3.14.

$K_{\mathcal{B}}$  Isomorphismus :  $\dim(U) = \dim(K_{\mathcal{B}}) = \text{Zeilenrang von} \begin{pmatrix} K_{\mathcal{B}}(u_1) \\ \vdots \\ K_{\mathcal{B}}(u_m) \end{pmatrix}$  □

## 4.9 Beispiel

$V$   $\mathbb{R}$ -VR aller Polynome von Grad  $\geq 3$ ,  $\dim(V) = 4$ ,

Basis  $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ ,  $U = \langle 1 + 6x^2 + x^3, 2x - 2x^2 + 3x^3, 3x + x^2, 2 + x15x^2 - x^3 \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 15 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 4 & -4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rand der Matrix = 3,  $\dim(U) = 3$

## 5 Matrizen und lineare Abbildungen

### 5.1 Definition

Seien  $V, W$   $K$ -VR,  $\mathcal{B} = (v_1, v_n)$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  geordnete Basen von  $V$  bzw.  $W$ .

Sei  $\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Nach 3.10 ist  $\alpha$  eindeutig bestimmt durch

$\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)$

$$(v = \sum_{i=1}^n b_i v_i \Rightarrow \alpha(v) = \sum_{i=1}^n b_i \alpha(v_i))$$

Stelle  $\alpha(v_1) \dots \alpha(v_n) \in W$  jeweils als Linearkombination von  $w_1, \dots, w_m$  dar,

$$\alpha(v_1) = a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m$$

$$\alpha(v_2) = a_{12} w_1 + \dots + a_{m2} w_m$$

$\vdots$

$$\alpha(v_n) = a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}v_m$$

(Ordnung der Indizes beachten!)

Dann heißt die  $m \times n$ - Matrix

$$A^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die *Darstellungsmatrix* von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ . (In den Spalten stehen die Koordinaten von  $\alpha(v_1)$  bezüglich  $\mathcal{C}$ )

(Abgekürzte Schreibweise  $A_\alpha$ , falls  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  aus Kontext klar).

Falls  $V = W$  und  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ , so  $A^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} := A_\alpha^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$

## 5.2 Bemerkung

a) Bei Kenntnis von  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  ist  $\alpha$  durch  $A_\alpha^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  eindeutig bestimmt:

Sei  $\sigma \in V$

## 5.3 Beispiel

a)  $V = W = \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha$  Drehung um  $\sigma$  mit Winkel  $\phi$  (entgegen Uhrzeigersinn)

Nach Beispiel:

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = (e_1, e_2)$$

$$\alpha(e_1) = \cos(\phi)e_1 + \sin(\phi)e_2, \quad \alpha(e_2) = -\sin(\phi)e_1 + \cos(\phi)e_2$$

(3.11)

$$A_\alpha^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

b) Nullabbildung.

$$\beta: \begin{cases} V \rightarrow W \\ V \rightarrow \sigma \end{cases}$$

hat bezüglich aller Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  Nullmatrix als Darstellungsmatrix

c)  $V, \mathcal{B}, id_x$

$$A_{id_x}^{\mathcal{B}} = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)  $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2), \mathcal{C} = (e_2, e_1)$

$$A_{id_x}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e)  $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2)$

$\sigma$  Spiegelung an  $\langle e_1 \rangle$ , das heißt  $\varsigma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$A_{\sigma}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\sigma}^{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

## 5.4 Satz

$v, w, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha : V \rightarrow W$  linear.

$\kappa_{\mathcal{C}}(\alpha(v))^t = A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$  Spaltenvektoren.

*Beweis folgt aus Bemerkung.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Basis } \mathcal{B} & \xrightarrow{\alpha} & \text{Basis } \mathcal{C} \\ V & & W \\ (\kappa_{\mathcal{B}})\downarrow & & \downarrow(\kappa_{\mathcal{C}}) \\ K^n & \xrightarrow{\text{Multi. mit Matrix } A_{\alpha}} & K^n \end{array}$$

## 5.5 Beispiel

$V, W$   $\mathbb{R}$ -VR,  $\dim(v) = 4$ ,

$\dim(w) = 3, \mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3), \alpha : V \rightarrow W$ .

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V = 5v_1 - 6v_2 + 7v_3 - 2v_4$$

$$\alpha(v) = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$5.4: \alpha(v) = 7w_1 + w_2 - w_3$$

## 5.6 Korollar

Jede lineare Abbildung  $K^n \rightarrow K^m$  ist von der Form  $\alpha(x) = A \cdot x$  für eine  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ .

Es ist  $A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ , wobei  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  die kanonischen Basen von  $K^n$  bzw.  $K^m$  sind.

$$\text{Beweis. } x \in K^m \quad \kappa_{\mathcal{B}}(x)^t = x \quad \kappa_{\mathcal{C}}(\alpha(x))^t = \alpha(x)$$

Behauptung folgt aus 5.4

□

## 5.7 Satz

$\alpha, \beta$  lineare Abbildung  $U \rightarrow V$

$\gamma$  lineare Abbildung  $V \rightarrow W$ .

$\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  geordnete Basen von  $U, V, W$

$$\begin{aligned} \text{a) } A_{\alpha+\beta}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} &= A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} + A_{\beta}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \\ A_{k\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} &= k \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \quad (k \in K) \end{aligned}$$

$$\text{b) } A_{\gamma \circ \alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = A^{\mathcal{C}, \mathcal{D}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \quad (\text{Reihenfolge beachten}). \text{ Beweisen: a) nachrechnen}$$

Matrix  
Mult.

$$\begin{aligned} \text{c) } \mathcal{B} &= (u_1, \dots, u_l) \\ \mathcal{C} &= (v_1, \dots, v_m) \quad \mathcal{D} = (w_1, \dots, w_n) \\ A^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} &= (a_{ij}) \quad n \times l\text{-Matrix} \\ A^{\mathcal{C}, \mathcal{D}} &= (b_{ij}) \quad n \times m\text{-Matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ \alpha)(u_i) &= \gamma(\alpha(u_i)) \\
&= \gamma\left(\sum_{j=1}^m a_{ji} v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^m a_{ji} \left(\sum_{k=1}^n b_{kj} w_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m b_{kj} a_{ji}\right)}_{\text{Koeff}(k,i)} w_k
\end{aligned}$$

## 5.8 Beispiel

$$U = V = W = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = (e_1, e_2)$$

$\alpha$  Drehung um  $\phi$ ,

$\beta$  Drehung um  $\psi$  (jeweils um 0)

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$A_{\beta}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$\beta \circ \alpha$  Drehung um  $\phi + \psi$

$$A_{\beta \circ \alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \psi) & -\sin(\phi + \psi) \\ \sin(\phi + \psi) & \cos(\phi + \psi) \end{pmatrix}$$

Nach 5.7:

$$\alpha^{\beta \circ \alpha}() = A_{\beta}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi) & -\sin(\phi) \cos(\psi) - \cos(\phi) \sin(\psi) \\ \cos(\phi) \sin(\psi) + \sin(\phi) \cos(\psi) & -\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\cos(\phi + \psi) = \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi)$$

$$\sin(\phi + \psi) = \sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\psi)$$

(Additionstheoreme der Trigonometrie)

## 5.9 Definition

Sei  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  ( $n \times n$ -Matrix),

$A$  heißt *invertierbar*, falls  $A^{-1} \in \backslash(K)$  existiert (*Inverse, inverse Matrix* zu  $A$ ). mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \text{ Bemerkung:}$$

Gilt  $A \cdot A^{-1} = E_n$  so auch  $A^{-1} \cdot A = E_n$  (und umgekehrt). (Folgt aus 5.10 und 3.16)

**5.10 Korollar**

$\dim_{\kappa}(V) = n$ ,  $\mathcal{B}$  geordnete Basis von  $V$ ,  $\alpha : V \rightarrow V$  linear. Dann gilt:

$\alpha$  invertierbar (d.h. bijektiv)  $\Leftrightarrow A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$  invertierbar.

Dann:  $A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}}$

Dann:  $A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} = (A_{\alpha}^{\mathcal{B}})^{-1}$ .

*Beweis:*

$$\Rightarrow: A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} \stackrel{5.7}{=} A_{\alpha \circ \alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} = A_{id_V}^{\mathcal{B}} = E_n$$

$$A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = E_n \text{ analog.}$$

$\Leftarrow$ : Es existiert inverse Matrix  $B$  zu  $A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$ , dass heißt  $A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot B = B \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = E_n$

Dann  $B = A_{\beta}^{\mathcal{B}}$  für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\beta : V \rightarrow V$ . (5.2).

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\beta}^{\mathcal{B}} = A_{\beta}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = E_n$$

$$A_{\alpha \cdot \beta}^{\mathcal{B}} = A_{\beta \cdot \alpha}^{\mathcal{B}} = E_n$$

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n). \quad (\alpha \cdot \beta)(v_i) = 1 \cdot v_i = v_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\alpha \circ \beta = id_V$$

$$\text{Analog } \beta \circ \alpha = id_V$$

$$\beta = \alpha^{-1}$$

**5.11 Satz**

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n.$$

(Dass heißt Zeilen/Spalten von  $n \times n$  sind linear unabhängig).

*Beweis.* Definition:  $\alpha : K^n \rightarrow K^n$  durch  $\alpha(x) = A \cdot x$

$A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$  bezüglich der kanonischen Basis  $\mathcal{B}$  von  $K^n$ .

$$A \text{ invertierbar} \stackrel{5.10}{\Leftrightarrow} \alpha \text{ invertierbar} \stackrel{3.16}{\Leftrightarrow} \text{rg}(\alpha) = n \stackrel{4.5/4.6}{\Leftrightarrow} \text{rg}(A) = n$$

□

**5.12 Lemma**

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), X \in \mathcal{M}_{n,l}(K),$$

$$C = AX \in \mathcal{M}_{m,l}(K)$$

Wendet man dieselben elementaren Zeilenumformung auf  $A$  und  $C$  an (beachte  $A$  und  $C$  haben beide  $m$  Zeilen), so gilt für die entstehende Matrizen  $A', C'$ .

$$C' = A'X$$

### 5.13 Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix (Gauß-Jordan-Verfahren)

$A$  invertierbare  $m \times n$  Matrix. Gesucht  $A^{-1}$  mit

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

Man kann  $A$  durch elementare Zeilenumformungen auf die Form  $E_n$  bringen. Analog zum GaußAlgorithmus.  $\text{rg}(A) = n$ : In der zweiten Spalte findet man Eintrag  $\neq 0$  unterhalb der Diagonale. Erzeuge wie bei Gauß1 in der Diagonale, unterhalb der Diagonale erzeuge Nullen *und* auch oberhalb. So fortfahren. Durch elementare Zeilenumformungen entsteht aus  $A$  die Einheitsmatrix  $E_n$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Dieselben Zeilenumformungen Angewandt auf  $E_n$  liefert Matrix  $A^{-1}$ .

$$5.12 \quad E_n \cdot A^{-1} = A'$$

$$(A \mid E_n) \rightarrow (E_n \mid A^{-1})$$

(Verfahren zeigt gleichzeitig, ob  $A$  invertierbar).

### 5.14 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & -0.5 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

### 5.15 Bemerkung

Sei  $Ax = b$  LGS mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannte (d.h.  $A$   $n \times m$ -Matrix).

4.4b:  $Ax = b$  hat eindeutige Lösung, wenn  $\text{rg}(A) = n$ . Dann existiert  $A^{-1}$  und es gilt:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

### 5.16 Definition

$V$   $K$ -VR mit geordneten Basen  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ .

$$v'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i, \quad j = 1 \dots n \quad (\text{Reihenfolge beachten!})$$

$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = (s_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$  heißt *Basiswechselmatrix* Spalten. Koordinaten der Basisvektoren aus  $\mathcal{B}'$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

$$\text{Analog } v_k = \sum_{j=1}^n t_{jk} v'_j$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = (t_{jk})_{j,k=1, \dots, n}$$

### 5.17 Satz

Bezeichnungen wie in ??.

$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  ist invertierbar und  $S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ , dass heißt  $S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = E_n$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } V_k &= \sum_{j=1}^n t_{jk} v'_j = \\ &= \sum_{j=1}^n t_{jk} \left( \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n s_{ij} t_{jk} \right) v_i \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} t_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = E$$

□



**5.18 Satz**

$V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$  wie oben,  $v \in V$ .

$$\kappa_{\mathcal{B}'}(v)^t = S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$$

*Beweis:* Analog zu 5.4 (5.2a))

**5.19 Beispiel**

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= (e_1 + e_2, e_1 - 2e_2) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \stackrel{5.17}{=} S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$$

??:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$$

$$\kappa_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**5.20 Satz**

$\alpha : V \longrightarrow W$  linear,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  geordnete Basen von  $V$

$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  geordnete Basen von  $W$

Dann:

$$A_{\alpha}^{B', C'} = S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

*Beweis:* Sei  $v \in V$

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = \underset{5.4}{\kappa_{\mathcal{C}'}(\alpha(v))^t} = \underset{5.18}{S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \kappa_{\mathcal{C}}(\alpha(v))^t} = S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$$

Wenn  $v$  alle Vektoren aus  $V$  durchläuft, durchläuft  $\kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$  alle Vektoren aus  $K^n$  ( $n = \dim(V)$ ) Daraus folgt Behauptung.

## 5.21 Korollar

$\alpha : V \rightarrow V$ ,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  geordnete Basen von  $V$

$S = S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ . Dann

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}'} = S^{-1} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot S$$

*Beweis:* Folgt aus 5.20 und 5.12 (Bemerkung: Zwei  $n \times n$  Matrizen  $A, B$  heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix  $S$  gibt mit  $B = S^{-1}AS$ .)

## 5.22 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2)$$

$$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_1 - 2e_2)$$

$$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

$$\text{Sei } A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha$  ist Spiegelung aus  $e_1$ -Achse

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}'} = \underset{5.21}{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \left( \left( \frac{1}{3}, \frac{4}{3}; \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right)$$

$$\alpha(e_1 + e_2) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2) + \frac{2}{3}(e_1 - 2e_2)$$

$$\alpha(e_1 - 2e_2) = \frac{4}{3}(e_1 + e_2) - \frac{12}{3}(e_1 - 2e_2)$$

## Index

$(K-)$  lineare Abbildung, 60

Abbildung, 22

abelsch, 24

Additivität, 60

affine Unterräume, 57

affiner Unterraum, 56

Assoziativgesetz, 23

aufgespannte Unterraum, 44

Basis, 47

Basisergänzungssatz, 51

Bild, 63

Darstellungsmatrix, 74

Dimension, 52

Dimensionenformel, 54

Dimensionsformel, 68

Distributivgesetz, 30

Division mit Rest, 36

Drehmatrix, 67

Einheitsvektor, 44

Einselement, 30

elementaren Zeilenumformungen, 70

endlich erzeugt, 44

Erweiterter Euklidischer

Algorithmus, 27

Erzeugungssystem, 44

Euler'sche  $\varphi$ -Funktion, 27

geordnete Basis, 54

Grad, 34

Gruppe, 23

Halbgruppe, 23

homogenen, 58

Homogenität, 60

Horner-Schema, 36

inhomogene, 58

Inverse, 23, 77

inverse Matrix, 77

inverses Element, 23

invertierbar, 23

K-Vektorraum, 40

kanonische Basis, 48

Kartesische Koordinaten, 54

Kern, 64

Koeffizienten, 32

kommutativer Ring, 30

Kommutativgesetz, 24

Komponente, 6

Konkatenation, 23

Konstante Polynome, 34

Koordinaten, 54

Koordinatenabbildung, 68

Körper, 31

linear abhängig, 45

linear unabhängig, 45

Linearkombination, 11, 43

Matrizenaddition, 23, 30

Matrizenmultiplikation, 6, 23, 30

- 
- 
- Monoid, 23  
Monome, 34  
  
neutrales Element, 23  
Nullelement, 30  
Nullpolynom, 32  
Nullpunkt, 57  
Nullraum, 8, 43  
Nullteilerfreiheit, 32, 34  
Nullvektor, 40  
  
Ortsvektoren, 6  
  
Parallelogrammregel, 6  
Permutationen, 28  
Polynom, 32  
Polynomring, 33  
  
Rang, 63, 72  
Ring, 29  
Ring mit Eins, 30  
  
Spaltenrang, 70  
Spaltenvektoren, 6, 40  
systematische Gruppe, 28  
  
Teilraum, 42  
  
unendlich-dimensional, 52  
Unterraum, 8, 42  
Untervektorraum, 42  
  
Vektor, 7  
Vektorraum, 6  
Vektorraum-Homomorphismus, 60  
Verknüpfung, 22  
Verknüpfungssymbole, 22