Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

0 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1 \in \mathbb{R} \right\}$

Spaltenvektoren der Länge n : $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)^t$

$a_1, \ldots, a_n$ *Komponente* der Spaltenvektoren.

Wie bei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

(Multiplikation entspricht der Matrixmultiplikation und ist nicht möglich falls $n > 1$)

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Zahl (*Skalar*)

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$$

Addition+Abbildung : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ mit Addition und Multiplikation mit Skalaren : $\mathbb{R}$-*Vektorraum*

Die Vektoren im $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R}), \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ entsprechen Punkten auf der Zahlengerade, Ebene, dreidimensionalen Raums. Punkte des $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ lassen sich identifizieren mit, *Ortsvektoren* Pfeile mit Beginn in 0 (Komp = 0) und Ende im entsprechenden Punkt

Addition von Spaltenvektoren entspricht der Addition von Ortsvektoren entsprechend der Parallelogrammregel. Multiplikation mit Skalaren a :

Streckung (falls $|a| > 1$)

Stauchung (falls $0 \geq |a| \geq 1$)

Richtungspunkt, falls $a < 0$ TODO: Steckung und Stauchung

0.1 Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ Dann gilt:

Abbildung 1: Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor

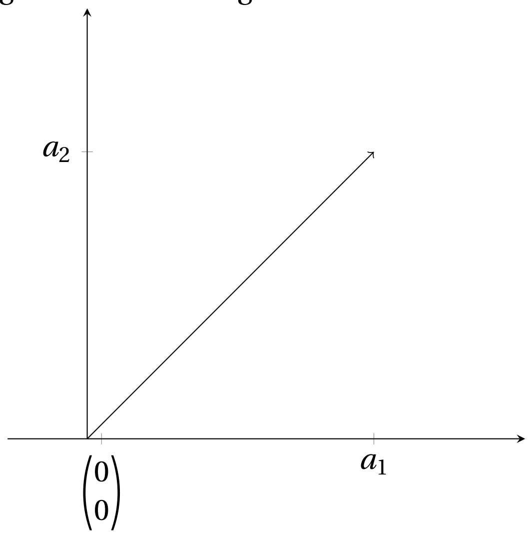
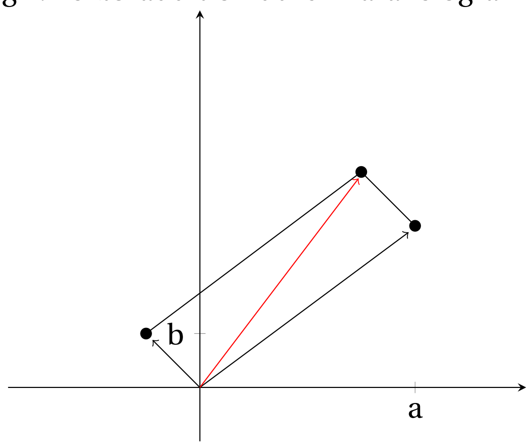


Abbildung 2: Vektoraddition durch Parallelogrammbildung



a)

$\mathbb{R}^n$ kommutative Gruppe

(1.1) $u+(v+w)=(u+v)+w$

(1.2) $v+0=0+v=v$, wobei 0 *Nullvektor*

(1.3) $v+-v=0$

(1.4) $u+v=v+u$

(2.1) $(a+b)v=av+bv$

(2.2) $a(u+v)=au+av$

(2.3) $(a\cdot b)v=a(bv)$

(2.4) $1v=v$

b) $0\cdot v=0$ und $a\cdot 0=0$
Beweis folgt aus entsprechenden Rechenregeln in 0

0.2 Definition

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{U}\supset\mathbb{R}^n$ heißt *Unterraum* (oder *Teilraum* von $\mathbb{R}^n$), falls gilt:

(1) $\forall u_1,\, u_2\in\mathcal{U}:\ u_1+u_2\in\mathcal{U}$ (Abgeschlossenheit bezüglich +)

(2) $\forall u\in\mathcal{U}\,\forall a\in\mathbb{R}:\ au\in\mathcal{U}$ (Abgeschlossenheit bezüglich Mult. mit Skalaren)

$\mathcal{U}$ enthält Nullvektor $\{0\}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$ (Nullraum)
$\mathbb{R}^n$ ist Unterraum von $\mathbb{R}$

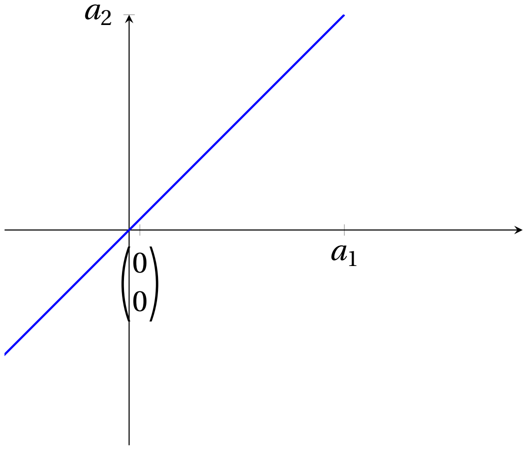
0.3 Beispiele

a) $0\neq v\in\mathbb{R}^2$ $\quad G=\{av: a\in\mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n G$ $\quad$ 2.1 in 0.2 $(a_1v, a_2v\in G, (a_1+a_2)v\in$ $av\in G, b\in\mathbb{R}(ba)v\in G)$

G = Ursprungsgerade durch $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und v = $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} n=2$:

b) $v, w\in\mathbb{R}^n$
$E=\{av+bw: a,b\in\mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$

Abbildung 3: Gerade dargestellt durch Vektoren



$v = o, w = o:\ E = \{o\}$

$v \neq o \quad w \notin \{av:\ a \in \mathbb{R}\}$

$E = \mathbb{R}^2\ n = 3:$ Ebene durch $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ und durch v, w

Ist $w \in \{av : a \in \mathbb{R}\}$, so ist $E = G$ (aus a))

c) $v, w \neq o$

$G' = \{w + av : a \in \mathbb{R}\}$

$[v \in G' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w + av \in o \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}:\ w = (-a)v \in G]$

0.4 Satz

Seien $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2$ Unterräume von $\mathbb{R}^n$

a) $\mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$

b) $\mathscr{U}_1 \cup \mathscr{U}_2$ ist im Allgemeinen KEIN Unterraum von $\mathbb{R}^n$

c) $\mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 : \mathscr{U}_1, u_2 : \mathscr{U}_2\}$ (Summe von $\mathscr{U}_1$ und $\mathscr{U}_2$) ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

d) $\mathscr{U}_1 \subseteq \mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2 \quad \mathscr{U}_2 \subseteq \mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2$ und $\mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2$ ist der kleinste Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der $\mathscr{U}_1$ und $\mathscr{U}_2$ enthält. (d.h ist w Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2 \in w$, so $\mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2 \subseteq W$)

Beweis. a) ✓

b) TODO

c) TODO □

0.5 Beispiel

a) **??**b) $G_1 = \{av : a \in \mathbb{R}\}$

$G_2 = \{aw : a\}$

$G_1 + G_2 = E$

b) $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \right\}$$

$E_1 + E_2$ Unterräume von $\mathbb{R}^3$ (10.3.b)

$E_1 \cap E_2 = ?$

$$v \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = u, t + u = 0, s = u$$

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$E_1 + E_2 =?$
$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, denn :
Es gilt sogar:
$\mathbb{R}^3 = E_1 + G_2$, wobei

$$G_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq E_@$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z-y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ z-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

0.6 Definition

a) $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n, a_1, \dots a_m \in \mathbb{R}$
Dann heißt $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i$
Linearkombination von $v_1, \dots, v_m$ (mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_m$).
[Zwei formal verschiedene Linearkombinationen der gleichen $v_1, \dots, v_m$ können den gleichen Vektor darstellen

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}]$$

b) Ist $M \subseteq R^n$, so ist der von M *erzeugte* (oder *aufgespannte*) Unterraum $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ (oder $\langle M \rangle$) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann.

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \right\} \text{ falls } M \neq \emptyset$$

$\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} := \{\emptyset\}$
$M = \{v_1, \dots v_m\}$, so TODO...

0.7 Beispiel

a) $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\langle e_1, \dots e_n \rangle = \mathbb{R}^n$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

b) $\mathscr{U} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

Ist $\mathscr{U} = \mathbb{R}^3$?

Für welche $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gibt es geeignete Skalare $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

$$\begin{array}{cccc} a & +3b & +2c & = x \\ 2a & +2b & +3c & = y \\ 3a & +b & +4c & = z \end{array}$$

LGS für die Unbekannten a, b, c mit variabler rechter Seite : Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & -4 & -1 & y-2x \\ 0 & -8 & -2 & z-3x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

LGS ist lösbar $\Leftrightarrow x - 2y + z = 0$.

$$\text{Dass heißt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{U} \Leftrightarrow x - 2y = z = 0$$

$$\mathscr{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x + 2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{U}$$

Lösungen des LGS: c frei wählen, b, a ergeben sich, (falls $x - 2y + z = 0$) z.B $c = 0, b = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y, a = x - 3b = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$
Ist $x - 2y + z = 0$, so ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}y\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tfrac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{llll} 6x^2 & -3xy & +y^3 & = 5 \\ 7x^3 & +3x^2y^2 & -xy & = 7 \end{array}$$

0.9 Definition

$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear abhängig.* falls $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ existieren, *nicht alle = 0,* mit $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$.
Gibt es solche Skalare nicht, so heiSSen $v_1, \ldots, v_m$ *linear unabhängig* (d.h. aus $a_1 v_1 \ldots a_n v_n =$

$0 folgt a_1 = \ldots = a_n = 0$).
(Entsprechend $\{v_1 \ldots v_n\}$ linear abhängig/linear unabhängig)
Per Definition : $\varnothing$ is linear unabhängig.

0.10 Beispiel

a) $\sigma + \text{v} \in \mathbb{R}^n$ Dann ist v linear unabhängig:
Zu zeigen : Ist av $= \sigma \Rightarrow a = 0$
Sei $v \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Da $v \neq \sigma$,
existiert mindestens ein i mit $b_i \neq 0$.
Angenommen $\sigma v = \begin{pmatrix} 0b_1 \\ \vdots \\ 0b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma$.
Dann $ab_i = 0$ Da $b_i \neq 0$, folgt a = 0.
σ ist linear abhängig:

$$1 \cdot \sigma = \sigma$$

b) $v_1 = \sigma . v_2 \ldots, v_m$ ist linear abhängig :
$\sigma = 1 \cdot \sigma + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_m$

c) $v, w \in \mathbb{R}^n$
$v \neq \sigma \neq w$
① v,w sind linear abhängig $\Leftrightarrow$
② $v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$
③ $w \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$
④ $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$
①
v, w linear abhängig $\rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, nicht beide = 0, $a_1 v + a_2 w = \sigma$. Dann beide $(a_1, a_2) \neq 0$
$a_1 v = -a_2 w \mid \cdot \frac{1}{a_1}$
$v = -\frac{-a_2}{-a_1} w \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$②

②
$v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ dass heißt $v = aw$ für ein $a \in \mathbb{R}$ Dann $a \neq 0$, da $v \neq \sigma$. $w = \frac{1}{a} \cdot v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$③
③
$w = bv$ für ein $b \in \mathbb{R} b \neq 0$,da $w \neq \sigma$.
$aw \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow aW = (ab)v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$
$\langle w \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$
$w = \frac{1}{b} w$ Dann analog $\langle v \rangle \mathbb{R} \subseteq \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$
Also $\langle v \rangle \mathbb{R} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$④
④
$v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$, dass heißt.
$v = a \cdot w$ für ein $a \in \mathbb{R}$
$a \cdot v + (-a)w = \sigma \Rightarrow v, w$ sind linear abhängig ①

d) $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig.

$$\sigma = a_1 e_1 + \ldots a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig $\mathbb{R}^2$:

Gesucht sind alle $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt auf LGS für a,b,c:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$
c ist frei wählbar

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig in $\mathbb{R}^3$,

10.8b) : $\frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

0.11 Satz

Seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$

a) $v_1, \ldots, v_m$ sind linear abhängig ①
$\Leftrightarrow \exists i \ldots v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} b_j v_j$ ②
$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+!}, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ ③

b) $v_1, \ldots, v_m$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Jedes $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ lässt sich auf *genau eine* Weise als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$ schreiben.

c) Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig und es existiert $v \in \mathbb{R}^n mit v \neq \langle v_1, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ dann sind auch $v_1, \ldots, v_m, v$ linear unabhängig

Beweis. a) ① $\Rightarrow$ ②
$v_1, \ldots v_m$ sind linear abhängig
$\Rightarrow \exists a_1, \ldots, a_m$ nicht alle $= 0$,
$a_a v_i + \ldots + a_m v_m = 0$
Sei $a_i \neq 0$
$$a_i v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} -a_j v_j$$
$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} -\frac{a_j}{a_i} v_j \text{ ②}$$
② $\Rightarrow$ ③

Klar : $\langle v_1,\dots v_{i-1}, v_{i+1}, v_m\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v_1,\dots, v_m\rangle_{\mathbb{R}}$

Zeige $\supseteq$ $\quad v = \langle v_1,\dots,v_m\rangle_{\mathbb{R}}$, d.h

$$v = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} a_j v_j + a_i\Big(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} b_j v_j\Big) = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} (a_j + a_i b_j) v_j \in \langle v_1,\dots v_{i-1}, v_{i+1}\dots, v_m\rangle_{\mathbb{R}} ②$$

③ $\Rightarrow$ ①

$v_i \in \langle v_1 \dots v_m\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1},\rangle_{\mathbb{R}}$, dass heißt es existiert

$a_1,\dots a_{i-1}, a_{i+1},\dots a_m \in \mathbb{R}$ mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} a_j v_j$$

$\Rightarrow \sigma = a_1 + v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots a_m v_m \qquad v_1 \dots v_m$ linear abhängig

$\square$

0.12 Satz

Sind $v_i,\dots,v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, so

sin $v_i,\dots,v_{n+1}$ linear abhängig.

(Insbesondere ist $m > n$ und $v_i, v_m \in \mathbb{R}^n$, so sind $v_1,\dots,v_m$ linear abhängig)

Beweis. Suche alle $a_1,\dots,an+1 \in \mathbb{R}$ mit $a_i v_1 + \dots a_{n+1} v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt zu LGS für $a_1,\dots,a_{n+1}$ mit Koeffizientenmatrix $(v_1,\dots,v_2,\dots,v_{n+1}) = A$

Frage : Hat $A \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ nicht triviale Lösung?

Gauß :

$$\left(\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \right)$$

$\square$

0.13 Definition

Sei $\mathscr{U}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$

$B \subseteq \mathscr{U}$ heißt Basis von $\mathscr{U}$ falls:

(1) $\langle B\rangle_{\mathbb{R}} = U$

(2) B ist linear unabhängig

($\mathscr{U} = \{\sigma\}, B = \varnothing$)

0.14 Beispiel

a) $e_1, \ldots, e_n$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$ (kanonische Basis)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Basis von R^2:

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$. Gesucht: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

LGS mit variabler rechter Seite

$$\begin{aligned} 1a \quad &+3b \quad = x \\ 2a \quad &+2b \quad = y \end{aligned}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösung: $b = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x \quad a = x - 3b = x + \frac{3}{4}y - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$

z.B $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbb{R}^2 \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig nach 0.10c)

$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$ Basis.

c) $\mathscr{U} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \frac{5}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$\mathscr{U} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig (0.10c))

$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ Basis von $\mathscr{U}$

0.15 Satz

Jeder Unterraum $\mathscr{U}$ des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Basis.

Beweis. Ist $\mathscr{U} = \{\sigma\}$,so $b = \varnothing$.
Sei also $\mathscr{U} \neq \{\sigma\}$.
v_1 ist linear unabhängig.
$\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{U}$.
Ist $\mathscr{U} = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$, so ist $\{v_1\}$ Basis von $\mathscr{U}$
Ist $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathscr{U}$.
Sei $v_2 \in \mathscr{U} \setminus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$.
Nach 0.11c) ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig. Ist $\rangle v_1, v_2 \rangle = \mathscr{U}$, so ist $\{v_1 . v_2\}$ Basis von $\mathscr{U}$.
Ist $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq U$ so wähle v_3 usw.

Es existiert $m \neq n$ mit $\langle v_1, \dots v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$ und $v_1 \dots, v_m$ sind linear unabhängig.
(Denn noch 0.12 gibt es im $\mathbb{R}^n$ keine n+1 linear unabhängige Vektoren) □

0.16 Satz

Je zwei Basen B_1, B_2 eines Unterraums $\mathcal{U}$ des $\mathbb{R}^n$ enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren $|B_1| = |B_2|$.
Insbesondere:
Je zwei Basen des $\mathbb{R}^n$ enthalten n Vektoren

0.17 Definition

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$, B Basis von $\mathcal{U}$, $|B| = m$.
Dann ist m die *Dimension* von $\mathcal{U}$, $\dim(u) = m$.
$\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathcal{U}) \neq n$.

0.18 Satz (Basisergänzungssatz)

Sei $\mathcal{U}$ Unterraum der $\mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathcal{U}$ eine Menge m linear unabhängiger Vektoren. Dann lässt sich M zu einer Basis von $\mathcal{U}$ ergänzen.

Beweis. Analog zu 0.15 □

0.19 Korollar

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $\dim(\mathcal{U}) = n$, dann ist $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

Beweis. Sei B Basis von $\mathcal{U}$, also $|B| = n$.
Nach 0.18 (dort mit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n, M = B$) lässt sich B zu Basis B' von $\mathbb{R}^n$ ergänzen.
$\dim(\mathbb{R}^n) = n \Rightarrow |B'| = n$.
Also B = B'
$\mathbb{R}^n = \langle B' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$ □

0.20 Definition

Ist $\mathscr{U}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$, B = $(u_1 \ldots, u_m)$ eine geordnete Basis von $\mathscr{U}$. Nach 0.11b), lässt sich jeder Vektorraum $\mathscr{U} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$ *eindeutig* als Linearkombination

$$\mathscr{U} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

schreiben.
$(a_1 \ldots, a_m)$ heißen *Koordinaten* von u bzgl. der Basis B.

0.21 Beispiele

a) B$(e_1 \ldots, e_m)$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$.

Koordinaten von $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ bzgl. B:

$(a_1 \ldots, a_n)$ *kartesische* Koordinaten. (*Rene Descartes, 1596-1650*)