



# MATHE III

HAUCKS EINÖDE

# Mathe III Skript WS15/16

Finn Ickler nach Peter Hauck

Cover by DOS

13.10.2015-12.2.2016

Danke an: Dominik Spoerle, Flavia Nährlich, Lea Buchweitz, Justin Humm,  
Fabian Mikulasch u.v.a

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Der Vektorraum <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>12</b>
0.1	Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	13
0.2	Definition . . . . .	14
0.3	Beispiele . . . . .	14
0.4	Satz . . . . .	15
0.5	Beispiel . . . . .	16
0.6	Definition . . . . .	17
0.7	Beispiel . . . . .	18
0.9	Definition . . . . .	20
0.10	Beispiel . . . . .	20
0.11	Satz . . . . .	22
0.12	Satz . . . . .	23
0.13	Definition . . . . .	24
0.14	Beispiel . . . . .	24
0.15	Satz . . . . .	25
0.16	Satz . . . . .	26
0.17	Definition . . . . .	26
0.18	Satz (Basisergänzungssatz) . . . . .	26
0.19	Korollar . . . . .	26
0.20	Definition . . . . .	27
0.21	Beispiele . . . . .	27
<b>1</b>	<b>Algebraische Strukturen</b>	<b>28</b>
1.1	Definition . . . . .	28
1.2	Beispiele . . . . .	28
1.3	Definition . . . . .	29
1.4	Bemerkung . . . . .	30
1.5	Proposition . . . . .	30
1.6	Beispiel . . . . .	31
1.7	Satz . . . . .	33
1.8	Beispiel . . . . .	34

1.9	Beispiel . . . . .	34
1.10	Satz (Gleichungslösen in Gruppen) . . . . .	34
1.11	Beispiel . . . . .	35
1.12	Definition . . . . .	35
1.13	Beispiele . . . . .	36
1.14	Proposition . . . . .	36
1.15	Bemerkung . . . . .	37
1.16	Definition . . . . .	37
1.17	Beispiel . . . . .	38
1.18	Proposition (Nullteilerfreiheit in Körpern) . . . . .	38
1.19	Definition . . . . .	38
1.20	Satz und Definition . . . . .	39
1.21	Bemerkung . . . . .	39
1.22	Definition . . . . .	40
1.23	Satz . . . . .	40
1.24	Korollar . . . . .	40
1.25	Bemerkung . . . . .	41
1.26	Definition . . . . .	42
1.27	Satz . . . . .	42
1.28	Beispiel . . . . .	43
1.29	Korollar . . . . .	43
1.30	Definition . . . . .	44
1.31	Beispiel . . . . .	44
1.32	Satz . . . . .	44
1.33	Korollar . . . . .	45
1.34	Bemerkung . . . . .	45
1.35	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	46
<b>2</b>	<b>Vektorräume</b>	<b>46</b>
2.1	Definition . . . . .	46
2.2	Beispiel . . . . .	46
2.3	Proposition . . . . .	48
2.4	Definition . . . . .	48

2.5	Proposition . . . . .	48
2.6	Beispiel . . . . .	49
2.7	Proposition . . . . .	49
2.8	Definition . . . . .	49
2.9	Satz . . . . .	50
2.10	Definition . . . . .	50
2.11	Beispiel . . . . .	50
2.12	Definition . . . . .	51
2.13	Beispiel . . . . .	51
2.14	Bemerkung . . . . .	53
2.15	Satz !!! . . . . .	53
2.16	Definition . . . . .	53
2.17	Beispiel . . . . .	54
2.18	Satz (Existenz von Basen) . . . . .	55
2.19	Lemma . . . . .	55
2.20	Satz (Austauschsatz von Steinitz) . . . . .	56
2.21	Korollar . . . . .	57
2.22	Satz . . . . .	57
2.23	Definition . . . . .	58
2.24	Korollar . . . . .	58
2.25	Beispiel . . . . .	58
2.26	Satz . . . . .	60
2.27	Definition . . . . .	60
2.28	Beispiel . . . . .	60
2.29	Definition . . . . .	62
2.30	Satz . . . . .	62
2.31	Bemerkung . . . . .	63
2.32	Bemerkung . . . . .	63
2.33	Satz . . . . .	64
2.34	Beispiel . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>66</b>
3.1	Definition . . . . .	66

3.2	Bemerkung . . . . .	66
3.3	Beispiel . . . . .	66
3.4	Satz . . . . .	67
3.5	Satz . . . . .	68
3.6	Satz . . . . .	69
3.7	Definition . . . . .	69
3.8	Satz . . . . .	70
3.9	Beispiel . . . . .	71
3.10	Satz . . . . .	72
3.11	Beispiel . . . . .	73
3.12	Satz . . . . .	73
3.13	Korollar . . . . .	74
3.14	Korollar – Wichtigster Spezialfall . . . . .	74
3.15	Satz (Dimensionsformel) . . . . .	74
3.16	Korollar . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Der Rang einer Matrix und lineare Gleichungssysteme</b>	<b>76</b>
4.1	Definition . . . . .	76
4.2	Satz . . . . .	76
4.3	Bemerkung . . . . .	76
4.4	Korollar . . . . .	77
4.5	Satz . . . . .	77
4.6	Satz und Definition . . . . .	78
4.7	Korollar . . . . .	78
4.8	Satz . . . . .	78
4.9	Beispiel . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Matrizen und lineare Abbildungen</b>	<b>79</b>
5.1	Definition . . . . .	79
5.2	Bemerkung . . . . .	80
5.3	Beispiel . . . . .	80
5.4	Satz . . . . .	81
5.5	Beispiel . . . . .	81

5.6	Korollar . . . . .	82
5.7	Satz . . . . .	82
5.8	Beispiel . . . . .	83
5.9	Definition . . . . .	83
5.10	Korollar . . . . .	84
5.11	Satz . . . . .	84
5.12	Lemma . . . . .	84
5.13	Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix (Gauß-Jordan- Verfahren) . . . . .	85
5.14	Beispiel . . . . .	85
5.15	Bemerkung . . . . .	86
5.16	Definition . . . . .	86
5.17	Satz . . . . .	86
5.18	Satz . . . . .	87
5.19	Beispiel . . . . .	87
5.20	Satz . . . . .	87
5.21	Korollar . . . . .	88
5.22	Beispiel . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Determinanten</b>	<b>88</b>
6.1	Definition . . . . .	89
6.2	Laplacescher Entwicklungssatz . . . . .	89
6.3	Beispiel . . . . .	90
6.4	Korollar . . . . .	91
6.5	Rechenregeln für Determinante . . . . .	91
6.6	Bemerkung . . . . .	91
6.7	Beispiel . . . . .	92
6.8	Satz . . . . .	92
6.9	Definition . . . . .	92
6.10	Satz . . . . .	92
6.11	Beispiel . . . . .	93
6.12	Bemerkung . . . . .	93

<b>7 Eigenwerte</b>	<b>93</b>
7.1 Beispiel . . . . .	93
7.2 Definition . . . . .	94
7.3 Bemerkung . . . . .	94
7.4 Beispiel . . . . .	94
7.5 Definition . . . . .	95
7.6 Satz . . . . .	95
7.7 Satz . . . . .	95
7.8 Satz . . . . .	96
7.9 Definition . . . . .	96
7.10 Korollar und Defintion . . . . .	96
7.11 Beispiel . . . . .	97
7.12 Korollar . . . . .	98
7.13 Bemerkung . . . . .	99
7.14 Satz ("Der Satz der alles liefert") . . . . .	99
7.15 Definition . . . . .	100
7.16 Satz . . . . .	100
7.17 Beispiel . . . . .	100
7.18 Bemerkung . . . . .	100
7.19 Definition . . . . .	101
7.20 Satz . . . . .	101
<b>8 Vektorräume mit Skalarprodukt. Jetzt : <math>K = \mathbb{R}</math></b>	<b>101</b>
8.1 Definition . . . . .	101
8.2 Definition . . . . .	102
8.3 Beispiel . . . . .	102
8.4 Satz (Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung) . . . . .	103
8.5 Definition . . . . .	103
8.6 Beispiel . . . . .	103
8.7 Satz (Eigenschaft der Norm) . . . . .	104
8.8 Bemerkung . . . . .	104
8.9 Definition . . . . .	104
8.10 Bemerkung . . . . .	105



8.11	Beispiel . . . . .	105
8.12	Definition . . . . .	106
8.13	Bemerkung . . . . .	106
8.14	Satz . . . . .	106
8.15	Satz (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren) . . . . .	107
8.16	Beispiel . . . . .	107
8.17	Satz . . . . .	108
8.18	Definition . . . . .	108
8.19	Satz . . . . .	109
8.20	Bemerkung . . . . .	109
8.21	Beispiel . . . . .	109
<b>9</b>	<b>Orthogonale Abbildungen, symmetrische Abbildungen, Konsequenz- abbildungen</b>	<b>110</b>
9.1	Definition . . . . .	110
9.2	Folgerungen . . . . .	110
9.3	Beispiel . . . . .	110
9.4	Satz (Charakterisierung orthogonal Abbildung) . . . . .	111
9.5	Definition . . . . .	112
9.6	Korollar . . . . .	112
9.7	Satz . . . . .	112
9.8	Definition . . . . .	114
9.9	Bemerkung . . . . .	114
9.10	Lemma . . . . .	116
9.11	Definition . . . . .	116
9.12	Bemerkung und Definition . . . . .	116
9.13	Satz über die Hauptachsentransformation . . . . .	117
9.14	Bemerkung . . . . .	117
<b>10</b>	<b>Mehrdimensionale Analysis</b>	<b>118</b>
10.1	Beispiel . . . . .	118
10.2	Beispiel (ebene Kurven/Raumkurven) . . . . .	118

10.3 Satz . . . . .	119
10.4 Beispiel . . . . .	119
10.5 Definition . . . . .	119
10.6 Bemerkung . . . . .	120
10.7 Beispiel . . . . .	120
10.8 Definition . . . . .	120
10.9 Definition . . . . .	120
10.10 Beispiel . . . . .	121
10.11 Definition . . . . .	121
10.12 Beispiel . . . . .	122
10.13 Satz (Schwarz) . . . . .	122
10.14 Satz . . . . .	123
10.15 Beispiel . . . . .	123
10.16 Korollar . . . . .	123
10.17 Definition . . . . .	123
10.18 Definition . . . . .	124
10.19 Satz . . . . .	124
10.20 Beispiel . . . . .	125
10.21 Geometrische Bedeutung des Gradienten . . . . .	126
 <b>11 Taylorpolynome und Talyorreihen</b>	 <b>127</b>
11.1 Satz und Definition . . . . .	127
11.2 Satz . . . . .	128
11.3 Beispiel . . . . .	128
11.4 Satz (Taylor) . . . . .	128
11.5 Beispiel . . . . .	129
11.6 Korollar . . . . .	129
11.7 Bemerkung . . . . .	129
11.8 Definition . . . . .	130
11.9 Satz (Taylor) . . . . .	130
11.10 Beispiel . . . . .	130

## Abbildungsverzeichnis

1	Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor . . . . .	13
2	Vektoraddition durch Parallelogrammbildung . . . . .	13
3	Gerade dargestellt durch Vektoren . . . . .	15
4	Eindimensionale Unterräume im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	61
5	hat an jedem Punkt Tangentialebene . . . . .	122
6	Tangentialebene an der Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . . . . .	124
7	$x^2 + y^2$ . . . . .	125
8	$x^2 - y^2$ . . . . .	126

# Ende des SS 2015

## 0 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Spaltenvektoren der Länge } n : \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t$$

$a_1, \dots, a_n$  Komponente der Spaltenvektoren.

Wie bei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Multiplikation entspricht der Matri-} \\ \text{zenmultiplikation und ist nicht mög-} \\ \text{lich falls } n > 1) \end{array}$$

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Zahl (*Skalar*)

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$$

Addition+Abbildung :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$  mit Addition und Multiplikation mit Skalaren :  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

Die Vektoren im  $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  entsprechen Punkten auf der Zahlengerade, Ebene, dreidimensionalen Raums. Punkte des  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  lassen sich identifizieren mit, *Ortsvektoren* Pfeile mit Beginn in 0 (Komp = 0) und Ende im entsprechenden Punkt

Addition von Spaltenvektoren entspricht der Addition von Ortsvektoren entsprechend der Parallelogrammregel. Multiplikation mit Skalaren a :

Streckung (falls  $|a| > 1$ )

Stauchung (falls  $0 \leq |a| < 1$ )

Richtungspunkt, falls  $a < 0$

Abbildung 1: Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor

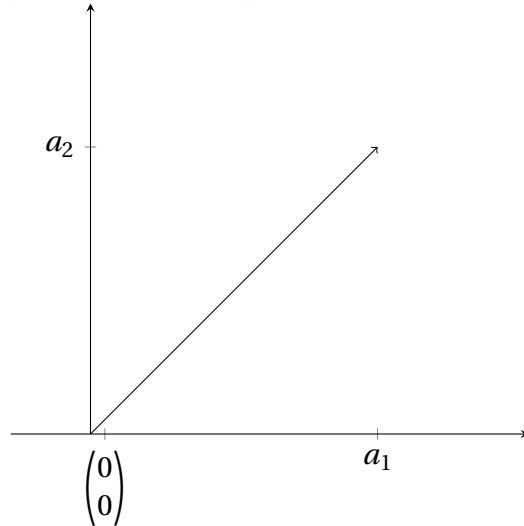
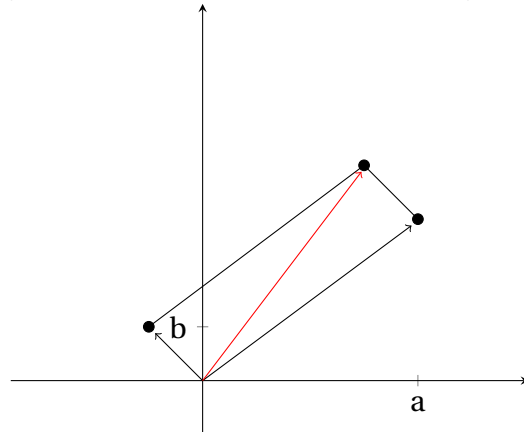


Abbildung 2: Vektoraddition durch Parallelogrammbildung



## 0.1 Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$ )

Seien  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  Dann gilt:

a)

$$(1.1) \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$(1.2) \quad v + 0 = 0 + v = v, \text{ wobei } 0 \text{ Nullvektor}$$

$$\mathbb{R}^n \text{ kommutative} \quad (1.3) \quad v + -v = 0$$

$$\text{Gruppe} \quad (1.4) \quad u + v = v + u$$

$$(2.1) \quad (a + b)v = av + bv$$

$$(2.2) \quad a(u + v) = au + av$$

$$(2.3) \quad (a \cdot b)v = a(bv)$$

$$(2.4) \quad 1v = v$$

b)  $0 \cdot v = 0$  und  $a \cdot 0 = 0$ Beweis folgt aus entsprechenden Rechenregeln in  $\mathbb{R}$ 

## 0.2 Definition

Eine nicht-leere Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Unterraum* (oder *Teilraum* von  $\mathbb{R}^n$ ), falls gilt:

(1)  $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} : u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$  (Abgeschlossenheit bezüglich +)

(2)  $\forall u \in \mathcal{U} \forall a \in \mathbb{R} : au \in \mathcal{U}$  (Abgeschlossenheit bezüglich Mult. mit Skalaren)

$\mathcal{U}$  enthält Nullvektor  $\{0\}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  (Nullraum)

$\mathbb{R}^n$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}$

## 0.3 Beispiele

a)  $0 \neq v \in \mathbb{R}^2 \quad G = \{av : a \in \mathbb{R}\}$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^2$

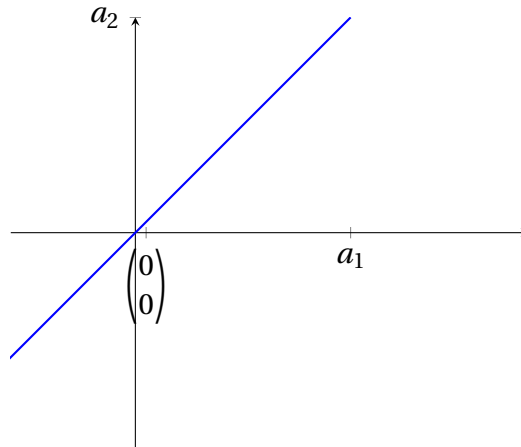
$$(a_1 v, a_2 v \in G, (a_1 +$$

$$a_2)v \in G \quad 2.1 \text{ in } 0.2$$

$$av \in G, b \in \mathbb{R} (ba)v \in G)$$

$$G = \text{Ursprungsgerade durch } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} n = 2:$$

Abbildung 3: Gerade dargestellt durch Vektoren

b)  $v, w \in \mathbb{R}^n$  $E = \{av + bw : a, b \in \mathbb{R}\}$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  $v = o, w = o : E = \{o\}$  $v \neq o \quad w \notin \{av : a \in \mathbb{R}\}$  $E = \mathbb{R}^2 \quad n = 3 : \text{Ebene durch } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und durch } v, w$ Ist  $w \in \{av : a \in \mathbb{R}\}$ , so ist  $E = G$  (aus a))c)  $v, w \neq o$  $G' = \{w + av : a \in \mathbb{R}\}$  $[v \in G' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w + av = o \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w = (-a)v \in G]$ **0.4 Satz**Seien  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  Unterräume von  $\mathbb{R}^n$ a)  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ b)  $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$  ist im Allgemeinen KEIN Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ c)  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2\}$  (Summe von  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$ ) ist Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ .

- d)  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$   $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  und  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  ist der kleinste Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , der  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$  enthält. (d.h ist  $w$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in w$ , so  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq w$ )

*Beweis.* a) ✓

b) c)

□

## 0.5 Beispiel

- a) ??b)  $G_1 = \{av : a \in \mathbb{R}\}$

$$G_2 = \{aw : a\}$$

$$G_1 + G_2 = E$$

- b)  $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \right\}$$

$E_1 + E_2$  Unterräume von  $\mathbb{R}^3$  (10.3.b)

$$E_1 \cap E_2 = ?$$

$$v \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = u, t+u = 0, s = u$$

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$



$$= \left\{ u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_1 + E_2 = ?$$

$$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3, \text{ denn :}$$

Es gilt sogar:

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + G_2, \text{ wobei}$$

$$G_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq E_{@}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z-y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ z-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

## 0.6 Definition

a)  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

Dann heißt  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i$

*Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_m$  (mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_m$ ).

[Zwei formal verschiedene Linearkombinationen der gleichen  $v_1, \dots, v_m$  können den gleichen Vektor darstellen

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}]$$

b) Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , so ist der von M *erzeugte* (oder *aufgespannte*) Unterraum  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  (oder  $\langle M \rangle$ ) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann.

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \right\} \text{ falls } M \neq \emptyset$$

$$\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} := \{\emptyset\}$$

$$M = \{v_1, \dots, v_m\}, \text{ so}$$

## 0.7 Beispiel

$$\text{a) } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\text{b) } \mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\text{Ist } \mathcal{U} = \mathbb{R}^3?$$

$$\text{Für welche } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ gibt es geeignete Skalare } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}?$$

$$a + 3b + 2c = x$$

$$2a + 2b + 3c = y$$

$$3a + b + 4c = z$$

LGS für die Unbekannten  $a, b, c$  mit variabler rechter Seite : Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & -4 & -1 & y-2x \\ 0 & -8 & -2 & z-3x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

LGS ist lösbar  $\Leftrightarrow x-2y+z=0$ .

Dass heißt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x-2y+z=0$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x-2y+z=0, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$$

Lösungen des LGS:  $c$  frei wählen,  $b, a$  ergeben sich, (falls  $x-2y+z=0$ ) z.B.

$$c=0, b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y, a=x-3b=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y$$

Ist  $x-2y+z=0$ , so ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{rrcr} 6x^2 & -3xy & +y^3 & =5 \\ 7x^3 & +3x^2y^2 & -xy & =7 \end{array}$$

**0.9 Definition**

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  heißen *linear abhängig*, falls  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  existieren, *nicht alle*  $= 0$ , mit  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ .

Gibt es solche Skalare nicht, so heißen  $v_1, \dots, v_m$  *linear unabhängig* (d.h. aus  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$  folgt  $a_1 = \dots = a_n = 0$ ).

(Entsprechend  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linear abhängig/linear unabhängig)

Per Definition :  $\emptyset$  ist linear unabhängig.

**0.10 Beispiel**

a)  $\sigma + v \in \mathbb{R}^n$  Dann ist  $v$  linear unabhängig:

Zu zeigen : Ist  $av = \sigma \Rightarrow a = 0$

Sei  $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  Da  $v \neq \sigma$ ,

existiert mindestens ein  $i$  mit  $b_i \neq 0$ .

Angenommen  $\sigma v = \begin{pmatrix} 0b_1 \\ \vdots \\ 0b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma$ .

Dann  $ab_i = 0$  Da  $b_i \neq 0$ , folgt  $a = 0$ .

$\sigma$  ist linear abhängig:

$$1 \cdot \sigma = \sigma$$

b)  $v_1 = \sigma, v_2, \dots, v_m$  ist linear abhängig :

$$\sigma = 1 \cdot \sigma + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_m$$

c)  $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v \neq \sigma \neq w$$

$v, w$  sind linear

① abhängig  $\Leftrightarrow$

②  $v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$

③  $w \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$

④  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$

①

$v, w$  linear abhängig  $\rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , nicht beide  $= 0$ ,  $a_1 v + a_2 w = \sigma$ . Dann beide  $(a_1, a_2) \neq 0$

$$a_1 v = -a_2 w \mid \cdot \frac{1}{a_1}$$

$$v = -\frac{-a_2}{-a_1} w \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{2}$$

②

$v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$  dass heißt  $v = aw$  für ein  $a \in \mathbb{R}$  Dann  $a \neq 0$ , da  $v \neq \sigma$ .  $w = \frac{1}{a} \cdot v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{3}$

③

$w = bv$  für ein  $b \in \mathbb{R} b \neq 0$ , da  $w \neq \sigma$ .

$$aw \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow aW = (ab)v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\langle w \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$$

$w = \frac{1}{b} w$  Dann analog  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\text{Also } \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \textcircled{4}$$

④

$v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ , dass heißt.

$v = a \cdot w$  für ein  $a \in \mathbb{R}$

$a \cdot v + (-a)w = \sigma \Rightarrow v, w$  sind linear abhängig ①

$$\text{d) } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$e_1, \dots, e_n$  sind linear unabhängig.

$$\sigma = a_1 e_1 + \dots a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

- e)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig  $\mathbb{R}^2$ :

Gesucht sind alle  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt auf LGS für a,b,c:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$c$  ist frei wählbar

- f)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig in  $\mathbb{R}^3$ ,

$$10.8b) : \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 0.11 Satz

Seien  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

- a)  $v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig ①

$$\Leftrightarrow \exists i \dots v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \text{ ②}$$

$$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \text{ ③}$$

- b)  $v_1, \dots, v_m$  sind linear unabhängig  $\Leftrightarrow$  Jedes  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$  lässt sich auf *genau eine* Weise als Linearkombination von  $v_1, \dots, v_m$  schreiben.

- c) Sind  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig und es existiert  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$  dann sind auch  $v_1, \dots, v_m, v$  linear unabhängig

*Beweis.* a) ①  $\Rightarrow$  ②

$v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig

$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m$  nicht alle  $= 0$ ,

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

Sei  $a_i \neq 0$

$$a_i v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m -a_j v_j$$

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m -\frac{a_j}{a_i} v_j \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$$

Klar:  $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$

Zeige  $\supseteq$   $v = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ , d.h.

$$v = \sum_{j=1}^m a_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_j v_j + a_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (a_j + a_i b_j) v_j \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$$

$v_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$ , dass heißt es existiert

$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_j v_j$$

$\Rightarrow \sigma = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_m v_m$   $v_1, \dots, v_m$  linear abhängig □

## 0.12 Satz

Sind  $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ , so

$v_1, \dots, v_{n+1}$  linear abhängig.

(Insbesondere ist  $m > n$  und  $v_i, v_m \in \mathbb{R}^n$ , so sind  $v_1, \dots, v_m$  linear abhängig)

*Beweis.* Suche alle  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$  mit  $a_1 v_1 + \dots + a_{n+1} v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt zu LGS für  $a_1, \dots, a_{n+1}$  mit Koeffizientenmatrix  $(v_1, \dots, v_{n+1}) = A$

Frage: Hat  $A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  nicht triviale Lösung?

Gauß:

$$\left( \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \right)$$

□

### 0.13 Definition

Sei  $\mathcal{U}$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$

$B \subseteq \mathcal{U}$  heißt Basis von  $\mathcal{U}$  falls:

(1)  $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$

(2)  $B$  ist linear unabhängig

( $\mathcal{U} = \{\sigma\}, B = \emptyset$ )

### 0.14 Beispiel

a)  $e_1, \dots, e_n$  ist Basis von  $\mathbb{R}^n$  (kanonische Basis)

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist Basis von  $\mathbb{R}^2$ :

Sei  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Gesucht:  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

LGS mit variabler rechter Seite

$$\begin{array}{rcl} 1a & + & 3b = x \\ 2a & + & 2b = y \end{array}$$

Gauß:



$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösung:  $b = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x$   $a = x - 3b = x + \frac{3}{4}y - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig nach 0.10c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis.}$$

$$\text{c) } \mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig (0.10c)}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis von } \mathcal{U}$$

## 0.15 Satz

Jeder Unterraum  $\mathcal{U}$  des  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine Basis.

*Beweis.* Ist  $\mathcal{U} = \{\sigma\}$ , so  $b = \emptyset$ .

Sei also  $\mathcal{U} \neq \{\sigma\}$ .

$v_1$  ist linear unabhängig.

$\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{U}$ .

Ist  $\mathcal{U} = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ , so ist  $\{v_1\}$  Basis von  $\mathcal{U}$

Ist  $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$ .

Sei  $v_2 \in \mathcal{U} \setminus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ .

Nach 0.11c) ist  $\{v_1, v_2\}$  linear unabhängig. Ist  $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{U}$ , so ist  $\{v_1, v_2\}$  Basis von  $\mathcal{U}$ .

Ist  $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$  so wähle  $v_3$  usw.

Es existiert  $m \neq n$  mit  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$  und  $v_1, \dots, v_m$  sind linear unabhängig.

(Denn noch 0.12 gibt es im  $\mathbb{R}^n$  keine  $n+1$  linear unabhängige Vektoren)  $\square$

## 0.16 Satz

Je zwei Basen  $B_1, B_2$  eines Unterraums  $\mathcal{U}$  des  $\mathbb{R}^n$  enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren  $|B_1| = |B_2|$ .

Insbesondere:

Je zwei Basen des  $\mathbb{R}^n$  enthalten  $n$  Vektoren

## 0.17 Definition

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  Basis von  $\mathcal{U}$ ,  $|B| = m$ .

Dann ist  $m$  die *Dimension* von  $\mathcal{U}$ ,  $\dim(\mathcal{U}) = m$ .

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ ,  $\dim(\mathcal{U}) \neq n$ .

## 0.18 Satz (Basisergänzungssatz)

Sei  $\mathcal{U}$  Unterraum der  $\mathbb{R}^n$ ,  $M \subseteq \mathcal{U}$  eine Menge  $m$  linear unabhängiger Vektoren.

Dann lässt sich  $M$  zu einer Basis von  $\mathcal{U}$  ergänzen.

*Beweis.* Analog zu 0.15  $\square$

## 0.19 Korollar

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und  $\dim(\mathcal{U}) = n$ , dann ist  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

*Beweis.* Sei  $B$  Basis von  $\mathcal{U}$ , also  $|B| = n$ .

Nach 0.18 (dort mit  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ ,  $M = B$ ) lässt sich  $B$  zu Basis  $B'$  von  $\mathbb{R}^n$  ergänzen.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \Rightarrow |B'| = n.$$

Also  $B = B'$

$$\mathbb{R}^n = \langle B' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$$

□

## 0.20 Definition

Ist  $\mathcal{U}$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = (u_1 \dots, u_m)$  eine geordnete Basis von  $\mathcal{U}$ . Nach 0.11b), lässt sich jeder Vektorraum  $\mathcal{U} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$  *eindeutig* als Linearkombination

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^m a_i u_i, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

schreiben.

$(a_1 \dots, a_m)$  heißen *Koordinaten* von  $u$  bzgl. der Basis  $B$ .

## 0.21 Beispiele

a)  $B(e_1 \dots, e_m)$  kanonische Basis von  $\mathbb{R}^n$ .

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  bzgl.  $B$ :

$(a_1 \dots, a_n)$  *kartesische* Koordinaten.

(Rene Descartes, 1596-1650)

# Anfang des WS 2015/16

## 1 Algebraische Strukturen

13.10.2015

### 1.1 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$ . Eine *Verknüpfung* auf  $X$  ist :

$$\begin{cases} X \times X & \longrightarrow X \\ (a, b) & \longrightarrow a \star b \end{cases} \quad (\text{'Produkt' von a und b})$$

$\star$  ist Platzhalter für andere Verknüpfungssymbole, die in speziellen Beispielen auftreten können.

### 1.2 Beispiele

a) Addition  $+$  und Multiplikation  $\cdot$  sind Verknüpfungen auf  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Multiplikation ist *keine* Verknüpfung auf der Menge der negativen ganzen Zahlen.

b) Division ist keine Verknüpfung auf  $\mathbb{N}$ . Division ist Verknüpfung auf  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c)  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$a \oplus b := (a + b) \bmod n \in \mathbb{Z}_n$$

$$a \odot b := (a \cdot b) \bmod n \in \mathbb{Z}_n$$

Verknüpfungen auf  $\mathbb{Z}_n$

$$n = 7: \quad 5 \odot 6 = 2$$

$$5 \oplus 6 = 4$$

$$n = 2: \quad \mathbb{Z}_n = \{0, 1\}$$

$$0 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 = 0$$

$$\odot = \cdot$$

d)  $M$  Menge,  $X =$  Menge aller Abbildungen  $M \longrightarrow M$ . Verknüpfung auf  $X$ : Hintereinanderausführung von Abbildungen:  $\circ$

$$(f, g): M \longrightarrow M, \text{ So } f \circ g: M \rightarrow M$$

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) \in M, m \in M$$

Im Allgemeinen ist  $g \circ f \neq f \circ g$

e)  $X = \{0, 1\}$

2-stellige Aussagen, Junktoren wie  $\wedge, \vee, \text{XOR}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  heißen Verknüpfungen auf  $X$ . 0 entspricht f, 1 entspricht w.

$$0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 1 = 1$$

$$0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1 \text{ (= 'Multiplikation')}$$

$$0 \text{ XOR } 0 = 0, 1 \text{ XOR } 0 = 1, 0 \text{ XOR } 1 = 1, 1 \text{ XOR } 1 = 0 \text{ (= Addition mod 2)}$$

f)  $X = M_n(\mathbb{R})$  = Menge der  $n \times n$ - Matrizen über  $\mathbb{R}$ .

Matrizenaddition ist Verknüpfung auf  $X$ .

Matrizenmultiplikation ist Verknüpfung auf  $X$ .

g)  $M$  Menge.  $X$  Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus  $M$  ('Wörter' über  $M$ ).

Verknüpfung: Hintereinanderausführung zweier Folgen (Konkatenation).

$$M = \{0, 1\}, w_1 = 1101, w_2 = 001$$

$$w_1 w_2 = 110111$$

$$w_2 w_1 = 0011101$$

### 1.3 Definition

Sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge mit Verknüpfung  $\star$ .

a)  $X$ , genauer  $(X, \star)$  ist *Halbgruppe*, falls  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$  für alle  $a, b, c \in X$ .  
(Assoziativgesetz)

b)  $(X, \star)$  heißt *Monoid*, falls  $(X, \star)$  Halbgruppe ist und ein  $e \in X$  existiert mit  $e \star a = a$  und  $a \star e = a$  für alle  $a \in X$ .  $e$  heißt *neutrales Element* (später,  $e$  ist eindeutig bestimmt).

c) Sei  $(X, \star)$  ein Monoid. Ein Element  $a \in X$  heißt *invertierbar*, falls  $b \in X$  existiert (abhängig von  $a$ ) mit  $a \star b = b \star a = e$ .  $b$  heißt *inverses Element* (das *Inverse*) zu  $a$  (später: wenn  $b$  existiert, so ist es eindeutig bestimmt).

d) Monoid  $(X, \star)$  heißt *Gruppe*, falls jedes Element in  $X$  bezüglich  $\star$  invertierbar ist.

- e) Halbgruppe, Monoid, Gruppe  $(X, \star)$  bezüglich kommutativ (oder *abelsch*) falls  $a \star b = b \star a$  für alle  $a, b \in X$  (Kommutativgesetz).

(Nach: Abel, 1802-1829)

14.10.2015

## 1.4 Bemerkung

In Halbgruppe liefert jede sinnvolle Klammerung eines Produktes mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element.

(n = 4)

$$(a \star (b \star c)) \star d \underset{\text{AG}^1}{=} ((a \star b) \star c) \star d \underset{\text{AG}^1}{=} (a \star b) \star (c \star d) \underset{\text{AG}^1}{=} a \star (b \star (c \star d)) \underset{\text{AG}^1}{=} a \star ((b \star c) \star d)$$

Klammern werden daher meist weggelassen.

$a^n = a \star \dots \star a$  "Potenzen eindeutig definiert"  
 $\xleftarrow[n \in \mathbb{R}]{n}$

## 1.5 Proposition

- a) In einem Monoid  $(X, \star)$  ist das neutrale Element eindeutig bestimmt.
- b) Ist  $(X, \star)$  Monoid und ist  $a \in X$  invertierbar, so ist das Inverse zu  $a$  eindeutig bestimmt. Bezeichnung:  $a^{-1}$
- c) Ist  $(X, \star)$  Monoid und wenn  $a, b \in X$  invertierbar sind, so auch  $a \star b$ .  
 $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$
- d) Die Menge der invertierbaren Elemente in einem Monoid  $(X, \star)$  bilden bezüglich  $\star$  eine Gruppe.

*Beweis.* a) Angenommen:  $e_1, e_2$  sind neutrale Elemente. Dann:

$$e_1 = e_1 \star e_2 = e_1 \star e_2 = e_2 \quad \nexists$$

---

<sup>1</sup>Assoziativgesetz

b) Angenommen  $a$  hat 2 inverse Elemente  $b_1, b_2$  also.

$$\begin{aligned} a \star b_1 &= e, b_2 \star a = e \\ b_1 &= e \star b_1 = (b_2 \star a) \star b_1 = b_2 \star (a \star b_1) = b_2 \star e = b_2 \quad \neq \end{aligned}$$

c)

$$(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = a \star (b \star b^{-1}) \star a^{-1} = a \star e \star a^{-1} = e$$

Analog:  $(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = e$

Also:  $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$

d)  $\mathcal{J}$  = Menge der inversen Elemente in  $(X, \star)$ ,

$e \in \mathcal{J}$ , dann  $e \star e = e$ , dass heißt  $e^{-1} = e$ ,  $\star$  ist Verknüpfung auf  $\mathcal{J}$ .

Zu zeigen:  $a, b \in \mathcal{J} \Rightarrow a \star b \in \mathcal{J}$  Folgt aus c).

Assoziativgesetz gilt in  $\mathcal{J}$ ,  $a \in \mathcal{J} \Rightarrow a^{-1} \in \mathcal{J}$ , denn  $(a^{-1})^{-1} = a$  □

*Bemerkung:* Multiplikation mit  $a^{-1}$  macht Multiplikation mit  $a$  (Verknüpfung) rückgängig.

## 1.6 Beispiel

a)  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Halbgruppen bezüglich  $+$ .

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind bezüglich  $+$  Monoide mit neutralen Element 0.

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  ist kein Monoid bezüglich  $+$ , aber  $\mathbb{N}_0$ .

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Gruppen bezüglich  $+$ . Inverses Element zu  $a$ :  $-a$

$\mathbb{N}$  ist keine Gruppe bezüglich  $+$ , Inverse Elemente in  $\mathbb{N}_0 : \{0\}$

b)  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Monoide bezüglich  $\cdot$  (neutrales Element 1). Keine Gruppen (in  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ist 0 nicht invertierbar).

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$  Gruppen.

Invertierbare Elemente in  $\mathbb{Z} :: \quad \{1, -1\} \quad \leftarrow \text{Gruppe bezüglich } \cdot$   
↑  
Eigenes Inverses

c)  $M$  Menge.

$X$  = Menge aller Abbildungen  $M \longrightarrow M$  mit Hintereinanderausführung  $\circ$  als Verknüpfung.

Monoid, neutrales Element.  $id_M$

$$f \circ id_M = f = id_M \circ f$$

$$id_M(m) = m \text{ für alle } m \in M.$$

Invertierbar sind genau die bijektiven Abbildungen  $M \rightarrow M$ , Inverse = Umkehrabbildung.

$f : M \rightarrow M$  bijektiv

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$$

‘Proposition’ on page 30 d): Die bijektive n Abbildung,  $M \rightarrow M$  bilden bezüglich  $\circ$  eine Gruppe

- d)  $M =$  Menge z.B  $\{0, 1\}$ , x Menge aller endlichen Folgen über  $m$ . Halbgruppe mit Verknüpfung Konkatenation . Nimmt man die leere Folge mit hinzu, ist es das neutrale Element. Dann: Monoid.

- e)  $M_n(\mathbb{R})$  Menge der Matrizen über  $\mathbb{R}$ .

Addition: neutrales Element  $0$  – *Matrix*, Inverse zu  $A$  ist  $-A$ .  $(M, \text{Addition})$  ist Gruppe

Multiplikation:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  Halbgruppe mit neutralem Element  $I_m$

- f)  $n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\} \quad \text{Verknüpfung } \oplus$

$$a \oplus b = a + b \mod n$$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  ist Gruppe.

Assoziativgesetz:  $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= (a + b \mod n) \mod n \\ &= ((a + b) + c) \mod n \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{=} (a + (b + c)) \mod n \\ &= (a + (b + c) \mod n) \mod n \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{=} (a + (b \oplus c)) \mod n \\ &= (a \oplus (b \oplus c)) \end{aligned}$$

$0$  ist neutrales Element bezüglich  $\oplus$

$0$  ist sein eigenes Inverse.

$1 \leq i \leq n \quad n - i \in \mathbb{Z}_n$  Inverses zu  $i$

$$\begin{aligned} i \oplus (n - i) \\ = (i + (n - i)) \mod n = n \mod n = 0 \end{aligned}$$



g)  $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_0$  Verknüpfung  $\odot$   $n > 1$

$$a \odot b = a \cdot b \pmod{n}$$

$(\mathbb{Z}_n, \odot)$  ist Monoid

Assoziativgesetz wie bei  $\oplus$ .

1 ist neutrales Element bei  $\odot$  Keine Gruppe bezüglich  $\odot$ , denn 0 hat kein Inverses

## 1.7 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}, n > 1$

a) Die Elemente in  $(\mathbb{Z}_n, \odot)$ , die invertierbar bezüglich  $\odot$  sind, sind genau diejenigen  $a \in \mathbb{Z}_n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$ .

Für solche  $a$  bestimmt man das Inverse folgendermaßen:

Bestimme  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $s \cdot a + t \cdot n = 1$  (Erweiterter Euklidischer Algorithmus)

Dann ist  $a^{-1} = s \pmod{n}$

b)  $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n : \text{ggT}(a, n) = 1\}$  ist Gruppe bezüglich  $\odot$ .

$|\mathbb{Z}_n^*| =: \varphi(n)$  Euler'sche  $\varphi$ -Funktion (Leonard Euler 1707-1783)

c) Ist  $p$  eine Primzahl so ist  $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \odot)$  eine Gruppe. Beweis folgt aus b)

*Beweis.* a) Angenommen  $a \in \mathbb{Z}_n$  invertierbar bezüglich  $\odot$

D.h es existiert  $b \in \mathbb{Z}_n$  mit  $a \odot b = 1$

$a \cdot b \pmod{n} = 1$ , d.h es existiert  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $a \cdot b = 1 + k \cdot n, 1 = a \cdot b - k \cdot n$

Sei  $d = \text{ggT}(a, n)$ :

$$d \mid a \Rightarrow d \mid a \cdot b$$

$$d \mid n \Rightarrow d \mid k \cdot n$$

$$\Rightarrow d \mid a \cdot b - k \cdot n = 1$$

$$\Rightarrow d = 1 \quad \text{ggT}(a, n) = 1.$$

Umgekehrt sei  $a \in \mathbb{Z}_n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$

EEA liefert  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $s \cdot a + t \cdot n = 1$ .

$$\begin{aligned} (s \pmod{n}) \odot a &= ((s \pmod{n}) \cdot a) \pmod{n} \\ &\stackrel{\text{Mathe I}}{=} (s \cdot a) \pmod{n} = (1 - t \cdot n) \pmod{n} \\ &= (1 - \underbrace{(t \cdot n) \pmod{n}}_{=0}) \pmod{n} = 1 \pmod{n} = 1 \end{aligned}$$

b) 'Proposition' on page 30 d) □

## 1.8 Beispiel

$n = 24$ ,  $a = 7$  ist invertierbar in  $(Z_{24}, \odot)$

EEA:

$$1 = (-2) \cdot 24 + 7 \cdot 7$$

$$a^{-1} = 7 \mod 24 = 7 = a$$

## 1.9 Beispiel

Sei  $M = \{1, \dots, n\}$

Die Menge der bijektiven Abbildungen auf  $M$  (*Permutationen*) bilden nach 1.6c) eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung  $\circ$ .

Bezeichnung:  $S_n$  *systematische Gruppe von Grad  $n$*

Es ist  $|S_n| = n!$

(Mathe I)

$$\text{z.B. : } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi$$

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\varrho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \varrho^{-1} = id$$

$$\pi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$S_n$  ist für  $n \geq 3$  nicht abelsch (nicht kommutativ)

## 1.10 Satz (Gleichungslösen in Gruppen)

Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe  $a, b \in G$  (in allgemeinen Gruppen schreibt man Verknüpfungen oft als  $\cdot$  statt  $\star$ , oft auch ab statt  $a \cdot b$ )

a) Es gibt genau ein  $x \in G$  mit  $ax = b$  (nämlich  $x = a^{-1}b$ ) [ "Teilen durch"  $a$  von

links = Multiplikation von links mit  $a^{-1}$  ]

b) Es gibt genau ein  $y \in G$  mit  $ya = b$  (nämlich  $y = ba^{-1}$ )

c) Ist  $ax = bx$  für ein  $x \in G$ , so ist  $a = b$

Ist  $ya = yb$  für ein  $y \in G$ , so ist  $a = b$

*Beweis.* a) Setze  $x = a^{-1}b \in G$ .

$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1})b = a \cdot b = b$  Eindeutigkeit : Sei  $x \in G$  mit  $ax = b$

Multiplikation beide Seiten mit  $a^{-1}$ ,

$$x = (a^{-1}a)x = a^{-1}b$$

b) analog

c)  $ax = bx$  Multiplikation mit  $x^{-1}$  Dann  $a = b$

□

## 1.11 Beispiel

a) Suche Permutation  $\xi \in S_3$  mit  $\varrho \circ \xi = \pi$  (vgl. 1.9). ‘Satz (Gleichungslösen in Gruppen)’ on page 34a):

$$\begin{aligned}\xi = \varrho^{-1} \circ \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b) 1.10c) gilt in Monoiden, die keine Gruppen sind, im Allgemeinen nicht:

Beispiel:  $(\mathbb{Z}_0, \odot)$

$$2 \odot 3 - 0 = 3 \odot 3, \text{ aber } 2 \neq 4$$

## 1.12 Definition

a)  $R \neq \emptyset$  Menge mit 2 Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  heißt *Ring*, falls

(1)  $(R, +)$  ist kommutative Gruppe (neutrales Element: 0, *Nullelement*, Inverses zu  $a$ :  $-a$   $b + (-a) =: b - a$ )

(2)  $(R, \cdot)$  ist Halbgruppe

$$(3) \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ und } a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\cdot \text{ vor } +)$$

*Distributivgesetz*

- b) Ring  $R$  heißt *kommutativer Ring* falls  $(R, \cdot)$  kommutative Halbgruppe ist.
- c) Ring  $R$  heißt *Ring mit Eins*, falls  $(R, \cdot)$  Monoid, neutrales Element  $1 \neq 0$  (*Eins-element, Eins*)

### 1.13 Beispiele

- a)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kommutativer Ring mit 1, invertierbare Elemente bezüglich  $\cdot$  sind 1 und  $-1$ .
- b)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$  sind kommutative Ringe mit Eins.  
Alle Elemente  $\neq 0$  sind invertierbar bezüglich  $\cdot$ .

- c)  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ .

$$\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  ist kommutativer Ring mit Eins:

Wegen 'Beispiel' on page 31 f),g) sind nur die Distributivgesetz zu zeigen:

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \odot c &= ((a \oplus b) \cdot c) \bmod n \\ &= (((a+b) \bmod n) \cdot c) \bmod n \\ &= ((a+b) \cdot c) \bmod n \\ \text{Mathe I} \quad &= (a \cdot c + b \cdot c) \bmod n \\ &= ((a \cdot c) \bmod n + (b \cdot c) \bmod n) \bmod n \\ \text{Mathe I} \quad &= a \odot c \oplus b \odot c \end{aligned}$$

- d)  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$ , mit Matrizenaddition  $+$  und, Multiplikation  $\cdot$  ist Ring mit Eins.  
(Folgt aus Rechenregeln für Matrizen, Mathe II) Eins:  $E_n$   $n \times n$ -Einheitsmatrix  
Für  $n \geq 2$  ist  $M_n(\mathbb{R})$  kein kommutativer Ring

### 1.14 Proposition

Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring. Dann gilt für alle  $a, b \in R$ .

$$a) \quad 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

$$b) \quad (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

$$c) \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

*Beweis.*

$$a) \quad 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a \stackrel{\text{DG}^2}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

Addiere auf beiden Seiten  $-(0 \cdot a)$

$$0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$$

$$b) \quad (-a) \cdot b + ab = ((-a) + a) \cdot b \stackrel{a)}{=} 0 \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow (-a) \cdot b = -(ab) \text{ Analog } a \cdot (-b) = -(ab)$$

$$c) \quad (-a) \cdot (-b) \stackrel{b)}{=} -(a \cdot (-b)) \stackrel{b)}{=} -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$$

□

## 1.15 Bemerkung

a) In einem Ring mit Eins sind 1 und  $-1$  bezüglich  $\cdot$  invertierbar.

$$1 \cdot 1 = 1 \quad (1^{-1} = 1)$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \quad (1.14c)), \text{ dass hei\ss}t. (-1)^{-1} = -1$$

0 ist nie bezüglich Multiplikation invertierbar, denn  $0 \cdot a = 0 \neq 1$ . 1.14a)

b) Es kann sein dass  $1 = -1$  gilt. Zum Beispiel:

$$(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot) \quad 1 \oplus 1 = 0 \quad 1 = -1$$

## 1.16 Definition

Ein kommutativer Ring  $(R, +, \cdot)$  mit Eins hei\ss t *Körper*, wenn jedes Element  $\neq 0$  bezüglich Multiplikation invertierbar ist.

---

<sup>2</sup>Distributivgesetz

### 1.17 Beispiel

a)  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Körper,  $\mathbb{Z}$  nicht.

b)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  ist genau dann ein Körper, wenn  $n$  eine Primzahl.

$\mathbb{Z}_n$  ist kommutativer Ring mit 1.

‘Beispiele’ on page 36c: Die invertierbaren Elemente in  $\mathbb{Z}_n$  sind alle  $a \in \mathbb{Z}_n$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$

### 1.18 Proposition (Nullteilerfreiheit in Körpern)

Ist  $K$  ein Körper,  $a, b \in K$ , mit  $a \cdot b = 0$ , so ist  $a = 0$  oder  $b = 0$

*Beweis.*

Sei  $a \cdot b = 0$  Angenommen  $a \neq 0$ . Dann existiert  $a^{-1} \in K$

$$0 \underset{1.14a)}{=} a^{-1} \cdot 0 \underset{\text{Vor.}}{=} a^{-1}(a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b$$

□

*Beispiel:*  $R = (\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$

$$2 \odot 3 = 0 \quad 2 \neq 0, 3 \neq 0$$

### 1.19 Definition

Sei  $K$  ein Körper,

a) Ein (Formales) *Polynom* über  $K$  ist ein Ausdruck  $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  wobei  $n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K$ . (Manchmal  $f(x)$  statt  $f$ ,  $+$ -Zeichen hat

zunächst nichts mit einer Addition zu tun.  $a_i$  *Koeffizienten* von  $f$

Ist  $a_i = 0$  so kann man in der Schreibweise von  $f$   $0 \cdot x^i$  auch weglassen.

Statt  $a_0x^0$  schreibt man  $a_0$ , statt  $a_1x^1$  schreibt man  $a_1x$ . Sind alle  $a_i = 0$ , so  $f = 0$ , *Nullpolynom*.

Ist  $a_i = 1$ , so schreibt man  $x^i$  statt  $1x^i$

b) Zwei Polynome  $f$  und  $g$  sind *gleich*, wenn *entweder*  $f = 0$  und  $g = 0$  oder  $f \neq 0$  und  $g \neq 0$

$$\text{d.h. } f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0$$

$$g = \sum_{i=0}^m a_i x^i, b_m \neq 0$$

und  $n = m$  und  $a_i = b_i$  für  $i = 0 \dots n$

c) Menge aller Polynome über  $K$ .  $K[x]$

Wir wollen  $K[x]$  zu einem Ring machen. Wie?

*Beispiel:*  $f = 3x^2 + 2x + 1$ ,

$$g = 5x^3 + x^2 + x \in Q[x]$$

$$f + g = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (3x^2 + 2x + 1) \cdot (5x^3 + x^2 + x) \\ &= 15x^5 + 10x^4 + 5x^3 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x^2 + 2x^2 + x \\ &= 15x^5 + 13x^4 + 10x^3 + 3x^2 + x \end{aligned}$$

27.10.2015

## 1.20 Satz und Definition

$K$  Körper.  $K[x]$  wird zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgenden Verknüpfungen.

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{i=0}^m b_i x_i \text{ so}$$

$$f + g = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$$

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i, \text{ wobei } c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \quad (\text{Faltungsprodukt})$$

In beiden Fällen sind Koeffizienten  $a_i$  mit  $i > n$  bzw.  $b_i$  mit  $i > m$  gleich 0 zu setzen. Das Einselement ist 1 ( $= 1x^0$ )

Das Nullelement ist das Nullpolynom.

$$-f = \sum_{i=0}^n (-a_i) x^i$$

$(K[x], +, \cdot)$  heißt *Polynomring* in einer Variable *Beweis*: Nachrechnen

## 1.21 Bemerkung

$$\text{a) } f = \sum_{i=0}^n a^i x^i \in K[x], a \in K \subseteq K[x]$$

$$a \cdot f = \sum_{i=0}^n (a \cdot a_i) x^i$$

$$x \cdot f = \sum_{i=0}^n a_i x^{i+1} = a_n x^{n+1} + \dots + a_0 x$$

- b) Das  $+$ - Zeichen in der Definition der Polynome entspricht genau der Addition der *Monome*  $a_i x^i$ .

$$(a_0 x^0 \quad + \quad a_1 x^1) = a_0 x^0 \quad + \quad a_1 x^1$$

$\uparrow$   
Add. aus 1.20
 $\uparrow$   
+ aus 1.19

## 1.22 Definition

Sei  $0 \neq f \in k[x]$ ,  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,  $a_n \neq 0$ .

Dann heißt  $n$  der *Grad* in  $f$ ,  $\text{Grad}(f) = n$

$\text{Grad}(0) := -\infty$

$\text{Grad}(f) := 0$  : *Konstante Polynome*  $\neq 0$

## 1.23 Satz

Sei  $K$  ein Körper,  $f, g \in K[x]$ .

Dann ist  $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$

(Konvention:  $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty + \infty)$ ,

Sei  $f \neq 0$  und  $g \neq 0$

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0, n = \text{Grad}(f)$$

$$g = \sum_{i=0}^m b_i x^i, b_m \neq 0, m = \text{Grad}(g)$$

Koeffizienten von  $x^{n+m}$  in  $f \cdot g$ :  $a_n b_m \neq 0$   
1.18

## 1.24 Korollar

Sei  $K$  ein Körper

- a) Genau die konstanten Polynome  $\neq 0$  sind in  $K[x]$  bezüglich  $\cdot$  invertierbar  
Insbesondere ist  $K[x]$  *kein* Körper
- b) Sind  $f, g \in K[x]$  mit  $f \cdot g = 0$ , so ist  $f = 0$  oder  $g = 0$  (Nullteilerfreiheit in  $K[x]$ )
- c) Sind  $f, g_1, g_2 \in K[x]$  mit  $f \cdot g_1 = f \cdot g_2$  und ist  $f \neq 0$ , so ist  $g_1 = g_2$



*Beweis.*

- a) Sei  $f \in K[x]$  invertierbar bezüglich  $\cdot$ . Dann ist  $f \neq 0$  und es existiert  $g \in K[x]$  mit  $f \cdot g = 1$ .

Mit 1.23:

$$\begin{aligned} 0 = \text{Grad}(1) &= \text{Grad}(f \cdot g) \\ &= \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g). \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \text{Grad}(f) = 0 (= \text{Grad}(g))$$

Dass heißt  $f$  ist konstantes Polynom.

Ist umgekehrt  $f = a \in L, a \neq 0$ , so  $f^{-1} = a^{-1} \in K$

- b) Folgt aus 1.23:

$$\begin{aligned} -\infty &= \text{Grad}(0) = \text{Grad}(f \cdot g) \\ &= \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Grad}(f) = -\infty \text{ oder } \text{Grad}(g) = -\infty, \text{ d.h. } f = 0, \text{ oder } g = 0$$

- c)  $f g_1 = f g_2$

$$\Rightarrow 0 = f g_1 - f g_2 = f \cdot (g_1 - g_2)$$

Da  $f \neq 0$ , folgt mit b)

$$g_1 - g_2 = 0, \text{ d.h. } g_1 = g_2$$

□

## 1.25 Bemerkung

- a) Jedem Polynom  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x]$

kann man eine Funktion  $K \rightarrow K$  zuordnen.  $a \in K \mapsto f(a) = \sum_{i=0}^n a_i a^i \in K$

(Polynomfunktion aus Analysis  $K = \mathbb{R}$ )

Aufgrund der Definition von Addition/Multiplikation von Polynomen gilt:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$$

Es kann passieren, dass zwei verschiedene Polynome die gleiche Funktion beschreiben.

Z.B  $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$$f = x^2, g = x$$

$$f \neq g$$

$$f(1) = 1 = g(1)$$

$$f(0) = -g(0)$$

Über unendlichen Körpern passiert das nicht (später)

b) Schnelle Berechnung von  $f(a)$ :

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$f(a) = a_0 + a(a_1 + a(a_2 + \dots + a(a_{n-1} + a a_n)))$$

*Horner-Schema*

## 1.26 Definition

$K$  Körper,  $f, g \in K[x]$

$f$  teilt  $g$  ( $f \mid g$ ) falls  $q \in K[x]$  existiert mit  $g = q \cdot f$  (Falls  $g \neq 0 \pmod{f} \mid g$ , so ist  $\text{Grad}(f) \leq \text{Grad}(g)$  nach 'Satz' on page 40)

## 1.27 Satz

$K$  Körper,  $0 \neq f \in K[x], g \in K[x]$

Dann existiert eindeutig bestimmte Polynome  $q, r$

$$(1) \quad g = q \cdot f + r$$

$$(2) \quad \text{Grad}(r) < \text{Grad}(f)$$

(Beweis WHK, Satz 4.69)

*Division mit Rest*

**1.28 Beispiel**

a)  $g = x^4 + 2x^3 - x + 2, f = 3x^2 - 1, f, g \in Q[x]$

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2x^3 - x + 2) : (3x^2 - 1) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}{3x^2 - 1} \\ \underline{-x^4 \quad + \frac{1}{3}x^2} \phantom{-x + 2} \\ 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x \phantom{+ 2} \\ \underline{-2x^3 \quad + \frac{2}{3}x} \phantom{+ 2} \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \phantom{+ 2} \\ \underline{-\frac{1}{3}x^2 \quad + \frac{1}{9}} \phantom{+ 2} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} \end{array}$$

b)  $g = x^4 - x^2 + 1, f = x^2 + x, f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 + 1 : x^2 + x = x^2 + 2x \\ \underline{-(x^4 + x^3)} \phantom{+ 1} \\ 2x^3 + 2x^2 + 1 \phantom{+ 1} \\ \underline{-(2x^3 + 2x^2)} \phantom{+ 1} \\ 1 \leftarrow r \end{array}$$

**1.29 Korollar**

$K$  Körper,  $a \in K$ .

$f \in K[x]$  ist genau dann durch  $(x - a)$  teilbar, wenn  $f(a) = 0$  (d.h.  $a$  ist Nullstelle von  $f$ )

$$[f = g \cdot (x - a), q \in K[x]]$$

*Beweis.*

Falls  $x - a \mid f$ , so existiert  $q \in K[x]$  mit  $f \stackrel{1.25}{=} q(x - a)$ .

$$\text{Dann } f(a) = q(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_{=0} = 0.$$

Umgekehrt: Angenommen  $f(a) = 0$ . Division mit Rest von  $f$  durch  $x - a$ :

$$f = q \cdot (x - a)r, q, r \in K[x]$$

$$\text{Grad}(r) < \text{Grad}(x - a) = 1, r \in K$$

Zeige:  $r = 0$ .

$$r = f - q \cdot (x - a)$$

Setze  $a \in K$  ein.

$$\begin{aligned} r &= f(a) - q(a) \cdot (a - a) = 0 - 0 = 0 \\ f &= q \cdot (x - a) \end{aligned}$$

□

### 1.30 Definition

$K$  Körper  $a \in K$  heißt  $m$ -fache Nullstelle von  $f \in K[x]$ , falls  $(x - a)^m \mid f$  und  $(x - a)^{m+1} \nmid f$ .

Dass heißt  $f = q \cdot (x - a)^m$  und  $q(a) \neq 0$

### 1.31 Beispiel

$$x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

In  $\mathbb{Z}_3$  hat  $f$  die Nullstelle 1

‘Korollar’ on page 43:  $x - 1 (= x + 2)$  teilt  $f$

Dividiere  $f$  durch  $x - 1$ :

$$f = (x^4 + 2x^3 + 2x + 2) \cdot (x - 1)$$

### 1.32 Satz

$K$  Körper,  $f \in K[x]$ ,  $\text{Grad}(f) = n \geq 0$  (dass heißt  $f \neq 0$ ).

Dann hat  $f$  höchstens  $n$  Nullstellen in  $K$  (einschließend Vielfachheit). Genauer:

Sind  $a_1, \dots, a_k$  die verschiedenen Nullstellen von  $f$ , so ist

$f = g \cdot (x - a_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{m_k}$ ,  $m_i$  Vielfachheiten der Nullstellen  $a_i$ ,  $g$  hat keine Nullstelle in  $K$

*Beweis.* Durch Induktion nach  $n$ .

$n = 0$ :  $f = a_0 \neq 0$ , ohne Nullstelle. ✓

Sei  $n > 0$ . Behauptung sei richtig für alle Polynome von  $\text{Grad} < n$ .

Hat  $f$  keine Nullstellen,  $g = f$  ✓

Hat  $f$  Nullstellen  $a_1, \dots, a_k$ ,  $k \geq 1$

so  $f = q \cdot (x - a_1)^{m_1}$  (nach Definition)  $q(a_1) \neq 0$ .

$$\text{Grad}(q) = n - m_1 \underset{1.23}{<} n \quad m_1 > 0$$

Wir zeigen:

$q$  hat genau die Nullstellen  $a_2, \dots, a_k$  mit Vielfachheiten  $m_2, \dots, m_k$ .

Klar: Jede Nullstelle von  $q$  ist Nullstelle von  $f$ , Dass heißt  $q$  hat höchstens Nullstellen  $a_2, \dots, a_k$ .

Diese Nullstellen hat  $q$  mit Vielfachheit  $0 \geq n_i \geq m_i$ , denn  $(x - a_i)^{m_i} | q \Rightarrow (x - a_i)^{n_i} | f$

Sei  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Es ist  $f = s \cdot (x - a_i)^{m_i}$ ,  $s \in K[x]$ ,  $s(a_i) \neq 0$

$$q = q_1 \cdot (x - a_i)^{n_i}, q_1 \in K[x], q(a_i) \neq 0, \quad ((x - a_i)^0 = 1)$$

$$f = q_1 (x - a_1)^{n_i} \cdot (x - a_1)^{m_1} \text{ 'Korollar' on page 40c):}$$

$$s(x - a_i)^{m_i - n_i} = q_1 \cdot (x - a_1)^{m_1}$$

Ist  $m_i > n_i$ , so ist  $m_i - n_i > 0$

$$0 = s(a_i)(a_i - a_i)^{m_i - n_i} = q(a_i)(a_i - a_i) \neq 0E$$

Dass heißt  $n_i = m_i, i = 2, \dots, k$

$$q = g(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k}, g \text{ ohne Nullstelle in } K$$

$$f = g(x - a_1)^{m_2} \dots (x - a_2)^{m_1} \quad (\text{Nach Induktionsvoraussetzung}) \quad \square$$

### 1.33 Korollar

$K$  Körper,  $f, g \in K[x]$ ,  $m = \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$

Gibt es  $m + 1$  Elemente  $a_1, \dots, a_{m+1} \in K$ , paarweise verschieden, mit  $f(a_i) = g(a_i), i = 1, \dots, m + 1$  so  $f = g$ .

*Insbesondere:* Ist  $K$  unendlich,  $f, g \in K[x]$  mit  $f(a) = g(a)$  für alle  $a \in K$ , so ist  $f = g$

*Beweis.*  $f - g \in K[x]$ ,  $\text{Grad}(f - g) \leq m$ .

$f - g$  hat  $m + 1$  Nullstellen  $a_1, \dots, a_{m+1}$

$$1.32 \quad f - g = 0, f = g \quad \square$$

### 1.34 Bemerkung

Über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$  ( $p$  Primzahl) gibt es Polynome beliebig hohen Grades ohne Nullstellen

Über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ :  $(x^2 + 1)^m$  hat  $\text{Grad}(2m)$ , keine Nullstellen in  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

über  $\mathbb{Z}_p$  z.B.  $(x^p - x + 1)^m$  hat  $\text{Grad } pm$ , ohne Nullstellen (ohne Beweis)

### 1.35 Fundamentalsatz der Algebra

Ist  $f \in \mathbb{C}[x]$ ,  $f \neq 0$  so ist ( $f = a_n x^n + \dots + a_0$ )

$f = a_n(x-c_1)^{m_1} \dots (x-c_k)^{m_k}$ ,  $a_n, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$  (Nullstellen mit Vielfachen  $m_1, m_2$ )

$m_1 + \dots + m_k = \text{Grad}(f)$

$\text{Grad}(f) = n$  hat  $n$  Nullstellen (einschließend Vielfachheit)

## 2 Vektorräume

3.11.2015

### 2.1 Definition

Sei  $K$  ein Körper. Ein  $K$ -Vektorraum  $V$  besitzt Verknüpfung  $+$  bezüglich derer eine kommutative Gruppe ist (Neutrales Element  $0$ , Nullvektor, Inverses zu  $v \in V$ :  $-v$ ). Außerdem existiert Abbildung  $K \times V \rightarrow V$

$(a, v) \mapsto av, a \in K, v \in V$

(„Multiplikation“ von Elementen aus  $V$ , („Vektoren“) mit Körperelementen („Skalare“)), so dass gilt:

$(a + b)v = av + bv$  für alle  $a, b \in K, v \in V$

$a(v + w) = av + aw$  für alle  $a \in K, v, w \in V$

$(ab)v = a(bv)$  für alle  $a, b \in K, v \in V$

$1v = v$  für alle  $v \in V$ .

### 2.2 Beispiel

a)  $K$  Körper,  $n \in \mathbb{N}$

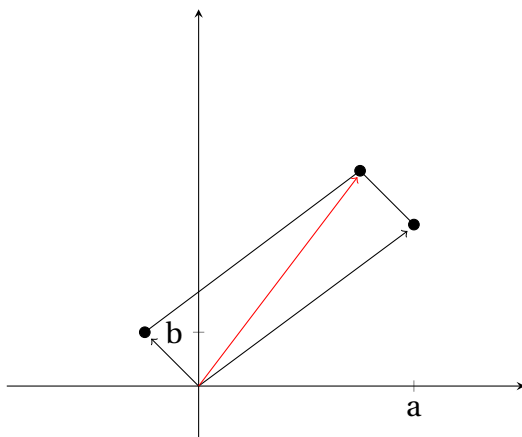
$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$  ist  $K$ -Vektorraum bezüglich  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$  für alle  $a \in K, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ . Raum der Spaltenvektoren der Länge  $n$  über  $K$ .

Entsprechend: Raum der Zeilenvektoren,  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t$

Für  $K = \mathbb{R} : \mathbb{R}^n$

$n = 2, 3$  Elemente aus  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ , identifizierbar mit Ortsvektor der Ebene oder des 3-dimensionalen Raumes.



b) Sei  $K$  ein Körper Polynomring  $K[x]$  ist ein  $K$ -Vektorraum, bezüglich

- Addition von Polynomen
- Multiplikation von Körperelementen mit Polynomen

$$a \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) := \sum_{i=0}^n (a a_i) x^i \in K[x]$$

(Multiplikation von Polynomen mit Polynom Grad  $\leq 0$ )

2.1 folgt aus den Ringeigenschaften von  $K[x]$

c)  $K$  Körper.  $V =$  Abbildung  $(K, K) = \{ \alpha : K \rightarrow K : \alpha \text{ Abbildung} \}$  Addition auf  $V$

$\alpha + \beta \in V (\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$  für alle  $x \in K$

Skalare Multiplikation:

$a \in \mathbb{R}, \alpha \in V (a\alpha)(x) = a \cdot \alpha(x)$  Für alle  $x \in K$

Nachrechnen : Damit wird  $V$  ein  $K$ -Vektorraum

### 2.3 Proposition

$K$  Körper,  $V, K - VR$

a)  $a \cdot \sigma = \sigma$

b)  $0 \cdot v = \sigma$

c)  $(-1) \cdot v = -v$

a,b,c Für alle  $v \in V$

### 2.4 Definition

$K$  Körper,  $V, K - VR$ .

$\emptyset + U \subseteq V$  heißt *Unterraum* (*Untervektorraum*, oder *Teilraum*) von  $V$ , falls  $U$  bezüglich Addition auf  $V$  und der skalaren Multiplikation mit Elementen aus  $K$  selbst  $K$  Vektorraum ist.

### 2.5 Proposition

$U$  ist Unterraum von  $V$

$\Leftrightarrow$

(1)  $u_1 + u_2 \in U$  für alle  $u_1, u_2 \in U$

(2)  $au \in U$  für alle  $u \in U, a \in K$   
(Nullvektor in  $U$  = Nullvektor in  $V$ )

*Beweis.*  $\Rightarrow \checkmark \Leftarrow$ : Da  $U \neq \emptyset$ , existiert  $u \in U$ .

$\sigma = 0 \cdot u \in U$

$u \in U \Rightarrow -u = (-1)u \in U$

Mit (1):  $(U, +)$  ist kommutative Gruppe. Restliche Axiome gelten auch für  $U, K$ .

□



## 2.6 Beispiel

- a)  $V = K = VR$ , so ist  $V$  Unterraum von  $V$ .  
und  $\{0\}$  ist Unterraum von  $V$  (*Nullraum*)
- b) Betrachte  $K[x]$  als  $K = VR$ . (2.2).  
Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ .  
 $U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) \leq n\}$  Unterraum von  $K[x]$

## 2.7 Proposition

Seien  $U_1, U_2$  Unterräume von  $K$ -VR  $V$ .

- a)  $U_1 \cap U_2$  ist Unterraum
- b)  $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$  ist Unterraum von  $V$  (*Summe* von Unterräumen)
- c)  $U_1 + U_2$  ist der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $U_1 \cup U_2$  enthält.
- d)  $U_1 \cap U_2$  ist im Allgemeinen kein Unterraum.  
*Beweis:* 0.4

## 2.8 Definition

$V$   $K$ -VR

- a)  $v_1, \dots, v_m \in V, a_1, \dots, a_m \in K$

Dann heißt

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i \in V$$

*Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_m$  (mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_m$ ).

[ Beachte: Zwei formell verschiedene Linearkombinationen derselben Vektoren können den gleichen Vektor darstellen z.B. in  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Ist  $M \subseteq V$ , so ist der von  $M$  erzeugte oder aufgespannte Unterraum  $\langle M \rangle_K$  (oder kurz  $\langle M \rangle$ ) die Menge aller endlichen Linearkombination, die man mit Vektoren aus  $M$  bilden kann:

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in M \right\}$$

$$\langle \emptyset \rangle_K := \{ \emptyset \}$$

$$M = \{v_1, \dots, v_m\} : \langle M \rangle =: \langle v_1, \dots, v_m \rangle$$

- c) Ist  $\langle M \rangle_K = V$ , so heißt  $M$  Erzeugungssystem

## 2.9 Satz

$V$   $K$ -VR,  $M \subseteq V$

- a)  $\langle M \rangle_K$  ist Unterraum von  $V$

- b)  $\langle M \rangle_K$  ist der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $M$  enthält.

Insbesondere: Sind  $U_1, U_2$  Unterräume von  $V$ , so ist  $\langle U_1 \cup U_2 \rangle_K = U_1 + U_2$

*Beweis:* 0.7

## 2.10 Definition

$V$   $K$ -VR  $V$  heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge  $M \subseteq V$  gibt mit  $V = \langle M \rangle_K$

## 2.11 Beispiel

$$a) \quad K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$$

$K^n$  ist endlich erzeugt.

$$e_1, \dots, e_n \text{ Einheitsvektor } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$K^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_K, \text{ denn } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

- b)  $K[x]$  als  $K$ -Vr ist nicht endlich erzeugt. Angenommen es existiert  $f_1, \dots, f_n \in K[x]$  mit  $K[x] = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$ .

Sei  $t, \max \text{Grad}(f_i) \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$

Dann haben alle Polynome in  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$  höchstens Grad  $t$ . Also  $x^{t+1} \in K[x] \setminus \langle f_1, \dots, f_n \rangle_K$

$$M = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$$

$$K[x] = \langle M \rangle_K. \quad f = \sum_{n=0}^t a_i x^i$$

- c)  $n \in \mathbb{N}. \quad U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) = n\}$

Unterraum von  $K[x]$ , endlich erzeugt

## 2.12 Definition

Sei  $V$   $K$ -VR,  $v_1, \dots, v_m \in V$  heißen *linear abhängig*, wenn es  $a_1, \dots, a_n \in K$ , *nicht alle*  $= 0$ , gibt mit

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sigma$$

(Beachte: Immer mit  $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m = \sigma$ , aber bei linearer Abhängigkeit soll es noch eine andere Möglichkeit geben) Andernfalls nennt man  $v_1, \dots, v_m$  *linear unabhängig*:

(D.h. aus  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sigma$  folgt  $a_1 = \dots = a_m = 0$ )

Entsprechend:  $\{v_1, \dots, v_m\}$  linear abhängig, linear unabhängig.

$\emptyset$  per Definition linear unabhängig. Klar: Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren wieder linear unabhängig

## 2.13 Beispiel

- a)  $\sigma$  ist linear abhängig:  $1 \cdot \sigma = \sigma$

- b)  $v, w \in V, v \neq \sigma \neq w$ .

Wann sind  $v$  und  $w$  linear abhängig?

$v, w$  linear abhängig  $\Rightarrow \exists a, b \in K$ , nicht beide  $= 0$  mit  $a \cdot v + b \cdot w = \sigma$

Angenommen:  $a \neq 0$   $a \cdot v = -b \cdot w \mid a^{-1}$  (K Körper)

$$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1}(-bw) = (-a^{-1}b)w \in \langle w \rangle_K = \{cw : c \in K\}$$

$$d \in K \quad dv = (-da^{-1}b)w \in \langle w \rangle_K \quad \langle v \rangle_K \subseteq \langle w \rangle_K$$

Dann auch  $b \neq 0$ .

Angenommen  $b = 0$ ,  $a \cdot v = -0w = \sigma$

$$v = a^{-1}\sigma = \sigma \neq$$

Vertausche Rollen von  $v, w : \langle w \rangle_K \subseteq \langle v \rangle_K$

$v, w$  linear abhängig  $\langle v \rangle_K = \langle w \rangle_K$

*Beweis.*  $\Rightarrow \checkmark$

$$\Leftarrow v \in \langle v \rangle_K = \langle w \rangle_K$$

$$\Rightarrow v = c \cdot w \text{ für ein } c \in K.$$

$$\Rightarrow \sigma = -v + c \cdot w = (-1)v + c \cdot w$$

$$\Rightarrow v, w \text{ linear abhängig.} \quad \square$$

c)  $e_1, \dots, e_n \in K^n$  sind linear unabhängig.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 = \dots a_n = 0.$$

d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  linear abhängig, linear unabhängig? Für welche  $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\text{gilt } a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Führt auf LGS für die unbekannten  $a, b, c$

$$1a \quad 3b \quad 2c = 0$$

$$2a \quad 2b \quad 3c = 0$$

$$3a \quad 1b \quad 4c = 0$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c \text{ frei wählbar, } b = -\frac{1}{4}c \quad a = -3b - 2c = -\frac{3}{4}c - 2c = -\frac{5}{4}c$$

$$\text{z.B. } c = 4, b = -1, a = -5$$

$$(-5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Vektoren sind linear abhängig.

## 2.14 Bemerkung

Man kann auch für unendliche Mengen  $M \subseteq V$  lineare Unabhängigkeit definieren.

Jede endliche Teilmenge von  $M$  ist linear unabhängig. Zum Beispiel  $\{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$  linear unabhängig in  $K[x]$ .

## 2.15 Satz !!!

$V$   $K$ -VR,  $v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig

$$1. \Leftrightarrow \exists i : v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j v_j \text{ für geeignete } b_j \in K$$

$$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle_K$$

$$2. v_1, \dots, v_m \text{ linear unabhängig}$$

$$\Leftrightarrow \text{jedes } v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \text{ lässt sich als } v_1, \dots, v_m \text{ schreiben.}$$

$$3. \text{ Sind } v_1, \dots, v_m \text{ linear unabhängig und ist } V \neq \langle v_1, \dots, v_m \rangle_K, \text{ so sind } v_1, v_m, v \text{ linear unabhängig.}$$

*Beweis.* Wie in 0.11, aber  $v_1, \dots, v_m \in V$

□

## 2.16 Definition

Sei  $V$  endliche erzeugter  $K$ -VR.

Eine endliche Teilmenge  $B \subseteq V$  heißt *Basis* von  $V$ , falls

(1)  $V\langle B \rangle_K$

(2)  $B$  linear unabhängig

( $V = \{\sigma\} : \emptyset$  ist Basis von  $V$ )

## 2.17 Beispiel

a)  $e_1, \dots, e_n$  Basis  $K^n$  (kanonische Basis)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_5 :$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bilden keine Basis von } \mathbb{Z}_5^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_7 :$$

Lineare Unabhängigkeit:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Führt auf LGS für a,b:

$$1 \cdot a + 3 \cdot b = 0$$

$$2 \cdot a + 1 \cdot b = 0$$

Gauß-Algorithmus (funktioniert über jedem Körper  $K$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = 0, a + 3b = 0, a = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}_5} = \mathbb{Z}_7^2$$

$$\text{Sei } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^2$$

Gesucht sind  $a, b \in \mathbb{Z}_7$

Gauß:

$$\begin{aligned}
1 \cdot a + 3 \cdot b &= c \\
2 \cdot a + 1 \cdot b &= d \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 2 & 1 & d \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & d-2c \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & 4d-2c \end{pmatrix} \\
b = 4d - c &= 4d + 6c \\
a = c - 3b = 4c + 2d \\
\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= (4c + 2d) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (4d + 6c) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## 2.18 Satz (Existenz von Basen)

Sei  $V$  endliches Erzeugter  $K$ -VR. Dann enthält jedes endliche Erzeugendensystem von  $V$  eine Basis von  $V$ .

*Beweis.* Sei  $M \subseteq V$  endlich mit  $V = \langle M \rangle_K$ . Ist  $M$  linear unabhängig, so ist  $M$  Basis ✓

ist  $M$  linear abhängig, so existiert nach 2.15a)

$$v \in M \text{ mit } V = \langle M \rangle_K = \langle M \setminus \{v\} \rangle_K$$

Da  $M$  endlich, endet dieses Verfahren mit Basis □

## 2.19 Lemma

$V$  endlich erzeugter  $K$ -VR

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ . Sei  $\sigma \neq w \in V$ .

Dann  $w = \sum_{j=1}^n a_j v_j, a_j \in K$ .

Ist  $a_i \neq 0$ , so ist  $(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$  wieder eine Basis von  $V$

$$\text{Beweis. } w = \sum_{j=1}^n a_j v_j \Rightarrow a_i v_i = w - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j v_j$$

$$\Rightarrow v_i = a_i^{-1} (a_i v_i) = a_i^{-1} w + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i^{-1} a_j) v_j$$

$$v_i \in \langle (B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\} \rangle_K$$

$$V = \langle B \rangle_K = \langle B \cup \{w\} \rangle_K \stackrel{2.15}{=} \langle B \setminus \{v_i\} \cup \{w\} \rangle_K$$

Zeige  $(B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\}$  ist linear unabhängig:

$$\text{Angenommen } \sigma = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 c_j v_j + c w = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 c_i v_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 c a_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 (c_j + c a_j) v_j + c a_i v_i$$

$v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig

$\Rightarrow (1) c a_i = 0$  und

(2)  $c_j + c a_j = 0$  für alle  $j \neq i$

(1)  $c a_i = 0, a_i \neq 0 \Rightarrow c = 0$

(2)  $c_j = 0$  für alle  $i \neq j$ .

Fertig. □

## 2.20 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

(Ernst Steinitz, 1871-1928, Kiel)

$V$  endlich. erzeugter  $K$ -VR,  $B$  Basis von  $V$ ,  $M$  endliche linear unabhängige Teilmenge von  $V$ . Dann existiert  $C \subseteq B$  mit  $|C| = |M|$ , so dass  $(B \setminus C) \cup M$  Basis von  $V$  ist.

Insbesondere  $|M| \leq |B|$ .

*Beweis.* Sei  $|M| = k$

Induktions nach  $k$ .

$k = 0 \checkmark$

$k > 0$ . Sei  $M = \tilde{M} \cup \{w\}$ ,  $|\tilde{M}| = k - 1$

Induktionsvoraussetzung: Existiert  $\tilde{C} \subseteq B$  mit  $|\tilde{C}| = |\tilde{M}|$  und  $(B \setminus \tilde{C}) \cup \tilde{M}$  ist Basis von  $V$

$$w = \sum_{u \in B \setminus \tilde{C}} a_u u + \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$$

Mindestens eines der  $a_u$  ist  $\neq 0$ , denn sonst  $w = \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$ , also  $M = \tilde{M} \cup \{w\}$

linear abhängig  $\square$

Also sei  $a_i \neq 0$  für ein  $u \in B \setminus \tilde{C}$ .

Nach 2.19 ist  $(B \setminus C) \cup M$  Basis von  $V$  wobei  $C = \tilde{C} \cup \{w\}$ .

Fertig. □



## 2.21 Korollar

$V$  endlich erzeugte  $K$ -VR

- a) Je zwei Basen von  $V$  enthalten gleich viele Vektoren
- b) Jede linear unabhängige Teilmenge von  $V$  ist endlich
- c) (Basisergänzungssatz)  
Jede linear unabhängige Menge von Vektoren lässt sich zu Basis ergänzen.

*Beweis.* a)  $B, \tilde{B}$  Basen von  $V$ .

$$2.20: |B| \leq |\tilde{B}|$$

$$: |\tilde{B}| \leq |B|$$

Also  $|B| = |\tilde{B}|$ .

b) Angenommen  $V$  enthält unendlich linear abhängige Teilmenge  $M$ , Sei  $B$  Basis von  $V$ . Wähle  $M_0 \subset M$  mit  $M_0$  endlich,  $|M_0| > |B|$ .

Nach Voraussetzung ist  $M_0$  linear abhängig Widerspruch zu 2.20

c) Sei  $M$  linear unabhängige Teilmenge von  $V$ . Nach b) ist  $M$  endlich.

Sei  $B$  eine Basis von  $V$  2.20:  $\exists c \subseteq B, |c| = |M|$  so dass  $\underbrace{(B \setminus c)}_{\text{Basisergänzung}} \cup M$  Basis.  $\square$

## 2.22 Satz

$V$  endlich erzeugter  $K$ -VR,

$B \subseteq V$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $B$  ist Basis von  $V$
- (2)  $B$  ist maximal unabhängige Teilmenge von  $V$
- (3)  $B$  ist minimales Erzeugendensystem von  $V$  (d.h.  $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K \neq V$  für alle  $w \in B$ .)

*Beweis.* (2)  $\Rightarrow$  (1)

Angenommen  $\langle B \rangle_K \neq V$

Sei  $v \in V \setminus \langle B \rangle_K$ .

2.15c):  $B \cup \{v\}$  linear abhängig  $\nexists$ .  $\langle B \rangle_K = V$   $B$  ist Basis

(1)  $\Rightarrow$  (2): Angenommen  $B \subseteq C$ ,  $C$  linear unabhängig.

2.21  $c$  ist endlich.

2.20  $|c| \leq |B|$  Daher  $B = c$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1). Angenommen  $B$  ist linear abhängig

2.15a):  $\exists w \in B : V = \langle B \rangle_K = \langle B \setminus \{w\} \rangle_K \neq$

$B$  ist linear unabhängig also Basis.

(1)  $\Rightarrow$  (3). Angenommen  $\exists w \in B$  mit  $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K = V = \langle B \rangle_K$

2.15a):  $B$  ist linear abhängig  $\neq$

□

## 2.23 Definition

$V$   $K$ -VR.

a) Ist  $V$  endlich erzeugt,  $B$  ist Basis von  $V$ ,  $|B| = n$ , so hat  $V$  Dimension  $n$ ,  
 $\dim_K(V) = n$  (oder einfach  $\dim(V) = n$ )

b) ( $V$  heißt nicht endlich erzeugt, so heißt  $V$  *unendlich-dimensional*)  
 (Also endlich erzeugt = endlich-dimensional)

## 2.24 Korollar

$V$   $K$ -VR,  $\dim_K(V) = n$ ,  $B \subseteq V$ ,  $|B| = n$

a) Ist  $B$  linear unabhängig, dann ist  $B$  Basis.

b) Ist  $\langle B \rangle_K = V$ , dann ist  $B$  Basis

*Beweis:* Folgt aus 2.22

## 2.25 Beispiel

a)  $\dim_K(K^n) = n$ , da  $e_1, \dots, e_n$  Basis.

b)  $V = \mathbb{R}^4$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\begin{matrix} = u_1 & = u_2 \end{matrix} \quad \mathbb{R}$

$u_1, u_2$  sind linear unabhängig.

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nur für } a, b = 0$$

$\{u_1, u_2\}$  Basis von  $U$   $\dim_R(U) = 2$ .

Ergänze  $u_1, u_2$  zu Basis von  $V = \mathbb{R}^4$ :

*Erste Möglichkeit:*

$e_1, e_2, e_3, e_4$  kanonische Basis des  $\mathbb{R}^4$

$$U_1 = 1e_1 + 2e_2 + 0e_3 + 1e_4$$

2.19:  $U_1, e_3, e_4$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

$$U_2 = au_1 + be_2 + ce_3 + de_4 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \quad c = 1$$

2.19:  $u_1, u_2, e_3, e_4$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

*Zweite Möglichkeit:*

2.15c):

$v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig

$$v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle \Rightarrow v_1, \dots, v_m \text{ linear unabhängig. } U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_1 \notin U$  (1. Koordinate  $\neq$  4. Koordinate)

2.15c)  $U_1, U_2, e_1$  linear unabhängig.

$\langle u_1, u_2, e_1 \rangle = ?$

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a+c \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$e_2 \notin U$

2.15c):  $u_1, U_2, e_1, e_2$  linear unabhängig

2.24:  $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

**2.26 Satz**

$V$   $K$ -VR,  $\dim_K(V) = n$ .

a) Ist  $U$  Unterraum von  $V$ , so ist  $\dim_K(U) \leq n$ . Ist  $\dim_K(U) = n$ , so ist  $U = V$ .

b) (Dimensionenformel)

$U, W$  Unterräume von  $V$ , so gilt:

$A, B$  endliche

Mengen

$(|A \cup B| =$

$|A| + |B| - |A \cap B|)$

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

*Beweis.* a) Ergänze Basis von  $U$  zu Basis von  $V$ . (2.21c)

b) Basis von  $U \cup W \rightarrow$  Basis von  $U$

$\rightarrow$  Basis von  $w$  (WHK 9.23)

□

**2.27 Definition**

$V$   $K$ -VR,  $\dim_K(V) = n$ ,  $B = (v_1, \dots, v_n)$  geordnete von  $V$ .

Jedes  $v \in V$  hat eindeutige Darstellung  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad a_i \in K \quad 2.15b)$

$(a_1, a_n$  (in dieser Anordnung) heißen *Koordinaten* von  $V$  bezüglich  $B$ ) Insbesondere  $v_i$  hat Koordinaten  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

**2.28 Beispiel**

a)  $V = K^n, (e_1, \dots, e_n) = B$  kanonische Basis.

Koordinaten von  $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  bezüglich  $B: (a_1, \dots, a_n)$

*Kartesische Koordinaten*

(R. Decartes, 1596-1650)

b)  $V = \mathbb{Q}^3, B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$B$  ist geordnete Basis von  $V$ . (nachprüfen)

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  bezüglich  $B$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gauß Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.4 \end{pmatrix}$$

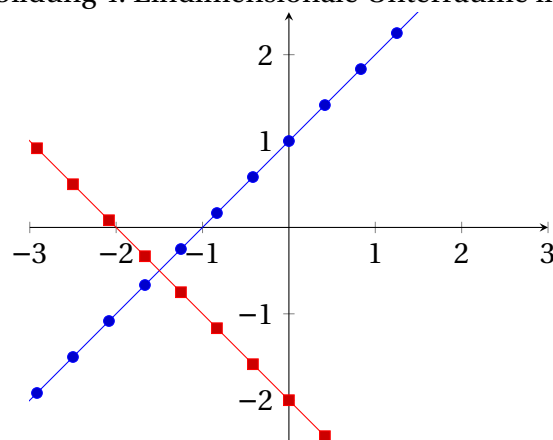
$$a_3 = -0,4$$

$$a_2 = 0,8$$

$$a_1 = 0,2$$

Koordinaten von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  bezüglich  $B \left( \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5} \right)$

Abbildung 4: Eindimensionale Unterräume im  $\mathbb{R}^2$



**2.29 Definition**

$V$   $K$ -VR,  $U$  Unterraum von  $V$ ,  $w \in V$ . Dann heißt  $w + U := \{w + u : u \in U\}$  *affiner Unterraum* von  $V$ .

( $w + U$  ist im allgemeinen kein Untervektorraum)

$$\dim(w + U) := \dim(U)$$

**2.30 Satz**

$V$   $K$ -VR,  $U, W$  Unterräume von  $V$ ,

- a)  $w + U$  ist Unterraum ①  
 $\Leftrightarrow W \in U$  ②  
 $\Leftrightarrow w + U = U$  ③
- b) Ist  $v \in w + U$ , so ist  $v + U = w + U$
- c) Sind  $v_1 + U, v_2 + W$  affine Unterräume, so ist entweder  $(v_1 + U) \cap (v_2 + W) = \emptyset$  oder es existiert  $v \in V$  mit  $(v_1 + U) \cup (v_2 + W) = v + (U \cup W)$  affiner Unterraum.

*Beweis.* ③  $\Rightarrow$  ① ✓

a) ①  $\Rightarrow$  ②

$$w + U \text{ Unterraum} \Rightarrow \sigma \in w + U$$

$$\Rightarrow \exists u \in U \text{ mit } w + u = \sigma$$

$$\Rightarrow w = -u \in U$$

②  $\Rightarrow$  ③:  $w \in U, w + U \subseteq U$  (da  $U$  Unterraum)

$$\text{Sei } u \in U. \text{ Dann } u - w \in U \quad u = w + (u - w) \in w + U$$

b)  $v \in w + U, v = w + u$  für ein  $u \in U$

$$v + U = w + \underbrace{u + U}_{=U \text{ nach a)}} = w + U$$

c) Angenommen  $(v_1 + U) \cup (v_2 + W) \neq \emptyset$

$$\text{Sei } v \in (v_1 + U) \cup (v_2 + W)$$

$$\text{Nach b) } v + U = v_1 + U$$

$$v + W = v_2 + W$$

$$\begin{aligned} (v_1 + U) \cup (v_2 + W) &= (v + U) \cup (v + W) \\ &= v + (U \cap W) \end{aligned}$$

$$\supseteq \checkmark$$

$$\subset x \in (v + U) \cup (v + W), x = v + u = v + w, u \in U, w \in W$$

$$u - w \in U \cap W.$$

$$x = v + u = v + (U \cap W)$$

□

### 2.31 Bemerkung

affine Unterräume:

spezielle Rolle von  $\sigma$  ist aufgehoben. Zur Beschreibung eines  $x \in K^n$  kann man jeden Punkt  $p$  als „Nullpunkt“ wählen und dann die Koordinaten von  $x$  bezüglich einer nach  $p$  „verschobenen“ Basis berechnen.  $p$  hat Koordinaten  $(p_1, \dots, p_n)$  bezüglich Basis  $v_1, \dots, v_n$

Ursprüngliche Koordinatensystem I :  $\sigma, v_1, \dots, v_n$

Neues Koordinatensystem II:  $:p, v_1 + p, \dots, v_n + p$

$x$  hat Koordinaten  $(a_1, \dots, a_n)$  bezüglich I

$\Rightarrow$  Koordinaten von  $x$  bezüglich II =  $(a_1 - p_1, \dots, a_n - p_n)$

= Koordinaten von  $x - p$  bezüglich I

$x$  hat Koordinaten  $(a'_1, \dots, a'_n)$  bezüglich II

$\Rightarrow x$  hat Koordinaten  $(a'_1 + p_1, \dots, a'_n + p_n)$  bezüglich I. (Robotik)

### 2.32 Bemerkung

a) In Mathe II:

$x \times m$  über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Das geht auch bei den Körpern  $K$ .

Addition, Multiplikation mit Skalaren, Matrixmultiplikation werden analog definiert.

Es gelten die gleichen Rechenregeln wie in (Mathe II, 9.5 [www.ffgti.org](http://www.ffgti.org))

b) In Mathe II, wurden Matrizen verwendet zur Beschreibung von LGS  $\begin{matrix} A \\ m \times n \end{matrix} x =$

$\begin{matrix} b \\ n \times 1 \end{matrix} x =$

Analog: LGS über beliebigen Körpern  $K$ . GaußAlgorithmus funktioniert analog.

$$(a_1, \dots, a_n), a_1 \neq 0 \\ \rightarrow (1, a_1^{-1}, a_2, \dots)$$

(K Körper!)

**2.33 Satz**a) Die Menge der Lösungen eines *homogenen* LGS.

$$A \cdot x = 0$$

$$(A \in \mathcal{M}_{n,m}(K), x \in K^m \\ 0 \text{ ist Nullvektor in } K^n)$$

b) Ist das *inhomogene* LGS

$$A \cdot x = b$$

lösbar und ist  $x_0 \in K^n$  eine spezielle Lösung (d.h.  $A \cdot x_0 = b$ ), so erhält man alle Lösungen von  $A \cdot x = b$  durch  $\{x_0 + y : Ay = 0\}$ ,  $y =$  Zugehöriges homogenes LGS.

Ist  $U$  der Lösungsraum von  $Ax = 0$ , so ist die Lösungsmenge von  $Ax = B$  gerade der affine Unterraum  $x_0 + U$  von  $K^n$

*Beweis.* a) Folgt aus Rechenregeln für Matrizen: $x_1, x_2 \in K^m$  Lösungen von  $A \cdot x = 0$ .

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$$

 $x_1 + x_2$  Lösung. $a \in K$ .

$$A(a \cdot x_1) = a \cdot (Ax_1) = a \cdot 0 = 0$$

 $a \cdot x_1$  Lösung.Null-Lösung existiert. b)  $Ax_0 = b$ . Sei  $y \in K^m$  mit  $Ay = 0$ .

$$A \cdot (x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$$

 $x_0 + y$  ist Lösung von  $Ax = b$ Zeige: Jede Lösung von  $Ax = b$  ist von der Form  $x_0 + y$  für ein  $y$  mit  $Ay = 0$ .Sei  $x$  Lösung von  $Ax = b$ .



$$x = x_0 + (x - x_0)$$

$$A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$$

□

## 2.34 Beispiel

gegebenes LGS:

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & & x_4 & = 1 \end{array}$$

Über  $\mathbb{Q}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 1 & \end{pmatrix}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 1 & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

 $x_3, x_4$  Frei wählbar.

Zugehöriges homogenes System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 1 & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge = Unterraum.

Basis des Lösungsraum:

Setze die frei wählbaren  $x_4, x_3$ .

- $x_4 = 1, x_3 = 0 \rightsquigarrow$  Lösung  $\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ** \\ ** \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $x_4 = 0, x_3 = 1 \rightsquigarrow$  Lösung

Jede Lösung  $d \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Lösungsraum vom zugehörigen homogenen LGS:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

### 3 Lineare Abbildungen

#### 3.1 Definition

$V, W, K$ -VR

a)  $\alpha : V \longrightarrow$  heißt ( $K$ -) *lineare Abbildung* (oder *Vektorraum-Homomorphismus*)

falls:

$$\text{Additivität} \quad \leftarrow (1) \quad \alpha(u + v) = \alpha(u) + \alpha(v) \text{ für alle } u, v \in V$$

$$\text{Homogenität} \quad \leftarrow (2) \quad \alpha(kv) = k\alpha(v) \text{ für alle } k \in K, v \in V$$

#### 3.2 Bemerkung

$\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung.

a)  $\alpha(\sigma) = \sigma$

b)  $\alpha\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i \alpha(v_i)$

*Beweis.* a)  $\alpha(\sigma) = \alpha(\sigma + \sigma) = \alpha(\sigma)$

b) Definition + Induktion nach n. □

#### 3.3 Beispiel

a) Nullabbildung  $\alpha : V \rightarrow W$

$$\alpha(v) = 0 \text{ für alle } v \in V$$

b)  $c \in K$

$$\alpha : V \rightarrow V, \alpha(v) = c \cdot v \text{ lineare Abbildung } c = 1 : id_v$$

$$\text{c) } \zeta : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - x_3 \end{cases}$$

Spiegelung an der  $\{x_1, x_2\}$ -Ebene in  $\mathbb{R}^3$

$$\text{d) } \alpha = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \rightarrow x_1^2 \end{cases}$$

nicht linear

### 3.4 Satz

Sei  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ .

Definiere  $\alpha : K^n \rightarrow K^m$  (Spaltenvektor)

durch  $\alpha(x) = A \cdot x \in K^m$  für alle  $x \in K^n$

Dann ist  $\alpha$  lineare Abbildung

*Beweis.* folgt aus Rechenregeln für Matrizenmultiplikation.:

$$\begin{aligned} \alpha(x+y) &= A(x+y) = Ax + Ay \\ &= \alpha(x) + \alpha(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(k \cdot x) &= A(kx) = k \cdot (Ax) \\ &= k\alpha(x) \end{aligned}$$

□

Beispiel aus 3.3 a)-c)

- $V = K^n$  Nullabbildung  $K^n \rightarrow K^m$

Von der Form in 3.4 mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  Nullmatrix

- $\alpha = \begin{cases} K^n & \rightarrow K^n \\ x & \mapsto cx (c \in K) \end{cases}$

3.4 mit  $A = \begin{pmatrix} c & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c \end{pmatrix}$

- Spiegelung aus 3.3c)

3.4 mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

*Später: Alle linear Abbildung.  $K^n \rightarrow K^m$  sind von der Form 3.4*

### 3.5 Satz

$U, V, W$   $K$ -VR.

- a)  $\alpha, \beta : V \rightarrow W$  linear so *auch*  $\alpha + \beta$  (definiert durch  $(\alpha + \beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v) \forall v \in V$ ),  
und  $k \cdot \alpha$  (definiert durch  $(k \cdot \alpha)(v) := k \cdot \alpha(v) \forall v \in V$  linear von  $V$  nach  $W$ )
- b)  $\alpha : V \rightarrow W, \gamma : W \rightarrow U$  linear. so auch  $\gamma \circ \alpha : V \rightarrow U$  linear A (oft  $\gamma \alpha$  statt  $\gamma \circ \alpha$ )

*Beweis.* a) ADDITIVITÄT:

$$\begin{aligned} u, v \in V \\ & (\alpha + \beta)(u) + (\alpha + \beta)(v) \\ &= \alpha(u) + \beta(u) + \alpha(v) + \beta(v) \\ &= \alpha(u) + \alpha(v) + \beta(v) + \beta(u) \\ &= \alpha(u + v) + \beta(u + v) \\ &= (\alpha + \beta)(u + v) \end{aligned}$$

HOMOGENITÄT:

$$\begin{aligned} v \in V \quad k \in K \\ & (\alpha + \beta)(kv) \\ &= (k\alpha + k\beta)(v) \\ &= k(\alpha + \beta)(v) \end{aligned}$$

- b)  $U, V, W$   $K$  Vektorräume

ADDITIVITÄT:

$$\begin{aligned} u, v \in V \\ & (\gamma \circ \alpha)(u) + (\gamma \circ \alpha)(v) \\ &= \gamma(\alpha(u)) + \gamma(\alpha(v)) \\ &= \gamma(\alpha(u) + \alpha(v)) \\ &= \gamma(\alpha(u + v)) \\ &= (\gamma \circ \alpha)(u + v) \end{aligned}$$

HOMOGENITÄT:

$$\begin{aligned}
v \in V \quad k \in K \\
& (\alpha \circ \gamma)(kv) \\
&= \gamma(\alpha(kv)) \\
&= \gamma(k\alpha(v)) \\
&= k\gamma(\alpha(v)) \\
&= k(\gamma \circ \alpha)(v)
\end{aligned}$$

□

### 3.6 Satz

$\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung

- a) Ist  $U$  Unterraum von  $V$ , so ist  $\alpha(U) := \{\alpha(u), u \in U\}$  Unterraum von  $W$ .  
 Insbesondere ist  $\alpha(V)$ , *Bild von  $\alpha$* , Unterraum von  $W$ ,
- b) Ist  $U$  endlich-dimensional, so auch  $\alpha(U)$  und es gilt  $\dim(\alpha(U)) \leq \dim(U)$

*Beweis.* a),  $\alpha(U_1), \alpha(U_2) \in \alpha(U)$

dass heißt  $u_1, u_2 \in U$ , so  $\alpha(U_1) + \alpha(U_2) = \alpha(u_1 + u_2) \in \alpha(U)$

$k \in K$

$k \cdot \alpha(U_1) = \alpha(ku_1) \in \alpha(U)$

b) Sei  $u_1, \dots, u_k$  Basis von  $U$

$u \in U, u = \sum_{i=1}^k c_i u_i, c_i \in K$

$\alpha(u) = \sum_{i=1}^k c_i \alpha(u_i)$

Also :  $\alpha(U) = \langle \alpha(u_1), \dots, \alpha(u_k) \rangle_K$

Nach ??  $\{\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_k)\}$

$\dim(\alpha(U)) \leq k = \dim(U)$

□

### 3.7 Definition

$V, W$   $K$ -VR,  $V$  endlich dimensional.  $\alpha : V \rightarrow W$  linear Abbildung.

Dann  $\dim(\alpha(V)) =: \text{rg}(\alpha)$ , *Rang von  $\alpha$*

**3.8 Satz**

$V, W$   $K$ -VR,  $\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung

a)  $\ker(\alpha) := \{v \in V : \alpha(v) = \sigma\},$

*Kern von  $\alpha$ , ist Unterraum von  $V$ .*

b)  $\alpha$  injektiv  $\Leftrightarrow \ker(\alpha) = \{\sigma\}$

c) Ist  $\alpha$  bijektiv, so ist die Umkehrabbildung  $\alpha^{-1} : W \rightarrow V$  bijektiv *und linear*

*Beweis.* a)  $v_1, v_2 \in \ker(\alpha)$

$$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$$

$$= \sigma + \sigma = \sigma$$

Also:  $v_1 + v_2 \in \ker(\alpha)$

$$\alpha(k \cdot v_1) = k \cdot \alpha(v_1) = k \cdot \sigma = \sigma$$

Also  $k v_1 \in \ker(\alpha)$  b)  $\Rightarrow$ :  $\checkmark$ , denn falls  $\sigma \neq v \in \ker(\alpha)$  so  $\alpha(v) = \sigma = \alpha(\sigma)$ ,  $\alpha(\sigma), \alpha$  nicht injektiv.  $\nexists$

$\Leftarrow$ : Angenommen  $v_1, v_2 \in V$  mit  $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$ .

Zu zeigen:  $v_1 = v_2$ .

$$\sigma = \alpha(v_1) - \alpha(v_2)$$

$$= \alpha(v_1 - v_2)$$

$\alpha$  linear.

$$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker(\alpha) = \{\sigma\}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = \sigma, v_1 = v_2.$$

c) Zu zeigen:  $\alpha^{-1}$  ist linear.

Seien  $w_1, w_2 \in W$ .

$$\text{Zeige } \alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^{-1}(w_1) + \alpha^{-1}(w_2)$$

$$\alpha \text{ bijektiv} \Rightarrow v_1, v_2 \in V \text{ mit } \alpha(v_1) = w_1, \alpha(v_2) = w_2. v_1 = \alpha^{-1}(w_1), v_2 = \alpha^{-1}(w_2).$$

$$\alpha^{-1}(w_1 + w_2) = \alpha^{-1}(\alpha(v_1) + \alpha(v_2)) = v_1 + v_2 = \alpha^{-1}(w_1) + \alpha^{-1}(w_2)$$

Homogenität analog. □

### 3.9 Beispiel

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \text{ ist lineare Abbildung, da}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad 3.4$$

$$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bild von  $\alpha(e_1), \alpha(e_2), \alpha(e_3)$  linear abhängig.

$$\alpha(\mathbb{R}^3) = \langle \alpha(e_1), \alpha(e_2) \rangle$$

$$\text{rg} = 2$$

$U = \langle e_2, e_3 \rangle$  2-dimensional Unterraum von  $\mathbb{R}^3$

$\alpha(U) = \langle \alpha(e_2) \rangle = \langle e_3 \rangle$  1-dimensional.

$$\ker \alpha = ?$$

$$\text{Suche alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{LGS: } x_1 = 0$$

$$2x_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\ker(\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2c \\ c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ 1-dimensional.}$$

**3.10 Satz**

$V, W$   $K$ -VR,  $\dim(V) = n$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sei Basis von  $V$ .

$w_1, \dots, w_n \in W$  beliebig (nicht notwendig verschieden). Dann existiert genau eine lineare Abbildung  $\alpha : V \rightarrow W$  mit  $\alpha(v_i) = w_i, i = 1, \dots, n$ , nämlich

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) := \sum_{i=1}^n c_i w_i, (\star)$$

Also: kennt man die Bilder einer Basis so kennt man die lineare Abbildung vollständig.

*Beweis.* Die in  $(\star)$  definiert Abbildung  $\alpha$  ist linear und es gilt  $\alpha(v_i) = w_i$  für  $i = 1 \dots n$  (Nachrechnen)

$\alpha$  eindeutig:

Angenommen  $\beta : V \rightarrow W$  linear mit  $\beta(v_i) = w_i$ , so gilt  $\beta\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i \beta(v_i) =$

$$\sum_{i=1}^n c_i w_i = \alpha\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right)$$

$$\alpha = \beta$$

□

Beispiel:

$$V = W = \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = ?$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -51 \\ 9 \end{pmatrix}$$



### 3.11 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^n, \alpha : V \rightarrow V$$

Drehung um Winkel  $\phi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ , um Nullpunkt (entgegen Uhrzeigersinn).

$\alpha$  ist linear Abbildung (elementar geometrisch).

$$\alpha(e_1) = \alpha \phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\alpha(e_2) = \alpha \phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

3.10

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(x) = x_1 \alpha(e_1) + x_2 \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) x_1 - \sin(\phi) x_2 \\ \sin(\phi) x_1 + \cos(\phi) x_2 \end{pmatrix}$$

Drehmatrix

### 3.12 Satz

$\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung:

$\dim(V) = n$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ .

a)  $\alpha$  ist injektiv  $\Rightarrow \{\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)\}$  ist linear unabhängig.

b)  $\alpha$  surjektiv  $\Leftrightarrow W = \langle \alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n) \rangle_K$

c)  $\alpha$  bijektiv  $\Leftrightarrow \{\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)\}$  Basis von  $W$

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$

Zeige  $\sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) = \sigma$

$$\Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i \in \ker(\alpha) = \{\sigma\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

$$\Leftarrow: \text{Zeige } \ker(\alpha) = \{\sigma\}$$

Angenommen  $\sum_{i=1}^n c_i v_i \in \ker(\alpha) \Rightarrow \alpha(\sum_{i=1}^n c_i v_i) = 0$   
 $\stackrel{\alpha \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) \stackrel{\alpha(v_1) \dots \alpha(v_n) \text{ linear unabhängig}}{=} 0$   
 $c_1 = \dots = c_n = 0$   
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i v_i = 0 \checkmark$  b)  $\alpha(V) = \langle \alpha(v_1) \dots \alpha(v_n) \rangle$  Behauptung folgt. c) Folgt aus a) und b)  $\square$

### 3.13 Korollar

Seien  $V, W$   $K$ -VR,  $\dim(V) = \dim(W)$ .

Dann sind  $V$  und  $W$  isomorph.

*Beweis.* Sei  $v_1, \dots, v_n$  Basis von  $V$ ,  $w_1, \dots, w_n$  Basis von  $W$ . Nach 3.10 existiert genau eine lineare Abbildung  $\alpha(v_i) = w_i$ . Nach 3.12c) ist  $\alpha$  bijektiv  $V \cong W$ .  $\square$

### 3.14 Korollar – Wichtigster Spezialfall

$V = n - \dim$ . VR über  $K$ ,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  geordnete Basis von  $V$ . Dann ist die Abbildung.

$$\kappa_{\mathcal{B}} : \begin{cases} V & \rightarrow K^n \text{ Zeilenvektor} \\ \sum_{i=1}^n c_i v_i & \mapsto (c_1, \dots, c_n) \end{cases}$$

(Koordinatenabbildung bezüglich  $\mathcal{B}$ ) ein Isomorphismus. Dass heißt  $V \cong K^n$ .

*Beweis.*

$$\kappa_{\mathcal{B}} = (0, \dots, 0, \underset{\downarrow i}{1}, 0, \dots, 0)$$

$v_i$  werden auf die kanonische Basis des  $K^n$  abgebildet.  $\kappa_{\mathcal{B}}$  ist Isomorph  $\square$

### 3.15 Satz (Dimensionsformel)

$V$  endlich dimensional.  $K$ -VR  $\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung.

$$\begin{aligned} \text{Dann: } \dim(V) &= \text{rg}(\alpha) + \dim(\ker(\alpha)) \\ &= \dim(\alpha(V)) + \dim(\ker(\alpha)) \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $u_1, \dots, u_k$

Basis von  $\ker(\alpha)$  Basisergänzungssatz 2.21

Ergänze zu Basis  $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$  von  $V$ . Sei  $U = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle_K$  Unterraum von  $V$ .

$$\ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}:$$

Angenommen  $V \in \ker(\alpha) \cap U$

$$v = \sum_{i=1}^k c_i u_i = \sum_{i=k+1}^n c_i u_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k c_i u_i + \sum_{i=k+1}^n (-c_i) u_i = \sigma$$

$$c_1 \dots c_n = 0$$

□

$\ker(\alpha) \cap U = \{\sigma\}$ , also  $\alpha|_U$  ist injektiv, dass heißt  $\dim(V) = \dim(\alpha(U))$

$$v \in V, v = \sum_{i=1}^k c_i u_i + \sum_{i=k+1}^n c_i u_i$$

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^k c_i \alpha(u_i) + \sum_{i=k+1}^n c_i \alpha(u_i) \in \alpha(U)$$

$$V = \ker(\alpha) + U$$

$$\dim(v) = \dim(\ker(\alpha)) + \dim(U) - \dim(\ker(\alpha) \cap U)$$

$$= \dim(\ker(\alpha)) + \dim(\alpha(U)) = \dim(\ker(\alpha)) + \dim(\alpha(V)) = \dim(\ker(\alpha)) + \text{rg}(\alpha)$$

### 3.16 Korollar

$V, W$  endlich-dimensionaler  $K$ -VR mit  $\dim(V) = \dim(W)$ ,  $\alpha : V \rightarrow W$  linear.

Dann gilt:

$\alpha$  ist injektiv  $\Rightarrow \alpha$  ist surjektiv  $\Rightarrow \alpha$  ist bijektiv.

*Beweis.*

$$\alpha \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow \alpha(V) = W$$

$$\Leftrightarrow \dim(\alpha(V)) = \dim(W) = \dim(V)$$

$$\stackrel{3.15}{\Leftrightarrow} \dim(\ker(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \{\sigma\} \Leftrightarrow \alpha \text{ ist injektiv}$$

□

## 4 Der Rang einer Matrix und lineare Gleichungssysteme

### 4.1 Definition

Der *Zeilenrang* einer Matrix  $A$  über Körper ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen in  $A$ . Das heißt sind  $z_1, \dots, z_m$  die Zeilen von  $A$  so ist Zeilenrang von  $A = \dim = (\langle z_1, \dots, z_m \rangle)$

Analog : Spaltenrang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Spaltenrang von  $A = 2$

Zeilenrang von  $A = 2$

### 4.2 Satz

Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der Zeilenrang einer Matrix nicht.

(Analog Spaltenumformung/Spaltenrang)

*Beweis.*  $\dim(\langle z_1, \dots, a \cdot z_i, \dots, z_m \rangle, a \neq 0$   
 $\langle z_1, \dots, z_m \rangle = \langle z_1, \dots, z_i + a z_j, \dots, z_m \rangle, i \neq j$

□

### 4.3 Bemerkung

Zeilenrangbestimmung von  $A$ :

Bringe  $A$  mit Gauß auf Zeilenstufenform (ändert Zeilenrang nicht)

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\star \neq 0$

Zeilenrang = Anzahl der von Nullzeilen  
verschiedenen Zeilen

#### 4.4 Korollar

Sei  $Ax = b$  ein LGS über  $K$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ ,  $x \in K^n$ ,  $b \in K^m$  ( $m$  Gleichungen,  $n$  Unbekannte)

- a)  $Ax = b$  ist genau dann lösbar, wenn Zeilenrang von  $A =$  Zeilenrang von  $(A \mid b)$
- b)  $Ax = b$  ist genau dann eindeutig lösbar, wenn: Zeilenrang von  $A =$  Zeilenrang von  $(A \mid b) = n$  (= Anzahl der Unbekannten)
- c) Dimension des Lösungsraums von  $Ax = 0 = n -$ Zeilenrang von  $A$ .

#### 4.5 Satz

Sei  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ ,

$$\alpha = \begin{cases} K^n & \rightarrow K^m \\ x & \mapsto Ax \end{cases}$$

$\alpha$  ist lineare Abbildung und es gilt:

$\text{rg}(\alpha) = \text{Spaltenrang von } A$ .

*Beweis.*  $\alpha(K^n) = \langle \alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n) \rangle$

$e_1, \dots, e_n$  kanonische Basis von  $K^n$

$$\alpha(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 i \\ a_2 i \\ \vdots \\ a_m i \\ = \end{pmatrix} \text{ i-te Spalte von } A =: s_i$$

$\text{rg} = \dim(\alpha(K^m)) = \dim(\langle \alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n) \rangle) = \text{Spaltenrang von } A,$

□

## 4.6 Satz und Definition

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ .

Dann ist Zeilenrang von  $A = \text{Spaltenrang von } A$ .

Diese gemeinsame Zahl heißt *Rang von A*,  $\text{rg}(A)$ .

*Beweis.* Betrachte homogenes LGS

$$Ax = 0 \quad (\star)$$

Dimension des Lösungsraumes von  $(\star) = \text{Dimension von } \ker(\alpha), \alpha \text{ in 4.5}$

‘Satz (Dimensionsformel)’ on page 74  $\dim(\ker(\alpha)) = n - \text{rg}(\alpha) = n - \text{Spaltenrang von } A$ . Korollar  $\dim \text{Lösungsraum von } Ax = 0 = n - \text{Zeilenrang von } A$

□

## 4.7 Korollar

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ .

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$$

*Beweis.* Zeilenrang von  $A = \text{Spaltenrang von } A^t$

□

## 4.8 Satz

Sei  $V$  endlich dimensionaler VR

$\mathcal{B}$  geordnete Basis von  $V \quad u_1, \dots, u_m \in V$  beliebig.

Seien  $K_{\mathcal{B}}(u_i)$  die Koordinatenvektoren von  $u_i$  bezüglich  $\mathcal{B}$  (Zeilenvektoren).

Dann gilt :  $\dim(\langle u_1, \dots, u_m \rangle) = \text{rg} \begin{pmatrix} K_{\mathcal{B}}(u_1) \\ \vdots \\ K_{\mathcal{B}}(u_m) \end{pmatrix}$  lässt sich durch Gauß Algorithmus bestimmen.

*Beweis.* Sei  $U = \langle u_1, u_m \rangle$

$K_{\mathcal{B}} : V \rightarrow K^n$  wie in 3.14.

$K_{\mathcal{B}}$  Isomorphismus :  $\dim(U) = \dim(K_{\mathcal{B}}) = \text{Zeilenrang von} \begin{pmatrix} K_{\mathcal{B}}(u_1) \\ \vdots \\ K_{\mathcal{B}}(u_m) \end{pmatrix}$   $\square$

## 4.9 Beispiel

$V$   $\mathbb{R}$ -VR aller Polynome von Grad  $\geq 3$ ,  $\dim(V) = 4$ ,

Basis  $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ ,  $U = \langle 1 + 6x^2 + x^3, 2x - 2x^2 + 3x^3, 3x + x^2, 2 + x15x^2 - x^3 \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 15 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 4 & -4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rand der Matrix = 3,  $\dim(U) = 3$

## 5 Matrizen und lineare Abbildungen

### 5.1 Definition

Seien  $V, W$   $K$ -VR,  $\mathcal{B} = (v_1, v_n)$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  geordnete Basen von  $V$  bzw.  $W$ .

Sei  $\alpha : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Nach 3.10 ist  $\alpha$  eindeutig bestimmt durch

$\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)$

$$(v = \sum_{i=1}^n b_i v_i \Rightarrow \alpha(v) = \sum_{i=1}^n b_i \alpha(v_i))$$

Stelle  $\alpha(v_1) \dots \alpha(v_n) \in W$  jeweils als Linearkombination von  $w_1, \dots, w_m$  dar,

$$\alpha(v_1) = a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m$$

$$\alpha(v_2) = a_{12} w_1 + \dots + a_{m2} w_m$$

$\vdots$

$$\alpha(v_n) = a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}v_m$$

(Ordnung der Indizes beachten!)

Dann heißt die  $m \times n$ - Matrix

$$A^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die *Darstellungsmatrix* von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ . (In den Spalten stehen die Koordinaten von  $\alpha(v_1)$  bezüglich  $\mathcal{C}$ )

(Abgekürzte Schreibweise  $A_\alpha$ , falls  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  aus Kontext klar).

Falls  $V = W$  und  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ , so  $A^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} := A_\alpha^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$

## 5.2 Bemerkung

a) Bei Kenntnis von  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  ist  $\alpha$  durch  $A_\alpha^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  eindeutig bestimmt:

Sei  $\sigma \in V$

## 5.3 Beispiel

a)  $V = W = \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha$  Drehung um  $\sigma$  mit Winkel  $\phi$  (entgegen Uhrzeigersinn)

Nach Beispiel:

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = (e_1, e_2)$$

$$\alpha(e_1) = \cos(\phi)e_1 + \sin(\phi)e_2, \quad \alpha(e_2) = -\sin(\phi)e_1 + \cos(\phi)e_2$$

(3.11)

$$A_\alpha^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

b) Nullabbildung.

$$\beta: \begin{cases} V \rightarrow W \\ V \rightarrow \sigma \end{cases}$$

hat bezüglich aller Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  Nullmatrix als Darstellungsmatrix

c)  $V, \mathcal{B}, id_x$

$$A_{id_x}^{\mathcal{B}} = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



d)  $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2), \mathcal{C} = (e_2, e_1)$

$$A_{id_x}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e)  $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2)$

$\sigma$  Spiegelung an  $\langle e_1 \rangle$ , das heißt  $\varsigma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$A_{\sigma}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\sigma}^{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

## 5.4 Satz

$v, w, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha : V \rightarrow W$  linear.

$\kappa_{\mathcal{C}}(\alpha(v))^t = A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$  Spaltenvektoren.

*Beweis folgt aus Bemerkung.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Basis } \mathcal{B} & \xrightarrow{\alpha} & \text{Basis } \mathcal{C} \\ V & & W \\ (\kappa_{\mathcal{B}})\downarrow & & \downarrow(\kappa_{\mathcal{C}}) \\ K^n & \xrightarrow{\text{Multi. mit Matrix } A_{\alpha}} & K^n \end{array}$$

## 5.5 Beispiel

$V, W$   $\mathbb{R}$ -VR,  $\dim(v) = 4$ ,

$\dim(w) = 3, \mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3), \alpha : V \rightarrow W$ .

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V = 5v_1 - 6v_2 + 7v_3 - 2v_4$$

$$\alpha(v) = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$5.4: \alpha(v) = 7w_1 + w_2 - w_3$$

## 5.6 Korollar

Jede lineare Abbildung  $K^n \rightarrow K^m$  ist von der Form  $\alpha(x) = A \cdot x$  für eine  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ .

Es ist  $A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ , wobei  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  die kanonischen Basen von  $K^n$  bzw.  $K^m$  sind.

$$\text{Beweis. } x \in K^m \quad \kappa_{\mathcal{B}}(x)^t = x \quad \kappa_{\mathcal{C}}(\alpha(x))^t = \alpha(x)$$

Behauptung folgt aus 5.4

□

## 5.7 Satz

$\alpha, \beta$  lineare Abbildung  $U \rightarrow V$

$\gamma$  lineare Abbildung  $V \rightarrow W$ .

$\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  geordnete Basen von  $U, V, W$

$$\begin{aligned} \text{a) } A_{\alpha+\beta}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} &= A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} + A_{\beta}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \\ A_{k\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} &= k \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \quad (k \in K) \end{aligned}$$

$$\text{b) } A_{\gamma \circ \alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = A_{\gamma}^{\mathcal{C}, \mathcal{D}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \quad (\text{Reihenfolge beachten}). \text{ Beweisen: a) nachrechnen}$$

Matrix  
Mult.

$$\begin{aligned} \text{c) } \mathcal{B} &= (u_1, \dots, u_l) \\ \mathcal{C} &= (v_1, \dots, v_m) \quad \mathcal{D} = (w_1, \dots, w_n) \\ A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} &= (a_{ij}) \quad n \times l\text{-Matrix} \\ A_{\gamma}^{\mathcal{C}, \mathcal{D}} &= (b_{ij}) \quad n \times m\text{-Matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ \alpha)(u_i) &= \gamma(\alpha(u_i)) \\
&= \gamma\left(\sum_{j=1}^m a_{ji} v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^m a_{ji} \left(\sum_{k=1}^n b_{kj} w_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m b_{kj} a_{ji}\right)}_{\text{Koeff}(k,i)} w_k
\end{aligned}$$

## 5.8 Beispiel

$$U = V = W = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = (e_1, e_2)$$

$\alpha$  Drehung um  $\phi$ ,

$\beta$  Drehung um  $\psi$  (jeweils um 0)

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$A_{\beta}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$\beta \circ \alpha$  Drehung um  $\phi + \psi$

$$A_{\beta \circ \alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \psi) & -\sin(\phi + \psi) \\ \sin(\phi + \psi) & \cos(\phi + \psi) \end{pmatrix}$$

Nach 5.7:

$$\alpha^{\beta \circ \alpha}() = A_{\beta}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi) & -\sin(\phi) \cos(\psi) - \cos(\phi) \sin(\psi) \\ \cos(\phi) \sin(\psi) + \sin(\phi) \cos(\psi) & -\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\cos(\phi + \psi) = \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi)$$

$$\sin(\phi + \psi) = \sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\psi)$$

(Additionstheoreme der Trigonometrie)

## 5.9 Definition

Sei  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  ( $n \times n$ -Matrix),

$A$  heißt *invertierbar*, falls  $A^{-1} \in \backslash(K)$  existiert (*Inverse, inverse Matrix* zu  $A$ ). mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \text{ Bemerkung:}$$

Gilt  $A \cdot A^{-1} = E_n$  so auch  $A^{-1} \cdot A = E_n$  (und umgekehrt). (Folgt aus 5.10 und 3.16)

**5.10 Korollar**

$\dim_{\kappa}(V) = n$ ,  $\mathcal{B}$  geordnete Basis von  $V$ ,  $\alpha : V \rightarrow V$  linear. Dann gilt:

$\alpha$  invertierbar (d.h. bijektiv)  $\Leftrightarrow A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$  invertierbar.

Dann:  $A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}}$

Dann:  $A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} = (A_{\alpha}^{\mathcal{B}})^{-1}$ .

*Beweis:*

$$\Rightarrow: A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} \stackrel{5.7}{=} A_{\alpha \circ \alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} = A_{id_V}^{\mathcal{B}} = E_n$$

$$A_{\alpha^{-1}}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = E_n \text{ analog.}$$

$\Leftarrow$ : Es existiert inverse Matrix  $B$  zu  $A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$ , dass heißt  $A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot B = B \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = E_n$

Dann  $B = A_{\beta}^{\mathcal{B}}$  für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\beta : V \rightarrow V$ . (5.2).

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\beta}^{\mathcal{B}} = A_{\beta}^{\mathcal{B}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = E_n$$

$$A_{\alpha \cdot \beta}^{\mathcal{B}} = A_{\beta \cdot \alpha}^{\mathcal{B}} = E_n$$

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n). \quad (\alpha \cdot \beta)(v_i) = 1 \cdot v_i = v_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\alpha \circ \beta = id_V$$

$$\text{Analog } \beta \circ \alpha = id_V$$

$$\beta = \alpha^{-1}$$

**5.11 Satz**

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n.$$

(Dass heißt Zeilen/Spalten von  $n \times n$  sind linear unabhängig).

*Beweis.* Definition:  $\alpha : K^n \rightarrow K^n$  durch  $\alpha(x) = A \cdot x$

$A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$  bezüglich der kanonischen Basis  $\mathcal{B}$  von  $K^n$ .

$$A \text{ invertierbar} \stackrel{5.10}{\Leftrightarrow} \alpha \text{ invertierbar} \stackrel{3.16}{\Leftrightarrow} \text{rg}(\alpha) = n \stackrel{4.5/4.6}{\Leftrightarrow} \text{rg}(A) = n$$

□

**5.12 Lemma**

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), X \in \mathcal{M}_{n,l}(K),$$

$$C = AX \in \mathcal{M}_{m,l}(K)$$

Wendet man dieselben elementaren Zeilenumformung auf  $A$  und  $C$  an (beachte  $A$  und  $C$  haben beide  $m$  Zeilen), so gilt für die entstehende Matrizen  $A', C'$ .

$$C' = A'X$$

### 5.13 Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix (Gauß-Jordan-Verfahren)

$A$  invertierbare  $m \times n$  Matrix. Gesucht  $A^{-1}$  mit

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

Man kann  $A$  durch elementare Zeilenumformungen auf die Form  $E_n$  bringen. Analog zum GaußAlgorithmus.  $\text{rg}(A) = n$ : In der zweiten Spalte findet man Eintrag  $\neq 0$  unterhalb der Diagonale. Erzeuge wie bei Gauß1 in der Diagonale, unterhalb der Diagonale erzeuge Nullen *und* auch oberhalb. So fortfahren. Durch elementare Zeilenumformungen entsteht aus  $A$  die Einheitsmatrix  $E_n$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Dieselben Zeilenumformungen Angewandt auf  $E_n$  liefert Matrix  $A^{-1}$ .

$$5.12 \quad E_n \cdot A^{-1} = A'$$

$$(A \mid E_n) \rightarrow (E_n \mid A^{-1})$$

(Verfahren zeigt gleichzeitig, ob  $A$  invertierbar).

### 5.14 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & -0.5 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

### 5.15 Bemerkung

Sei  $Ax = b$  LGS mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannte (d.h.  $A$   $n \times m$ -Matrix).

4.4b:  $Ax = b$  hat eindeutige Lösung, wenn  $\text{rg}(A) = n$ . Dann existiert  $A^{-1}$  und es gilt:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

### 5.16 Definition

$V$   $K$ -VR mit geordneten Basen  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ .

$$v'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i, \quad j = 1 \dots n \quad (\text{Reihenfolge beachten!})$$

$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  heißt *Basiswechselmatrix* Spalten. Koordinaten der Basisvektoren aus  $\mathcal{B}'$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

$$\text{Analog } v_k = \sum_{j=1}^n t_{jk} v'_j$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = (t_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$$

### 5.17 Satz

Bezeichnungen wie in ??.

$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  ist invertierbar und  $S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ , dass heißt  $S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = E_n$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } V_k &= \sum_{j=1}^n t_{jk} v'_j = \\ &= \sum_{j=1}^n t_{jk} \left( \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n s_{ij} t_{jk} \right) v_i \\ \sum_{j=1}^n s_{ij} t_{jk} &= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\ S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} &= E \end{aligned}$$

□

**5.18 Satz**

$V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$  wie oben,  $v \in V$ .

$$\kappa_{\mathcal{B}'}(v)^t = S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$$

*Beweis:* Analog zu 5.4 (5.2a))

**5.19 Beispiel**

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= (e_1 + e_2, e_1 - 2e_2) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$$

??:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$$

$$\kappa_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**5.20 Satz**

$\alpha : V \longrightarrow W$  linear,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  geordnete Basen von  $V$

$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  geordnete Basen von  $W$

Dann:

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

*Beweis:* Sei  $v \in V$

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = \underset{5.4}{\kappa_{\mathcal{C}'}(\alpha(v))^t} = \underset{5.18}{S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \kappa_{\mathcal{C}}(\alpha(v))^t} = S_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} A_{\alpha}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$$

Wenn  $v$  alle Vektoren aus  $V$  durchläuft, durchläuft  $\kappa_{\mathcal{B}}(v)^t$  alle Vektoren aus  $K^n$  ( $n = \dim(V)$ ) Daraus folgt Behauptung.

## 5.21 Korollar

$\alpha : V \rightarrow V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$  geordnete Basen von  $V$

$S = S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ . Dann

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}'} = S^{-1} \cdot A_{\alpha}^{\mathcal{B}} \cdot S$$

*Beweis:* Folgt aus 5.20 und 5.12 (Bemerkung: Zwei  $n \times n$  Matrizen  $A, B$  heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix  $S$  gibt mit  $B = S^{-1}AS$ .)

## 5.22 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (e_1, e_2)$$

$$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_1 - 2e_2)$$

$$S_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$S_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

$$\text{Sei } A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha$  ist Spiegelung aus  $e_1$ -Achse

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}'} = \underset{5.21}{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\alpha(e_1 + e_2) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2) + \frac{2}{3}(e_1 - 2e_2)$$

$$\alpha(e_1 - 2e_2) = \frac{4}{3}(e_1 + e_2) - \frac{12}{3}(e_1 - 2e_2)$$

## 6 Determinanten

$$\mathcal{N}_n(k) \longrightarrow K$$



## 6.1 Definition

$$A \in M_n(k), i, j \in \{1, \dots, n\}$$

$A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(k)$  ist die Matrix, die aus  $A$  entsteht wenn man  $A$  die  $i$ te Zeile und die  $j$ te Spalte streicht.

*Beispiel:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Definition Determinante einer *Quadratischen* Matrix rekursiv.

## 6.2 Laplacescher Entwicklungssatz

$\det M_n(k) \rightarrow K$  ist eine Abbildung, die *Determinante*, die folgendermaSSen berechnet wird:

$$(1) \quad \det((\alpha)) = \alpha$$

$$(2) \quad A \in \mathcal{M}_n(k) \text{ Wähle irgendein } i \in \{1, \dots, n\}. \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}$$

(Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile)

(Schachbrettmuster der Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

)

$$(3) \quad \text{Alternativ: Wähle } j \in \{1, \dots, n\} \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(Entwicklung nach der  $j$ -ten Spalte)

*Bemerkung:* Wichtig:

Egal nach welcher Zeile oder Spalte man entwickelt, es kommt immer dasselbe heraus!

(Schwierigster Beweis in der elementaren Determinantentheorie)

### 6.3 Beispiel

a)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

Entwicklung nach der 2. Spalte:  $-a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q}).$$

Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -24 - 0 - 9 = -33$$

Entwicklung nach der 2. Spalte:

$$\det(A) = -3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -33.$$

*Allgemeine Strategie:*

Verwende nur Determinanten-Berechnungen einer Zeile oder Spalte, mit möglichst vielen Nullen!

$$\text{c) } \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn} \text{ Induktion nach } n:$$

$n = 1 \checkmark$

$n - 1 \rightarrow n$

Entwicklung nach 1. Zeile:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots \\ \star & \ddots & \ddots & \dots \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & \dots \\ \star & \ddots & \dots \end{pmatrix} \underset{\text{IV}}{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}}$$

Analog: Obere Dreiecksmatrix

$$\text{Insbesondere: } \det(E_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

## 6.4 Korollar

$$\det(A) = \det(A^t)$$

## 6.5 Rechenregeln für Determinante

Sei  $A \in \mathcal{M}_n(k)$

- a) Zeilen bzw. Spaltenvertauschen ändern das Vorzeichen der Determinante.
- b) Addiert man den Vielfache einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte, so ändert sich die Determinante nicht.

- c) Multipliziert man eine Zeile/Spalte von  $A$  mit  $a \in K$ , so ändert sich  $\det(A)$  um Faktor  $a$ . Insbesondere:  $A \in \mathcal{M}_n(K)$

$$\det(a \cdot A) = a^n \cdot \det(A)$$

$$A, B \in \mathcal{M}_n(K).$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B). \text{ (Determinantenmultiplikationssatz)}$$

$$\text{(Aber Im allgemeinen } \det(A + B) \neq \det(A) + \det(B))$$

$$A = B = E_2 \quad \det(A) = \det(B) = 1$$

$$\det(A + B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

## 6.6 Bemerkung

Strategie zur Determinantenberechnung. Wende auf  $A$  elementare Zeilen/Spaltenumformungen an, um Dreiecksgestalt zu erhalten. Dann ??c).

## 6.7 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Q}$$

$$-\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

## 6.8 Satz

$A \in \mathcal{M}_n(k)$ . Dann gilt:

$A$  invertierbar  $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .

In diesem Fall gilt:  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} (= \frac{1}{\det(A)})$

[ $\Rightarrow$ :  $AA^{-1} = E_n$

$1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})]$

Andere Berechnungsmethode von  $A^{-1}$  mit Hilfe der Determinante. Dann:

## 6.9 Definition

$A \in \mathcal{M}_n(k)$ . Die *Adjunkte*  $A^{\operatorname{ad}} = (b_{ij})_{i,j=1 \dots n}$ , wobei  $b_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$  Indizes beachten!

## 6.10 Satz

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ .

$$\text{a) } A^{\operatorname{ad}} \cdot A = A \cdot A^{\operatorname{ad}} = (\det A) \cdot E_n = \begin{pmatrix} \det(A) & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix}$$

b) Ist  $\det(A) \neq 0$  so ist  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\operatorname{ad}}$

### 6.11 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 \\ a_2 1 & a_2 2 \end{pmatrix}$$

Angenommen:  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ .

$$A^{-1} =$$

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

### 6.12 Bemerkung

$\alpha : V \rightarrow V$  lineare Abbildung,  $V$  endlich dimensional.

$\mathbb{B}, \mathbb{B}'$  Basen von  $V$ .

$A_{\alpha}^{\mathbb{B}'} = S^{-1} \cdot A_{\alpha}^{\mathbb{B}} \cdot S$  wobei  $S = S_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}$ . ('Korollar' on page 88).

$$\det(A_{\alpha}^{\mathbb{B}'}) = \det(S^{-1} \cdot A_{\alpha}^{\mathbb{B}} \cdot S) = \det(A_{\alpha}^{\mathbb{B}}).$$

Daher definiert man:

$$\det(\alpha) = \det(A_{\alpha}^{\mathbb{B}}) \text{ (unabhängig von der Wahl von } B \text{)}.$$

[Im Allgemeinen ist  $\det(A^{\mathbb{B}, \mathbb{C}}) \neq \det(\det(A^{\mathbb{B}', \mathbb{C}'}))$  ]

## 7 Eigenwerte

*Problem:*  $\alpha : V \rightarrow V$  linear, Suche Basis  $\mathbb{B}$  von  $V$  bezüglich der  $A_{\alpha}^{\mathbb{B}}$  besondere einfache Gestalt hat.

$$\text{Am besten wäre } A_{\alpha}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

D.h.  $\mathbb{B} = (v_1, \dots, v_n)$ , so  $\alpha(v_i) = a_i v_i, i = 1 \dots n$

Das geht allerdings im Allgemeinen nicht.

### 7.1 Beispiel

a)  $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  Spiegelung an der  $e_1$ -Achse.

$\mathbb{B} = (e_1, e_2)$  kanonische Basis

$$A_{\sigma}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Drehung  $\rho$  um 0 mit Winkel  $+k \cdot \pi$ .

Kein Vektor  $\neq \sigma$  wird auf ein Vielfaches von sich abgebildet. Für *keine* Basis

$\mathbb{B}$  ist  $A_{\rho}^{\mathbb{B}}$  Diagonalmatrix

## 7.2 Definition

$\alpha : V \rightarrow V$  lineare Abbildung  $c \in K$  heißt *Eigenwert* von  $\alpha$ , falls  $v \in V, v \neq \sigma$  existiert  $\alpha(v) = c \cdot v$

Jeder solcher Vektor  $v \neq \sigma$  heißt *Eigenvektor* von  $\alpha$  zu dem Eigenwert  $c$ .

Die Menge aller Eigenvektoren zu  $c$ , zusammen mit Nullvektor, heißt *Eigenraum* von  $\alpha$  zum Eigenwert  $c$ .

## 7.3 Bemerkung

$\alpha : V \rightarrow V$  linear,  $c$  sei ein Eigenwert von  $\alpha$ . Eigenraum von  $\alpha$  zu  $c = \ker(c \cdot \text{id}_V - \alpha)$ , also Unterraum von  $V$ . Insbesondere:  $0$  ist Eigenwert von  $\alpha \Leftrightarrow \ker(\alpha) \neq \{\sigma\}$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \alpha(v) = c \cdot v &\Leftrightarrow c \cdot v - \alpha(v) = \sigma \\ &\Leftrightarrow (c \cdot \text{id}_V - \alpha)(v) = \sigma \\ &\Leftrightarrow v \in \ker(c \cdot \text{id}_V - \alpha) \end{aligned}$$

## 7.4 Beispiel

a)  $\text{id}_V$  hat nur Eigenwert 1, Eigenraum zu 1 ist  $V$ .

b) Spiegelung aus 7.1a):

1 ist Eigenwert      -1 ist Eigenwert.

Eigenraum zu 1:  $\langle e_1 \rangle$

Eigenraum zu -1:  $\langle e_2 \rangle$

c) Drehung um  $\phi \neq k \cdot \pi$  hat keine Eigenwerte.

## 7.5 Definition

$A$   $n \times n$ -Matrix über  $K$  *Eigenwerte von  $A$* : = Eigenwerte von  $\alpha_A : \begin{cases} K^n & \rightarrow K^n \\ x & \mapsto A \cdot x \end{cases}$   
 (dass heißt  $c \in K$  ist Eigenwert von  $A \Leftrightarrow \exists x \neq 0, x \in K^n : A \cdot x = c \cdot x$ )

## 7.6 Satz

$\alpha : V \rightarrow V$  lineare Abbildung. Dann haben  $\alpha$  und  $A_\alpha^\mathbb{B}$  die gleichen Eigenwerte für jede Basis  $\mathbb{B}$  von  $V$ .

*Beweis.* Sei  $c$  Eigenwert von  $\alpha$ ,  $v \neq 0$  mit  $\alpha(v) = c \cdot v$ .

$$A_\alpha^\mathbb{B} \cdot \kappa_\mathbb{B}(v)^t = \kappa_\mathbb{B}(\alpha(v))^t = \kappa_\mathbb{B}(c \cdot v)^t = c \cdot \kappa_\mathbb{B}(v)^t.$$

Da  $v \neq 0$  ist  $\kappa_\mathbb{B}(v) \neq 0$ . Also ist  $c$  Eigenwert von  $A_\alpha^\mathbb{B} = A$ .

Umgekehrt:

Sei  $0 \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$  mit  $A \cdot x = c \cdot x$ . ( $c$  ist Eigenwert von  $A$ ).

Sei  $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ,  $\mathbb{B} = (v_1, \dots, v_n)$   $\kappa_\mathbb{B}(v)^t = x$ .  $v \neq 0$ .

Es folgt  $\kappa_\mathbb{B}(\alpha(v)) = c \cdot v$   $c$  ist Eigenwert von  $\alpha$ . □

## 7.7 Satz

$V$   $n$ -dimensional.  $K$ -VR,  $\mathbb{B}$  Basis von  $V$ ,  $\alpha : V \rightarrow V$  linear,  $A := A_\alpha^\mathbb{B}$ ,  $c \in K$ .

Dann sind äquivalent:

- (1)  $c$  ist Eigenwert von  $\alpha$
- (2)  $\ker(c \cdot \text{id}_V - \alpha) \neq \{0\}$
- (3)  $\det(c \cdot E_n - A) = 0$

*Beweis.* (1)  $\Leftrightarrow$  (2) 7.3.

(2)  $\Leftrightarrow$  (3):

$$A_{c \cdot \text{id}_V - \alpha}^\mathbb{B} = c \cdot E_n - A$$

$$\begin{aligned}
& \det(c \cdot E_n - A) = 0 \\
\Leftrightarrow & c \cdot E_n - A \text{ nicht invertierbar.} \\
\Leftrightarrow & c \cdot \text{id}_V - \alpha \text{ nicht invertierbar.} \\
\Leftrightarrow & c \cdot \text{id}_V - \alpha \text{ nicht injektiv.} \\
\Leftrightarrow & \ker(c \cdot \text{id}_V - \alpha) \neq \{0\}
\end{aligned}$$

□

Wie berechnet man Eigenwerte einer lineare Abbildung und wie viele gibt es?

Nach 7.7 muss man alle  $c \in K$  bestimmen mit  $\det(c \cdot E_n - A) = 0$ .

Betrachte Funktion

$$f_A : \begin{cases} K & \rightarrow K \\ t & \mapsto \det(t \cdot E_n - A) \end{cases}$$

## 7.8 Satz

Die Funktion  $f_A$  ist Polynomfunktion von Grad  $n$ , das heißt:

$f_A(t) = \det(t \cdot E_n - A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$  wobei  $a_i \in K$  (unabhängig von  $t$ )

*Beweis.* Mit Entwicklungsformel. Machen wir hier nicht

□

## 7.9 Definition

a) Das Polynom  $f_A(t) = \det(t \cdot E_n - A) \in K[t]$  heißt *charakteristisches Polynom* von  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ .

b)  $\alpha : V \rightarrow V$  linear,

$\mathbb{B}$  Basis von  $V$ , so  $\det(t \cdot \text{id}_V - \alpha) = \det(A_{t \cdot \text{id}_V}^{\mathbb{B}}) = \det(t \cdot E_n - A^{\mathbb{B}})$  heißt *charakteristisches Polynom* von  $\alpha$  (nach 6.12 unabhängig von  $\mathbb{B}$ )

## 7.10 Korollar und Definition

$\alpha : V \rightarrow V$  linear  $\dim(V) = n$ .



- a)  $c$  ist Eigenwert von  $\alpha \Leftrightarrow c$  ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $\alpha$ . *Vielfachheit* des Eigenwerts  $c$  = Vielfachheit von  $c$  als Nullstelle des charakteristischen Polynoms
- b)  $\alpha$  hat höchstens  $n$  Eigenwerte (einschließend Vielfachheit.)

## 7.11 Beispiel

- a)  $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  Spiegelung an  $\langle e_1 \rangle$ -Achse.

$\mathbb{B} = (e_1, e_2)$  kanonische Basis

$$A: A^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ Eigenwerte } 1, -1$$

- b)  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$A = A_{\alpha}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \mathbb{B} \text{ kanonische Basen.}$$

Charakteristisches Polynom von  $\alpha$ :

$$\det(t \cdot E_n A_{\alpha}^{\mathbb{B}}) = \det \begin{pmatrix} t+1 & -2 \\ -4 & t+3 \end{pmatrix}$$

$$= (t+1)(t+3) - 8 = t^2 + 4t - 5$$

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

Eigenwerte von  $\alpha$ : 1, -5

Eigenvektor zu 1:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & +2y \\ 4x & -3y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = & -x & +2y \\ y = & 4x & -3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x = & 2y \\ -3x = & 3y \end{pmatrix} \quad x = y$$

Eigenraum zu Eigenwert 1:  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Eigenvektor zu -5:

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & +2y \\ 4x & -3y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5x = & -x & +2y \\ -5y = & 4x & -3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4x = & 2y \\ -2y = & 4x \end{pmatrix} \quad y = -2x$$

Eigenraum zu Eigenwert -5:  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$B' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad A_{\alpha}^{\mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ Diagonalmatrix } \rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ Drehung}$$

um  $\frac{\pi}{2}$  um 0.  $\mathbb{B}$  kanonische Basis.

$$A = A_{\rho}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} f_A(t) &= \det(t \cdot E_2 - A) \\ &= \det(t, 1; -1, t) = t^2 + 1 \end{aligned}$$

Keine Nullstellen um  $\mathbb{R}$ , also hat  $\rho$  keine Eigenwerte in  $\mathbb{R}$

Fasst man  $\rho$  als Abbildung  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  auf, so gibt es Eigenwerte  $i, -i$

Die zugehörigen Eigenräume sind  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$

## 7.12 Korollar

$\alpha = V \rightarrow V$  linear.

$$\text{Falls Basis } \mathbb{B} \text{ von } V \text{ existiert mit } A_{\alpha}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(oder untere Dreiecksmatrix), so sind die Diagonalelemente  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sämtliche Eigenwerte von  $\alpha$  (mit Vielfachheit).

$$\text{Beweis. } \begin{pmatrix} t - a_{11} & -* & -* & -* \\ 0 & t - a_{22} & -* & -* \\ 0 & 0 & \ddots & -* \\ 0 & 0 & 0 & t - a_{nn} \end{pmatrix} = (t - a_{11} \cdot \dots \cdot (t - a_{nn})) \quad \square$$

### 7.13 Bemerkung

Über  $\mathbb{C}$  lässt sich für jede lineare Abbildung  $\alpha : V \rightarrow V$  Basis  $\mathbb{B}$  finden, so dass  $A_{\alpha}^{\mathbb{B}}$  Dreiecksmatrix.

### 7.14 Satz ("Der Satz der alles liefert")

Seien  $c_1, \dots, c_r$  die paarweise verschiedenen Eigenwerte der linearen Abbildung  $\alpha : V \rightarrow V$ . Seien  $v_1, \dots, v_r$  zugehörige Eigenvektoren. Dann sind  $v_1, \dots, v_r$  linear unabhängig.

*Beweis.* Induktion nach  $r$ .

$r = 1 : v_1 \neq 0$  linear unabhängig ✓

Behauptung sei richtig für  $i - 1$ .

Zu zeigen: Richtig für  $i \leq r$ .

$v_1, \dots, v_{i-1}, v_i$  linear abhängig.

Dann :

$$v_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j v_j, a_j \in K(*)$$

Multiplikation mit  $c_i$  :

$$(1) \quad c_i v_i = \sum_{j=1}^{i-1} c_i a_j v_j$$

Andererseits; Wende  $\alpha$  auf  $(*)$  an.

$$(2) \quad c_i v_i = \alpha(v_i) = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \alpha(v_j) \stackrel{\text{Voraussetzung}}{=} \sum_{j=1}^{i-1} a_j c_j v_j$$

Subtraktion von (1) und (2):

$$\sigma = \sum_{j=1}^{i-1} (a_j c_j - c_i a_j) v_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_j (c_j - c_i) v_j$$

$$\xrightarrow{\quad} \quad \quad \quad a_j(c_j, c_i) =$$

$v_1, \dots, v_{i-1}$  linear unabhängig

für  $j = 1, i = 1$

Nach Voraussetzung:

$$\Rightarrow a_j = 0 \text{ für } j = 1 \dots, i-1$$

$$\Rightarrow v_i = \sigma \not\equiv$$

(\*)

□

## 7.15 Definition

$\alpha : V \rightarrow V$  linear.  $\alpha$  heißt *diagonalisierbar*, falls  $V$  eine Basis  $\mathbb{B}$  aus Eigenvektoren von  $\alpha$  besitzt.  $A_{\alpha}^{\mathbb{B}}$  ist Diagonalmatrix.

## 7.16 Satz

$\dim_K(V) = n, \alpha : V \rightarrow V$  linear

Hat  $\alpha$   $n$  verschiedene Eigenwerte, so ist  $\alpha$  diagonalisierbar.

(Hinreichend, nicht notwendig z.B.  $\alpha = id_V$  EW 1 mit Vielfachheit  $n$  diagonalisierbar).

## 7.17 Beispiel

$$A_{\alpha}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha$  hat EW 1 mit Vielfachheit 2 (7.12).

$\alpha$  ist nicht diagonalisierbar, denn sonst existiert Basis  $\mathbb{B}'$  mit  $A_{\alpha}^{\mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow id_V$

Also. Zur Diagonalisierbarkeit reicht es nicht, dass  $\alpha$   $n$  Eigenwerte (mit Vfh,) besitzt.

## 7.18 Bemerkung

Sei  $\alpha : V \rightarrow V$  linear,  $\dim_K(V) = n$ .

Besitzt  $\alpha$   $n$  Eigenwerte (mit Vielfachheit), d.h.  $\det(tE_n - A) = (t - c_1)^{m_1} \dots (t - c_r)^{m_r}$ . Ist  $v_i$  Eigenraum von  $\alpha$  zu  $c_i$ , so kann man zeigen.  $\dim(v_i) \leq m_i$

Es gilt:  $\alpha$  ist diagonalisierbar  $\Leftrightarrow \dim(v_i) = m_i, i = 1, r$

**7.19 Definition**

$\in \mathcal{M}_n(K)$  heißt *diagonalisierbar*, falls  $\begin{cases} K^n & \rightarrow K^n \\ \mapsto K^m d \end{cases}$

**7.20 Satz**

- a)  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  ist diagonalisierbar  $\Leftrightarrow$  existiert eine invertierbare Matrix  $S$  als Diagonalmatrix
- b) Hat  $A$   $n$  verschiedene Eigenwerte, so ist  $A$  diagonalisierbar.

**8 Vektorräume mit Skalarprodukt. Jetzt :  $K = \mathbb{R}$** 

$K^2$ : Länge von  $v \in \mathbb{R}^2$   $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$   $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$  (Pythagoras).

Abstand von zwischen  $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Abstand:  $d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

Winkel:  $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\phi)$

$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \cdot (x_1 x_2 + y_1 y_2)$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \|v\| \|w\| \cos(\phi)$$

Skalarprodukt

**8.1 Definition**

Seien  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Das *Standard-Skalarprodukt* von  $v$  und  $w$ :

$(v|w) := u_1 w_1 + \dots + u_n w_n \in \mathbb{R}$  (Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine Zahl!)

Es gilt

$$(1) \quad (v|v) \geq 0$$

$$(v|v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$(2) \quad (v|w) = (w|v)$$

$$(3) \quad (v|w_1 + w_2) = (v|w_1) + (v|w_2), \quad (v|\alpha w) = \alpha(v|w) \text{ Analog, Linearität im ersten Argument.}$$

$e_1, \dots, e_n$  kanonische Basis

$$(e_i|e_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

## 8.2 Definition

$V$   $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Abbildung  $(\cdot|\cdot) : \begin{cases} V \times V & \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) & \mapsto (v|w) \in \mathbb{R} \end{cases}$  heißt *Skalarprodukt* auf  $V$ , falls sie die

Eigenschaften (1) bis (3) aus 8.1 erfüllt (mit  $V$  statt  $\mathbb{R}^n$ ).

$V$  heißt dann *Euklidischer Vektorraum* (oder *Skalarproduktraum*)

## 8.3 Beispiel

a) Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist Skalarprodukt im Sinne von 8.2

b)  $V$   $n$ -dim  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Def.  $(v|w) := \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$  ist Skalarprodukt.

Das Standard Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  entsteht auf diese Weise wenn man für  $v_1, \dots, v_n$  die kanonische Basis nimmt.

c)  $V = \mathbb{R}$ -Vektorraum  $[a, b]$  der stetigen Funktionen auf  $[a, b]$  (mit Werten in  $\mathbb{R}$ ).

$f, g \in V$

Definition  $(f|g) := \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \in \mathbb{R}$  Skalarprodukt.

## 8.4 Satz (Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung)

$V$  Euklid Vektorraum Dann:

$$(v|w)^2 = (v|v) \cdot (w|w) \text{ für alle } v, w \in V.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $v$  und  $w$  linear unabhängig sind.

*Beweis.* Ist  $w = \sigma$  so auf beiden Seiten 0 (und  $v, w = \sigma$  sind linear abhängig).

Sei  $w \neq \sigma$

Setze  $a := \frac{(v|w)}{(w|w)} \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (v - aw|v - aw) = (v - aw|v) - a(v - aw|w) = (v|v) - \frac{(v|w)^2}{(w|w)}$$

$$\text{Gleichheit} \Leftrightarrow (v - aw|v - aw) = 0 \Leftrightarrow v = a$$

□

## 8.5 Definition

$V$  Euklid. Vektorraum

a) Für  $v \in V$  ist  $\|v\| := +\sqrt{(v|v)}$

(Euklidische Norm von  $v$  ('Länge' von  $v$ ))

b)  $v, w \in V$ :

$$d(v, w) := \|v - w\| \text{ (Euklidischer Abstand von } v \text{ und } w\text{) (8.4 bedeutet dann:}$$

$$|(v|w)| \|v\| \|w\|)$$

## 8.6 Beispiel

a) Standard Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} :$$

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$d(v, w) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$n = 1 \quad \|(x_1)\| = |x_1|$$

## 8.7 Satz (Eigenschaft der Norm)

$V$  Euklidischer Vektorraum, Norm  $\|\cdot\|$  dann:

- a)  $\|v\| \geq 0 \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- b)  $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$  (absolute Homogenität)
- c)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (Dreiecksungleichung)
- d)  $\|v + w\|^2 \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v|w)$
- e)  $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$  (Parallelogrammgleichung)

*Beweis.* a)b) ✓

c)d):

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= (v + w|v + w) = (v|v) + (w|w) + 2(v|w) \text{ (also d)} \\ \|v + w\|^2 &\leq (v|v) + (w|w) + 2\sqrt{(v|v)(w|w)} = (\sqrt{(v|v)} + \sqrt{(w|w)})^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \rightarrow \end{aligned}$$

c)

e) folgt aus d) □

## 8.8 Bemerkung

Jede Abbildung  $\mathbb{R}$ -Vektorraum in  $\mathbb{R}$

$$\|\cdot\|, \|\cdot\| : \begin{cases} V & \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \|v\| \end{cases} \quad \text{der a), b), c) erfüllt}$$

heißt Norm auf  $V$ . Es gibt Normen, die nicht von Skalarprodukt kommen z.B in  $\mathbb{R}^n$ :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_{\max} = \max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\} \text{ a)-c) erfüllt.}$$

## 8.9 Definition

$V$  Euklidischer VR



a)  $V, W \in V, v \neq \sigma, w \neq \sigma$

$$8.4: \frac{|(v|w)|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

Dann existiert genau ein  $\phi \in [0, \pi]$  mit  $\frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos(\phi)$

D.h.

$$(v|w) = \|v\| \cdot \|w\| \cos(\phi)$$

$\phi$  heißt *Winkel* zwischen  $v, w$  ( $v \neq \sigma, w \neq \sigma$ ) (kein orientierter Winkel, kleinere der beiden möglich)

b)  $v, w$  heißen *orthogonal* (Senkrecht), falls  $(v|w) = 0$ .

Falls  $v \neq \sigma$  und  $w \neq \sigma$ , so heißt das:

$$\cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} (\hat{=} 90^\circ) (\sigma \text{ ist orthogonal zu allen Vektoren}).$$

c)  $M \subseteq V$

$$M^\perp := \{w \in V, (v|w) = 0 \text{ für alle } v \in M\}$$

*Orthogonalraum* zu  $M$

(Unterraum von  $V$  (selbst wenn  $M$  kein Unterraum ist)).

$$\{\sigma\}^\perp = V$$

$$V^\perp = \{\sigma\} (v \in V^\perp \Rightarrow (v|v) = 0 \Rightarrow v = \sigma)$$

## 8.10 Bemerkung

Sind  $v, w$  orthogonal, so ist  $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

## 8.11 Beispiel

a)  $\mathbb{R}^n$ , Standard-Skalarprodukt  $(e_i|e_i) = 0$  für  $i \neq j$   
 $\|e_i\| = 1$ .

b)  $\mathbb{R}^3$ , Standard-Skalarprodukt  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\|v\| = \sqrt{6}, \|w\| = \sqrt{24}$$

$$\text{Winkel zwischen } v \text{ und } w : \cos(\phi) = \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{3}$$

c)  $\mathbb{R}^2$ , Standard-Skalarprodukt

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \sigma$$

$$\{v\}^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Übungs-Aufgabe.

## 8.12 Definition

$V$  Euklidischer Vektorraum  $M \subseteq V$ .

a)  $M$  heißt *Orthonormalsystem*, falls  $\|v\| = 1$  für alle  $v \in M$  und  $(v|w) = 0$  für alle  $v, w \in M, v \neq w$

b) Ist  $V$  endlich dimensional, so heißt  $M$  *Orthonormalbasis* (ONB) von  $V$ , falls  $M$  Orthonormalsystem und Basis von  $V$ .

Beachte :  $V \neq \sigma$

$$\frac{1}{\|v\|} v \in V$$

$$\|v'\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1.$$

Normierung

## 8.13 Bemerkung

Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  ONB,

$$v \in V, v = \sum_{i=1}^n c_i v_i, c_i \in \mathbb{R}$$

$$(v|v) = \left( \sum_{i=1}^n c_i v_i \middle| \sum_{j=1}^n c_j v_j \right) = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j (v_i|v_j) = \sum_{i=1}^n c_i^2 (v_i|v_i)$$

$$(v|v) = \sum_{i=1}^n c_i^2$$

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

## 8.14 Satz

a) Ein Orthonormalsystem ist linear unabhängig

b) Ist  $M\{v_1, \dots, v_m\}$  ein Orthonormalsystem,  $v \in V$ , so ist  $v - \sum_{i=1}^n (v|v_i)v_i \in M^\perp$

*Beweis.* a) Sei  $\{v_1, \dots, v_m\}$  endliche Teilmenge von  $M$ .

Z.z:  $\{v_1, \dots, v_m\}$  linear unabhängig. Ist  $\sum_{i=1}^m c_i v_i = \sigma$ , so  $0 = \sum_{i=1}^m c_i v_i | v_j = \sum_{i=1}^m c_i (v_i | v_j)$

b)  $(v_j | v - \sum_{i=1}^m (v|v_i)v_i) = (v|v_j) - (v|v_j)(v_j|v_j) = 0 \checkmark$  □

## 8.15 Satz (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei  $M = \{w_1, \dots, w_m\}$  linear unabhängig, Menge in Euklidischen VRV. Dann gibt es Orthonormalsystem  $\{v_1, \dots, v_m\}$  mit  $\langle w_1, \dots, w_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$  für alle  $i = 1, \dots, m$

*Beweis.*  $w_1 \neq \sigma$ . Setze  $v_1 = \frac{1}{\|w_1\|}$ ,  $\|v_1\| = 1$ ,  $\langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$ .

Sei schon Orthonormalsystem  $\{v_1, v_i\}$  konstruiert mit  $\langle w_1, \dots, w_j \rangle$  für alle  $j = 1, \dots, i$  ( $i < m$ )

Setze  $v'_{i+1} = w_{i+1} - \sum_{j=1}^i (v_j | w_{i+1}) v_j$  ~~??~~ :  $(v'_{i+1} | v_j) = 0$  für  $j = 1, \dots, i$

Da  $w_{i+1} \notin \langle w_1, \dots, w_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ , ist  $v'_{i+1} \neq \sigma$ .

Setze  $v_{i+1} = \frac{1}{\|v'_{i+1}\|} v'_{i+1}$

$\langle v_1, \dots, v_i, w_{i+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_i, v_{i+1} \rangle \checkmark$  □

## 8.16 Beispiel

a)  $e_1, \dots, e_n$  ist ONB des  $\mathbb{R}^n$  bezüglich Standard-Skalarprodukt

b)  $V = \mathbb{R}^3$  mit Standard-Skalarprodukt.

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  linear unabhängig.

Gram-Schmidt ONB  $\{v_1, v_2, v_3\}$

$\langle v_1 \rangle = \langle w_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v'_2 &= w_2 - (v_1 | w_2) v_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\|v'_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3} v_2 = \sqrt{6} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

$$v'_3 = w_3 - (v_1 | w_3) v_1 - (v_2 | w_3) v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \|v'_3\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{1} - 10 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

**8.17 Satz**

$V$  endlich dimensional Euklidischer Vektorraum,  $U$  Unterraum von  $V$

a)  $V = U \oplus U^\perp$  (dass heißt  $U \cap U^\perp = \{\sigma\}$ ,  $U + U^\perp = V$ )

Insbesondere:  $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$

b)  $(U^\perp)^\perp = U$

*Beweis.* a) Basis-Ergänzung + Gram-Schmidt b) folgt aus a)

□

$\mathbb{R}^3$  Vektorprodukt (äußeres Produkt)

**8.18 Definition**

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Vektorprodukt von  $v$  und  $w$ :

$$v \times w = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

**8.19 Satz**

- a)  $(v \times w | v) = (v \times w | w) = 0$ , dass heißt  $v \times w$  ist orthogonal zu  $v$  und  $w$
- b)  $v \times w = -w \times v$
- c)  $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$ ,  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ,  $a \in \mathbb{R}$   
Ebenso in der ersten Komponente
- d)  $v, w$  linear abhängig  $\Leftrightarrow v \times w = 0$
- e)  $v, w \neq 0, \phi \in [0, \pi]$  Winkel zwischen  $v$  und  $w$  so:  
 $\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \sin(\phi)$  = Flächeninhalt des von  $v$  und  $w$  aufgespannten Parallelogramms.  
*Beweis:* Nachrechnen.

**8.20 Bemerkung**

$v, w, v \times w$  bilden sogenanntes *Rechtssystem*.

Faust der rechten Hand: Fingerspitzen von  $v$  nach  $w$  (kleinster Winkel). Daumen zeigt in Richtung  $v \times w$

**8.21 Beispiel**

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bestimme  $\langle v, w \rangle^\perp$ .

$v, w$  linear unabhängig, dass heißt.  $\dim \langle v, w \rangle = 2$

$$\stackrel{8.17}{\implies} \dim(\langle v, w \rangle^\perp) = 3 - 2 = 1$$

$$\langle v \times w \rangle = \langle v, w \rangle^\perp \quad v \times w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \|v \times w\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

## 9 Orthogonale Abbildungen, symmetrische Abbildungen, Konsequenzabbildungen

### 9.1 Definition

$V$  Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt:  $(\cdot|\cdot): V \rightarrow V$  lineare Abbildung  $\alpha$  heißt *orthogonale Abbildung*  $\Leftrightarrow (\alpha(v)|\alpha(w)) = (v|w)$  für alle  $v, w \in V$ .

### 9.2 Folgerungen

- a) Orthogonale Abbildungen sind *längentreu*, das heißt  $\|\alpha(v)\| = \|v\|$  für alle  $v \in V$  (da  $\|v\| = \sqrt{(v|v)} = \sqrt{(\alpha(v)|\alpha(v))} = \|\alpha(v)\|$ )
  - b) Orthogonale Abbildungen sind Winkeltreu, da  $\cos(\phi) = \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$
  - c) Orthogonale Abbildung auf endlich dimensionalen Euklidischen Räumen sind bijektiv, da nach a)  $\ker(\alpha) = \{0\}$  also  $\alpha$  injektiv, also bijektiv, da  $\dim(V) < \infty$
  - d)  $V$  endlich dimensional  $\alpha$  orthogonal  $\Rightarrow \alpha^{-1}$  orthogonal.  
( $u, v \in V$  Es existiert  $x, y \in V$  mit  $\alpha(x) = u, \alpha(y) = v, (u|v) = (\alpha^{-1}(v)|\alpha^{-1}(u))$ )
  - e)  $\alpha, \beta$  orthogonal, so auch  $\alpha \circ \beta$ .  
 $(\alpha \circ \beta(v)|\alpha \circ \beta(w)) = (\alpha(\beta(v))|\alpha(\beta(w))) = (\beta(v)|\beta(w)) = (v|w)$
- d)+e) besagen, dass die Menge der orthogonalen Abbildungen auf  $V$  bezüglich  $\circ$  eine Gruppe ist. ( $V$  endlich Dimensional)

### 9.3 Beispiel

- a) Drehungen um  $\sigma$  im  $\mathbb{R}^2$  sind orthogonale Abbildungen (bezüglich dem Standard-Skalarprodukt)
- b) Spiegelungen  $\rho$  im  $\mathbb{R}^2$  an Achse durch  $\sigma$  sind orthogonal.  $v_1$  Richtungsvektor der Achse,

$$\|v_1\|, \mathcal{B} = (v_1, v_2) \text{ Orthonormalbasis (Gram-Schmidt)}$$

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

#### 9.4 Satz (Charakterisierung orthogonal Abbildung)

$V$  endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Orthonormalbasis,  $\alpha : V \rightarrow V$  linear,  $A = A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

Dann sind äquivalent:

- (1)  $\alpha$  ist orthogonal Abbildung
- (2)  $A \cdot A^t = E$  (dass heißt  $A^t = A^{-1}$ )
- (3)  $(\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n))$  ist Orthonormalbasis
- (4)  $\|\alpha(v)\| = \|v\|$  für alle  $v \in V$

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2):

$$A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$$

$$\rho_{ij} = (v_i | v_j) = (\alpha(v_1) | \alpha(v_3)) = \left( \sum_{k=1}^n a_{ki} v_k \mid \sum_{l=1}^n a_{lj} v_l \right) = \sum_{k,l=1}^n a_{ki} a_{lj} (v_k | v_l) = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \leftarrow$$

Eintrag von  $A \cdot A^t$

$$\Rightarrow A \cdot A^t = E_n \quad (*)$$

$\alpha$  bijektiv  $\Rightarrow A$  invertierbar.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^t = E$$

$$A^{-1} = A^t$$

$$(2) \Rightarrow (3): A \cdot A^t = E$$

Dann wie in (1)  $\Rightarrow$  (2):

$$(\alpha(v_i) | \alpha(v_i)) = \rho_{ii} \quad (\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)) \text{ Orthonormalbasis.}$$

$$(3) \Rightarrow (4):$$

$$v = \sum_{i=1}^n c_i v_i \quad \alpha(v) = \sum_{i=1}^n c_i \alpha(v_i) \quad \|v\|^2 = (v | v) = \|\alpha(v)\|^2$$

$$(4) \Rightarrow (1):$$

$$8.7(v | w) = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

Behauptung folgt. □

## 9.5 Definition

: Eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  über  $\mathbb{R}$  heißt *orthogonal*, falls  $A \cdot A^t = A^t \cdot A = E_n$ .

Dass heißt  $x_1, \dots, z_n$  von  $A$ :

$$(z_i^t | z_j^t) = z_i \cdot z_j^t = z_i \cdot s_j = S_{ij}$$

↑ j-kte Spalte von  $A^t$ ,

Eintrag(i,j) von  $A \cdot A^t = E_n$

## 9.6 Korollar

$\alpha$  orthogonal Abbildung auf endlich dimensionalen Euklidischen Vektorraum

$V$ ,  $\mathcal{B}$  Orthonormalbasis von  $V$ ,  $A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$

a)  $\det(\alpha) = \det(A) = \pm 1$

b)  $\alpha$  hat höchstens die Eigenwerte 1 oder -1 (in  $\mathbb{R}$ )

*Beweis.* a)  $1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = \det(A^2)$

b)  $c$  Eigenwert von  $\alpha$ ,  $v$  zugehöriger Eigenvektor

$$\|v\| = \|\alpha(v)\| = \|c \cdot v\| = \|c\| \cdot \|v\| \Rightarrow \|c\| = 1$$

□

## 9.7 Satz

Sei  $\alpha$  orthogonale Abbildung auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \leq 3$

a)  $n = 1$ ,  $\alpha = \text{id}$  oder  $\alpha = -\text{id}$

b)  $n = 2$ : Sei  $\mathcal{B}$  Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$

i) Ist  $\det(\alpha) = 1$ , so ist

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für ein  $\varphi \in [0, 2\pi]$

$\alpha$  ist Drehung um den Winkel  $\varphi$

ii) Ist  $\det(\alpha) = -1$ , so ist

$$A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



für ein  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ;

es gibt Orthonormalbasis  $\zeta = (w_1, w_2)$  von  $V$  mit  $A_\alpha^\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Spiegelung an der Achse  $\langle w_1 \rangle$ . ( $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ ), so ist der Winkel zwischen  $v_1$  und  $w_1$   $\frac{1}{2}\varphi$ .

c)  $n = 3$ :

i) Ist  $\det(\alpha) = 1$ , so existiert Orthonormalbasis  $\zeta = (v_1, v_2, v_3)$  mit

$$A_\alpha^\zeta = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha$  ist Drehung um  $\varphi \in [0, 2\pi[$  parallel zur  $\langle v_1, v_2 \rangle$ -Ebene  
mit Drehachse  $\langle v_3 \rangle$

ii) Ist  $\det(\alpha) = -1$ , so existiert Orthonormalbasis  $\zeta = (v_1, v_2, v_3)$  mit

$$A_\alpha^\zeta = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha$  ist Drehspiegelung. Drehung um Achse  $\langle v_3 \rangle$  dann Spiegelung an Ebene  $\langle v_1, v_2 \rangle$

*Bemerkung:*  $n = 2$ :

Ist  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  positiv orientiert (dass heißt bewegt man sich von  $v_1$  nach  $v_2$  entgegen Uhrzeigersinn, so ist Winkel  $\frac{\pi}{2}$ ), so ist  $\alpha$  Drehung gegen Uhrzeigersinn um  $\varphi$ . Ist  $\mathcal{B}$  negativ orientiert so ist  $\alpha$  Drehung im Uhrzeigersinn.

(Spezialfälle in c),

$$\text{i) } \varphi = \pi \quad A_\alpha^\zeta = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \dots & -1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ Achsenspiegelung zu } \langle v_3 \rangle$$

$$\text{ii) } \varphi = 0 \quad A_{\alpha}^{\zeta} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \text{ (Ebenen-)Spiegelung an } \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\varphi = \pi. \quad A_{\alpha}^{\zeta} = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \dots & -1 & \dots \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \text{ Punktspiegelung an } 0.$$

*Beweis.* a) ✓

b) Untersuchen der  $2 \times 2$  Matrizen  $A$  auf  $A \cdot A^t = A^t \cdot A = E_2$  (WHK 10.67) c) Für beliebige  $n$ : Fischer, Lineare Algebra

$$A_{\alpha}^{\zeta} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 2 \times 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

□

## 9.8 Definition

a)  $V$   $K$ -Vektorraum,  $b \in V$ .

$$\text{Die Abbildung } t_b : \begin{cases} V \rightarrow V \\ v \mapsto v + b \end{cases}$$

heißt *Translation* um den Vektor  $b$ .

(Nicht linear, falls  $b \neq 0$ )

b) Komponenten von linearer Abbildung mit Translation heißen *affine Abbildungen*

$$\beta(v) = \alpha(v) + b, \alpha \text{ lineare Abbildung } V \rightarrow V = (t_b \circ \alpha)(v).$$

c) Ist  $V$  Euklidischer Vektorraum, so ist *Konsequenzabbildung* auf  $V$  eine affine Abbildung der Form  $t_b \circ \alpha$ , wobei  $\alpha$  orthogonale Abbildung ist. (Lassen den Abstand zwischen Vektoren (und Winkeln) fest).

## 9.9 Bemerkung

a) Affine Abbildungen bilden affine Unterräume wieder auf affine Unterräume ab.

$$\begin{aligned} \beta &= t_b \circ \alpha, u + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Unterraum von } V}}{W} \\ \beta(u + W) &= t_b(\alpha(u + w)) \\ &= t_b(\alpha(u) + \alpha(w)) \\ &= \underbrace{b + \alpha(u)}_{\text{Vektor}} + \underbrace{\alpha(W)}_{\text{Unterraum}} \\ &\text{affiner Unterraum} \end{aligned}$$

- b) Hintereinanderausführung von affinen (Kongruenz-)Abbildungen ist wieder affine (Kongruenz-)Abbildung:

$$((t'_b \circ \alpha') \circ (t_b \circ \alpha))(v) = (t'_b \circ \alpha')(\alpha(v) + b) = (\alpha' \circ \alpha)(v) + \alpha'(b) + b'$$

Beispiel:  $\beta$  Drehung um  $c \in \mathbb{R}^2$  mit Winkel  $\varphi(\mathbb{R}^2)$

$$\beta(v) = t_v \circ \alpha \circ t_{-c}(\circ id) = \alpha(v) = \alpha(c) + c = (t_{\alpha(b)+c} \circ \alpha)(v) = \alpha(v - c) + c$$

$$\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - c_1 \\ x_2 - c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

- c) Affine Abbildungen auf  $n$ -dimensionalen Räumen lassen sich nicht durch  $n \times n$  Matrizen beschreiben. Es gibt Beschreibungen mit  $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen:

$$\mathcal{B} \text{ Basis von } V. \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \beta = t_b \circ \alpha$$

$$b = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n, A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$$

$$\beta \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v \in V, v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

9.10 Lemma

$$v \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta(v) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nachrechnen:

Hintereinanderausführung von affinen Abbildungen entspricht der Multiplikation der entsprechenden  $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen.

9.10 Lemma

$A \in \mathcal{M}_n, x, y \in \mathbb{R}^2$ , so gilt für das Standard-Skalarprodukt.

$$(Ax|y) = (x|Ay)$$

$$\text{Beweis. } (Ax|y) = (x|Ay)$$

$$= (x^t A^t)y = x^t(Ay) = (x|Ay)$$

□

9.11 Definition

$V$  endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum.

Lineare Abbildung  $\alpha : V \longrightarrow V$  heißt *symmetrisch*, falls  $(\alpha(v)|w) = (v|\alpha(w))$  für alle  $v, w \in V$  (*selbstadjungiert*)

(z.B. alle  $a \cdot \text{id}_V$  sind symmetrisch)

9.12 Bemerkung und Definition

$V$  endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum,  $\mathcal{B}$  Orthonormalbasis von  $V$ .

$\alpha \cdot V \rightarrow V$  linear.

$$A = A_{\alpha}^{\mathcal{B}}. \text{ Dann } \alpha \text{ symmetrisch.} \Leftrightarrow A = A^t$$

$n \times n$ -Matrizen  $A$  mit  $A = A^t$  heißen *symmetrisch*.

Matrix ändert sich nicht bei Spiegelung an der Diagonale.

*Beweis.* Folgt aus 9.10 □

### 9.13 Satz über die Hauptachsentransformation

- a) Ist  $\alpha : V \rightarrow V$  symmetrische Abbildung, so existiert orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren zu  $\alpha$ . Insbesondere ist  $\alpha$  diagonalisierbar,
- b) Ist  $A$   $n \times n$ -Matrix,  $A$  symmetrisch, so existiert orthogonale Matrix  $B$  mit  $B^{-1}AB = B^tAB$  Diagonalmatrix.

*Beweis.* a) WHK 10.75

b)  $\alpha(x) = A \cdot x$

$A = A_{\alpha}^{\mathcal{C}}$  bezüglich kanonischer Basis  $\mathcal{C}$ .  $\alpha$  symmetrisch nach 9.12. a)  $\exists$  Orthonormalbasis mit  $A_{\alpha}^{\mathcal{B}}$  Diagonalmatrix.

Wähle  $\mathcal{B}$  als Basiswechselmatrix:  $B^{-1}AB$  Diagonalmatrix.

$\Rightarrow B^{-1} = B^t$  □

### 9.14 Bemerkung

Grund für die Bezeichnung von 9.13.

- a) Eine *Quadrik* im  $\mathbb{R}^n$  besteht aus allen  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  die die Gleichung  $\sum$  9.13

besagt:

Es existiert Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , so dass  $A_{\alpha}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Sei  $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ , so lässt sich  $(*)$  schreiben als:

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i'^2 + \sum_{i=1}^n b_i' \cdot x_i'^2 + c' = 0 \quad (****)$$

$v_i$  sind die *Hauptachsen* der Quadrik.

b)  $n = 2$ : Quadriken sind *Kegelschnitte*.

(\*\*\*) Striche weglassen. Fall  $b_1 = b_2 = 0, c \neq 0$ .

ohne Beschränkung der Allgemeinheit.

$$e_1 \cdot x_1^2 + e_2 \cdot x_2^2 = 1 \quad \frac{x_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{b} = 1 \quad \text{Ellipse}$$

$$c_1 = \frac{1}{a^2}, c_2 = \frac{1}{b^2} \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \quad \text{Hyperbel}$$

## 10 Mehrdimensionale Analysis

Funktionen:  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  sind *Zeilenvektoren*.

### 10.1 Beispiel

a)  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

skalare Funktion  $n = 2$   $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lassen sich graphisch darstellen.

Beispiel:  $f(x, y) = x + y$

b)  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, m > 1$

vektorwertige Funktion.

$x \in D, f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

$f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  skalar.

Spezialfall in 10.1b).  $n = 1, m = 2/3$

### 10.2 Beispiel (ebene Kurven/Raumkurven)

z.B.  $f : \begin{cases} [0, 2\pi] \\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{cases} \rightarrow \mathbb{R}^2$  *Parameter-Darstellung* Physikalische Interpretation,  $t$  Zeit,  $f(t)$  Ort

$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$  Geschwindigkeitsvektoren

Betrag Geschwindigkeit :  $\|f'(t)\| = \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}$

Länge der Kurve zwischen  $t = a$  und  $t = b$ ?

Konstante Gerade :  $v \cdot (b - a)$

Bei variabler Geschwindigkeit:

$v(t) = \|f'(t)\|$  Approximiert:  $L = \sum_{i=a}^b v(t_i)(t_a - t_i)$

Grenzwert  $L = \int \|f'(t)\| dt$

### 10.3 Satz

Ist  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$  stetig differenzierbar,  $[a, b] \subseteq D$ .

so gilt für die *Bogenlänge*  $L$  der Kurve zwischen  $t = a$  und  $t = b$

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

(1 dimensionale Analysis)

(exakter Beweis: Foster, Analysis 2)

### 10.4 Beispiel

Abrollen eines Kreises auf der  $x$ -Achse. Bahn eines Punktes auf der Peripherie des Kreises.

$$f(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

$$\text{Zykloide } L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = 8$$

### 10.5 Definition

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a$  Adhärenzpunkt.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D$$

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - c\| < \epsilon$$

$$\text{b) Ist } a \in D, \text{ so heißt } f \text{ stetig in } a, \text{ falls } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(a)$$

**10.6 Bemerkung**

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

**10.7 Beispiel**

Monom:  $f(x_1, \dots, x_n) = ax_1^{n_1} + \dots + x_n^{n_1}$   $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$  fest.

Polynome sind die Summe aus endlich vielen Monomen.  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^7 + 4x_1x_2x_3^6 - 12x_1^2x_2^4$

Polynome sind stetig. Allgemein gilt (Beweis wie Analysis mit einer Variable k):  
Summe, Produkt, Quotient, von stetigen (skalaren) Funktionen sind stetig.

**10.8 Definition**

$$a \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}, r > 0$$

$$K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\}$$

*offene Kugel* (Kugelschale) um  $a$  vom Radius  $r$ .

a)  $n=1$  offenes Intervall  $]a - r, a + r[$

$n=2$   $K(a, r)$  ist das Innere des Kreises ohne die Kreislinie

b)  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *offen*, falls es für jedem  $a \in D$  ein  $\epsilon(a) > 0$  gibt.

**10.9 Definition**

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad D \text{ offen. } a = (a_1, \dots, a_n) \in D$$

a)  $f$  heißt *partiell differenzierbar* nach  $x_j$  an der Stelle  $a_j$  falls

$$\lim_{x_j \rightarrow a_j} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{x_j - a_j}$$

existiert.

*Partielle Ableitung* von  $f$  nach  $x$  an der Stelle  $a$ :

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}$$



- b) Ist  $f$  nach allen  $x_j$  an der Stelle  $a$  partiell differenzierbar, so heißt  $(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n})$  *Gradient* von  $f$  an der Stelle  $a$ .
- c) Ist  $f$  an allen  $a \in D$  nach allen  $x_j$  partiell diffbar, so sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen, der *partiellen Ableitungen* von  $f$  auf  $D$ . zusammengefasst zu

$\text{Grad}(f)$  Gradient von  $f$

$$[f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{Jacobi-Matrix})$$

## 10.10 Beispiel

Existenz der partiellen Ableitung (z.B.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  an Stelle  $a$  bedeutet die Existenz von Tangenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung in  $a$ , aber nicht notwendig die Existenz einer Tangentialebene).

Beispiel:  $f(x) = 1 - \min(|x|, |y|)$

Partielle Ableitung in  $(0,0)$  existiert, Tangente in  $x$  und  $y$  Richtung (Steigung 0).

Aber keine Tangentialebene in  $(0,0)$ . Stattdessen:

$$f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$$

## 10.11 Definition

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  offen.

- a)  $f$  ist *stetig differenzierbar*  $\Leftrightarrow f$  ist partiell differenzierbar und  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  ist stetig
- b)  $f$  ist 2-mal stetig diffbar  $\Leftrightarrow f$  partiell diffbar und alle  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sind stetig differenzierbar.

Partielle Ableitung von  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  nach  $x_j$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}$$

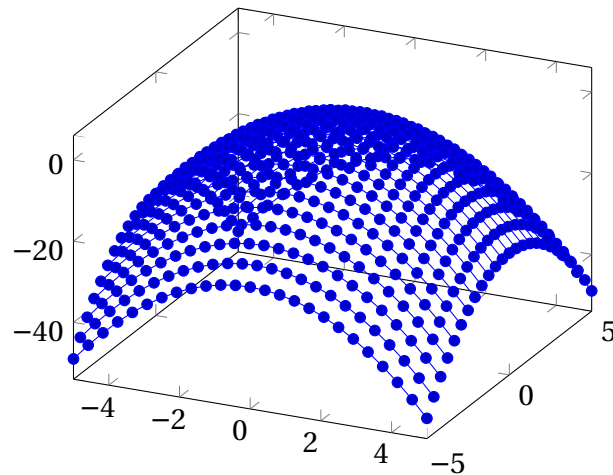


Abbildung 5: hat an jedem Punkt Tangentialebene

Statt  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_i} : \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}$

c) analog: s-mal stetig differenzierbar.

Schreibweise:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \cdot \partial x_2 \cdot \partial x_1}$

## 10.12 Beispiel

a) Polynomfunktionen sind s-mal stetig differenzierbar für alle s.

b) Ebenso Funktionen wie  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2) + e^{x_2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \cdot \cos(x_1 x_2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \cdot \cos(x_1 x_2) + e^{x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x_1^2)} = -x_2^2 \sin(x_1 x_2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} = \cos(x_1 x_2) - x_1 x_2 \sin(x_1 x_2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = \cos(x_1 x_2) - x_2 x_1 \sin(x_1 x_2)$$

## 10.13 Satz (Schwarz)

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  offen, 2-mal stetig differenzierbar,

Dann:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1}$  für alle  $i, j$

**10.14 Satz**

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$ , stetig differenzierbar. Dann gilt für alle  $a \in D$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \text{Grad}(f)(a) \cdot (x - a)^t}{\|x - a\|} = 0$$

(Matrixmultiplikation mit Zeilen  $\times$  Spaltenvektor,  $\langle \text{Grad}(f)(a) | (x - a) \rangle$  Standard-skalarprodukt.)

Dass heißt  $f(x)$  wird an der Stelle  $a$  durch die affine Abbildung  $f(x) = f(a) + \text{Grad}(f)(a) \cdot (x - a)^t = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$  gut approximiert.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - l(x)}{\|x - a\|} = 0$$

$n = 1$  : Normale Definition von Differenzierbarkeit.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0$$

Tangente an  $(a, f(a))$  :  $l(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

$n = 2$  :  $l(x_1, x_2) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2)$  Graph ist die Tangentialebene an  $(a, f(a))$

**10.15 Beispiel**

$$f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2 \quad a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Tangentialebene an  $a$  ist der Graph von  $l(x_1, x_2) = \frac{3}{2} - (x_1 - \frac{1}{2}) - (x_2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - x_1 - x_2$

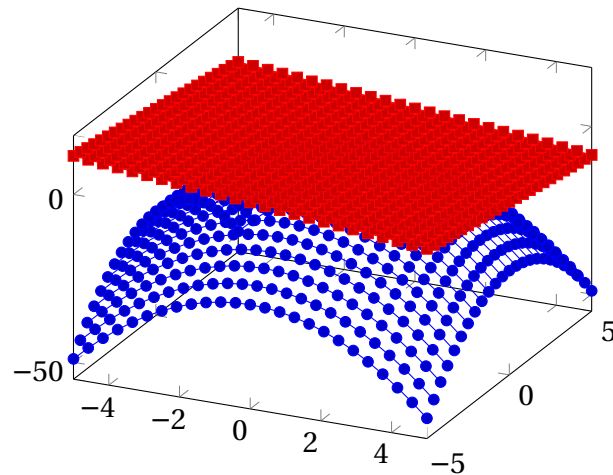
**10.16 Korollar**

Ist  $f$  stetig differenzierbar, so ist  $f$  stetig.

**10.17 Definition**

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  offen,  $f$  2-mal stetig differenzierbar. Dann heißt die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$H(f) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots n}$$

Abbildung 6: Tangentialebene an der Stelle  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 

die *Hesse Matrix* zu  $f$ . Setzt man  $a \in D$  in alle 2-ten partiellen Ableitungen ein.

$$H(f) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)$$

reelle  $m \times n$  Matrix.

Mach 10.13a).

$$H(f) = H(f)^t$$

$H(f)(a) = H(f)(a)^t$  ist symmetrische Matrix.

Nach 9.13 hat  $H(f)(a)$   $n$  reelle Eigenwerte (mit Vielfachheiten) d.h das charakteristische Polynom von  $H(f)(a)$  zerfällt vollständig in Linearfaktoren.

## 10.18 Definition

$D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in D$  heißt lokale Maximal-/Minimalstelle, wenn es eine Kugel  $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$  gibt (mit  $r > 0$ ), so dass  $f(x) \leq f(a)$  /  $f(x) \geq f(a)$  für alle  $x \in K(a, r)$   
 $f(a)$ : *lokales Maximum/Minimum* (lokale Extremalstelle)

## 10.19 Satz

$D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

- a) Sei  $f$  stetig differenzierbar. Ist  $a$  eine lokale Extremalstelle, so ist  $\text{Grad}(f)(a) = (0, \dots, 0)$
- b) Sei  $f$  2-mal stetig differenzierbar,  $\text{Grad}(f)(a) = (0, \dots, 0)$
- Hat  $H(f)(a)$  lauter positive Eigenwerte ( $> 0$ ), so ist  $a$  lokale Minimalstelle.
  - Hat  $H(f)(a)$  lauter negative Eigenwerte, so ist  $a$  lokale Maximalstelle
  - Hat  $H(f)(a)$  sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist  $a$  **keine** lokale Extremalstelle.
  - Hat  $H(f)(a)$  lauter nicht negative (nicht positive) Eigenwerte und wenn 0 Eigenwert ist, so ist keine Aussage möglich.

## 10.20 Beispiel

a)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$

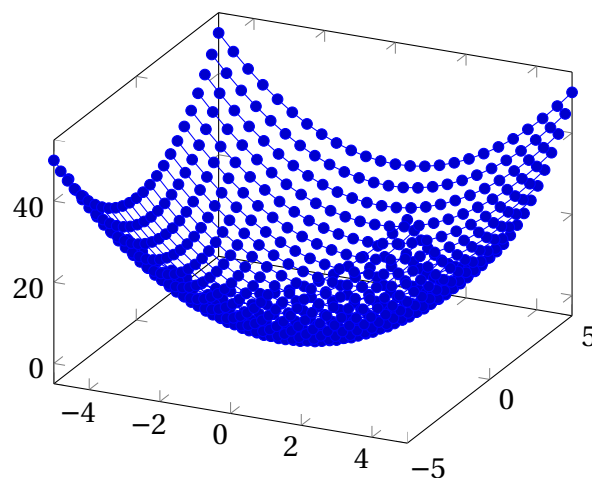


Abbildung 7:  $x^2 + y^2$

$$\text{Grad}(f)(a) = (0, 0) \Rightarrow a = (0, 0)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ Eigenwert } 2 \text{ mit Vielfachheit } 2 \Rightarrow \text{lokales Maximum}$$

b)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2 \quad a = (0, 0)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ Eigenwerte } 2, -2 \Rightarrow \text{kein lokales Maximum/Minimum}$$

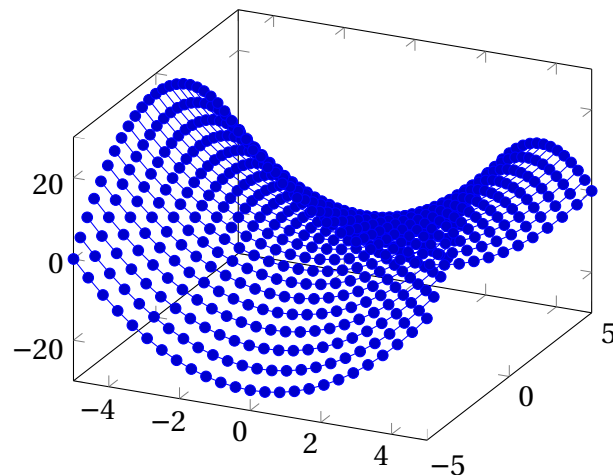


Abbildung 8:  $x^2 - y^2$

c)  $f(x_1, x_2) = x_1^1 + x_2^4 + 2x_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2^3 = 0 \quad H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$a = (-1, 0) \quad H(f)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte 2, 0  $\Rightarrow$  keine Aussage möglich

## 10.21 Geometrische Bedeutung des Gradienten

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  offen  $a \in D$ .

$(\text{Grad}(f))(a)$  ist der Vektor der in die Richtung des steilsten Anstiegs von  $f$  an der Stelle  $a$  zeigt. *Beispiel:*  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \quad a = (0, 55, 0, 65)$

$$\text{Grad}(f) = (-2x, -2y) \quad \text{Grad}(f)(a) = (-1, 1, -1, 3)$$

Steilster Anstieg an der Stelle  $(a, f(a))$  in Richtung  $(-1, 1, 1, 3)$ , d.h.  $f(a + t(-1, 1, 1, 3))$ ,  $t \geq 0$

## 11 Taylorpolynome und Taylorreihen

Funktion eine Variable  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar an Stelle  $c \in D$  bedeutet:  $f$  wird an der Stelle  $c$  durch die Tangente (d.h Graph eines Polynoms vom Grad  $\leq 1$ )

$$t_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

gut approximiert.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - t_1(x)}{x - c} = 0$$

$$t_1(c) = f(c)$$

$$t_1'(c) = f'(c)$$

Ziel: Verbesserung der Approximation von  $f$  in der Nähe von  $c$  durch Polynome

$t_n$  vom Grad  $\leq n$  mit  $f^{(i)}(c) = t_n^{(i)}(c) = c \quad i = 0, \dots, n$

Bezeichne  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(i)}$   $i$ -te Ableitung.

### 11.1 Satz und Definition

$\mathcal{I}$  Intervall,  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathcal{I}$ .

Dann gibt es genau ein Polynom  $t_n$  von Grad  $\leq n$  (das von  $f$  und  $c$  abhängt) mit

$t^{(i)}(c) = f^{(i)}(c)$  für  $i = 0, \dots, n$ .

Es ist

$$t_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(c)}{j!} \cdot (x - c)^j$$

$t_n$  heißt  $n$ -tes *Taylorpolynom von  $f$*  mit Entwicklungspunkt  $c$ .

*Beweis.* Ansatz:  $t_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x - c)^j$

(jedes Polynom vom Grad  $\leq n$  lässt sich so schreiben)

$$t^{(i)} = a_i \cdot i! + a_{i+1}(i+1) \dots 2(x - c) + \dots$$

$$t^{(i)}(c) = a_i i!$$

$$t_n^{(i)}(c) = f^{(i)}(c) \Leftrightarrow a_i = \frac{f^{(i)}(c)}{i!}$$

□

**11.2 Satz**

$\mathcal{I}$  Intervall  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal stetig differenzierbar ( $n$ -mal differenzierbar  $f^{(n)}$  stetig).

$c \in \mathcal{I}$   $t_n$   $n$ -tes Taylorpolynom zu  $f$  um  $c$ .

Ist  $f(x) = t_n(x) + R(x) \leftarrow$  Restglied

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{R(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - t_n(x)}{(x-c)^n} = 0$$

("sehr gute" Approximation in der Nähe von  $c$ )

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - t_n(x)}{(x-c)^n} & \stackrel{L'Hopital}{=} \frac{f'(x) - t'_n(x)}{n(x-c)^{n-1}} \\ & \vdots \\ & = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(n)}(x) - t_n^{(n)}(x)}{n!} = 0 \end{aligned}$$

□

**11.3 Beispiel**

a) Ist  $f = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$  ein Polynom,  $c = 0$ , so

$$t_0(x) = a_0$$

$$t_1(x) = a_1 x + a_0$$

$$\vdots$$

$$t_k(x) = f(x) = t_n(x) \text{ für } n > k$$

b)  $f(x) = e^x$ ,  $c = 0$

$$t_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} x^j = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} \text{ erste } n+1 \text{ Glieder der Potenzreihe von } e^x$$

**11.4 Satz (Taylor)**

$\mathcal{I}$  Intervall,  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$   $(n+1)$ -mal differenzierbar,  $c \in \mathcal{I}$

$t_n$  sei das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  um  $c$ .

Sei  $x \in \mathcal{I}$ .

Dann gibt es eine  $y$  zwischen  $x$  und  $c$  (hängt von  $x, c$  ab) mit



$$R(x) = f(x) - t_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(c)}{j!} (x-c)^j + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

(Taylorentwicklung von f) *Beweis* beruht auf 2. Mittelwertsatz

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \text{ mit } g(x) = (x-c)^{n+1}$$

## 11.5 Beispiel

Wie gut muss man  $n$  wählen das  $|\sin(x) - t_n(x)| < \frac{1}{100}$  für alle  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ? ( $t_n$  Taylorpolynom zu  $\sin$  um  $c = 0$ )

$$|\sin(x) - t_n(x)| = \left| \frac{\sin^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|\sin^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}$$

Suche minimales  $n$  mit  $\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} < 0,01$

$$n = 6 : \frac{\pi^7}{7! \cdot 2^7} \approx 0,0047$$

## 11.6 Korollar

$f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{J}$  Intervall ist  $f$   $(n+1)$ -mal differenzierbar,  $f^{(n)} \neq 0$  und  $f^{(n+1)} = 0$  so ist  $f$  Polynom vom Grad  $n$ .

*Beweis.* Satz von Taylor:

$$f^{(n+1)}(y) = 0 \Rightarrow f(x) = t_n(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{J} \text{ } f \text{ Polynom vom Grad } n$$

□

## 11.7 Bemerkung

$f$  2-mal stetig differenzierbar.

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 (*) \text{ für ein } y \text{ zwischen } x \text{ und } c.$$

Angenommen  $f'(c) = 0$  und  $f''(c) < 0$ . Da  $f''$  stetig existiert  $\delta > 0$  mit  $f''(x) < 0$

für alle  $x \in [c - \delta, c + \delta]$  Für diese  $x$  gilt nach (\*)

$$f(x) = f(c) + \frac{f''(y)}{2}(x-c)^2 \quad y \in [c - \delta, c + \delta]$$

$f$  hat lokales Maxima in  $c$   $f'(c) = 0, f''(c) > 0 \Rightarrow f$  hat lokale Minima.

### 11.8 Definition

$\mathcal{J}$  Intervall,  $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ , unendlich oft differenzierbar,  $c \in \mathcal{J}$ . Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

heißt *Taylorreihe* von  $f$  um Entwicklungsprodukt  $c$ .

Wunsch: Für alle  $x \in \mathcal{J}$  konvergiert der Taylorreihe, Grenzwert ist  $f(x)$ .

Erfüllbar unter gewissen Bedingungen.

### 11.9 Satz (Taylor)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a < b \in \mathbb{R}$

$f$  unendlich oft differenzierbar. Dann sind  $f^{(n)}$  stetig, insbesondere existiert

$$\|f^{(n)}\|_{\infty} := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)|$$

Es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot \|f^{(n)}\|_{\infty} = 0$ .

Ist  $c \in [a, b]$ , so ist  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$

*Beweis.* Folgt aus 11.4

□

### 11.10 Beispiel

a)  $f(x) = e^x, c = 0$

Taylorreihe:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Für alle  $a, b$  ist 11.9 erfüllt.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

b)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $c = 0$

Taylorreihe:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Analog:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} = 1 + i \cdot \frac{t}{1!} - \frac{t^2}{2!} + i \cdot \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \dots = \cos(t) + i \sin(t)$$

d)  $f(x) = \ln(x)$  auf  $]0, \infty[$

$c > 0$  Taylorreihe von  $\ln(x)$  um  $c$

$$\ln(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{c^k \cdot k} \cdot (x-c)^k := t(x)$$

Konvergiert für  $x \in ]0, 2c]$ , fort  $t(x) = \ln(x)$

Für  $x \in ]2c, \infty[$  konvergiert  $t(x)$  nicht.

$\ln(x)$  lässt sich nicht auf ganz  $]0, \infty[$  durch Taylorreihe darstellen.

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)} = 0 \text{ für alle } n$$

Taylorreihe um 0: Nullreihe, konvergiert gegen 0, aber nicht gegen  $f(x)$  für  $x \neq 0$

## Index

( $K$ -) lineare Abbildung, 64

Abbildung, 26

abelsch, 28

Additivität, 64

Adhärenzpunkt, 117

Adjunkte, 90

affine Abbildung, 112

affine Unterräume, 61

affiner Unterraum, 60

Assoziativgesetz, 27

aufgespannte Unterraum, 48

Basis, 51

Basisergänzungssatz, 55

Basiswechselmatrix, 84

Bild, 67

Bogenlänge, 116

charakteristisches Polynom, 95

Darstellungsmatrix, 78

Determinante, 87

Determinantenmultiplikationssatz, 89

diagonalisierbar, 98

Diagonalmatrix, 98

Dimension, 56

Dimensionenformel, 58

Dimensionsformel, 72

Distributivgesetz, 34

Division mit Rest, 40

Drehmatrix, 71

Dreiecksmatrix, 97

Eigenraum, 92

Eigenvektor, 92

Eigenwert, 92

Einheitsvektor, 48

Einselement, 34

elementaren Zeilenumformungen, 74

endlich erzeugt, 48

Erweiterter Euklidischer

Algorithmus, 31

Erzeugungssystem, 48

Euklidische Norm, 101

Euklidischer Abstand, 101

Euklidischer Vektorraum, 100

Euler'sche  $\varphi$ -Funktion, 31

geordnete Basis, 58

Grad, 38

Gradient, 118

Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren, 105

Gruppe, 27

Halbgruppe, 27

Hesse Matrix, 121

homogenen, 62

Homogenität, 64

Horner-Schema, 40

inhomogene, 62

Inverse, 27, 81

- 
- inverse Matrix, 81
  - inverses Element, 27
  - invertierbar, 27
  - Jacobi-Matrix, 118
  - K-Vektorraum, 44
  - kanonische Basis, 52
  - Kartesische Koordinaten, 58
  - Kegelschnitte, 115
  - Kern, 68
  - Koeffizienten, 36
  - kommutativer Ring, 34
  - Kommutativgesetz, 28
  - Komponente, 10
  - Konkatenation, 27
  - Konsequenzabbildung, 112
  - Konstante Polynome, 38
  - Koordinaten, 58
  - Koordinatenabbildung, 72
  - Körper, 35
  - linear abhängig, 49
  - linear unabhängig, 49
  - Linearkombination, 15, 47
  - lokale Extremalstelle, 122
  - längentreu, 108
  - Matrizenaddition, 27, 34
  - Matrizenmultiplikation, 10, 27, 34
  - Monoid, 27
  - Monome, 38
  - neutrales Element, 27
  - Normierung, 103
  - Nullelement, 34
  - Nullpolynom, 36
  - Nullpunkt, 61
  - Nullraum, 12, 47
  - Nullteilerfreiheit, 36, 38
  - Nullvektor, 44
  - offene Kugel, 117
  - orthogonal, 102, 109
  - orthogonale Abbildung, 107
  - Orthogonalraum, 102
  - Orthonormalbasis, 103
  - Orthonormalsystem, 103
  - Ortsvektoren, 10
  - Parallelogrammregel, 10
  - Parameter-Darstellung, 116
  - partiell differenzierbar, 118
  - Partielle Ableitung, 118
  - Permutationen, 32
  - Polynom, 36
  - Polynomring, 37
  - Rang, 67, 76
  - Rechtssystem, 107
  - Ring, 33
  - Ring mit Eins, 34
  - selbstadjungiert, 114
  - skalare Funktion, 116
  - Skalarprodukt, 100
  - Skalarproduktraum, 100
  - Spaltenrang, 74
  - Spaltenvektoren, 10, 44
  - Standard-Skalarprodukt, 100

---

stetig, 117  
stetig differenzierbar, 119  
symmetrische Abbildung, 114  
systematische Gruppe, 32  
  
Taylorpolynom, 125  
Taylorreihe, 127  
Teilraum, 46  
Translation, 112  
  
unendlich-dimensional, 56  
Unterraum, 12, 46  
Untervektorraum, 46  
  
Vektor, 11  
Vektorprodukt, 106  
Vektorraum, 10  
Vektorraum-Homomorphismus, 64  
Verknüpfung, 26  
Verknüpfungssymbole, 26  
Vielfachheit, 95  
  
Winkel, 102  
Winkeltreu, 108  
  
Zahlengerade, 10  
Zeilenrang, 74  
Zeilenvektoren, 115  
Zykloid, 117  
  
ähnliche Matrizen, 86