# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# Ende des SS 2015

## 0 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1 \in \mathbb{R} \right\}$

*Spaltenvektoren* der Länge $n$ : $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)^t$

$a_1, \ldots, a_n$ *Komponente* der Spaltenvektoren.
Wie bei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

(Multiplikation entspricht der Matrizenmultiplikation und ist nicht möglich falls $n > 1$)

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Zahl (*Skalar*)

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$$

Addition+Abbildung : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ mit Addition und Multiplikation mit Skalaren : $\mathbb{R}$-*Vektorraum*

Die Vektoren im $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R}), \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ entsprechen Punkten auf der Zahlengerade, Ebene, dreidimensionalen Raums. Punkte des $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ lassen sich identifizieren mit, *Ortsvektoren* Pfeile mit Beginn in 0 (Komp = 0) und Ende im entsprechenden Punkt

Addition von Spaltenvektoren entspricht der Addition von Ortsvektoren entsprechend der Parallelogrammregel. Multiplikation mit Skalaren a :

Streckung (falls $|a| > 1$)

Stauchung (falls $0 \geq |a| \geq 1$)

Richtungspunkt, falls $a < 0$

Abbildung 1: Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor

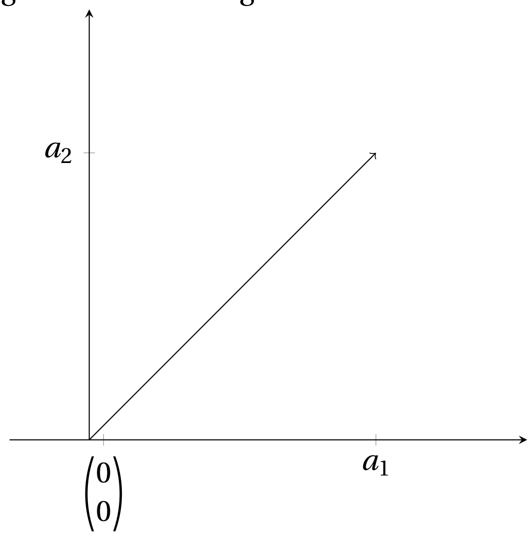
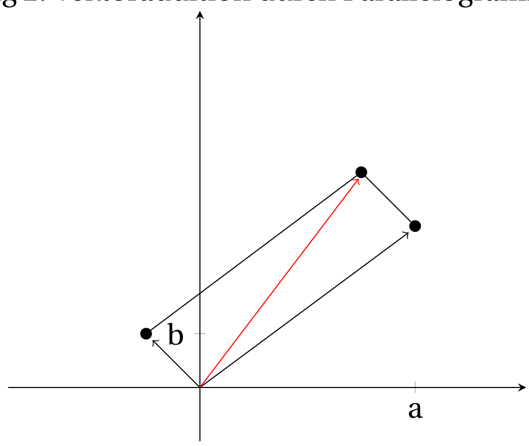



Abbildung 2: Vektoraddition durch Parallelogrammbildung




## 0.1 Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ Dann gilt:

a)

$\mathbb{R}^n$ kommutative Gruppe

(1.1) $u + (v + w) = (u + v) + w$

(1.2) $v + 0 = 0 + v = v$, wobei 0 *Nullvektor*

(1.3) $v + -v = 0$

(1.4) $u + v = v + u$

(2.1) $(a + b)v = av + bv$

(2.2) $a(u + v) = au + av$

(2.3) $(a \cdot b)v = a(bv)$

(2.4) $1v = v$

b) $0 \cdot v = 0$ und $a \cdot 0 = 0$
Beweis folgt aus entsprechenden Rechenregeln in 0

## 0.2 Definition

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{U} \supset \mathbb{R}^n$ heißt *Unterraum* (oder *Teilraum* von $\mathbb{R}^n$), falls gilt:

(1) $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} : u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$ (Abgeschlossenheit bezüglich +)

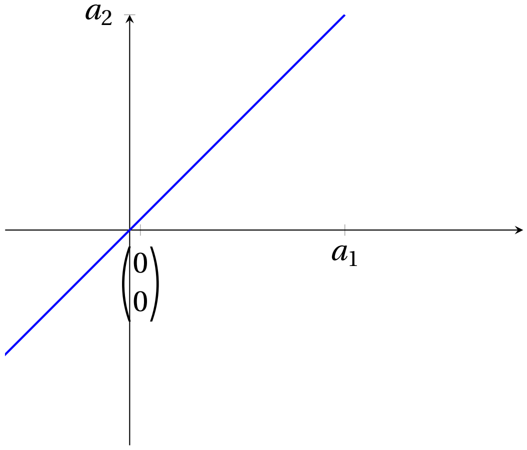
(2) $\forall u \in \mathcal{U} \forall a \in \mathbb{R} : au \in \mathcal{U}$ (Abgeschlossenheit bezüglich Mult. mit Skalaren)

$\mathcal{U}$ enthält Nullvektor {0} Unterraum von $\mathbb{R}^n$ (Nullraum)
$\mathbb{R}^n$ ist Unterraum von $\mathbb{R}$

## 0.3 Beispiele

a) $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ $G = \{av : a \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$
$(a_1 v, a_2 v \in G, (a_1 + a_2)v \in G$ 2.1 in 0.2
$av \in G, b \in \mathbb{R}(ba)v \in G)$
G = Ursprungsgerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und v = $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $n = 2$:

Abbildung 3: Gerade dargestellt durch Vektoren




b) $v, w \in \mathbb{R}^n$

$E = \{av + bw : a, b \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$

$v = o, w = o :\ E = \{o\}$

$v \neq o \quad w \notin \{av :\ a \in \mathbb{R}\}$

$E = \mathbb{R}^2 \ n = 3 :$ Ebene durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und durch $v, w$

Ist $w \in \{av : a \in \mathbb{R}\}$, so ist $E = G$ (aus a))

c) $v, w \neq o$

$G' = \{w + av : a \in \mathbb{R}\}$

$[v \in G' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w + av \in o \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} :\ w = (-a)v \in G]$

## 0.4 Satz

Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ Unterräume von $\mathbb{R}^n$

a) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$

b) $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ ist im Allgemeinen KEIN Unterraum von $\mathbb{R}^n$

c) $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 : \mathcal{U}_1, u_2 : \mathcal{U}_2\}$ (Summe von $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$) ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

d) $\mathscr{U}_1 \subseteq \mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2 \quad \mathscr{U}_2 \subseteq \mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2$ und $\mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2$ ist der kleinste Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der $\mathscr{U}_1$ und $\mathscr{U}_2$ enthält. (d.h ist $w$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2 \in w$, so $\mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2 \subseteq W$)

*Beweis.* a) ✓

b) c) □

## 0.5 Beispiel

a) **??**b) $G_1 = \{av\colon\ a \in \mathbb{R}\}$

$G_2 = \{aw\colon\ a\}$

$G_1 + G_2 = E$

b) $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} :\ r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} :\ r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \right\}$$

$E_1 + E_2$ Unterräume von $\mathbb{R}^3$ (10.3.b)

$E_1 \cap E_2 = ?$

$$v \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = u, t + u = 0, s = u$$

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$E_1 + E_2 = ?$

$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, denn :

Es gilt sogar:

$\mathbb{R}^3 = E_1 + G_2$, wobei

$$G_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq E_@$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z-y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ z-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

## 0.6 Definition

a) $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n, a_1, \dots a_m \in \mathbb{R}$
Dann heißt $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i$
*Linearkombination* von $v_1, \dots, v_m$ (mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_m$).
[Zwei formal verschiedene Linearkombinationen der gleichen $v_1, \dots, v_m$ können den gleichen Vektor darstellen
$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}]$$

b) Ist $M \subseteq R^n$, so ist der von M *erzeugte* (oder *aufgespannte*) Unterraum $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ (oder $\langle M \rangle$) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann.
$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \right\} \text{ falls } M \neq \emptyset$$

$\langle\varnothing\rangle_{\mathbb{R}} := \{\varnothing\}$
$M = \{v_1, \dots v_m\}$, so

## 0.7 Beispiel

a) $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\langle e_1, \dots e_n \rangle = \mathbb{R}^n$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

b) $\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

Ist $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$?

Für welche $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gibt es geeignete Skalare $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

$$\begin{array}{cccc} a & +3b & +2c & = x \\ 2a & +2b & +3c & = y \\ 3a & +b & +4c & = z \end{array}$$

LGS für die Unbekannten $a, b, c$ mit variabler rechter Seite : Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & -4 & -1 & y-2x \\ 0 & -8 & -2 & z-3x \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

LGS ist lösbar $\Leftrightarrow x-2y+z=0$.

Dass heißt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x-2y=z=0$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x-2y+z=0, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$$

Lösungen des LGS: $c$ frei wählen, b, a ergeben sich, (falls $x-2y+z=0$) z.B $c=0, b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y, a=x-3b=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y$

Ist $x-2y+z=0$, so ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{llll} 6x^2 & -3xy & +y^3 & =5 \\ 7x^3 & +3x^2y^2 & -xy & =7 \end{array}$$

## 0.9 Definition

$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear abhängig*. falls $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ existieren, *nicht alle = 0,* mit $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$.
Gibt es solche Skalare nicht, so heiSSen $v_1, \ldots, v_m$ *linear unabhängig* (d.h. aus $a_1 v_1 \ldots a_n v_n = 0 folgt a_1 = \ldots = a_n = 0$).
(Entsprechend $\{v_1 \ldots v_n\}$ linear abhängig/linear unabhängig)
Per Definition : $\emptyset$ is linear unabhängig.

## 0.10 Beispiel

a) $\sigma$ + v $\in \mathbb{R}^n$ Dann ist v linear unabhängig:
Zu zeigen : Ist av = $\sigma \Rightarrow a = 0$
Sei $v \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Da $v \neq \sigma$,
existiert mindestens ein i mit $b_i \neq 0$.
Angenommen $\sigma v = \begin{pmatrix} 0b_1 \\ \vdots \\ 0b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma$.
Dann $ab_i = 0$ Da $b_i \neq 0$, folgt a = 0.
$\sigma$ ist linear abhängig:

$$1 \cdot \sigma = \sigma$$

b) $v_1 = \sigma . v_2 \ldots, v_m$ ist linear abhängig :
$\sigma = 1 \cdot \sigma + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_m$

c) $v, w \in \mathbb{R}^n$
$v \neq \sigma \neq w$
① v,w sind linear abhängig $\Leftrightarrow$
②$v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$
③$w \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$
④$\langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$
①

$v, w$ linear abhängig $\rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, nicht beide $= 0$, $a_1 v + a_2 w = \sigma$. Dann beide $(a_1, a_2) \neq 0$

$a_1 v = -a_2 w \mid \cdot \frac{1}{a_1}$

$v = -\frac{-a_2}{-a_1} w \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ ②

②

$v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ dass heißt $v = aw$ für ein $a \in \mathbb{R}$ Dann $a \neq 0$, da $v \neq \sigma$. $w = \frac{1}{a} \cdot v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ ③

③

$w = bv$ für ein $b \in \mathbb{R} b \neq 0$,da $w \neq \sigma$.

$aw \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow aW = (ab)v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$

$\langle w \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$

$w = \frac{1}{b} w$ Dann analog $\langle v \rangle \mathbb{R} \subseteq \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$

Also $\langle v \rangle \mathbb{R} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ ④

④

$v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$, dass heißt.

$v = a \cdot w$ für ein $a \in \mathbb{R}$

$a \cdot v + (-a)w = \sigma \Rightarrow v, w$ sind linear abhängig ①

d) $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig.

$$\sigma = a_1 e_1 + \ldots a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

e) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ sind linear abhängig $\mathbb{R}^2$:

Gesucht sind alle $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Führt auf LGS für a,b,c:

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 6 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -3 & 6 & 0\\ 0 & 7 & -10 & 0\end{pmatrix}$$

$c$ ist frei wählbar

f) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ sind linear abhängig in $\mathbb{R}^3$,

10.8b) : $\frac{5}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

## 0.11 Satz

Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

a) $v_1, \dots, v_m$ sind linear abhängig ①

$\Leftrightarrow \exists i \dots v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} b_j v_j$ ②

$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+!}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ ③

b) $v_1, \dots, v_m$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Jedes $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ lässt sich auf *genau eine* Weise als Linearkombination von $v_1, \dots, v_m$ schreiben.

c) Sind $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig und es existiert $v \in \mathbb{R}^n$ mit$v \neq \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ dann sind auch $v_1, \dots, v_m, v$ linear unabhängig

*Beweis.* a) ① $\Rightarrow$ ②

$v_1, \dots v_m$ sind linear abhängig

$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m$ nicht alle $= 0$,

$a_a v_i + \dots + a_m v_m = 0$

Sei $a_i \neq 0$

$$a_i v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} -a_j v_j$$
$$v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} -\frac{a_j}{a_i} v_j \text{ ②}$$

② ⇒ ③

Klar : $\langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, v_m\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v_1, \dots, v_m\rangle_{\mathbb{R}}$

Zeige ⊇ $\quad v = \langle v_1, \dots, v_m\rangle_{\mathbb{R}}$, d.h

$$v = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} a_j v_j + a_i(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} b_j v_j) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (a_j + a_i b_j) v_j \in \langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots, v_m\rangle_{\mathbb{R}} \text{②}$$

③ ⇒ ①

$v_i \in \langle v_1 \dots v_m\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \rangle_{\mathbb{R}}$, dass heißt es existiert

$a_1, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_m \in \mathbb{R}$ mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} a_j v_j$$

$\Rightarrow \sigma = a_1 + v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots a_m v_m \qquad v_1 \dots v_m$ linear abhängig □

## 0.12 Satz

Sind $v_i, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, so

sin $v_i, \dots, v_{n+1}$ linear abhängig.

(Insbesondere ist $m > n$ und $v_i, v_m \in \mathbb{R}^n$, so sind $v_1, \dots, v_m$ linear abhängig)

*Beweis.* Suche alle $a_1, \dots, an+1 \in \mathbb{R}$ mit $a_i v_1 + \dots a_{n+1} v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt zu LGS für $a_1, \dots, a_{n+1}$ mit Koeffizientenmatrix $(v_1, \dots, v_2, \dots, v_{n+1}) = A$

Frage : Hat $A \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ nicht triviale Lösung?

Gauß :

$$\left(\mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow\right)$$

□

## 0.13 Definition

Sei $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$
$B \subseteq \mathcal{U}$ heißt Basis von $\mathcal{U}$ falls:

(1) $\langle B\rangle_{\mathbb{R}} = U$

(2) B ist linear unabhängig

($\mathcal{U} = \{\sigma\}, B = \varnothing$)

## 0.14 Beispiel

a) $e_1, \ldots, e_n$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$ (kanonische Basis)

$$e_1 = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix}a_i\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ist Basis von $R^2$:

Sei $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in R^2$. Gesucht: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
LGS mit variabler rechter Seite

$$\begin{array}{lll} 1a & +3b & = x \\ 2a & +2b & = y \end{array}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösung: $b = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x \quad a = x - 3b = x + \frac{3}{4}y - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$

z.B $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbb{R}^2 \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig nach 0.10c)

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ Basis.

c) $\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (0.10c))

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $\mathcal{U}$

## 0.15 Satz

Jeder Unterraum $\mathcal{U}$ des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Basis.

*Beweis.* Ist $\mathcal{U} = \{\sigma\}$,so $b = \emptyset$.
Sei also $\mathcal{U} \neq \{\sigma\}$.

$v_1$ ist linear unabhängig.
$\langle v_1\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{U}$.
Ist $\mathcal{U} = \langle v_1\rangle_{\mathbb{R}}$, so ist $\{v_1\}$ Basis von $\mathcal{U}$
Ist $\langle v_1\rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$.
Sei $v_2 \in \mathcal{U} \setminus \langle v_1\rangle_{\mathbb{R}}$.
Nach 0.11c) ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig. Ist $\rangle v_1, v_2\rangle = \mathcal{U}$, so ist $\{v_1 . v_2\}$ Basis von $\mathcal{U}$.
Ist $\langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq U$ so wähle $v_3$ usw.
Es existiert $m \neq n$ mit $\langle v_1, \dots v_m\rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$ und $v_1 \dots, v_m$ sind linear unabhängig.
(Denn noch 0.12 gibt es im $\mathbb{R}^n$ keine n+1 linear unabhängige Vektoren) □

## 0.16 Satz

Je zwei Basen $B_1, B_2$ eines Unterraums $\mathcal{U}$ des $\mathbb{R}^n$ enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren $|B_1| = |B_2|$.
Insbesondere:
Je zwei Basen des $\mathbb{R}^n$ enthalten n Vektoren

## 0.17 Definition

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$, B Basis von $\mathcal{U}$, $|B| = m$.
Dann ist $m$ die *Dimension* von $\mathcal{U}$, $\dim(u) = m$.
$\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathcal{U}) \neq n$.

## 0.18 Satz (Basisergänzungssatz)

Sei $\mathcal{U}$ Unterraum der $\mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathcal{U}$ eine Menge m linear unabhängiger Vektoren. Dann lässt sich M zu einer Basis von $\mathcal{U}$ ergänzen.

*Beweis.* Analog zu 0.15 □

## 0.19 Korollar

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $\dim(\mathcal{U}) = n$, dann ist $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

*Beweis.* Sei B Basis von $\mathcal{U}$, also $|B| = n$.
Nach 0.18 (dort mit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n, M = B$) lässt sich B zu Basis B' von $\mathbb{R}^n$ ergänzen.
$\dim(\mathbb{R}^n) = n \Rightarrow |B'| = n$.
Also B = B'
$\mathbb{R}^n = \langle B' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$ □

## 0.20 Definition

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$, B = $(u_1 \dots, u_m)$ eine geordnete Basis von $\mathcal{U}$. Nach 0.11b), lässt sich jeder Vektorraum $\mathcal{U} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$ *eindeutig* als Linearkombination

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

schreiben.
$(a_1 \dots, a_m)$ heißen *Koordinaten* von u bzgl. der Basis B.

## 0.21 Beispiele

a) B$(e_1 \dots, e_m)$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$.

Koordinaten von $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ bzgl. B:

$(a_1 \dots, a_n)$ *kartesische* Koordinaten. (*Rene Descartes, 1596-1650*)

# Anfang des WS 2015/16

## 1 Algebraische Strukturen

13.10.2015

### 1.1 Definition

Sei $X \neq \emptyset$. Eine *Verknüpfung* auf $X$ ist :

$$\begin{cases} X \times X & \longrightarrow X \\ (a,b) & \longrightarrow a \star b \end{cases} \quad \text{('Produkt' von a und b)}$$

$\star$ ist Platzhalter für andere Verknüpfungssymbole, die in speziellen Beispielen auftreten können.

### 1.2 Beispiele

a) Addition + und Multiplikation $\cdot$ sind Verknüpfungen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Multiplikation ist *keine* Verknüpfung auf der Menge der negativen ganzen Zahlen.

b) Division ist keine Verknüpfung auf $\mathbb{N}$. Division ist Verknüpfung auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c) $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$
$a \oplus b := (a+b) \mod n \in \mathbb{Z}_n$
$a \circledcirc b := (a \cdot b) \mod n \in \mathbb{Z}_n$
Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}_n$
$n = 7:$ $\quad 5 \circledcirc 6 = 2$
$\quad 5 \oplus 6 = 4$
$n = 2:$ $\quad \mathbb{Z}_n = \{0, 1\}$
$\quad 0 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 = 0$
$\quad \circledcirc = \cdot$

d) M Menge, X = Menge aller Abbildungen $M \longrightarrow M$. Verknüpfung auf X: Hintereinanderausführung von Abbildungen: $\circ$
$(f, g) : M \longrightarrow M$, So $f \circ g : M \to M$
$(f \circ g)(m) = f(g(m)) \in M, m \in M$
Im Allgemeinen ist $g \circ f \neq f \circ g$

e) $X = \{0,1\}$
2-stellige Aussagen, Junktoren wie $\wedge, \vee$, XOR $, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ heißen Verknüpfungen auf $X$. 0 entspricht f, 1 entspricht w.
$0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 1 = 1$
$0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1$ (= 'Multiplikation')
$0 \text{ XOR } 0 = 0, 1 \text{ XOR } 0 = 1, 0 \text{ XOR } 1 = 1, 1 \text{ XOR } 1 = 0$ (= Addition mod 2)

f) $X = M_n(\mathbb{R})$ = Menge der $n \times n$- Matrizen über $\mathbb{R}$.
Matrizenaddition ist Verknüpfung auf $X$.
Matrizenmultiplikation ist Verknüpfung auf $X$.

g) $M$ Menge. $X$ Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus M ('Wörter' über M).
Verknüpfung: Hintereinanderausführung zweier Folgen (Konkatenation).
$M = \{0,1\}, w_1 = 1101, w_2 = 001$
$w_1 w_2 = 110111$
$w_2 w_1 = 0011101$

## 1.3 Definition

Sei $X \neq 0$ eine Menge mit Verknüpfung $\star$.

a) $X$, genauer $(X,\star)$ ist *Halbgruppe*, falls $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ für alle $a, b, c \in X$. (*Assoziativgesetz*)

b) $(X,\star)$ heißt *Monoid*, falls $(X,\star)$ Halbgruppe ist und ein $e \in X$ existiert mit $e \star a = a$ und $a \star e = a$ für alle $a \in X$. e heißt *neutrales Element* (später, e ist eindeutig bestimmt).

c) Sei $(X,\star)$ ein Monoid. Ein Element $a \in X$ heißt *invertierbar*, falls $b \in X$ existiert (abhängig von a) mit $a \star b = b \star a = e$. b heißt *inverses Element* (das *Inverse*) zu a (später: wenn b existiert, so ist es eindeutig bestimmt).

d) Monoid $(X,\star)$ heißt *Gruppe*, falls jedes Element in $X$ bezüglich $\star$ invertierbar ist.

e) Halbgruppe, Monoid, Gruppe $(X, \star)$ bezüglich kommutativ (oder *abelsch*) falls $a \star b = b \star a$ für alle $a, b \in X$ (Kommutativgesetz).
(Nach: Abel, 1802-1829)

14.10.2015

## 1.4 Bemerkung

In Halbgruppe liefert jede sinnvolle Klammerung eines Produktes mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element.

(n = 4)

$$(a\star(b\star c))\star d \underset{\text{AG}^1}{=} ((a\star b)\star c)\star d \underset{\text{AG}^1}{=} (a\star b)\star(c\star d) \underset{\text{AG}^1}{=} a\star(b(c\star d)) \underset{\text{AG}^1}{=} a\star((b\star c)\star d)$$

Klammern werden daher meist weggelassen.

$a^n = \underset{n\in\mathbb{R}}{\underset{\longleftarrow n \longrightarrow}{a\star\ldots\star a}}$ "Potenzen eindeutig definiert"

## 1.5 Proposition

a) In einem Monoid $(X, \star)$ ist das neutrale Element eindeutig bestimmt.

b) Ist $(X, \star)$ Monoid und ist $a \in X$ invertierbar, so ist das Inverse zu a eindeutig bestimmt. Bezeichnung: $a^{-1}$

c) Ist $(X, \star)$ Monoid und wenn $a, b \in X$ invertierbar sind, so auch $a \star b$.
$(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$

d) Die Menge der invertierbaren Elemente in einem Monoid $(X, \star)$ bilden bezüglich $\star$ eine Gruppe.

*Beweis.* a) Angenommen: $e_!, e_2$ sind neutrale Elemente. Dann:

$$e_1 = e_1 \star e_2 = e_1 \star e_2 = e_2 \qquad ↯$$

[1] Assoziativgesetz

b) Angenommen a hat 2 inverse Elemente $b_1, b_2$ also.

$$a \star b_1 = e, b_2 \star a = e$$
$$b_1 = e \star b_1 = (b_2 \star a) \star b_1 = b_2 \star (a \star b_1) = b_2 \star e = b_2 \qquad \lightning$$

c)
$$(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = a \star (b \star b^{-1}) \star a^{-1} = a \star e \star a^{-1} = e$$

Analog: $(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = e$
Also: $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$
d) $\mathscr{I}$ = Menge der inversen Elemente in $(X, \star)$,
$e \in \mathscr{I}$, dann $e \star e = e$, dass heißt $e^{-1} = e$, $\star$ ist Verknüpfung auf $\mathscr{I}$.
Zu zeigen: $a, b \in \mathscr{I} \Rightarrow a \star b \in \mathscr{I}$ Folgt aus c).
Assozativgesetz gilt in $\mathscr{I}$, $a \in \mathscr{I} \Rightarrow a^{-1} \in \mathscr{I}$, denn $(a^{-1})^{-1} = a$ □

*Bemerkung*: Multiplikation mit $a^{-1}$ macht Multiplikation mit $a$ (Verknüpfung) rückgängig.

## 1.6 Beispiel

a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Halbgruppen bezüglich +.
   $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind bezüglich + Monoide mit neutralen Element 0.
   $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ ist kein Monoid bezüglich +, aber $\mathbb{N}_0$.
   $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Gruppen bezüglich +. Inverses Element zu $a: -a$
   $\mathbb{N}$ ist keine Gruppe bezüglich +, Inverse Elemente in $\mathbb{N}_0: \{0\}$

b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Monoide bezüglich $\cdot$ (neutrales Element 1). Keine Gruppen (in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist 0 nicht invertierbar).
   $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Gruppen.
   Invertierbare Elemente in $\mathbb{Z}$ :: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenes Inverses}}}{\{1, -1\}}$ $\leftarrow$ Gruppe bezüglich $\cdot$

c) M Menge.
   $X$ = Menge aller Abbildungen $M \longrightarrow M$ mit Hintereinanderausführung $\circ$ als

Verknüpfung.
Monoid, neutrales Element. $id_M$
$f \circ id_M = f = id_M \circ f$
$id_M(m) = m$ für alle $m \in M$.
Invertierbar sind genau die bijektiven Abbildungen $M \longrightarrow M$, Inverse = Umkehrabbildung.
$f : M \longrightarrow M$ bijektiv
$\quad f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$
'Proposition' on page 26 d): Die bijektive n Abbildung, $M \longrightarrow M$ bilden bezüglich $\circ$ eine Gruppe

d) $M$ = Menge z.B $\{0,1\}$, x Menge aller endlichen Folgen über $m$.Halbgruppe mit Verknüpfung Konkatenation . Nimmt man die leere Folge mit hinzu, ist es das neutrale Element. Dann: Monoid.

e) $M_n(\mathbb{R})$ Menge der Matrizen über $\mathbb{R}$.
Addition: neutrales Element $0-Matrix$, Inverse zu A ist -A. ($M$,Addition) ist Gruppe
Multiplikation: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ Halbgruppe mit neutralem Element $I_m$

f) $n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\} \qquad$ Verknüpfung $\oplus$
$a \oplus b = a + b \mod n$
$(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ ist Gruppe.
Assoziativgesetz: $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \oplus c &= (a + b \mod n) \mod n \\
&\underset{\text{Mathe I}}{=} ((a+b)+c) \mod n \\
&= (a + (b+c)) \mod n \\
&\underset{\text{Mathe I}}{=} (a + (b+c) \mod n) \mod n \\
&= (a + (b \oplus c)) \mod n \\
&= (a \oplus (b \oplus c))
\end{aligned}$$

0 ist neutrales Element bezüglich $\oplus$
0 ist sein eigenes Inverse.
$1 \leq i \leq n \qquad n - i \in \mathbb{Z}_n$ Inverses zu i
$\quad i \oplus (n-i)$

$= (i + (n - i)) \mod n = n \mod n = 0$

g) $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_0$ Verknüpfung $\circledcirc$ $n > 1$
$a \circledcirc b = a \cdot b \mod n$
$(\mathbb{Z}_n \circledcirc)$ *ist Monoid*
Assoziativgesetz wie bei $\oplus$.
1 ist neutrales Element bei $\circledcirc$ Keine Gruppe bezüglich $\circledcirc$, denn 0 hat kein Inverses

## 1.7 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$

a) Die Elemente in $(\mathbb{Z}_n, \circledcirc)$, die invertierbar bezüglich $\circledcirc$ sind, sind genau diejenigen $a \in \mathbb{Z}_n$ mit ggT$(a, n) = 1$.
Für solche a bestimmt man das Inverse folgendermaßen:
Bestimme $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot a + t \cdot n = 1$ (Erweiterter Euklidischer Algorithmus)
Dann ist $a^{-1} = s \mod n$

b) ${\mathbb{Z}_n}^* := \{a \in \mathbb{Z}_n : \text{ggT}(a, n) = 1\}$ ist Gruppe bezüglich $\circledcirc$.
$|{\mathbb{Z}_n}^*| =: \varphi(n)$ *Euler'sche $\varphi$-Funktion* (Leonard Euler 1707-1783)

c) Ist p eine Primzahl so ist $(\mathbb{Z}_p \setminus 0, \circledcirc)$ eine Gruppe. *Beweis* folgt aus b)

*Beweis.* a) Angenommen $a \in \mathbb{Z}_n$ invertierbar bezüglich $\circledcirc$
D.h es existiert $b \in Z_n$ mit $a \circledcirc b = 1$
$a \cdot b \mod n = 1$, d.h es existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot b = 1 + k \cdot n, 1 = a \cdot b - k \cdot n$
Sei $d$ =ggT$(a.n)$:

$d \mid a \quad \Rightarrow d \mid a \cdot b$
$d \mid n \quad \Rightarrow d \mid k \cdot n$
$\Rightarrow \quad d \mid a \cdot b \quad -k \cdot n = 1$
$\Rightarrow \quad d = 1 \quad ggT(a, n) = 1.$

Umgekehrt sei $a \in \mathbb{Z}_n$ mit ggT$(a, n) = 1$
EEA liefert $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot a + t \cdot n = 1$.

$$\begin{aligned}
&(s \mod n) \circledcirc a && = ((s \mod n) \cdot a) \mod n \\
\underset{\text{Mathe I}}{=} \; &(s \cdot a) \mod n && = (1 - t \cdot n) \mod n \\
= \; &(1 - \underbrace{(t \cdot n) \mod n}_{=0}) \mod n && = 1 \mod n = 1
\end{aligned}$$

b) 'Proposition' on page 26 d) □

## 1.8 Beispiel

$n = 24, \quad a = 7$ ist invertierbar in $(Z_{24}, \circledcirc)$

EEA:

$$1 = (-2) \cdot 24 + 7 \cdot 7$$

$a^{-1} = 7 \mod 24 = 7 = a$

## 1.9 Beispiel

Sei $M = \{1, \ldots, n\}$

Die Menge der bijektiven Abbildungen auf $M$ (*Permutationen*) bilden nach 1.6c) eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung $\circ$.

Bezeichnung: $S_n$ *systematische Gruppe von Grad n*

Es ist $|S_n| = n!$ (Mathe I)

z.B : $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi$$

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\varrho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \varrho^{-1} = id$$

$$\pi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$S_n$ ist für $n \geq 3$ nicht abelsch (nicht kommutativ)

## 1.10 Satz (Gleichungslösen in Gruppen)

Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe $a,b \in G$ (in allgemeinen Gruppen schreibt man Verknüpfungen oft als $\cdot$ statt $\star$, oft auch ab statt $a \cdot b$)

a) Es gibt genau ein $x \in G$ mit $ax = b$ (nämlich $x = a^{-1}b$) [ "Teilen durch" $a$ von links = Multiplikation von links mit $a^{-1}$ ]

b) Es gibt genau ein $y \in G$ mit $ya = b$ (nämlich $y = ba^{-1}$)

c) Ist $ax = bx$ für ein $x \in G$, so ist $a = b$
Ist $ya = yb$ für ein $y \in G$, so ist $a = b$

*Beweis.* a) Setze $x = a^{-1}b \in G$.
$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1})b = a \cdot b = b$ Eindeutigkeit : Sei $x \in G$ mit $ax = b$
Multiplikation beide Seiten mit $a^{-1}$,
$x = (a^{-1}a)x = a^{-1}b$

b) analog
c) $ax = bx$ Multiplikation mit $x^{-1}$ Dann a= b □

## 1.11 Beispiel

a) Suche Permutation $\xi \in S_3$ mit $\varrho \circ \xi = \pi$ (vgl. 1.9). 'Satz (Gleichungslösen in Gruppen)' on page 31a):

$$\xi = \varrho^{-1} \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) 1.10c) gilt in Monoiden, die keine Gruppen sind, im Allgemeinen nicht:
Beispiel: $(\mathbb{Z}_0, \circledcirc)$
$2 \circledcirc 3 - 0 = 3 \circledcirc 3$, aber $2 \neq 4$

## 1.12 Definition

a) $R \neq \varnothing$ Menge mit 2 Verknüpfungen + und $\cdot$ heißt *Ring*, falls

(1) $(R,+)$ ist kommutative Gruppe (neutrales Element: 0, *Nullelement*, Inverses zu a : $-a \qquad b+(-a) =: b-a$)

(2) $(R,\cdot)$ ist Halbgruppe

(3) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ und $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ ($\cdot$ vor $+$)
*Distributivgesetz*

b) Ring R heißt *kommutativer Ring* falls $(R,\cdot)$ kommutative Halbgruppe ist.

c) Ring R heißt *Ring mit Eins*, falls $(R,\cdot)$ Monoid, neutrales Element $1 \neq 0$ (*Einselement, Eins*)

## 1.13 Beispiele

a) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kommutativer Ring mit 1, invertierbare Elemente bezüglich $\cdot$ sind 1 und $-1$.

b) $(\mathbb{Q},+,\cdot), (\mathbb{R},+,\cdot), (\mathbb{C},+,\cdot)$ sind kommutative Ringe mit Eins.
Alle Elemente $\neq 0$ sind invertierbar bezüglich $\cdot$

c) $n \in \mathbb{N}, n > 1$.
$\mathbb{Z}_n = \{0,\ldots,n-1\}$
$(\mathbb{Z}_N,\oplus,\circledcirc)$ ist kommutativer Ring mit Eins:
Wegen 'Beispiel' on page 27 f),g) sind nur die Distributivgesetz zu zeigen:

$$\begin{aligned}
& (a\oplus b)\circledcirc c = ((a\oplus b)\cdot c) \mod n \\
= \quad & (((a+b) \mod n)\cdot c) \mod n \\
\underset{\text{Mathe I}}{=} \quad & ((a+b)\cdot) \mod n \\
= \quad & (a\cdot c + b\cdot c) \mod n \\
\underset{\text{Mathe I}}{=} \quad & ((a\cdot c) \mod n + (b\cdot c) \mod n) \mod n \\
= \quad & a\circledcirc c \oplus b\circledcirc c
\end{aligned}$$

d) $M_n(\mathbb{R})$, $n\times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$, mit Matrizenaddition + und, Multiplikation $\cdot$ ist Ring mit Eins.
(Folgt aus Rechenregeln für Matrizen, Mathe II) Eins : $E_n \quad n{\times}n$-Einheitsmatrix
Für $n \geq 2$ ist $M_n(\mathbb{R})$ kein kommutativer Ring

## 1.14 Proposition

Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring. Dann gilt für alle $a,b\in R$.

a) $0\cdot a = a\cdot 0 = 0$

b) $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$

c) $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$

*Beweis.*

a) $0\cdot a = (0+0)\cdot a \underset{\text{DG}^2}{=} 0\cdot a + 0\cdot a$
Addiere auf beiden Seiten $-(0\cdot a)$
$0 = 0\cdot a + 0 = 0\cdot a$

b) $(-a)\cdot b + ab = ((-a)+a)\cdot b = 0\cdot b \underset{\text{a)}}{=} 0$
$\Rightarrow (-a)\cdot b = -(ab)$ Analog $a\cdot(-b) = -(ab)$

c) $(-a)\cdot(-b) \underset{\text{b)}}{=} -(a\cdot(-b)) \underset{\text{b)}}{=} -(-(a\cdot b)) = a\cdot b$

□

## 1.15 Bemerkung

a) In einem Ring mit Eins sind 1 und $-1$ bezüglich $\cdot$ invertierbar.
$1\cdot 1 = 1 \quad (1^{-1} = 1)$
$(-1)\cdot(-1) = 1 \quad$ (1.14c)), dass heißt. $(-1)^{-1} = -1$
0 Ist nie bezüglich Multiplikation invertierbar, denn $0\cdot a = 0 \neq 1$. 1.14a)

b) Es kann sein dass $1=-1$ gilt. Zum Beispiel:
$(\mathbb{Z}_2,\oplus,\circledcirc) \quad 1\oplus 1 = 0 \quad 1 = -1$

## 1.16 Definition

Ein kommutativer Ring $(R,+,\cdot)$ mit Eins heißt *Körper*, wenn jedes Element $\neq 0$ bezüglich Multiplikation invertierbar ist.

[2] Distributivgesetz

## 1.17 Beispiel

a) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper, $\mathbb{Z}$ nicht.

b) $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \circledcirc)$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl.
$\mathbb{Z}_n$ ist kommutativer Ring mit 1.
'Beispiele' on page 32c: Die invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}_n$ sind alle $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = a$

## 1.18 Proposition (Nullteilerfreiheit in Körpern)

Ist $K$ ein Körper, $a, b \in K$, mit $a \cdot b = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$

*Beweis.*
Sei $a \cdot b = 0$ Angenommen $a \neq 0$. Dann existiert $a^{-1} \in K$
$0 \underset{1.14a)}{=} a^{-1} \cdot 0 \underset{\text{Vor.}}{=} a^{-1}(a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b$ □

*Beispiel*: $R = (\mathbb{Z}_6, \oplus, \circledcirc)$
$2 \circledcirc 3 = 0 \qquad 2 \neq 0, 3 \neq 0$

## 1.19 Definition

Sei $K$ ein Körper,

a) Ein (Formales) *Polynom* über $K$ ist ein Ausdruck $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ wobei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in K$. (Manchmal $f(x)$ statt $f$, +-Zeichen hat zunächst nichts mit einer Addition zu tun. $a_i$ *Koeffizienten* von f
Ist $a_i = 0$ so kann man in der Schreibweise von f $0 \cdot x^i$ auch weglassen.
Statt $a_0 x^0$ schreibt man $a_o$, statt $a_1 x^1$ schreibt man $a_1 x$. Sind alle $a_i = 0$, so $f = 0$, *Nullpolynom* .
Ist $a_i = 1$, so schreibt man $x^i$ statt $1x^i$

b) Zwei Polynome $f$ und $g$ sind *gleich*, wenn *entweder* $f = 0$ und $g = 0$ *oder* $f \neq 0$ und $g \neq 0$
d.h $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0$

$g = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, b_m \neq 0$
und $n = m$ und $a_i = b_i$ für $i = 0 \dots n$

c) Menge aller Polynome über $K$. $K[x]$
Wir wollen $K[x]$ zu einem Ring machen. Wie?
*Beispiel*: $f = 3x^2 + 2x + 1$,
$g = 5x^3 + x^2 + x \in Q[x]$
$f + g = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$
$f \cdot g = (3^x + 2x + 1) \cdot (5x^3 + x^2 + x)$
$= 15x^5 + 10x^4 + 5x^3 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x^2 + 2x^2 + x$
$= 15x^5 + 13x^4 + 10x^3 + 3x^2 + x$

27.10.2015

## 1.20 Satz und Definition

$K$ Körper. $K[x]$ wird zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgenden Verknüpfungen.
$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g = \sum_{i=0}^{m} b_i x_i$ so
$f + g \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$
$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$,wobei $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$ (Faltungsprodukt)
In beiden Fällen sind Koeffizienten $a_i$ mit $i > n$ bzw. $b_i$ mit $i > m$ gleich 0 zu setzen. Das Einselement ist $1\ (= 1x^0)$
Das Nullelement ist das Nullpolynom.
$-f = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i$
$(K[x], +, \cdot)$ heißt *Polynomring* in einer Variable *Beweis:* Nachrechnen

## 1.21 Bemerkung

a) $f = \sum_{i=0}^{n} a^i x^i \in K[x],\ a \in K \subseteq K[x]$
$a \cdot f = \sum_{i=0}^{n} (a \cdot a_i) x^i$

$$x \cdot f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+1} = a_n x^{n+1} + \ldots + a_0 x$$

b) Das +− Zeichen in der Definition der Polynome entspricht genau der Addition der *Monome* $a_i x^i$.
$$(a_0 x^0 \underset{\text{Add. aus 1.20}}{\underset{\uparrow}{+}} a_1 x^1) = a_0 x^0 \underset{\text{+ aus 1.19}}{\underset{\uparrow}{+}} a_1 x^1$$

## 1.22 Definition

Sei $0 \neq f \in k[x], f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0$.
Dann heißt $n$ der *Grad* in $f$, $\text{Grad}(f) = n$
$\text{Grad}(0) := -\infty$
$\text{Grad}(f) := 0$ :*Konstante Polynome* $= \neq 0$

## 1.23 Satz

Sei $K$ ein Körper, $f, g \in K[x]$.
Dann ist $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$
(Konvention: $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty + \infty)$,
Sei $f \neq 0$ und $g \neq 0$
$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0, n = \text{Grad}(f)$
$g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, b_m \neq 0, m = \text{Grad}(g)$
Koeffizienten von $x^{n+m}$ in $f \cdot g : a_n b_m \underset{1.18}{\neq} 0$

## 1.24 Korollar

Sei $K$ ein Körper

a) Genau die konstanten Polynome $\neq 0$ sind in $K[x]$ bezüglich $\cdot$ invertierbar
Insbesondere ist $K[x]$ *kein* Körper

b) Sind $f, g \in K[x]$ mit $f \cdot g = 0$, so ist $f = 0$ oder $g = 0$ (Nullteilerfreiheit in $K[x]$)

c) Sind $f, g_1, g_2 \in K[x]$ mit $f \cdot g_1$ und ist $f \neq 0$, so ist $g_1 = g_2$

*Beweis.*

a) Sei $f \in K[x]$ invertierbar bezüglich $\cdot$. Dann ist $f \neq 0$ und es existiert $g \in K[x]$ mit $f \cdot g = 1$.
Mit 1.23:
$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Grad}(1) &= \mathrm{Grad}(f \cdot g) \\ &= \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(1). \end{aligned}$$
Also: $\mathrm{Grad}(f) = 0 (= \mathrm{Grad}(g))$
Dass heißt $f$ ist konstantes Polynom.
Ist umgekehrt $f = a \in L, a \neq 0$, so $f^{-1} = a^{-1} \in K$

b) Folgt aus 1.23:
$$\begin{aligned} -\infty = \mathrm{Grad}(0) &= \mathrm{Grad}(f \cdot g) \\ &= \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g) \end{aligned}$$
$\Rightarrow$ $\mathrm{Grad}(f) = -\infty$ oder $\mathrm{Grad}(g) = -\infty$, d.h $f = 0$, oder $g = 0$

c) $f g_1 = f g_2$
$\Rightarrow 0 = f g_1 - f g_2 \qquad = f \cdot (g_1 - g_2)$
Da $f \neq 0$, folgt mit b)
$g_1 - g_2 = 0$, d.h $g_1 = g_2$

$\square$

## 1.25 Bemerkung

a) Jedem Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$
kann man eine Funktion $K \to K$ zuordnen. $a \in K \longmapsto f(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i \in K$
(Polynomfunktion aus Analysis $K = \mathbb{R}$)
Aufgrund der Definition von Addition/Multiplikation von Polynomen gilt:
$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$
$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$
Es kann passieren, dass zwei verschiedene Polynome die gleiche Funktion beschreiben.

Z.B $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$
$f = x^2, g = x$
$f \neq g$
$f(1) = 1 = g(1)$
$f(0) = -g(0)$
Über unendlichen Körpern passiert das nicht (später)

b) Schnelle Berechnung von $f(a)$:
$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
$f(a) = a_0 + a(a(a_1 + a(a_2 + \ldots + a(a_{n-1} + a a_n)))$

*Horner-Schema*

## 1.26 Definition

$K$ Körper, $f, g \in K[x]$
*$f$ teilt $g$* $\quad (f \mid g)$ falls $q \in K[x]$ existiert mit $g = q \cdot f$ (Falls $g \neq 0 \mod f \mid g$, so ist $\mathrm{Grad}(f) \leq \mathrm{Grad}(g)$ nach 'Satz' on page 36)

## 1.27 Satz

$K$ Körper, $0 \neq f \in K[x], g \in K[x]$
Dann existiert eindeutig bestimmte Polynome $q, r$

(1) $$g = q \cdot f + r$$
(2) $$\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(f)$$

(Beweis WHK, Satz 4.69) *Division mit Rest*

## 1.28 Beispiel

.10.2015

a) $g = x^4 + 2x^3 - x + 2, f = 3x^2 - 1, f, g \in Q[x]$

$$\begin{array}{rrrrrl}
\big( & x^4 + 2x^3 & & -x & +2\big) & : \left(3x^2-1\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \dfrac{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}{3x^2-1} \\
& \underline{-x^4 \qquad} & \underline{+\frac{1}{3}x^2} & & & \\
& 2x^3 & +\frac{1}{3}x^2 & -x & & \\
& \underline{-2x^3} & & \underline{+\frac{2}{3}x} & & \\
& & \frac{1}{3}x^2 & -\frac{1}{3}x & +2 & \\
& & \underline{-\frac{1}{3}x^2} & & \underline{+\frac{1}{9}} & \\
& & & -\frac{1}{3}x & +\frac{19}{9} &
\end{array}$$

b) $g = x^4 - x^2 + 1 \quad f = x^2 + x \quad f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$

$$\begin{array}{l}
x^4 + 3x^3 + 1 : x^2 + x = x^2 + 2x \\
-\underline{(x^4 + x^3)} \\
\qquad 2x^3 + 2x^2 + 1 \\
\quad -(\underline{2x^3 + 2x^2}) \\
\qquad\quad 1 \leftarrow r
\end{array}$$

## 1.29 Korollar

$K$ Körper,$a \in K$.

$f \in K[x]$ ist genau dann durch $(x-a)$ teilbar, wenn $f(a) = 0$ (d.h $a$ ist Nullstelle von $f$)

$[f = g \cdot (x-a), q \in K[x]]$

*Beweis.*

Falls $x - a \mid f$, so existiert $q \in K[x]$ mit $f \underset{1.25}{=} q(x-a)$.

Dann $f(a) = q(a) \cdot \underbrace{(a-a)}_{=0} = 0$.

Umgekehrt: Angenommen $f(a) = 0$. Division mit Rest von $f$ durch $x - a$:

$f = q \cdot (x-a)r, q, r \in K[x]$

$\operatorname{Grad}(r) < \operatorname{Grad}(x-a) = 1, r \in K$

Zeige: $r = 0$.

$r = f - q \cdot (x-a)$

Setze $a \in K$ ein.
$r \underset{1.25}{=} f(a) - q(a) \cdot (a-a) = 0 - 0 = 0$
$f = q \cdot (x-a)$ □

## 1.30 Definition

$K$ Körper $a \in K$ heißt*m-fache Nullstelle* von $f \in K[x]$, falls $(x-a)^m \mid f$ und $(x-a)^{m+1} \nmid f$.
Dass heißt $f = q \cdot (x-a)^m$ und $q(a) \neq 0$

## 1.31 Beispiel

$x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
In $Z_3$ hat $f$ die Nullstelle 1
'Korollar' on page 39: $x - 1 (= x+2)$ teilt $f$
Dividiere $f$ durch $x - 1$ :
$f = (x^4 + 2x^3 + 2x + 2) \cdot (x-1)$

## 1.32 Satz

$K$ Körper, $f \in K[x], \text{Grad}(f) = n \geq 0$ (dass heißt $f \neq 0$).
Dann hat $f$ höchstens $n$ Nullstellen in $K$ (einschließend Vielfachheit). Genauer: Sind $a_1, \ldots, a_k$ die verschiedenen Nullstellen von $f$, so ist
$f = g \cdot (x-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{m_k}$, $m_i$ Vielfachheiten der Nullstellen $a_i$, $g$ hat keine Nullstelle in $K6$

*Beweis.* Durch Induktion nach n.
$n = 0$ : $f = a_0 \neq 0$, ohne Nullstelle.✓.
Sei $n > 0$. Behauptung sei richtig für alle Polynome von Grad $< n$.
Hat $f$ keine Nullstellen, $g = f$✓
Hat $f$ Nullstellen $a_1 \ldots, a_k, k \geq 1$
so $f = q \cdot (x-a_1)^{m-1}$ (nach Definition) $q(a_1) \neq 0$.
$\text{Grad}(q) \underset{1.23}{=} n - m_1 \underset{m_1>0}{<} n$
Wir zeigen:

$q$ hat genau die Nullstellen $a_2, \dots, a_k$ mit Vielfachheiten $m_2, \dots, m_k$.
Klar: Jede Nullstelle von $q$ ist Nullstelle von $f$, Dass heißt $q$ hat höchstens Nullstellen $a_2, \dots, a_k$.
Diese Nullstellen hat $q$ mit Vielfachheit $0 \geq n_i \geq m_i$, denn $(x - a_i)^{m_i} | q \Rightarrow (x - a_i)^{n_i} \mid f$
Sei $i \in \{2, \dots, k\}$. Es ist $f = s \cdot (x - a_i)^{m_i}, s \in K[x], s(a_i) \neq 0$

$$q = q_1 \cdot (x - a_i)^{n_i}, q_1 \in K[x], q(a_i) \neq 0, \qquad ((x - a_i)^0 = 1)$$

$$f = q_1 (x - a_1)^{n_i} \cdot (x - a_1)^{m_1}$$ ‘Korollar’ on page 36c):

$s(x - a_i)^{m_i - n_i} = q_1 \cdot (x - a_1)^{m_1}$
Ist $m_i > n_i$, so ist $m_i - n_i > 0$
$0 = s(a_i)(a_i - a_i)^{m_i - n_i} = q(a_i)(a_i - a_i) \neq 0E$
Dass heißt $.n_i = m_i.i, 2 \dots, k$
$q = g(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k}$, g ohne Nullstelle in $K$
$f = g(x - a_1)^{m_2} \cdots (x - a_2)^{m_1}$ (Nach Induktionsvorsaussetzung) □

## 1.33 Korollar

$K$ Körper, $f, g \in K[x], m = \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g)$
Gibt es $m + 1$ Elemente $a_1, \dots, a_{m+1} \in K$, paarweise verschieden, mit $f(a_i) = g(a_i), i = 1, \dots, m + 1$ so $f = g$.
*Insbesondere*: Ist $K$ unendlich $, f, g \in K[x]$ mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in K$, so ist $f = g$

*Beweis.* $f - g \in K[x], \text{Grad}(f - g) \leq m$.
$f - g$hat $m + 1$ Nullstellen $a_1, \dots a_{m+1}$
1.32 $f - g = 0, f = g$ □

## 1.34 Bemerkung

Über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p(p$ Primzahl) gibt es Polynome beliebig hohen Grades ohne Nullstellen
Über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$: $(x^2 + 1)^m$ hat Grad$(2m)$, keine Nullstellen in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$
über $\mathbb{Z}_p$ z.B $(x^p - x + 1)^m$ hat Grad $pm$, ohne Nullstellen (ohne Beweis)

### 1.35 Fundamentalsatz der Algebra

Ist $f \in \mathbb{C}[x], f \neq 0$ so ist $(f = a_n x^n + \ldots + a_0)$
$f = a_n(x-c_1)^{m_1} \ldots (x-c_k)^{m_k}, a_n.c_i, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ (Nullstellen mit Vielfachen $m_1, m_2$)
$m_1 + \ldots + m_k = \text{Grad}(f)$
$\text{Grad}(f) = n$ $f$ hat $n$ Nullstellen (einschließend Vielfachheit)

# 2 Vektorräume

3.11.2015

### 2.1 Definition

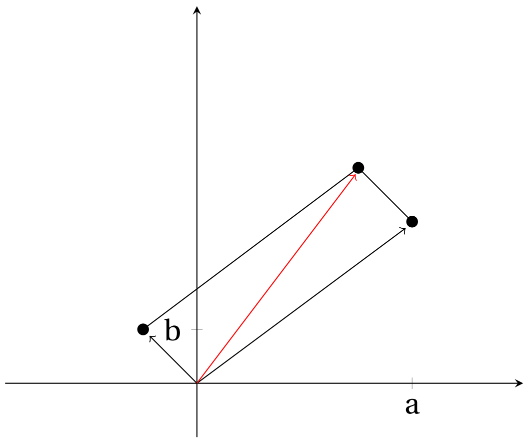
Sei $K$ ein Körper. Ein *$K$-Vektorraum* V besitzt Verknüpfung + bezüglich derer eine Kommutative Gruppe ist (Neutrales Element $\sigma$, *Nullvektor*, Inverses zu $v \in V : -v$). AuSSerdem existiert Abbildung $K \times V \longrightarrow V$
$(a, v) \longmapsto av, a \in K, v \in V$
(„Multiplikation“von Elementen aus $V$, (”Vektoren”) mit Körperelementen (”Skalare”)), so dass gilt:
$(a \underset{\text{in } K}{+} b)v = av \underset{\text{in } V}{+} bv$ für alle $a, b \in K,\ v \in V$
$a(v \underset{\text{in } V}{+} w) = av \underset{\text{in } V}{+} aw$ für alle $a \in K,\ v, w \in V$
$\underset{\text{in } K}{(ab)}v = a(\underset{\in V}{bv})$ für alle $a, b \in K, v \in V$
$1v = v$ für alle $v \in V$.

### 2.2 Beispiel

a) $K$ Körper, $n \in \mathbb{N}$
$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$ ist K-Vektorraum bezüglich $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$
$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$ für alle $a \in K, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix} \in K^n$. Raum der *Spaltenvektoren* der *Länge* $n$ über $K$.

Entsprechend: Raum der Zeilenvektor, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)^t$

Für $K = \mathbb{R} : \mathbb{R}^n$
$n = 2,3$ Elemente aus $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, identifizierbar mit Ortsvektor der Ebene oder des 3-dimensionalen Raumes.




b) Sei $K$ ein Körper Polynomring $K[x]$ ist ein K-Vektorraum, bezüglich

- Addition von Polynomen
- Multiplikation von Körperelementen mit Polynomen

$$a\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) := \sum_{i=0}^{n} (a a_i) x^i \in K[x]$$

(Multiplikation von Polynomen mit Polynom Grad $\leq 0$)
2.1 folgt aus den Ringeingenschaften von $K[x]$

c) $K$ Körper. $V$ = Abbildung $(K,K) = \{\alpha : K \to K : \alpha \text{Abbildung}\}$ Addition auf V
$\alpha + \beta \in V (\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ für alle $x \in K$
Skalare Multiplikation:
$a \in \mathbb{R}, \alpha \in V (a\alpha)(x) = a \cdot \alpha(x)$ Für alle $x \in K$
Nachrechnen : Damit wird $V$ ein $K$-Vektorraum

## 2.3 Proposition

$K$ Körper, $V, K - VR$

a) $a \cdot \sigma = \sigma$

b) $0 \cdot v = \sigma$

c) $(-1) \cdot v = -v$
a,b,c Für alle $v \in V$

## 2.4 Definition

$K$ Körper, $V$ $K - VR$.
$\varnothing + U \subseteq V$ heißt *Unterraum* (*Untervektorraum* , oder *Teilraum* ) von $V$, falls $U$ bezüglich Addition auf $V$ und der skalaren Multiplikation mit Elementen aus $K$ selbst $K$ Vektorraum ist.

## 2.5 Proposition

$U$ ist Unterraum von $V$
$\Leftrightarrow$

(1) $u_1 + 1_2 \in U$ für alle $u_1, u_2 \in U$

(2) $au \in U$ für alle $u \in U, a \in L$
(Nullvektor in $U$ = Nullvektor in $V$)

*Beweis.* $\Rightarrow \checkmark \Leftarrow$: Da $U \neq \varnothing$, existiert $u \in U$.
$\sigma = 0 \cdot u \in U$
$u \in U \Rightarrow -u = (-1)u \in U$
Mit (1): $(U, +)$ ist kommutative Gruppe. Restliche Axiome gelten auch für $U, K$.

□

## 2.6 Beispiel

a) $V-K-VR$, so ist $V$ Unterraum von $V$.
und $\{0\}$ ist Unterraum von $V$ (*Nullraum*)

b) Betrachte $K[x]$ als $K-VR$. (2.2).
Sei $n \in \mathbb{N}_0$.
$U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) \leq n\}$ Unterraum von $K[x]$

## 2.7 Proposition

Seien $U_1, U_2$ Unterräume von $K$-VR V.

a) $U_1 \cap U_2$ ist Unterraum

b) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in u_1 \in U_2, u_2 \in U_2\}$ ist Unterraum von $V$ (*Summe* von Unterräume)

c) $U_1 + U_2$ ist der kleinste Unterraum von $V$, der $U_1 \cup U_2$ enthält.

d) $U_1 \cap U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum.
*Beweis*: 0.4

## 2.8 Definition

$V$ $K$-VR

a) $v_1, \ldots, v_m \in V$, $a - i, \ldots a_m \in K$
Dann heißt
$a_1 v_1 + \ldots a_m v_m = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \in V$
*Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_m$ (mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_m$).
[ Beachte: Zwei formell verschiedene Linearkombinationen derselben Vektoren können den gleichen Vektor darstellen z.B. in $\mathbb{R}^2$ :
$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3cd \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ]

b) Ist $M \subseteq V$, so ist der von $M$ *erzeugte* oder *aufgespannte Unterraum* $< M >_k$ (oder kurz $(< M >)$ die Menge aller endlichen Linearkombination, die man mit Vektoren aus $M$ bilden kann:
$< M > = \{\sum_{i=1}^{n} a_i v_1 : n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in M\}$
$< \varnothing >_K := \{\varnothing\}$
$M = \{v_1, \dots v_m\} :< M >=:< v_1, \dots, v_m >$

c) Ist $< M >_K = V$, so heißt M *Erzeugungssystem*

## 2.9 Satz

$V$ $K$–VR, $M \subseteq V$

a) $< M >_K$ ist Unterraum von V

b) $< M >_K$ ist der kleinste Unterraum von $V$, der $M$ enthält.
Insbesondere: Sind $u_1, u_2$ Unterräume von $V$, so ist $< U_1 \cup U_2 >_K = U_1 + U_2$
*Beweis*: 0.7

## 2.10 Definition

$V$ $K$-VR $V$ heißt *endlich erzeugt*, falls es eine *endliche* Teilmenge $M \subseteq V$ gibt mit $V =< M >_K$

## 2.11 Beispiel

a) $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$
$K^n$ ist endlich erzeugt.

$e_1, \dots, e_n$ *Einheitsvektor* $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$$K^n = < e_1, \ldots, e_n >_K, \text{ denn } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$$

b) $K[x]$ als $K$-Vr ist nicht endlich erzeugt. Angenommen e existiert $f_1, \ldots, f_n \in K[x]$ mit $K[x] = < f_1, \ldots, f_n >_K$.
Sei $t$, $\max \mathrm{Grad}(f_i) \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$
Dann haben alle Polynome in $< f_1, \ldots, f_n >_K$ höchstens Grad $t$. Also $x^{t+1} \in K[x] \backslash < f_1, \ldots, f_n >_K E$
$M = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\} = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$
$K[x] = < M >_K$. $\quad f = \sum_{n=0}^{t} a_i x^i$

c) $n \in \mathbb{N}$. $\quad U = \{f \in K[x] : \mathrm{Grad}(f) = n\}$
Unterram von $K[x]$, endlich erzeugt

## 2.12 Definition

Sei $V$ $K$-VR, $v_1, \ldots, v_m \in V$ heißen *linear abhängig*, wenn es $a_1, \ldots, a_n \in K$, *nicht alle* $= 0$, gibt mit

$$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \sigma$$

(Beachte: Immer mit $0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_m = \sigma$, aber bei lineare Abhängigkeit soll es noch eine andere Möglichkeit geben) Andernfalls nennt man $v_1, \ldots, v_m$ *linear unabhängig*:
(D.h aus $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \sigma$ folt $a_1 = \ldots = a_m = 0$)
Entsprechend: $\{v_1, \ldots, v_m\}$ linear abhängig, linear unabhängig.
$\varnothing$ per Definition linear unabhängig. Klar: Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren wieder linear unabhängig

## 2.13 Beispiel

a) $\sigma$ ist linear abhängig: $1 \cdot \sigma = \sigma$

b) $v, w \in V$, $v \neq \sigma \neq w$.
Wann sind v und w linear abhängig?

$v, w$ linear abhängig $\Rightarrow \exists a, b \in K$,nicht beide = 0 mit $a \cdot v + b \cdot w = \sigma$
Angenommen : $a \neq 0 \qquad a \cdot v = -b \cdot w | a^{-1}$ (K Körper)
$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1}(-bw) = (-a^{-1}b)w \in < w >_K = \{cw : c \in K\}$
$d \in K$
$dv = (-da^{-1}b)w \in < w >_K$
$< v >_K \subseteq < w >_K$
Dann auch $b \neq 0$.
Angenommen $b = 0, \quad a \cdot v = -0w = \sigma$
$v = a^{-1}\sigma = \sigma E$ Vertausche Rollen von $v, w :< w >_K \subseteq < v >_K$
$v, w$ linear abhängig $\Leftrightarrow < v >_K = < w >_K$

*Beweis.* $\Rightarrow \checkmark$
$\Leftarrow v \in < v >_K = < w >_K$
$\Rightarrow v = c \cdot w$ für ein $c \in K$.
$\Rightarrow \sigma = -v + c \cdot w = (-1)v + c \cdot w$
$\Rightarrow v, w$ linear abhängig. □

c) $e_1, \ldots e_n \in K^n$ sind linear unabhängig.
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \ldots + a_n e + n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow a_1 = \ldots a_n = 0.$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig, linear unabhängig? Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?
Führt auf LGS für die unbekannten $a, b, c$
$$\begin{array}{cccc} 1a & 3b & 2c & = 0 \\ 2a & 2b & 3c & = 0 \\ 3a & 1b & 4c & = 0 \end{array}$$
Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$c$ frei wählbar, $b = -\frac{1}{4}c \qquad a = -3b - 2c = -\frac{3}{4}c - 2c = -\frac{5}{4}c$

z.B $c = 4, b = -1, a = -5$

$$(-5)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Vektoren sind linear abhängig.

## 2.14 Bemerkung

Man kann auch für unendliche Mengen $M \subseteq V$ lineare Unabhängigkeit definieren.

Jede endliche Teilmenge von $M$ ist linear unabhängig. Zum Beispiel $\{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig in $K[x]$.

## 2.15 Satz !!!

$V$ $K$-VR, $v_1, \ldots, v_m$ sind linear abhängig

1. $\Leftrightarrow \exists i : v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} b_j v_j$ für geignete $b_j \in K$

   $\Leftrightarrow \exists i :< v_1 \ldots, v_m >_K = < v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m >_K$

2. $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig

   $\Leftrightarrow$ jedes $v \in < v_1, \ldots v_m$ lässt sich als $v_1, \ldots, v_m$ schreiben.

3. Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig und ist $V \notin < v_1, \ldots, v_m >_K$, so sind $v_1, v_m, v$ linear unabhängig.

   *Beweis.* Wie in 0.11, aber $v_1, \ldots, v_m \in V$ □

## 2.16 Definition

Sei $V$ endliche erzeugter $K$-VR.

Eine endliche Teilmenge $B \subseteq V$ heißt *Basis* von V, falls

(1) $V\langle B\rangle_K$

(2) $B$ linear unabhängig

$(V = \{\sigma\} : \varnothing$ ist Basis von $V)$

## 2.17 Beispiel

a) $e_1, \ldots, e_n$ Basis $K^n$ (*kanonische Basis*)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_5 :$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden keine Basis von $\mathbb{Z}_5^2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_7 :$

Lineare Unabhängigkeit:

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Führt auf LGS für a,b:

$\begin{matrix} 1 \cdot a & +3 \cdot b & = 0 \\ 2 \cdot a & +1 \cdot b & = 0 \end{matrix}$ Gauß-Algorithmus (funktioniert über jedem Körper $K$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b = 0 \quad , a + 3b = 0, \quad a = 0$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}_5} = \mathbb{Z}_7^2$$

Sei $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^2$

Gesucht sind $a, b \in \mathbb{Z}_7$

Gauß:

$$\begin{aligned} 1\cdot a &\quad +3\cdot b &\quad = c \\ 2\cdot a &\quad +1\cdot b &\quad = d \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 2 & 1 & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & d-2c \end{pmatrix} \xrightarrow{II\cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & 4d-c \end{pmatrix}$$

$b = 4d - c = 4d + 6c$

$a = c - 3b = 4c + 2d$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (4c+2d)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (4d+6c)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.18 Satz (Existenz von Basen)

Sei $V$ endliches Erzeugter $K$-VR. Dann enthält jedes endliche Erzeugendensystem von $V$ eine Basis vom $V$.

*Beweis.* Sei $M \subseteq V$ endlich mit $V = \langle M \rangle_K$. Ist M linear unabhängig, so ist M Basis ✓
ist M linear abhängig, so existier nach 2.15a)
$v \in M$ mit $V = \langle M \rangle_K = \langle M \setminus \{v\} \rangle_K$
Da M endlich, endet dieses Verfahren mit Basis □

## 2.19 Lemma

$V$ endlich erzeugter $K-$VR
$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von $V$. Sei $\sigma \neq w \in V$.
Dann $w = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, a_j \in K$.
Ist $a_i \neq 0$, so ist $(B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\}$ wieder eine Basis von $V$

*Beweis.* $w = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \Rightarrow a_i v_j = w - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_i v_j$

$\Rightarrow v_i = a^{-1}(a_i v_i) = a_i^{-1} w + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i^{-1} a_j) v_j$

$v_i \in \langle (B \setminus \{v_i\} \cup \{w\} \rangle_K$

$V = \langle B \rangle_K = \langle B \cup \{w\} \rangle_K \underset{2.15}{=} \langle B \setminus \{v_i\} \cup \{w\} \rangle_K$

Zeige $(B \setminus \{v_i\} \cup \{w\})$ ist linear unabhängig:

Angenommen $\sigma = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{6} c_j v_j + cw = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{6} c_i v_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{6} ca_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{6} (c_j + ca_j) v_j + ca_i v_i$

$v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig

$\Rightarrow (1) ca_i = 0$ und

$(2) c_j + ca_j = 0$ für alle $j \neq i$

$(1) ca_i = 0, a_i \neq 0 \Rightarrow c = 0$

$(2) c_j = 0$ für alle $i \neq j$.

Fertig. □

## 2.20 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

(Ernst Steinitz, 1871-1928, Kiel)

V endlich. erzeugter $K$−VR, $B$ Basis von $V$, $M$ endliche linear unabhängige Teilmenge von $V$. Dann existiert $C \subseteq B$ mit $|C| = |M|$, so dass $(B \setminus C) \cup M$ Basis von $V$ ist.

Insbesondere $|M| \leq |B|$.

*Beweis.* Sei $|M| = k$

Induktions nach $k$.

$k = 0$✓

$k > 0$. Sei $M = \tilde{M} \cup \{w\}, |\tilde{M}| = k - 1$

Induktionsvorraussetzung: Existiert $\tilde{C} \subseteq B$ mit $|\tilde{|}C = |\tilde{|}M$ und $(B \setminus \tilde{C}) \cup \tilde{M}$ ist Basis von $V$

$w = \sum_{u \in B \setminus \tilde{C}} a_u u + \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$

Mindestens eines der $a_U$ ist $\neq 0$, denn sonst $W = \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$,also $M = \tilde{M} \cup \{w\}$ linear abhängig $E$

Also sei $a_i \neq 0$ für ein $u \in B \setminus \tilde{C}$.

Nach 2.19 ist $(B \setminus C) \cup M$ Basis von $v_i$ wobei $c = \tilde{C} \cup \{w\}$.

Fertig. □

## 2.21 Korollar

$V$ endlich erzeugre $K$−VR

a) Je zwei Basen von $V$ enthalten gleich viele Vektoren

b) Jede linear unabhängige Teilmenge von $V$ ist endlich

c) (Basisergänzungssatz)
Jede linear unabhängige Menge von Vektoren lässt sich zu Basis ergänzen.

*Beweis.* a) $B, \tilde{B}$ Basen von $V$.
2.20:$|B| \leq |\tilde{|}B$
:$|\tilde{|}B \leq |B|$
Also $|B| = ||||\tilde{B}$.
b) Angenommen $V$ enthält unendlich linear abhängige Teilmenge $M$, Sei $B$ Basis von $V$. Wähle $M_0 \subset M$ mit $M_0$ endlich, $|M_0| > |B|$.
Nach Voraussetzung ist $M_0$ linear abhängig Widerspruch zu 2.20
c) Sei $M$ linear unabhängig Teilmenge von $V$. Nach b) ist $M$ endlich.
Sei $B$ eine Basis von $V$ 2.20: $\exists c \subseteq B, |c| = |M|$ so dass $\underbrace{(B \setminus C)}_{\text{Basisergänzung}} \cup M$ Basis. □

## 2.22 Satz

$V$ endlich erzeugter $K$−VR,
$B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(1) $B$ ist Basis von V

(2) $B$ ist maximal unabhängige Teilmenge von $V$

(3) $B$ ist minimales Erzeugungssystem von $V$ (d.h. $\langle B \setminus \{w\}\rangle_K \neq V$ für alle $w \in B$.)

*Beweis.* $(2) \Rightarrow (1)$
Angenommen $\langle B\rangle_K \neq V$
Sei $v \in V \setminus \langle B\rangle_K$.

2.15c): $B \cup \{v\}$ linear abhängig $\lightning$. $\langle B\rangle_K = V$ $B$ ist Basis
$(1) \Rightarrow (2)$ : Angenommen $B \subseteq C$, $C$ linear unabhängig.
2.21 c ist endlich.
2.20 $|c| \leq |B|$ Daher $B = c$.
$(3) \Rightarrow (1)$. Angenommen $B$ ist linear abhängig
2.15a): $\exists w\ inB:\ V = \langle B\rangle_K = \langle B \setminus \{w\}\rangle_K \lightning$
$B$ ist linear unabhängig also Basis.
$(1) \Rightarrow (3)$. Angenommen $\exists w \in B$ mit $\rangle B \setminus \{w\}\rangle_K = V_i = \langle B\rangle_K$
2.15a): $B$ ist linear abhängig $\lightning$ □

## 2.23 Definition

$V$ $K$−VR.

a) Ist $V$ endlich erzeugt, $B$ ist Basis von $V$, $|B| = n$, so hat $V$ *Dimension n*, $\dim_K(V) = n$ (oder einfach $\dim(V) = n$)

b) ($V$ heißt nicht endlich erzeugt, so heißt $V$ *unendlich-dimensional*)
(Also endlich erzeugt = endlich-dimensional)

## 2.24 Korollar

$V$ $K$-VR, $\dim_K(V) = n, \quad B \subseteq V, |B| = n$

a) Ist $B$ linear unabhängig, dann ist $B$ Basis.

b) Ist $\langle B\rangle_K = V$, dann ist $B$ Basis
*Beweis*: Folgt aus 2.22

## 2.25 Beispiel

a) $\dim_K(K^n) = n$, da $e_1, \ldots, e_n$ Basis.

b) $V = \mathbb{R}^4$
$U = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}}_{=u_2} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$u_1, u_2$ sind linear unabhängig.
$a\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ nur für $a, b = 0$
$\{u_1, u_2\}$ Basis von $U$ $\quad$ $\dim_R(U) = 2$.
Ergänze $u_1, u_2$ zu Basis von $V = \mathbb{R}^4$:

*Erste Möglichkeit*:
$e_1, e_2, e_3, e_4$ kanonische Basis des $R^4$
$U_1 = 1e_1 + 2e_2 + 0e_3 + 1e_4$
2.19: $U_1, e_3, e_4$ Basis von $\mathbb{R}^4$
$U_2 = au_1 + be_2 + ce_3 + de_4 =$

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\d\end{pmatrix} \qquad c = 1$$

2.19 : $u_1, u_2, e_3, e_4$ Basis von $\mathbb{R}^4$
*Zweite Möglichkeit*:
2.15c):
$v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig
$v \notin \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \Rightarrow v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$
$e_1 \notin U$ (1. Koordinate $\neq$ 4. Koordinate)
2.15c) $U_1, U_2, e_1$ linear unabhängig.
$\langle u_1, u_2, e_1 \rangle = ?$
$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a+c \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
$e_2 \notin U$
2.15c): $u_1, U_2, e_1, e_2$ linear unabhängig
2.24: $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$

## 2.26 Satz

$V$ $K$–VR, $\dim_K(V) = n$.

a) Ist $U$ Unterraum von $V$, so ist $\dim_K(U) \leq n$. Ist $\dim_K(U) = n$, so ist $U = V$.

b) (Dimensionenformel)
$U, W$ Unterräume von $V$, so gilt:
$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$A, B$ endliche Mengen ($|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$)

*Beweis.* a) Ergänze Basis von $U$ zu Basis von $V$. (2.21c)
b) Basis von $U \cup W \to$ Basis von $U$
$\to$ Basis von $w$ (WHK 9.23) □

## 2.27 Definition

$V$ $K$-VR, $\dim_K(V) = n$, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ *geordnete* von $V$.
Jedes $v \in V$ hat *eindeutige* Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad a_i \in K \quad$ 2.15b)
($a_1, a_n$(in dieser Anordnung) heißen *Koordinaten* von $V$ bezüglich $B$) Insbesondere $v_i$ hat Koordinaten $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

## 2.28 Beispiel

a) $V = K^n, (e_1, \ldots, e_n) = B$ kanonische Basis.
Koordinaten von $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ bezüglich $B$: $(a_1, \ldots, a_n)$
*Kartesische Koordinaten*

(R. Decartes, 1596-1650)

b) $\mathrm{V} = \mathbb{Q}^3, B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
$B$ ist geordnete Basis von $V$. (nachprüfen)

Koordinaten von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ bezüglich $B$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Gauß Algorithmus:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&0&1&0\\0&1&2&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-2&1&-2\\0&1&2&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&-0.5&1\\0&1&2&0\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&-0.5&1\\0&0&2.5&-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&-0.5&1\\0&0&1&-0.4\end{pmatrix}$$

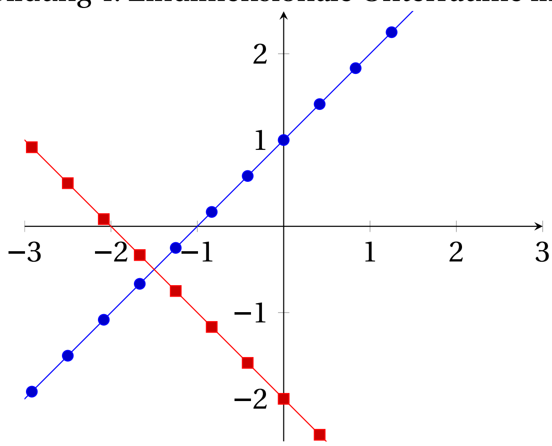
$a_3 = -0,4$

$a_2 = 0.8$

$a_1 = 0.2$

Koordinaten von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ bezüglich $B$ $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

Abbildung 4: Eindimensionale Unterräume im $\mathbb{R}^2$



## 2.29 Definition

$V$ $K$-VR, $U$ Unterraum von $V$, $w \in V$. Dann heißt $w + U := \{w + u : u \in U\}$ *affiner Unterraum* von $v$.
($w+$ ist im allgemeinen kein Untervektorraum)
$\dim(w+u) := \dim(U)$

## 2.30 Satz

$V$ $K$-VR, $U, W$ Unterräume von $V$,

a) $w + U$ ist Unterraum ①
$\Leftrightarrow W \in U$ ②
$\Leftrightarrow w + U = U$ ③

b) Ist $v \in w + U$, so ist $v + U = w + U$

c) Sind $v_1 + U$, $v_w + W$ affine Unterräume, so ist entweder $(v_1 + U) \cap (v_2 + w) = \varnothing$ oder es existiert $v \in V$ mit $(v_1 + U) \cup (v_2 + W) = v + (U \cup w)$ affiner Unterraum.

*Beweis.* ③ $\Rightarrow$ ① ✓
a) ① $\Rightarrow$ ②
$w + U$ Unterraum $\Rightarrow \sigma \in w + U$
$\Rightarrow \exists u \in U$ mit $w + u = \sigma$
$\Rightarrow w = -u \in U$
② $\Rightarrow$ ③: $w \in U$, $w + U \subseteq U$ (da $U$ Unterraum)
Sei $u \in U$. Dann $u - w \in U$ $\quad u = w + (u - w) \in w + U$
b) $v \in w + U$, $v = w + u$ für ein $n \in U$
$v + U = w \quad \underbrace{u + U}_{=U \text{ nach a)}} \quad = w + U$
c) Angenommen $(v_1 + U) \cup (v_2 + W) \neq \varnothing$
Sei $v \in (v_1 + U) \cup (v_2 + U)$
Nach b) $v + U = v_1 + U$
$v + W + v_2 + w$

$$(v_1+U)\cup(v_2+W) = (v+U)\cup(v+W)$$
$$= v+(U\cap W)$$

$\supseteq$ ✓

$\subset$ $x \in (v+U)\cup(v+W), x = v+u = v+w, u \in U, w \in W$

$u = W \in U \cap W.$

$x = v+u = v+(U\cap W)$ □

## 2.31 Bemerkung

affine Unterräume:
spezielle Rolle von $\sigma$ ist aufgehoben. Zur Beschreibung eines $x \in K^n$ kann man jeden Punkt $p$ als „Nullpunkt “wählen und dann die Koordinaten von $x$ bezüglich einer nach p „verschobenen “Basis berechnen. $p$ hat Koordinaten $(p_1,\dots,p_n)$ bezüglich Basis $v_1,\dots,v_n$
Ursprüngliche Koordinatensystem I : $\sigma, v_1,\dots,v_n$
Neues Koordinatensystem II: $:p, v_1+p,\dots,v_n+p$
$x$ hat Koordinaten $(a_1,\dots,a_n)$ bezüglich I
$\Rightarrow$ Koordinaten von $x$ bezüglich II $= (a_1-p_1,\dots,a_n-p_n)$
= Koordinaten von $x-p$ bezüglich I
$x$ hat Koordinaten $(a'_1,\dots,a'_n)$ bezüglich II
$\Rightarrow$ $x$ hat Koordinaten $(a'_1+p_1,\dots a'_n+p_n)$ bezüglich I. (Robotik)

## 2.32 Bemerkung

a) In Mathe II:
$x \times m$ über $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$. Das geht auch bei die Körpern $K$.
Addition, Multiplikation mit Skalaren, Matrixmultiplikation werden analog definiert.
Es gelten die gleichen Rechenregeln wie in (Mathe II, 9.5 `www.ffgti.org`)

b) In Mathe II, wurden Matrizen verwendet zur Beschreibung von LGS $\underset{m\times n}{A}\ x = \underset{n\times 1}{b}\ x =$
Analog : LGS über beliebigen Körpern K. GaußAlgorithmus funktioniert analog.

$(a_1, \ldots, a_n), a_1 \neq 0$
$\rightarrow (1, a_1^{-1}, a_2, \ldots)$

($K$ Körper!)

## 2.33 Satz

a) Die Menge der Lösungen eines *homogenen* LGS.

$$A \cdot x = 0$$

($A \in \mathcal{M}_{n,m}(K), x \in K^m$
0 ist Nullvektor in $K^n$)

b) Ist das *inhomogene* LGS

$$A \cdot x = b$$

lösbar und ist $x_0 \in K^n$ eine spezielle Lösung (d.h $A \cdot x_0 = b$), so erhält man alle Lösungen von $A \cdot x = b$ durch $\{x_0 + y : Ay = 0\}$, $y$ = Zugehöriges homogenes LGS.
Ist $U$ der Lösungsraum von $Ax = 0$, so ist die Lösungsmenge von $Ax = B$ gerade der affine Unterraum $x_0 + U$ von $K^n$

*Beweis.* a) Folgt aus Rechenregeln für Matrizen:
$x_1, x_2 \in K^m$ Lösungen von $A \cdot x = 0$.
$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$
$x_1 + x_2$ Lösung.
$a \in K$.
$A(a \cdot x_1) = a \cdot (Ax_1) = a \cdot 0 = 0$
$a \cdot x_1$ Lösung.
Null-Lösung existiert. b) $Ax_0 = b$. Sei $y \in K^m$ mit $Ay = 0$.
$A \cdot (x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$
$x_0 + y$ ist Lösung von $Ax = b$
Zeige: Jede Lösung von $Ax = b$ ist von der Form $x_0 + y$ für ein $y$ mit $Ay = 0$.
Sei $x$ Lösung von $Ax = b$.
$x = x_0 + (x - x_0)$
$A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$ □

## 2.34 Beispiel

gegebenes LGS : $\begin{matrix} x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & & x_4 & = 1 \end{matrix}$

Über $\mathbb{Q}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Gauß:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$x_3, x_4$ Frei wählbar.

Zugehöriges homogenes System:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Lösungsmenge = Unterraum.

Basis des Lösungsraum:

Setze die frei wählbaren $x_4, x_3$.

- $x_4 = 1, x_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Lösung
- $x_4 = 0, x_3 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ Lösung

$\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ** \\ ** \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Jede Lösung $d \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}01 \\ + \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Lösungsraum vom zugehörigen homogenen LGS:

$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

# 3 Lineare Abbildungen

## 3.1 Definition

$V, W, K-$VR

a) $\alpha : V \longrightarrow$ heißt *(K-) lineare Abbildung* (oder *Vektorraum-Homomorphismus*) falls:

*Additivität* $\leftarrow(1)$ $\alpha(u+v) = \alpha(u) + \alpha(v)$ für alle $u, v \in V$

*Homogenität* $\leftarrow(2)$ $\alpha(kv) = k\alpha(v)$ für alle $k \in K, v \in V$

## 3.2 Bemerkung

$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung.

a) $\alpha(\sigma) = \sigma$

b) $\alpha(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha(v_i)$

*Beweis.* a) $\alpha(\sigma) = \alpha(\sigma+\sigma) = \alpha(\sigma$

b) Definition + Induktion nach n. □

## 3.3 Beispiel

a) Nullabbildung $\alpha : V \to W$

$\alpha(v) = \sigma$ für alle $v \in V$

b) $c \in K$

$\alpha : V \to V, \alpha(v) = c \cdot v$ lineare Abbildung $c = 1 : \quad id_v$

c) $\varsigma : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - x_3 \end{cases}$

Spiegelung an der $\{x_1, x_2\}$-Ebene in $\mathbb{R}^3$

d) $\alpha = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \to x_1^2 \end{cases}$

nicht linear

## 3.4 Satz

Sei $A \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$.
Definiere $\alpha : K^n \to K^m$ (Spaltenvektor)
durch $\alpha(x) = A \cdot x \in K^m$ für alle $x \in K^n$
Dann ist $\alpha$ lineare Abbildung

*Beweis.* folgt aus Rechenregeln für Matrizenmultiplikation.:

$$\alpha(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay$$
$$= \alpha(x) + \alpha(y)$$
$$\alpha(k \cdot x) = A(kx) = k \cdot (Ax)$$
$$= k\alpha(x)$$

□

Beispiel aus 3.3 a)-c)

- $V = K^n$ Nullabbildung $K^n \to K^m$
  Von der Form in 3.4 mit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ Nullmatrix

- $\alpha = \begin{cases} K^n & \to K^n \\ x & \mapsto cx (c \in K) \end{cases}$
  3.4 mit $A = \begin{pmatrix} c & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c \end{pmatrix}$

- Spiegelung aus 3.3c)
  3.4 mit $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$
  *Später*: *Alle* linear Abbildung. $K^n \to K^m$ sind von der Form 3.4

## 3.5 Satz

$U, V, W$ $K$-VR.

a) $\alpha, \beta : V \to W$ linear so *auch* $\alpha+\beta$ (definiert durch $(\alpha+\beta)(v) := \alpha(v)+\beta(v)\ \forall v \in V)$,
und $k \cdot \alpha$ (definiert durch $(k \cdot \alpha)(v) := k \cdot \alpha(v)\ \forall v \in V$ linear von $V$ nach $W$

b) $\alpha : V \to W, \gamma : W \to U$ linear. so auch $\gamma \circ \alpha : V \to U$ linear A (oft $\gamma\alpha$statt $\gamma \circ \alpha$)

*Beweis.* a) ADDITIVITÄT:

$u, v \in V$

$$\begin{aligned}
& (\alpha+\beta)(u) + (\alpha+\beta)(v) \\
= \ & \alpha(u) + \beta(u) + \alpha(v) + \beta(v) \\
= \ & \alpha(u) + \alpha(v) + \beta(v) + \beta(u) \\
= \ & \alpha(u+v) + \beta(u+v) \\
= \ & (\alpha+\beta)(u+v)
\end{aligned}$$

HOMOGENITÄT:

$v \in V \quad k \in K$

$$\begin{aligned}
& (\alpha+\beta)(kv) \\
= \ & (k\alpha + k\beta)(v) \\
= \ & k(\alpha+\beta)(v)
\end{aligned}$$

b) $U, V, W$ $K$ Vektorräume

ADDITIVITÄT:

$u, v \in V$

$$\begin{aligned}
& (\gamma \circ \alpha)(u) + (\gamma \circ \alpha)(v) \\
= \ & \gamma(\alpha(u)) + \gamma(\alpha(u)) \\
= \ & \gamma(\alpha(u) + \alpha(v) \\
= \ & \gamma(\alpha(u+v)) \\
= \ & (\gamma \circ \alpha)(v+u)
\end{aligned}$$

HOMOGENITÄT:

$v \in V \quad k \in K$

$$\begin{aligned} & (\alpha \circ \gamma)(kv) \\ = \quad & \gamma(\alpha(kv)) \\ = \quad & \gamma(k\alpha(v)) \\ = \quad & k\gamma(\alpha(v)) \\ = \quad & k(\gamma \circ \alpha)(v) \end{aligned}$$

□

## 3.6 Satz

$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung

a) Ist U Unterraum von $V$, so ist $\alpha(U) := \{\alpha(u), u \in U\}$ Unterraum von $W$.
Insbesondere ist $\alpha(V)$, *Bild von* $\alpha$, Unterraum von W,

b) Ist $U$ endlich-dimensional, so auch $\alpha(u)$ und es gibt $\dim(\alpha(U)) \leq \dim(U)$

*Beweis.* a), $\alpha(U_1), \alpha(U_2) \in \alpha(U)$
dass heißt $u_1, u_2 \in U$, so $\alpha(U_1) + \alpha(U_2) = \alpha(u_1 + u_2) \in \alpha(U)$
$k \in K$
$k \cdot \alpha(U_1) = \alpha(ku_1) \in \alpha(U)$
b) Sei $u_1, \dots, u_k$ Basis von $U$
$u \in U, u = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i, c_1 \in K$
$\alpha(u) = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha(u_i)$
Also : $\alpha(U) = \langle \alpha(u_1), \dots, \alpha(U_k) \rangle_K$
Nach **??** $\{\alpha(u_1), \dots, \alpha(U_k)\}$
$\dim(\alpha(U)) \leq K \geq \dim(U)$ □

## 3.7 Definition

$V, W$ $K$-VR, $V$ endlich dimensional. $\alpha : V \to W$ linear Abbildung.
Dann $\dim(\alpha(V)) =: \mathrm{rg}(\alpha)$, *Rang* von $\alpha$

## 3.8 Satz

$V, W$ $K$-VR, $\alpha : V \to W$ lineare Abbildung

a) $\ker(\alpha) := \{v \in V : \alpha(v) = \sigma\}$,
*Kern von* $\alpha$, ist Unterraum von $V$.

b) $\alpha$ injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker(\alpha) = \{\sigma\}$

c) Ist $\alpha$ bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $\alpha^{-1} : W \to V$ bijektiv *und linear*

*Beweis.* a) $v_1, v_2 \in \ker(\alpha)$
$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$
$= \sigma + \sigma = \sigma$
Also: $v_1 + v_2 \in \ker(\alpha)$
$\alpha(k \cdot v_1) = k \cdot \alpha(v_1) = k \cdot \sigma \cdot \sigma = \sigma$
Also $kv_1 \in \ker(\alpha)$ b) $\Rightarrow$: ✓, denn falls $\sigma \neq v \in \ker(\alpha)$ so $\alpha(v) = \sigma = \alpha(\sigma)$, $\alpha(\sigma), \alpha$ nicht injektiv. ↯
$\Leftarrow$: Angenommen $v_1, v_2 \in V$ mit $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$.
Zu zeigen: $v_1 = v_2$.
$\sigma = \alpha(v_1) - \alpha(v_2)$
$= \alpha(v_1 - v_2)$
$\alpha$ linear.
$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker(\alpha) = \{\sigma\}$
$\Rightarrow v_1 - v_2 = \sigma, v_1 = v_2$.
c) Zu zeigen: $\alpha^{-1}$ ist linear.
Seien $w_1, w_@ \in w$.
Zeige $\alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^( w_1) + \alpha(w_2)$
$\alpha$ bijektiv $\Rightarrow v_1, v_2 \in V$ mit $\alpha(v_1) = w_1, \alpha(v_2) = w_2 . v_1 = \alpha^{-1}(w_1), v_2 = \alpha^{-1}(w_2)$.
$\alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^{-1}(\alpha(v_1) + \alpha(v_1)) = v_1 + v_2 = \alpha - 1(w_1) + \alpha^{-1})(w_2)$
Homogenität analog. □

## 3.9 Beispiel

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to \begin{pmatrix} x_1 \\ 2 \\ x_2 \end{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases} \text{ ist lineare Abbildung, da}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad 3.4$$

$$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bild von $\alpha(e_1), \alpha(e_2), \alpha(e_3)$ linear abhängig.

$\alpha(\mathbb{R}^3)\langle(e_1), \alpha(e_2)\rangle$

rg = 2

$U = \langle e_2, e_2\rangle$ 2-dimensional Unterraum von $\mathbb{R}^3$

$\alpha(U) = \langle \alpha(e_2)\rangle = \langle e_3\rangle$ 1-dimensional.

$\ker 3(\alpha) = ?$

Suche alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

LGS : $x_1 = 0$

$2x_1 = 0$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$$\ker(\alpha) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2c \\ c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R}\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ 1-dimensional.}$$

## 3.10 Satz

$V, W$ $K$-VR, $\dim(v) = n\{v_1, \dots v_n\}$ sei Basis von $V$.
$w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig (nicht notwendig verschieden). Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\alpha : V \to W$ mit $\alpha(v_1) = w_1, i = 1, \dots, n$, nämlich

$$\alpha(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i) := \sum_{i=1}^{n} c_i w_i, (\star)$$

Also: kennt man die Bilder einer Basis so kennt man die lineare Abbildung vollständig.

*Beweis.* Die in $(\star)$ definiert Abbildung $\alpha$ ist linear und es gilt $\alpha(v_i) = w_i$ für $i = 1 \dots n$ (Nachrechnen)
$\alpha$ eindeutig:
Angenommen $\beta : V \to W$ linear mit $\beta(v_i) = w_i$, so gilt $\beta(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \beta(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i = \alpha(\sum_{i=1}^{n})$
$\alpha = \beta$

□

Beispiel:
$V = W = \mathbb{R}^3$
$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\alpha(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}) = ?$
$\alpha(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -51 \\ 9 \end{pmatrix}$

## 3.11 Beispiel

$V = \mathbb{R}^n, \alpha : V \to V$

Drehung um Winkel $\phi$, $0 \le \phi < 2\pi$, um Nullpunkt (entgegen Uhrzeigersinn).

$\alpha$ ist linear Abbildung (elementar geometrisch).

$\alpha(e_1) = \alpha\phi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\phi)\\\sin(\phi)\end{pmatrix}$

$\alpha(e_2) = \alpha\phi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(\phi)\\\cos(\phi)\end{pmatrix}$

3.10

$x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$\alpha(x) = x_1\alpha(e_1) + x_2\alpha(e_2)$

$\begin{pmatrix}\cos(\phi) - \sin(\phi)\\\sin(\phi)\cos(\phi)\end{pmatrix}$

Drehmatrix

## 3.12 Satz

$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung:

$\dim(V) = n, \quad \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V.

a) $\alpha$ ist injektiv $\Rightarrow \{\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_2)\}$ ist linear unabhängig.

b) $\alpha$ surjektiv $\Leftrightarrow W = \langle\alpha(v_2), \ldots, \alpha(v_n)\rangle_K$

c) $\alpha$ bijektiv $\Leftrightarrow \{\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_n)\}$ Basis von $W$

*Beweis.* a) $\Rightarrow$

Zeige $\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha(v_i) = \sigma$

$\Rightarrow c_1 = \ldots c_n = 0$

$\sigma = \sum_{i=1}^{n} c_1\alpha(v_i) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} c_i v_1)$

$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \in \ker(\alpha) = \{\sigma\}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} = \sigma \Rightarrow c_1 = \ldots + c_n = 0$

$\Leftarrow$: Zeige $\ker(\alpha) = \{\sigma\}$

Angenommen $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \in \ker(\alpha)\sigma = \alpha(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i) \underset{\alpha\text{linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha(v_i) \xRightarrow[\text{linear unabhängig}]{\alpha(v_1)...\alpha(v_2)}$ $c_1 = \ldots = c_= 0$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \sigma$✓ b) $\alpha(V) = \langle \alpha(v_1)\ldots\alpha(v_m)\rangle$ Behauptung folgt. c) Folgt aus a) und b) □

## 3.13 Korollar

Seien $V, W$ $K$-VR, $\dim(V) = \dim(W)$.
Dann sind $V$ und $W$ isomorph.

*Beweis.* Sei $v_1, \ldots, v_n$ Basis von $V$, $w_1, \ldots, 2_n$ Basis von $W$. Nach 3.10 existiert genau eine linear Abbildung $\alpha(v_1) = w_j$ Nach 3.12c) ist $\alpha$ bijektiv $V \cong W$. □

## 3.14 Korollar – Wichtigster Spezialfall

$V = n-$dim. VR über $K$, $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ geordnete Basis von $V$. Dann ist die Abbildung.

$$\kappa_{\mathscr{B}} : \begin{cases} V & \to K^n \text{ Zeilenvektor} \\ \sum_{i=1}^{n} c_i v_i & \mapsto (c_1, \ldots, c_n) \end{cases}$$

(Koordinatenabbildung bezüglich B) ein Isomorphismus. Dass heißt $V \cong K^n$.

*Beweis.*

$$\kappa_{\mathscr{B}} = (0, \ldots, 0, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

$v_1$ werden auf die kanonische Basis des $K^n$ abgebildet. $\kappa_{\mathscr{B}}$ ist Isomorph □

## 3.15 Satz (Dimensionsformel)

$V$ endlich dimensional. $K$-VR $\alpha : V \to W$ lineare Abbildung.

$$\text{Dann: } \dim(V) = \text{rg}(\alpha) + \dim(\ker(\alpha))$$
$$= \dim(\alpha(v_i)) + \dim(\ker(\alpha))$$

*Beweis.* Sei $u_1, \ldots, u_k$
Basis von $\ker(\alpha)$ Basisergänzungssatz 2.21

Ergänze zu Basis $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_1$ von $V$. Sei $U = \langle u_{\ker+1}, \dots, u_n \rangle_K$ Unterraum von v.
$\ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}$:
Angenommen $V \in \ker(\alpha) \cap U$
$v = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i = \sum\limits_{i=k+1}^{n} c_i u_i$
$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} (-c_i) u_i = \sigma$
$c_1 \dots c_n = 0$ □

$\ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}$, also $\alpha|U$ ist injektiv, dass heißt $\dim(V) = \alpha(U)$
$v \in V, v = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} c_i u$
$\alpha(v) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \alpha(v_i) + \sum\limits_{i=k+1}^{n} c_i \alpha(u_i) \in \alpha(U)$
$V = \ker(\alpha) + U$
$\dim(v) = \dim(\ker(\alpha)) + \dim(U) - \dim(\ker(\alpha) \cap U)$
$= \dim(\ker(\alpha)) + \dim(\alpha(U)) = \dim(\ker(\alpha)) + \dim(\alpha(V)) = \dim(\ker(\alpha)) + \mathrm{rg}(\alpha)$

## 3.16 Korollar

$V, W$ endlich-dimensionaler $K$-VR mit $\dim(V) = \dim(W)$, $\alpha : V \to W$ linear. Dann gilt:
$\alpha$ ist injektiv $\Rightarrow$ $\alpha$ ist surjektiv $\Rightarrow$ $\alpha$ ist bijektiv.

*Beweis.*
$\alpha$ ist surjektiv $\Leftrightarrow \alpha(V) = W$
$\Leftrightarrow \dim(\alpha(v)) = \dim(W) = \dim(V)$
$\overset{3.15}{\Longleftrightarrow} \dim(\ker(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \{\sigma\} \Leftrightarrow \alpha$ ist injektiv □

# 4 Der Rang einer Matrix und lineare Gleichungssysteme

## 4.1 Definition

Der *Zeilenrang* einer Matrix $A$ über Körper ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen in $A$. Dass heißt sind $z_1, \ldots, z_m$ die Zeilen von $A$ so ist Zeilenrang von $A = \dim = (\langle z_1, \ldots, z_m \rangle)$
Analog : Spaltenrang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Spaltenrang von $A = 2$
Zeilenrang von $A = 2$

## 4.2 Satz

Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der Zeilenrang einer Matrix nicht.
(Analog Spaltenumformung/Spaltenrang)

*Beweis.* $\dim(\langle z_1, \ldots, a \cdot z_i, \ldots, z_m \rangle, a \neq 0$
$\langle z_1, \ldots, z_m \rangle = \left\langle z_1, \ldots, z_i + a z_j, \ldots z_m \right\rangle, i \neq j$ □

## 4.3 Bemerkung

Zeilenrangbestimmung von $A$:
Bringe $A$ mit Gauß auf Zeilenstufenform (ändert Zeilenrang nicht)

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\star \neq 0$
Zeilenrang = Anzahl der von Nullzeilen verschiedenen Zeilen

## 4.4 Korollar

Sei $Ax = b$ ein LGS über $K$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), x \in K^n, b \in K^m$ (m Gleichungen, n Unbekannte)

a) $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn Zeilenrang von $A$ = Zeilenrang von $(A \mid b)$

b) $Ax = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn: Zeilenrang von $A$ = Zeilenrang von $(A \mid b) = n$ (= Anzahl der Unbekannten)

c) Dimension des Lösungsraums von $Ax = 0 = n$-Zeilenrang von $A$.

## 4.5 Satz

Sei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$,
$$\alpha = \begin{cases} K^n & \to K^m \\ x & \mapsto Ax \end{cases}$$
$\alpha$ ist lineare Abbildung und es gilt:
$\mathrm{rg}(\alpha)$ = Spaltenrang von $A$.

*Beweis.* $\alpha(K^n) = \langle \alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_2) \rangle$
$e_1, \ldots, e_n$ kanonische Basis von $K^n$

$$\alpha(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 0 i = \begin{pmatrix} a_1 i \\ a_2 i \\ \vdots \\ a_m i \\ = \end{pmatrix} i\text{te Spalte von } A =: s_i$$

rg = dim$(\alpha(K^m))$ = dim$(\langle \alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_n) \rangle)$ = Spaltenrang von A,. □

## 4.6 Satz und Definition

Sei $A \in \Updownarrow, \backslash(k)$.
Dann ist Zeilenrang von = Spaltenrang von A.
Diese gemeinsame Zahl heißt *Rang von A* ,rg$(A)$.

*Beweis.* Betrachte homogenes LGS

$$Ax = 0(\star)$$

Dimension des Lösungsraumes von $(\star)$ = Dimension von ker$(\alpha)$, $\alpha$ in 4.5 'Satz (Dimensionsformel)' on page 70 dim(ker$(\alpha)$) = $n$−rg$(\alpha)$ = $n$−Spaltenrang von A. Korollardim Lösungsraum von $Ax = 0$ = n-Zeilenrang von $A$ □

## 4.7 Korollar

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.
rg$(A)$ = rg$(A^t)$

*Beweis.* Zeilenrang von $A$ = Spaltenrang von $A^t$ □

## 4.8 Satz

Sei $V$ endlich dimensionaler −-VR
$\mathcal{B}$ geordnete Basis von $V$ $u_1, \ldots, u_m \in V$ beliebig.
Seien $K_{\mathcal{B}}(U_i)$ die Koordinatenvektoren von $u_i$ bezüglich $\mathcal{B}$ (Zeilenvektoren).

Dann gilt : $\dim(\langle u_1, \dots, u_m \rangle) = \text{rg}\begin{pmatrix} K_{\mathscr{B}}(u_1) \\ \vdots \\ K_{\mathscr{B}}(u_m) \end{pmatrix}$ lässt sich durch Gauß Algorithmus bestimmen.

*Beweis.* Sei $U = \langle u_1, u_m \rangle$
$K_{\mathscr{B}} : V \to K^n$ wie in 3.14.
$K_{\mathscr{B}}$ Isomorphismus : $\dim(U) = \dim(K_{\mathscr{B}}) =$ Zeilenrang von $\begin{pmatrix} K_{\mathscr{B}}(u_1) \\ \vdots \\ K_{\mathscr{B}}(um) \end{pmatrix}$ □

## 4.9 Beispiel

$V$ $\mathbb{R}$-VR aller Polynome von Grad $\geq 3$, $\dim(V) = 4$,
Basis $\mathscr{B} = (1, x, x^2, x^3)$, $U = \left\langle 1 + 6x^2 + x^3, 2x - 2x^2 + 3x^3, 3x + x^2, 2 + x15x^2 - x^3 \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 15 & -1 \end{pmatrix} \text{ Gauß}\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 4 & -4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rand der Matrix = 3, $\dim(U) = 3$

# 5 Matrizen und lineare Abbildungen

## 5.1 Definition

Seien $V, W$ $K$-VR, $\mathscr{B} = (v_1, v_n)$ und $\mathscr{C} = (w_1, \dots, w_m)$ geordnete Basen von V bzw. W.
Sei $\alpha : V \to W$ lineare Abbildung. Nach 3.10 ist $\alpha$ eindeutig bestimmt durch $\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)$
$(v = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i v_i \Rightarrow \alpha(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \alpha(v_i)$
Stelle $\alpha(v_1) \dots \alpha(v_n) \in W$ jeweils als Linearkombination von $w_1, \dots, w_m$ dar,
$\alpha(v_1) = a_{11} w_1 + \dots a_{m1} w_m$
$\alpha(v_2) = a_{12} w_1 + \dots a_{m2} w_m$
$\vdots$

$\alpha(v_n) = a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}v_m$
(Ordnung der Indizes beachten!)
Dann heißt die $m \times n$- Matrix

$$A^{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die *Darstellungsmatrix* von $\alpha$ bezüglich $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$. (In den Spalten stehen die Koordinaten von $\alpha(v_1)$ bezüglich $\mathscr{C}$)
(Abgekürzte Schreibweise $A_\alpha$, falls $\mathscr{B}$ und$\mathscr{C}$ aus Kontext klar).
Falls $V = W$ und $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, so $A^{\mathscr{B}} := A_\alpha^{\mathscr{B},\mathscr{C}}$

## 5.2 Bemerkung

a) Bei Kenntnis von $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$ ist $\alpha$ durch $A_\alpha^{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ eindeutig bestimmt:
Sei $\sigma \in V$

## 5.3 Beispiel

a) $V = W = \mathbb{R}^2$ , $\alpha$ Drehung um $\sigma$ mit Winkel $\phi$ (entgegen Uhrzeigersinn)
Nach Beispiel:
$\mathscr{B} = \mathscr{C} = (e_1, e_2)$
$\alpha(e_1) = \cos(\phi)e_1 + \sin(\phi)e_2\alpha(e_2) = -\sin(\phi)e_1 + \cos(\phi)e_2$
(3.11)

$$A_\alpha^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

b) Nullabbildung.

$$\beta : \begin{cases} V & \to W \\ V & \to \sigma \end{cases}$$

hat bezüglich aller Basen $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$ Nullmatrix als Darstellungsmatrix

c) $V, \mathscr{B}, id_x$

$$A_{id_x}^{\mathscr{B}} = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $V = \mathbb{R}^2, \mathscr{B} = (e_1, e_2), \mathscr{C} = (e_2, e_1)$

$A_{id_x}^{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2, \mathscr{B} = (e_1, e_2)$

$\sigma$ Spiegelung an $\langle e_1 \rangle$, dass heißt $\varsigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A_\sigma^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A_\sigma^{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

## 5.4 Satz

$v, w, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \alpha : V \to W$ linear.

$\kappa_{\mathscr{C}}(\alpha(v))^t = A_\alpha^{\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot \kappa_{\mathscr{B}}(v)^t$ Spaltenvektoren.

*Beweis* folgt aus Bemerkung.

| | | |
|---|---|---|
| Basis $\mathscr{B}$ | $\xrightarrow{\alpha}$ | Basis $\mathscr{C}$ |
| V | | W |
| $(\kappa_{\mathscr{B}})\downarrow$ | | $\downarrow(\kappa_{\mathscr{C}})$ |
| $K^n$ | $\xrightarrow{\text{Multi. mit Matrix} A_\alpha}$ | $K^n$ |

## 5.5 Beispiel

$V, W$ $\mathbb{R}$-VR, $\dim(v) = 4$,

$\dim(w) = 3$, $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_3)$

$\mathscr{C} = (w_1, w_2, w_3), \alpha : V \to W.$

$A_\alpha^{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$V = 5v_1 - 6v_2 + 7v_3 - 2v_4$

$\alpha(v) = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.4: $\alpha(v) = 7w_1 + w_2 - w_3$

## 5.6 Korollar

Jede lineare Abbildung $K^n \to K^m$ ist von der Form $\alpha(x) = A \cdot x$ für eine $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$..
Es ist $A = A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{B},\mathcal{C}$ die kanonische Basen von $K^n$ bzw. $K^m$ sind.

*Beweis.* $x \in K^m \quad \kappa_{\mathcal{B}}(x)^t = x \quad \kappa_{\mathcal{C}}(\alpha(x))^t = \alpha(x)$
Behauptung folgt aus 5.4 □

## 5.7 Satz

$\alpha, \beta$ lineare Abbildung $U \to V$
$\gamma$lineare Abbildung $V \to W$.
$\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ geordnete Basen von $U, V, W$

a) $A_{\alpha+\beta}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} + A_\beta^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$
$A_{k\alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = k \cdot A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \ (k \in K)$

b) $A_{\gamma\circ\alpha}^{\mathcal{B},\mathcal{D}} = A^{\mathcal{C},\mathcal{D}} \underset{\substack{\text{Matrix}\\ \text{Mult.}}}{\cdot}$ (Reihenfolge beachten). *Beweisen*:a) nachrechnen

c) $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_l)$
$\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m) \mathcal{D} = (w_1, \dots, w_n)$
$A^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (a_i j)$ $n \times l$-Matrix
$A^{\mathcal{C},\mathcal{D}} = (b_i j)$ $n \times m$-Matrix

$$\begin{aligned}(\gamma \circ \alpha)(u_i) = \gamma(\alpha(u_i)) \\ &= \gamma(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{ji}(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} w_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji}}_{\text{Koeff}(k,i)} w_k\end{aligned}$$

## 5.8 Beispiel

$U = V = W = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = (e_1, e_2)$

$\alpha$ Drehung um $\phi$,

$\beta$ Drehung um $\psi$ ( jeweils um 0)

$A_\alpha^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$

$A_\beta^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$

$\beta \circ \alpha$ Drehung um $\phi + \psi$

$A_{\beta\circ\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) \end{pmatrix}$

Nach 5.7:

$\alpha^{\beta\circ\alpha}() = A_\beta^{\mathcal{B}} \cdot A_\alpha^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi) & -\sin(\phi)\cos(\psi) - \cos(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\psi) & -\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)'cos(\psi) \end{pmatrix}$

$\cos(\phi + \psi) = \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi)$

$\sin(\phi + \psi) = \sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\psi)$

(Additionstheoreme der Trigonometrie)

## 5.9 Definition

Sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ($n \times n$-Matrix),

$A$ heißt *invertierbar*, falls $A^{-1} \in \backslash(K)$ existiert (*Inverse,inverse Matrix* zu $A$). mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ *Bemerkung*:

Gilt $A \cdot A^{-1} = E_n$ so auch $A^{-1} \cdot A = E_n$ (und umgekehrt). (Folgt aus 5.10 und 3.16)

## 5.10 Korollar

$\dim_\kappa(v) = n, \mathscr{B}$ geordnete Basis von $V$, $\alpha: V \to V$ linear. Dann gilt:
$\alpha$ invertierbar (d.h bijektiv) $\Leftrightarrow A_\alpha^\mathscr{B}$ invertierbar.
Dann: $A_{\alpha^{-1}}^\mathscr{B}$
Dann : $A_{\alpha^{-1}}^\mathscr{B} = (A^{\mathscr{B}_\alpha})^{-1}$.
*Beweis*:
$\Rightarrow$: $A_\alpha^\mathscr{B} \cdot A_{\alpha^{-1}}^\mathscr{B} \underset{5.7}{=} A_{\alpha\circ\alpha^{-1}}^\mathscr{B} = A_{id_x}^\mathscr{B} + E_n$
$A_{\alpha^{-1}}^\mathscr{B} \cdot A_\alpha^\mathscr{B} = E_n$ analog.
$\Leftarrow$: Es existiert inverse Matrix $B$ zu $A_\alpha^\mathscr{B}$, dass heißt $A_\alpha^\mathscr{B} \cdot B = B \cdot A_\alpha^\mathscr{B} = E_n$
Dann $B = A_\beta^\mathscr{B}$ für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\beta : V \to V$.(5.2).
$A_\alpha^\mathscr{B} \cdot A_\beta^\mathscr{B} = A_\beta^\mathscr{B} \cdot A_\alpha^\mathscr{B} = E_n$
$A_{\alpha\cdot\beta}^\mathscr{B} = A_{\beta\cdot\alpha}^\mathscr{B} = E_n$
$\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$. $\quad (\alpha\cdot\beta)(v_i) = 1 \cdot v_i = v_i \quad i = 1, \dots, n$
$\alpha \circ \beta = id_v$
Analog $\beta \circ \alpha = id_v$
$\beta = \alpha^{-1}$

## 5.11 Satz

$A \in \mathscr{M}_n(K)$
$A$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = n$.
(Dass heißt Zeilen/Spalten vo nA sond linear unabhängig).

*Beweis.* Definition: $\alpha : K^n \to K^n$ durch $\alpha(x) = A \cdot x$
$A = A_\alpha^\mathscr{B}$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathscr{B}$ von $K^n$.
$A$ invertierbar $\underset{5.10}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha$ invertierbar $\underset{3.16}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{rg}(\alpha) = n \underset{4.5/4.6}{\Longleftrightarrow} \mathrm{rg}(A) = n$ □

## 5.12 Lemma

$A \in \mathscr{M}_{m,n}(K), X \in \mathscr{M}_{n,l}(K)$,
$C = AX \in \mathscr{M}_{m,l}(\kappa)$
Wendet man dieselben elementaren Zeilenumformung auf $A$ und $C$ an (beachte $A$ und $C$ haben beide $m$ Zeilen), so gilt für die entstehende Matrizen $A', C'$.

$$C' = A'X$$

## 5.13 Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix (Gauß-Jordan-Verfahren)

$A$ invertierbare $m \times n$ Matrix. Gesucht $A^{-1}$ mit

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

Man kann $A$ durch elementare Zeilenumformungen auf die Form $E_n$ bringen. Analog zum GaußAlgorithmus. $\text{rg}(A) = n$: In der zweiten Spalte findet man Eintrag $\neq 0$ unterhalb der Diagonale. Erzeuge wie bei Gauß1 in der Diagonale, unterhalb der Diagonale erzeuge Nullen *und* auch oberhalb. So fortfahren. Durch elementare Zeilenumformungen entsteht aus A die Einheitsmatrix $E_n$

$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$

Dieselben Zeilenumformungen Angewandt auf $E_n$ liefert Matrix $A'$.

5.12 $E_n \cdot A^{-1} = A'$

$(A \mid E_n) \rightarrow (E_n \mid A^{-1})$

(Verfahren zeigt gleichzeitig, ob $A$ invertierbar).

## 5.14 Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & -0.5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

## 5.15 Bemerkung

Sei $Ax = b$ LGS mit n Gleichungen und n Unbekannte (d.h $A$ $n \times m$-Matrix).
4.4b:$Ax = b$ hat eindeutige Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) = n$. Dann existiert $A^{-1}$ und es gilt:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

## 5.16 Definition

$V$ $K-$VR mit geordneten Basen $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}, \mathscr{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$.
$v'_j = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} = v_i,\ j = 1 \dots n$ (Reihenfolge beachten!)
$S_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = (s_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ heißt *Basiswechselmatrix* Spalten. Koordinaten der Basisvektoren aus $\mathscr{B}'$ bezüglich $\mathscr{B}$.
Analog $v_k = \sum_{j=1}^{n} j_{jk} v'_j$
$S_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = (t_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$

## 5.17 Satz

Bezeichnungen wie in **??**.
$S_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ ist invertierbar und $S^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = S_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$, dass heißt $S_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = E_n$

*Beweis.* $V_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} v'_j =$

$$= \sum_{j=1}^{n} t_j k(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} v_i \quad = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} t_{jk}) v_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} t_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{für i} \neq \text{k} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$S_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \cdot S_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = E$ □

## 5.18 Satz

$V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wie oben, $v \in V$.

$$\boxed{\kappa_{\mathcal{B}'(v)^t} = S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t}$$

*Beweis*: Analog zu 5.4 (5.2a))

## 5.19 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - 2e_2)$$

$$= \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$$

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}$$

$$S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \underset{5.17}{=} S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

**??** :

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\0 & -3 & -1 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$S_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \in \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$$

$$\kappa_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

## 5.20 Satz

$\alpha : V \longrightarrow W$ linear, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen von $V$
$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ geordnete Basen von $W$
Dann:

$$\boxed{A_\alpha^{B',C'} = S_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \cdot A_\alpha^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}$$

*Beweis*: Sei $v \in V$
$A_\alpha^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'} \underset{5.4}{=} \kappa_{\mathscr{C}'}(\alpha(v))^t \underset{5.18}{=} S_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}\kappa_{\mathscr{C}}(\alpha(v))^t = S_{\mathscr{C}',\mathscr{C}} A_\alpha^{\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot S_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \cdot \kappa_{\mathscr{B}}(v)^t$
Wenn v alle Vektoren aus V durchläuft, durchläuft $\kappa_{\mathscr{B}}(v)^t$ alle Vektoren aus $K^n$ (n = dim($v$)) Daraus folgt Behauptung.

## 5.21 Korollar

$\alpha : V \to V, \mathscr{B}, \mathscr{B}'$ geordnete Basen von $V$
$S = S_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Dann

$$A_\alpha^{\mathscr{B}'} = S^{-1} \cdot A_\alpha^{\mathscr{B}} \cdot S$$

*Beweis*: Folgt aus 5.20 und 5.12 (Bemerkung: Zweo $n \times n$ Matrizen $A, B$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $S$ gibt mit $B = S^{-1}AS$.)

## 5.22 Beispiel

$V = \mathbb{R}^2, \mathscr{B} = (e_1, e_2)$
$B' = (e_1, e_2, e_1 - 2e_2)$
$S_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,
$S_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$(5.19)
Sei $A_\alpha^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\alpha$ ist Spiegelung aus $e_1$- Achse
$A^{\mathscr{B}'\alpha} \underset{5.21}{=} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$\alpha(e_1 + e_2) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2) + \frac{2}{3}(e_1 - 2e_2)$
$\alpha(e_1 - 2e_2) = \frac{4}{3}(e_1 + e_2) - \frac{12}{3}(e_1 - 2e_2)$

# 6 Determinanten

$\mathscr{N}_n(k) \longrightarrow K$

## 6.1 Definition

$A \in M_n(k), i, j \in \{1, \dots, n\}$
$A_i j \in \mathcal{M}_{n-1}(k)$ ist die Matrix, die aus $A$ entsteht wenn man $A$ die $i$te Zeile und die $j$te Spalte streicht.
*Beispiel*:
$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
$A_{11} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$
Definition Determinante einer *Quadratischen* Matrix rekursiv.

## 6.2 Laplacescher Entwicklungssatz

det $M_n(k) \to K$ ist eine Abbildung, die *Determinante*, die folgendermaSSen berechnet wird:

(1) $$\det((\alpha)) = \alpha$$

(2) $A \in \mathcal{M}_n(k)$ Wähle irgendein $i \in \{1, \dots n\}$. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}$

(Entwicklung nach der $i$-ten Zeile)
(Schachbrettmuster der Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

)

(3) Alternativ: Wähle $j \in \{1,\dots,n\}$ $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_i j \det(A_i j)$

(Entwicklung nach der $j$-ten Spalte)

*Bemerkung:* Wichtig:

Egal nach welcher Zeile oder Spalte man entwickelt, es kommt immer dasselbe heraus!

(Schwierigster Beweis in der elementaren Determinantentheorie)

## 6.3 Beispiel

a)

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

Entwicklung nach der 2. Spalte: $-a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{Q})$.

Entwicklung nach der 1. Zeile:

$\det(A) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -24 - 0 - 9 = -33$

Entwicklung nach der 2. Spalte:

$\det(A) = -3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -33.$

*Allgemeine Strategie*:

Verwende nur Determinanten-Berechnungen einer Zeile oder Spalte, mit möglichst vielen Nullen!

c) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn}$ Induktion nach n:

$n = 1\checkmark$

$n - 1 \to n$

Entwicklung nach 1.Zeile:

$\begin{pmatrix} a_1 1 & 0 & \dots \\ \star & \ddots & \dots \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & 0 & \dots \\ \star & \ddots & \dots \end{pmatrix} a_{11} \cdot a_{22} \underset{\text{IV}}{\cdot} \dots \cdot a_{nn}$

Analog: Obere Dreiecksmatrix

Insbesondere: $\det(E_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$

## 6.4 Korollar

$\det(A) = \det(A^t)$

## 6.5 Rechenregeln für Determinante

Sei $A \in \mathscr{M}_n(k)$

a) Zeilen bzw. Spaltenvertauschen ändern das Vorzeichen der Determinante.

b) Addiert man den Vielfache einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte, so ändert sich die Determinante nicht.

c) Multipliziert man eine Zeile/Spalte von $A$ mit $a \in K$, so ändert sich $\det(A)$ um Faktor $a$. *Insbesondere*: $A \in \mathscr{M}_n(K)$
$\det(a \cdot A) = a^n = \det(A)$
$A, B \in \mathscr{M}_n(K)$.
$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. (Determinantenmultiplikationssatz)
(Aber Im allgemeinen $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$)

$A = B = E_2 \qquad \det(A) = \det(B) = 1$

$\det(A + B) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$

## 6.6 Bemerkung

Strategie zur Determinantenberechnung. Wende auf $A$ elementare Zeilen/Spaltenumformungen an, um Dreiecksgestalt zu erhalten. Dann **??**c).

## 6.7 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Q}$$

$$-\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

## 6.8 Satz

$A \in \mathcal{M}_n(k)$. Dann gilt:

$A$ invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

In diesem Fall gilt: $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} (= \frac{1}{\det(A)})$

$[^{\Rightarrow:} AA^{-1} = E_n$

$1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})]$

Andere Berechnungsmethode von $A^{-1}$ mit Hilfe der Determinante. Dann:

## 6.9 Definition

$A \in \mathcal{M}_n(k)$. Die *Adjunkte* $A^{\text{ad}} = (b_{ij})_{i,j=1\dots n}$, wobei $b_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$ Indizes beachten!

### 6.10 Satz

$A \in \mathcal{M}_n(K)$.

a) $A^{\text{ad}} \cdot A = A \cdot A^{\text{ad}} = (\det A) \cdot E_n = \begin{pmatrix} \det(A) & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix}$

b) Ist $\det(A) \neq 0$ so ist $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\text{ad}}$

### 6.11 Beispiel

$A = \begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 \\ a_2 1 & a_2 2 \end{pmatrix}$
Angenommen: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.
$A^{-1} =$

$$\boxed{\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_2 2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

### 6.12 Bemerkung

$\alpha : V \to V$ lineare Abbildung, $V$. endlich dimensional.
$\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ Basen von $V$.
$A_\alpha^{\mathbb{B}'} = S^{-1} \cdot A_\alpha^{\mathbb{B}} \cdot S$ wobei $S = S_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}$.('Korollar' on page 84).
$\det(A^{\mathbb{B}'\alpha}) = \det(S' \cdot A_\alpha^{\mathbb{B}} \cdot S) = \det(A_\alpha^{\mathbb{B}})$.
Daher definiert man:
$\det(\alpha) = \det(A_\alpha^{\mathbb{B}})$ (unabhängig von der Wahl von $B$).
[Im Allgemeinen ist $\det(A^{\mathbb{B},\mathbb{C}} \neq \det\det(A^{\mathbb{B}',\mathbb{C}'})$ ]

# 7 Eigenwerte

*Problem:* $\alpha : V \to V$ linear, Suche Basis $\mathbb{B}$ von $V$ bezüglich der $A_\alpha^{\mathbb{B}}$ besondere einfache Gestalt hat.

Am besten wäre $A_\alpha^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

D.h $\mathbb{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, so $\alpha(v_i) = a_i v_i, i = 1 \ldots n$
Das geht allerdings im Allgemeinen nicht.

## 7.1 Beispiel

a) $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung an der $e_1$-Achse.
   $\mathbb{B} = (e_1, e_2)$ kanonische Basis
   $A_\sigma^\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Drehung $\rho$ um 0 mit Winkel $+ k \cdot \pi$.
   Kein Vektor $\neq \sigma$ wird auf ein Vielfaches von sich abgebildet. Für *keine* Basis $\mathbb{B}$ ist $A_\rho^\mathbb{B}$ Diagonalmatrix

## 7.2 Definition

$\alpha : V \to V$ lineare Abbildung $c \in K$ heißt *Eigenwert* von $\alpha$, falls $v \in V, v \neq \sigma$ existiert $\alpha(v) = c \cdot v$
Jeder solcher Vektor $v \neq \sigma$ heißt *Eigenvektor* von $\alpha$ zu dem Eigenwert $c$.
Die Menge aller Eigenvektoren zu $c$, zusammen mit Nullvektor, heißt *Eigenraum* von $\alpha$ zum Eigenwert $c$.

## 7.3 Bemerkung

$\alpha : V \to V$ linear, $c$ sei ein Eigenwert von $\alpha$. Eigenraum von $\alpha$ zu $c = \ker(c \cdot \mathrm{id}_v - \alpha)$, also Unterraum von $V$. Insbesondere: 0 ist Eigenwert von $\alpha \Leftrightarrow \ker(\alpha) \neq \{\sigma\}$
*Beweis:*

$$\begin{aligned} \alpha(v) = c \cdot v &\Leftrightarrow c \cdot v - \alpha(v) = \sigma \\ &\Leftrightarrow (c \cdot \mathrm{id}_\mathrm{v}(v) = \sigma) \\ &\Leftrightarrow v \in \ker(c \cdot \mathrm{id}_v - \alpha) \end{aligned}$$

## 7.4 Beispiel

a) $id_v$ hat nur Eigenwert 1, Eigenraum zu 1 ist $V$.

b) Spiegelung aus 7.1a):
   1 ist Eigenwert  -1 ist Eigenwert.
   Eigenraum zu 1: $\langle e_1 \rangle$
   Eigenraum zu -1: $\langle e_2 \rangle$

c) Drehung um $\phi \neq k \cdot \pi$ hat keine Eigenwerte.

## 7.5 Definition

$A \quad n \times n-$Matrix über $K$ *Eigenwerte von A*: = Eigenwerte von $\alpha_A : \begin{cases} K^n & \to K^n x \\ x & \mapsto A \cdot x \end{cases}$
(dass heißt $c \in K$ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \exists\ x \neq 0, x \in K^n : A \cdot x = c\ cdx$)

## 7.6 Satz

$\alpha : V \to V$ lineare Abbildung. Dann haben $\alpha$ und $A_\alpha^{\mathbb{B}}$ die gleichen Eigenwerte für jede Basis $\mathbb{B}$ von $V$.

*Beweis.* Sei $c$ Eigenwert von $\alpha$, $v \neq \sigma$ mit $\alpha(v) = c \cdot v$.
$A_\alpha^{\mathbb{B}} \cdot \kappa_{\mathbb{B}}(v)^t = \kappa_{\mathbb{B}}(\alpha(v))^t = \kappa_{\mathbb{B}}(c \cdot v)^t = c \cdot \kappa_{\mathbb{B}}^t$.
Da $v \neq \sigma$ ist $\kappa_{\mathbb{B}} \neq \sigma$ Also ist $c$ Eigenwert von $A_\alpha^{\mathbb{B}} = A$.
Umgekehrt:
Sei $0 \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit $A \cdot x = c \cdot x$. ($c$ ist Eigenwert von $A$).
Sei $v = \sum_{i=1}^{n} x)i\, v_i, \mathbb{B} = (v_1, \ldots, v_n) \kappa_{\mathbb{B}}(v)^t = x. \qquad v \neq \sigma.$
Es folgt $\kappa_{\mathbb{B}}(\alpha(v)) = c \cdot v$ $c$ ist Eigenwert von $\alpha$. □

## 7.7 Satz

$V$ $n$-dimensional. $K-$VR, $\mathbb{B}$ Basis von V, $\alpha : V \to V$ linear, $A := A_\alpha^\mathbb{B}, c \in K$.
Dann sind äquivalent:

(1) $c$ ist Eigenwert von $\alpha$

(2) $\ker(c \cdot \mathrm{id}_v - \alpha) \neq \{\sigma\}$

(3) $\det(c \cdot E_n - A) = 0$

*Beweis.* (1) $\Leftrightarrow$ (2) 7.3.
(2) $\Leftrightarrow$ (3):
$A_{c\cdot\mathrm{id}_v-\alpha}^\mathbb{B} = c \cdot E_n - A$

$$\begin{aligned} & \det(c \cdot E_n - A) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & c \cdot E_n - A \text{ nicht invertierbar.} \\ \Leftrightarrow\ & c \cdot \mathrm{id}_v - \alpha \text{ nicht invertierbar.} \\ \Leftrightarrow\ & c \cdot \mathrm{id}_v - \alpha \text{ nicht injektiv.} \\ \Leftrightarrow\ & \ker(c \cdot \mathrm{id}_v \alpha) \neq \{\sigma\} \end{aligned}$$

□

Wie berechnet man Eigenwerte einer lineare Abbildung und wie viele gibt es?
Nach 7.7 muss man alle $c \in K$ bestommen mit $\det(c \cdot E_n - A) = 0$.
Betrachte Funktion

$$f_a : \begin{cases} K & \to K \\ to & \mapsto \det(t \cdot E_n - A) \end{cases}$$

## 7.8 Satz

Die Funktion $f_a$ ist Polynomfunktion von Grad n, dass heißt:
$f_A(t) = \det(t \cdot E_n - A) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ wobei $a_i \in K$ (unabhängig von $t$)

*Beweis.* Mit Entwicklungsformel. Machen wir hier nicht □

## 7.9 Definition

a) Das Polynom $f_1(t) = \det(t \cdot E_n - A) \in K[t]$ heißt *charakteristisches Polynom* von $A \in \mathcal{M}_n(k)$.

b) $\alpha : V \to V$ linear,
$\mathbb{B}$ Basis von V, so $\det(t \cdot \mathrm{id}_v - \alpha) = \det(A^{\mathbb{B}}_{t \cdot \mathrm{id}_v}) = \det(t \cdot E_n - A^{\mathbb{B}_\alpha})$ heißt *charakteristisches Polynom* von $\alpha$ (nach 6.12 unabhängig von $\mathbb{B}$)

## 7.10 Korollar und Defintion

$\alpha : V \to V$ linear $\dim(V) = n$.

a) $c$ ist Eigenwert von $\alpha \Leftrightarrow c$ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $\alpha$. *Vielfachheit* des Eigenwerts $c$ = Vielfachheit von $c$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms

b) $\alpha$ hat höchstens $n$ Eigenwerte (einschließend Vielfachheit.)

## 7.11 Beispiel

a) $\varrho \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung an $\langle e_1 \rangle$-Achse.
$\mathbb{B} = (e_1, e_2)$ kanonische Basis
$A : A^{\mathbb{B}_\varrho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte 1,-1

b) $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$A = A^{\mathbb{B}}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ $\mathbb{B}$ kanonische Basen.
Charakteristisches Polynom von $\alpha$ :
$\det(t \cdot E_n A^{\mathbb{B}}_\alpha) = \det \begin{pmatrix} t+1 & -2 \\ -4 & t+3 \end{pmatrix}$
$= (t+1))(t+3) - 8 = t^2 + 4t - 5$
$t^2 + 4t - 5 = 0$
$t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$
Eigenwerte von $\alpha$: 1,-5

Eigenvektor zu 1: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & +2y \\ 4x - 3y & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x = & -x & +2y \\ y = & 4x & -3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x = & 2y \\ -3x = & 3y \end{pmatrix} \qquad x = y$

Eigenraum zu Eigenwert 1: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Eigenvektor zu -5:

$-5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & +2y \\ 4x - 3y & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5x = & -x & +2y \\ -5y = & 4x & -3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4x = & 2y \\ -2y = & 4x \end{pmatrix} \qquad y = -2x$

Eigenraum zu Eigenwert -5: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B' = \left\langle ( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ) \right\rangle \qquad A_\alpha^{\mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um 0. $\mathbb{B}$ kanonische Basis.

$A = A_\rho^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

charakteristisches Polynom:

$f_A(t) = \det(t \cdot E_2 - A)$

$\qquad = \det(t, 1; -1, t) = t^2 + 1$

Keine Nullstellen um $\mathbb{R}$, also hat $\rho$ keine Eigenwerte in $\mathbb{R}$

Fasst man $\rho$ als Abbildung $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ auf, so gibt es Eigenwerte $i, -i$

Die zugehörigen Eigenräume sind $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle_C, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1i \end{pmatrix} \right\rangle_C$

## 7.12 Korollar

$\alpha = V \to V$ linear.

Falls Basis $\mathbb{B}$ von $V$ existiert mit $A_\alpha^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

(oder untere Dreiecksmatrix), so sind die Diagonalelemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sämtliche Eigenwerte von $\alpha$ (mit Vielfachheit).

*Beweis.* $\begin{pmatrix} t-a_{11} & -* & -* & -* \\ 0 & t-a_{22} & -* & -* \\ 0 & 0 & \ddots & -* \\ 0 & 0 & 0 & t-a_{nn} \end{pmatrix} = (t - a_{11} \cdot \ldots (t - a_{nn}))$ □

## 7.13 Bemerkung

Über $\mathbb{C}$ lässt sich für jede lineare Abbildung $\alpha : V \to V$ Basis $\mathbb{B}$ finden, so dass $A_\alpha^{\mathbb{B}}$ Dreiecksmatrix.

## 7.14 Satz ("Der Satz der alles liefert")

Seien $c_1, \ldots, c_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte der linearen Abbildung. $\alpha : V \to V$. Seien $v_1, \ldots, v_r$ zugehörige Eigenvektoren. Dann sind $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig.

*Beweis.* Induktion nach r.
$r = 1 : v_1 \neq \sigma$ linear unabhängig ✓
Behauptung sei richtig für $i - 1$.
Zu zeigen: Richtig für $i \leq r$.
$v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i$ linear abhängig.
Dann :

$$v_i = \sum_{j=1}^{i+1} a_j v_j . a_j \in K(*)$$

Multiplikation mit $c_i$ :

(1) $$c_i v_i = \sum_{j=1}^{i+1} c_i a_j v_j$$

Andererseits; Wende $\alpha$ auf $(*)$ an.

(2) $$c_i v_i = \alpha(v_i) \underset{*}{=} \sum_{j=1}^{i-1} a_j \alpha(v_j) \underset{\text{Vorrausetzung}}{=} \sum_{j=1}^{j-1} a_k c_j v_j$$

Subtraktion von (1) und (2):

$$\sigma = \sum_{j=1}^{i-1} (a_j c_j - c_i a_j) v_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_j (c_j - c_i) v_j$$

$\xRightarrow[v_1,\ldots,v_{i-1} \text{ linear unabhängig}]{}$ $a_j(c_J, c_i) =$
für $j = 1, i = 1$
Nach Voraussetzung:
$\Rightarrow a_j = 0$ für $j = 1 \ldots, i-1$
$\underset{(*)}{\Longrightarrow} v_i = \sigma$ ↯

□

## 7.15 Definition

$\alpha : V \to V$ linear. $\alpha$ heißt *diagonalisierbar* , falls $V$ eine Basis $\mathbb{B}$ aus Eigenvektoren von $\alpha$ besitzt. $A_\alpha^{\mathbb{B}}$ ist Diagonalmatrix.

## 7.16 Satz

$\dim_K(v) = n, \alpha : V \to V$ linear
Hat $\alpha$ *n verschiedene* Eigenwerte, so ist $\alpha$ diagonalisierbar.
(Hinreichend, nicht notwendig z.B $\alpha = id_v$ EW 1 mit Vielfachheit n diagonalisierbar).

## 7.17 Beispiel

$A_\alpha^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha$ hat EW 1 mit Vielfachheit 2 (7.12).

$\alpha$ ist nicht diagonalisierbar, denn sonst existiert Basis $\mathbb{B}'$ mit $A_\alpha^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow =$ $id_v$↯

Also. Zur Diagonalisierbarkeit reicht es nicht, das $\alpha$ $n$ Eigenwerte (mit Vfh,) besitzt.

## 7.18 Bemerkung

Sei $\alpha : V \to V$ linear, $\dim_k(v) = n$.

Besitzt $\alpha$ n Eigenwerte (mit Vielfachheit ), d.h $\det(tE_n - A) = (t - c_1)^{m_1} \ldots (t - c_r)^{m_r}$. Ist $v_i$ Eigenraum von $\alpha$ zu $c_i$, so kann man zeigen. $\dim(v_1) \leq m_i$

Es gilt: $\alpha$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \dim(v_i) = m_i, i = 1, r$

## 7.19 Definition

$\in \mathscr{M}_n(K)$ heißt *diagonalisierbar* , falls $\begin{cases} K^n & \to K^n \\ \mapsto K^m d \end{cases}$

## 7.20 Satz

a) $A \in \mathscr{M}_n(k)$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$existiert ein invertierbare Matrix $S'AS$ Diagonalmatrix

b) Hat $A$ n verschiedene Eigenwerte, so ist $A$ diagonalisierbar.

# 8 Vektorräume mit Skalarprodukt. Jetzt : $K = \mathbb{R}$

$K^2$ :*Länge* von $v \in \mathbb{R}^2$ $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} |v| = +\sqrt{x^2 + y^2}$ (Phytagoras).

Abstand von zwischen $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$Abstand: d(v,w) = ||v-w|| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$
$Winkel = ||v-w||^2 = ||v||^2 + ||2||^2 - 2||v||^2 \cdot ||2||^2 \cdot \cos(\phi)$
$||v-w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + y_1y_2)$

$$\boxed{x_1x_2 + y_1y_2 = ||v|||w||\cos(\phi)|}$$

Skalarprodukt

## 8.1 Definition

Seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
Das *Standard-Skalarprodukt* von $v$ und $w$:
$(v|w) := u_1w_1 + \ldots + u_nw_n \in \mathbb{R}$ (Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine Zahl!)
Es gilt

(1) $(v|v) \geq 0$
$(v|v) = 0 \Leftrightarrow v = \sigma$

(2) $(v|w) = (w|v)$

(3) $(v|w_1w_2) = (v|w_1) + (v|w_2)$, $(v|\alpha w) = a(v|w)$ Analog, Linearität im ersten Argument.
$e_1, \ldots, e_n$ kanonische Basis
$$(e_1|e_j) = \begin{cases} 0 & \text{für} i \neq j \\ 1 & \text{für} i = j \end{cases}$$

## 8.2 Definition

$V$ $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Abbildung $(.|.): \begin{cases} V \times V & \to \mathbb{R} \\ (v,w) & \mapsto (v|w) \in \mathbb{R} \end{cases}$ heißt *Skalarprodukt* auf $V$, falls sie die Eigenschaften (1) bis (3) aus 8.1 erfüllt (mit $V$ statt $\mathbb{R}^n$).
$V$ heißt dann *Euklidischer Vektorraum* (oder *Skalarproduktraum*)

## 8.3 Beispiel

a) Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist Skalarprodukt im Sinne von 8.2

b) $V$ $n-$dim $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Def. $(v|w) := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$ ist Skalarprodukt.
Das Standard Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ entsteht au diese Weise wenn man für $v_1, \ldots, v_n$ die kanonische Basis nimmt.

c) $V - \mathbb{R}-$Vektorraum ($[a, b]$ der stetiegn Funktionen auf $[a, b]$ (mit Werten in $\mathbb{R}$)).
$f, g \in V$
Definition $(f|g) := \int f(x) \cdot g(x) dx \in R$ Skalarprodukt.

## 8.4 Satz (Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung)

$V$ Euklid Vektorraum Dann:
$(v|w)^2 = (v|v) \cdot (w|w)$ für alle $v, w \in V$.
Gleichheit gilt genau dann, wenn $v$ und $w$ linear unabhängig sind.

*Beweis.* Ist $w = \sigma$ so auf beiden Seiten 0 (und $v, w = \sigma$ sind linear abhängig).
Sei $w \neq \sigma$
Setze $a := \frac{(v|w)}{w|W} \in \mathbb{R}$
$0 \leq (v - aw | v - aw) = (v - aw | v) - a(v - aw | W) = (v|v) - \frac{(v|w)^2}{(w|w)}$
Gleichheit $\Leftrightarrow (v - aw | v - aw) = 0 \Leftrightarrow v = a$ □

## 8.5 Definition

$V$ Euklid. Vektorraum

a) Für $v \in V$ ist $||v|| := +\sqrt{(v|v)}$
(*Euklidische* Norm von $v$ ('Länge' von $v$) )

b) $v, w \in V$ :
$d(v, w) := ||v - w||$ (*Euklidischer Abstand* von $v$ und $w$)(8.4 bedeutet dann: $|(v|w)|||v||||w||)$

## 8.6

## 8.7

## 8.8

## 8.9 Definition

$V$ Euklidischer VR

a) $V, W \in V, v \neq \sigma, w \neq \sigma$
   8.4: $\frac{|(v|w)|}{||v||\cdot||w||} \leq 1$
   $-1 \leq \frac{(v|w)}{||v||\cdot||w||} \leq 1$
   Dann existiert genau ein $\phi \in [0, \pi]$ mit $\frac{(v|w)}{||v||\cdot||w||} = \cos(\phi)$
   D.h.

$$\boxed{(v|w) = ||v|| \cdot ||w|| \cos(\phi)}$$

   $\phi$ heißt *Winkel* zwischen $v, w(v \neq \sigma, w \neq \sigma)$ (kein orientierter Winkel, kleinere der beiden möglich)

b) $v, w$ heißen *orthogonal* (Senkrecht), fakks $(v|w) = 0$.
   Falls $v \neq \sigma$ und $w \neq \sigma$, so heißt das:
   $\cos(\phi) = 0\, \phi = \frac{\pi}{2} (\hat{=} 90^\circ)$($\sigma$ ist orthogonal zu allen Vektoren).

c) $M \subseteq V$
   $M^\perp := \{w \in V, (v|w) = 0 \text{ für alle } v \in M\}$
   *Orthogonalraum* zu $M$
   (Unterraum von $V$ (selbst wenn $M$ kein Unterraum ist)).
   $\{\sigma\}^\perp = V$
   $V^\perp = \{\sigma\}(v \in V^\perp \Rightarrow (v|v) = 0 \Rightarrow v = \sigma)$

## 8.10 Bemerkung

Sind $v, w$ orthogonal, so ist $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$

## 8.11 Beispiel

a) $\mathbb{R}^n$, Standard-Skalarprodukt $(e_i|e_i) = 0$ für $i \neq j$
$||e_i|| = 1$.

b) $\mathbb{R}^3$, Standard-Skalarprodukt $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$||v|| = \sqrt{6}, ||w|| = \sqrt{24}$
Winkel zwischen $v$ und $w$ : $\cos(\phi) = \frac{(v|w)}{||v||\cdot||w||} = \frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}} = \frac{1}{2}$
$\phi = \frac{\pi}{3}$

c) $\mathbb{R}^2$, Standard-Skalarprodukt
$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \sigma$
$\{v\}^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\rangle$
Übungs-Aufgabe.

## 8.12 Definition

$V$ Euklidischer Vektorraum $M \subseteq V$.

a) $M$ heißt *Orthonormalsystem*, falls $||v|| = 1$ für alle $v \in M$ und $(v|w) = 0$ für alle $v, w \in M, v \neq w$

b) Ist $V$ endlich dimensional, so heißt M *Orthonormalbasis* (ONB) von $V$, falls $M$ Orthonormalsystem und Basis von $V$.

Beachte : $V \neq \sigma$
$\frac{1}{||v||} v \in V$
$||v'|| = ||\frac{1}{||v||} v|| = \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = 1$.
*Normierung*

## 8.13 Bemerkung

Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ ONB,

$v \in V, v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i . c_i \in \mathbb{R}$

$(v|v) = (\sum_{i=1}^{n} c_i v_i | \sum_{j=1}^{n} c_j v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j (v_i|v_j) = \sum_{i=1}^{n} {c_i}^2 (v_i|v_i)$

$(v|v) = \sum_{i=1}^{n} {c_i}^2$

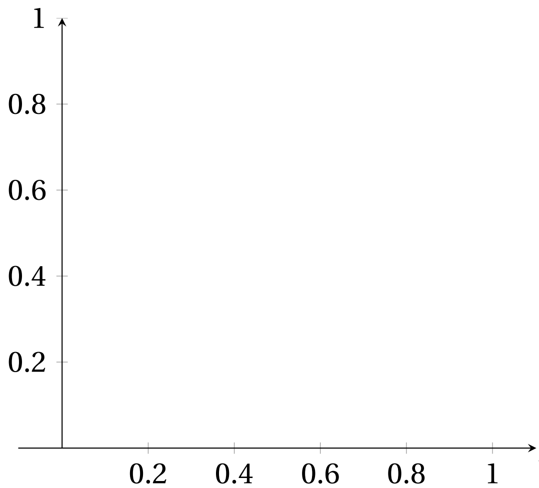
$||v|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {c_i}^2}$

## 8.14 Satz

a) Ein Orthonormalsystem ist linear unabhängig

b) Ist $M\{v_1, \ldots, v_m\}$ ein Orthonormalsystem, $v \in V$, so ist $v - \sum_{i=1}^{n} (v|v_i) v_i \in M^{\perp}$

(Veranschaulichung:
$m = 1, V = \mathbb{R}^2$



)

*Beweis.* a) Sei $\{v_1, \ldots, v_m\}$ endliche Teilmenge von $M$.
Z.z: $\{v_1, \ldots, v_m\}$ linear unabhängig. Ist $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = \sigma$, so $0 = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i | v_j = \sum_{i=1}^{m} c_i (v_i|v_j)$

b) $(v_j | v - \sum_{i=1}^{m} (v|v_i) v_i) = (v|v_j) - (v|v_j)(v_j|v_j) = 0 \checkmark$ $\square$

## 8.15 Satz (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei $M = \{w_1, \ldots, w_m\}$ linear unabhängig, Menge in Euklidischen $VRV$. Dann gibt es Orthonormalsystem $\{v_1, \ldots, v_m\}$ mit $\langle w_1, \ldots, w_i \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ für alls $i = 1, \ldots, m$

*Beweis.* $w_1 \neq \sigma$. Setze $v_1 = \frac{1}{\|w_1\|}$, $\|v_1\| = 1, \langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$.
Sei schon Orthonormalsystem $\{v_1, v_i\}$ konstruiert mit $\left\langle w_1, \ldots, w_j \right\rangle$ für alle $j = 1, \ldots, i$ $(i < m)$
Setze $v'_{i+1} = w_{i+1} - \sum\limits_{j=1}^{i} (v_j | w_{i+1}) v_j$ **??** : $(v'_{i+1} | v_j) = 0$ für $j = 1, \ldots, i$
Da $w_{i+1} \notin \langle w_1, \ldots, w_i \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$, ist $v'_{i+1} \neq \sigma$.
Setze $v_{i+1} = \frac{1}{\|v'_{i+1}\|} v'_{i+1}$
$\langle v_1, \ldots, v_i, w_{i+1} \rangle = \langle w_1, \ldots, w_i, v w_i \rangle$ ✓ □

## 8.16 Beispiel

a) $e_1, \ldots, e_n$ ist ONB des $R^n$ bezüglich Standard-Skalarprodukt

b) $V = \mathbb{R}^3$ mit Standard-Skalarprodukt.

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig.

Gram-Schmidt ONB $\{v_1 . v_2, v_3\}$

$\langle v_1 \rangle = \langle w_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v'_2 = w_2 = (v_1 | w_2) v_1$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$\|v_2'\| = \frac{\sqrt{6}}{3} v_2 = \sqrt{6} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

$$v_3' = W_3 = (v_1|w_3)v_1 - (v_2|w_3)v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \|v_3'\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{1} - 10 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Index