Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Ende des SS 2015

0 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1 \in \mathbb{R} \right\}$

Spaltenvektoren der Länge n : $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t$

$a_1, \dots, a_n$ *Komponente* der Spaltenvektoren.
Wie bei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

(Multiplikation entspricht der Matrizenmultiplikation und ist nicht möglich falls $n > 1$)

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Zahl (*Skalar*)

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$$

Addition+Abbildung : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ mit Addition und Multiplikation mit Skalaren : $\mathbb{R}$-*Vektorraum*

Die Vektoren im $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R}), \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ entsprechen Punkten auf der Zahlengerade, Ebene, dreidimensionalen Raums. Punkte des $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ lassen sich identifizieren mit, *Ortsvektoren* Pfeile mit Beginn in 0 (Komp = 0) und Ende im entsprechenden Punkt

Addition von Spaltenvektoren entspricht der Addition von Ortsvektoren entsprechend der Parallelogrammregel. Multiplikation mit Skalaren a :

Streckung (falls $|a| > 1$)

Stauchung (falls $0 \geq |a| \geq 1$)

Richtungspunkt, falls $a < 0$

Abbildung 1: Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor

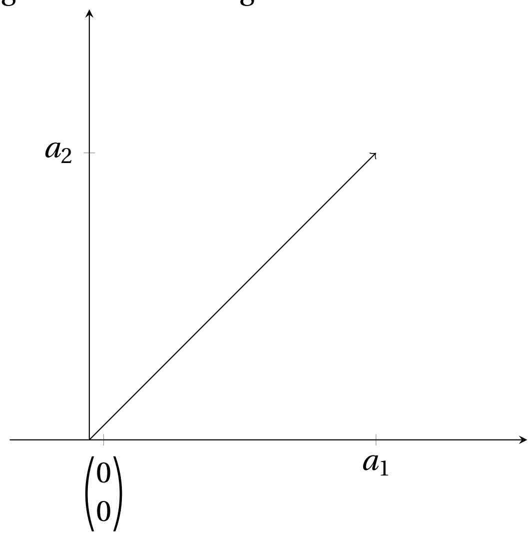
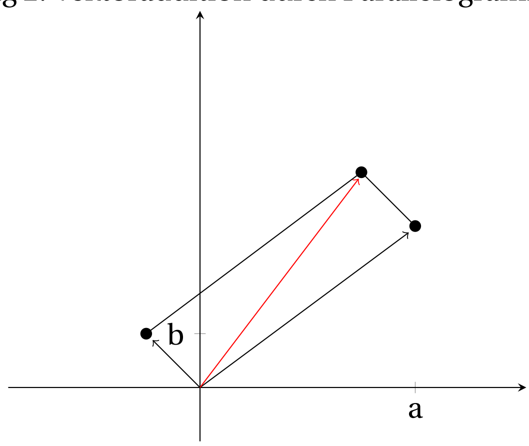


Abbildung 2: Vektoraddition durch Parallelogrammbildung



0.1 Satz (Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ Dann gilt:

a)

(1.1)	$u+(v+w)=(u+v)+w$	
(1.2)	$v+0=0+v=v,$ wobei 0 *Nullvektor*	
(1.3)	$v+-v=0$	$\mathbb{R}^n$ kommutative
(1.4)	$u+v=v+u$	Gruppe
(2.1)	$(a+b)v=av+bv$	
(2.2)	$a(u+v)=au+av$	
(2.3)	$(a\cdot b)v=a(bv)$	
(2.4)	$1v=v$	

b) $0\cdot v=0$ und $a\cdot 0=0$
Beweis folgt aus entsprechenden Rechenregeln in 0

0.2 Definition

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{U}\supset\mathbb{R}^n$ heißt *Unterraum* (oder *Teilraum* von $\mathbb{R}^n$), falls gilt:

(1) $\forall u_1, u_2\in\mathcal{U}:\ u_1+u_2\in\mathcal{U}$ (Abgeschlossenheit bezüglich +)

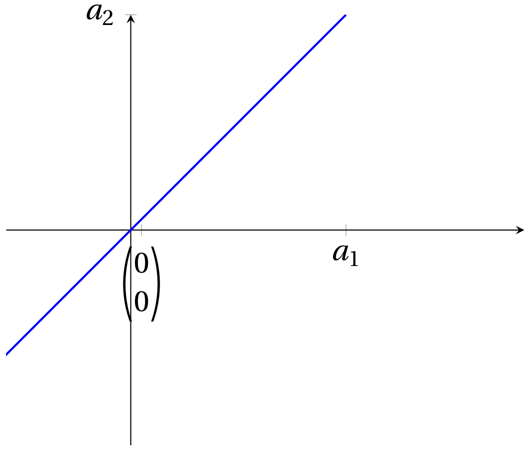
(2) $\forall u\in\mathcal{U}\forall a\in\mathbb{R}:\ au\in\mathcal{U}$(Abgeschlossenheit bezüglich Mult. mit Skalaren)

$\mathcal{U}$ enthält Nullvektor {0} Unterraum von $\mathbb{R}^n$ (Nullraum)
$\mathbb{R}^n$ ist Unterraum von $\mathbb{R}$

0.3 Beispiele

a) $0\neq v\in\mathbb{R}^2$ $\quad G=\{av : a\in\mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$
$(a_1 v, a_2 v \quad\in\quad G, (a_1\ +$
$a_2)v\in G$ 2.1 in 0.2
$av\in G, b\in\mathbb{R}(ba)v\in G)$
G = Ursprungsgerade durch $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und v = $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ $n=2$:

Abbildung 3: Gerade dargestellt durch Vektoren



b) $v, w \in \mathbb{R}^n$

$E = \{av + bw : a, b \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$

$v = o, w = o :\ E = \{o\}$

$v \neq o \quad w \notin \{av :\ a \in \mathbb{R}\}$

$E = \mathbb{R}^2$ $n = 3 :$ Ebene durch $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ und durch v, w

Ist $w \in \{av : a \in \mathbb{R}\}$, so ist $E = G$ (aus a))

c) $v, w \neq o$

$G' = \{w + av : a \in \mathbb{R}\}$

$[v \in G' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w + av \in o \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} :\ w = (-a)v \in G]$

0.4 Satz

Seien $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2$ Unterräume von $\mathbb{R}^n$

a) $\mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$

b) $\mathscr{U}_1 \cup \mathscr{U}_2$ ist im Allgemeinen KEIN Unterraum von $\mathbb{R}^n$

c) $\mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 : \mathscr{U}_1, u_2 : \mathscr{U}_2\}$ (Summe von $\mathscr{U}_1$ und $\mathscr{U}_2$) ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

d) $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \quad \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ und $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ ist der kleinste Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ enthält. (d.h ist w Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in w$, so $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq W$)

Beweis. a) ✓

b) c) □

0.5 Beispiel

a) **??**b) $G_1 = \{av : a \in \mathbb{R}\}$

$G_2 = \{aw : a\}$

$G_1 + G_2 = E$

b) $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t + u \\ u \end{pmatrix} \right\}$$

$E_1 + E_2$ Unterräume von $\mathbb{R}^3$ (10.3.b)

$E_1 \cap E_2 =?$

$$v \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t + u \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = u, t + u = 0, s = u$$

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$E_1 + E_2 = ?$

$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, denn :

Es gilt sogar:

$\mathbb{R}^3 = E_1 + G_2$, wobei

$$G_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq E_@$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z-y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ z-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

0.6 Definition

a) $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n, a_1, \ldots a_m \in \mathbb{R}$

Dann heißt $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i$

Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$ (mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_m$).

[Zwei formal verschiedene Linearkombinationen der gleichen $v_1, \ldots, v_m$ können den gleichen Vektor darstellen

$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$]

b) Ist $M \subseteq R^n$, so ist der von M *erzeugte* (oder *aufgespannte*) Unterraum $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ (oder $\langle M \rangle$) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann.

$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \right\}$ falls $M \neq \emptyset$

$\langle \varnothing \rangle_{\mathbb{R}} := \{\varnothing\}$
$M = \{v_1, \dots v_m\}$, so

0.7 Beispiel

a) $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\langle e_1, \dots e_n \rangle = \mathbb{R}^n$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

b) $\mathcal{U} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

Ist $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$?

Für welche $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gibt es geeignete Skalare $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

$$\begin{array}{cccc} a & +3b & +2c & = x \\ 2a & +2b & +3c & = y \\ 3a & +b & +4c & = z \end{array}$$

LGS für die Unbekannten a, b, c mit variabler rechter Seite : Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & -4 & -1 & y-2x \\ 0 & -8 & -2 & z-3x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

LGS ist lösbar $\Leftrightarrow x-2y+z=0$.

Dass heißt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{U} \Leftrightarrow x-2y=z=0$

$$\mathscr{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x-2y+z=0, x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix} : x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{U}$$

Lösungen des LGS: c frei wählen, b, a ergeben sich, $($falls $x-2y+z=0)$ z.B $c=0, b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y, a=x-3b=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y$

Ist $x-2y+z=0$, so ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{llll} 6x^2 & -3xy & +y^3 & =5 \\ 7x^3 & +3x^2y^2 & -xy & =7 \end{array}$$

0.9 Definition

$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear abhängig*. falls $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ existieren, *nicht alle = 0*, mit $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$.
Gibt es solche Skalare nicht, so heiSSen $v_1, \ldots, v_m$ *linear unabhängig* (d.h. aus $a_1 v_1 \ldots a_n v_n = 0 folgt a_1 = \ldots = a_n = 0$).
(Entsprechend $\{v_1 \ldots v_n\}$ linear abhängig/linear unabhängig)
Per Definition : $\varnothing$ is linear unabhängig.

0.10 Beispiel

a) σ + v $\in \mathbb{R}^n$ Dann ist v linear unabhängig:
Zu zeigen : Ist av = $\sigma \Rightarrow a = 0$
Sei $v \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Da $v \neq \sigma$,
existiert mindestens ein i mit $b_i \neq 0$.
Angenommen $\sigma v = \begin{pmatrix} 0 b_1 \\ \vdots \\ 0 b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma$.
Dann $ab_i = 0$ Da $b_i \neq 0$, folgt a = 0.
σ ist linear abhängig:

$$1 \cdot \sigma = \sigma$$

b) $v_1 = \sigma . v_2 \ldots, v_m$ ist linear abhängig :
$\sigma = 1 \cdot \sigma + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_m$

c) $v, w \in \mathbb{R}^n$
$v \neq \sigma \neq w$
① v,w sind linear abhängig $\Leftrightarrow$
② $v \in \langle w \rangle_\mathbb{R} \Leftrightarrow$
③ $w \in \langle v \rangle_\mathbb{R} \Leftrightarrow$
④ $\langle v \rangle_\mathbb{R} = \langle w \rangle_\mathbb{R}$
①

v, w linear abhängig $\to \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, nicht beide $= 0$, $a_1 v + a_2 w = \sigma$. Dann beide $(a_1, a_2) \neq 0$

$a_1 v = -a_2 w \mid \cdot \frac{1}{a_1}$

$v = -\frac{-a_2}{-a_1} w \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ ②

②

$v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ dass heißt $v = aw$ für ein $a \in \mathbb{R}$ Dann $a \neq 0$, da $v \neq \sigma$. $w = \frac{1}{a} \cdot v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ ③

③

$w = bv$ für ein $b \in \mathbb{R} b \neq 0$,da $w \neq \sigma$.

$aw \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow aW = (ab)v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$

$\langle w \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$

$w = \frac{1}{b} w$ Dann analog $\langle v \rangle \mathbb{R} \subseteq \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$

Also $\langle v \rangle \mathbb{R} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ ④

④

$v \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$, dass heißt.

$v = a \cdot w$ für ein $a \in \mathbb{R}$

$a \cdot v + (-a)w = \sigma \Rightarrow v, w$ sind linear abhängig ①

d) $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig.

$$\sigma = a_1 e_1 + \ldots a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

e) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ sind linear abhängig $\mathbb{R}^2$:

Gesucht sind alle $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Führt auf LGS für a,b,c:

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 6 & 0\\2 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -3 & 6 & 0\\0 & 7 & -10 & 0\end{pmatrix}$$

c ist frei wählbar

f) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ sind linear abhängig in $\mathbb{R}^3$,

10.8b) : $\frac{5}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

0.11 Satz

Seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$

a) $v_1, \ldots, v_m$ sind linear abhängig ①

$\Leftrightarrow \exists i \ldots v_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} b_j v_j$②

$\Leftrightarrow \exists i : \langle v_1, \ldots, v_m\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+!}, \ldots, v_m\rangle_{\mathbb{R}}$③

b) $v_1, \ldots, v_m$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Jedes $v \in \langle v_1, \ldots, v_m\rangle_{\mathbb{R}}$ lässt sich auf *genau eine* Weise als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$ schreiben.

c) Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig und es existiert $v \in \mathbb{R}^n$ mit$v \neq \langle v_1, \ldots, v_m\rangle_{\mathbb{R}}$ dann sind auch $v_1, \ldots, v_m, v$ linear unabhängig

Beweis. a) ① $\Rightarrow$ ②

$v_1, \ldots v_m$ sind linear abhängig

$\Rightarrow \exists a_1, \ldots, a_m$ nicht alle $= 0$,

$a_a v_i + \ldots + a_m v_m = 0$

Sei $a_i \neq 0$

$a_i v_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} -a_j v_j$

$v_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} -\frac{a_j}{a_i} v_j$ ②

② $\Rightarrow$ ③

Klar : $\langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, v_m \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$

Zeige $\supseteq \quad v = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$, d.h

$v = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j v_j = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} a_j v_j + a_i (\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} b_j v_j) = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} (a_j + a_i b_j) v_j \in \langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$②

③ $\Rightarrow$ ①

$v_i \in \langle v_1 \dots v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \rangle_{\mathbb{R}}$, dass heißt es existiert

$a_1, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_m \in \mathbb{R}$ mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} a_j v_j$$

$\Rightarrow \sigma = a_1 + v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots a_m v_m \qquad v_1 \dots v_m$ linear abhängig □

0.12 Satz

Sind $v_i, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, so

sin $v_i, \dots, v_{n+1}$ linear abhängig.

(Insbesondere ist $m > n$ und $v_i, v_m \in \mathbb{R}^n$, so sind $v_1, \dots, v_m$ linear abhängig)

Beweis. Suche alle $a_1, \dots, an+1 \in \mathbb{R}$ mit $a_i v_1 + \dots a_{n+1} v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

Führt zu LGS für $a_1, \dots, a_{n+1}$ mit Koeffizientenmatrix $(v_1, \dots, v_2, \dots, v_{n+1}) = A$

Frage : Hat $A \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ nicht triviale Lösung?

Gauß :

$$\left(\mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow\right)$$ $\square$

0.13 Definition

Sei $\mathscr{U}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$
$B \subseteq \mathscr{U}$ heißt Basis von $\mathscr{U}$ falls:

(1) $\langle B\rangle_{\mathbb{R}} = U$

(2) B ist linear unabhängig

$(\mathscr{U} = \{\sigma\}, B = \varnothing)$

0.14 Beispiel

a) $e_1, \ldots, e_n$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$ (kanonische Basis)

$$e_1 = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix}a_i\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

b) $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$ ist Basis von R^2:

Sei $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in R^2$. Gesucht: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
LGS mit variabler rechter Seite

$$\begin{aligned} 1a \quad +3b \quad &= x\\ 2a \quad +2b \quad &= y \end{aligned}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösung: $b = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x \quad a = x - 3b = x + \frac{3}{4}y - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$

z.B $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbb{R}^2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig nach 0.10c)

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ Basis.

c) $\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (0.10c))

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $\mathcal{U}$

0.15 Satz

Jeder Unterraum $\mathcal{U}$ des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Basis.

Beweis. Ist $\mathcal{U} = \{\sigma\}$,so $b = \emptyset$.
Sei also $\mathcal{U} \neq \{\sigma\}$.

v_1 ist linear unabhängig.
$\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{U}$.
Ist $\mathcal{U} = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$, so ist $\{v_1\}$ Basis von $\mathcal{U}$
Ist $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{U}$.
Sei $v_2 \in \mathcal{U} \setminus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$.
Nach 0.11c) ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig. Ist $\rangle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{U}$, so ist $\{v_1 . v_2\}$ Basis von $\mathcal{U}$.
Ist $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq U$ so wähle v_3 usw.
Es existiert $m \neq n$ mit $\langle v_1, \dots v_m \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$ und $v_1 \dots, v_m$ sind linear unabhängig.
(Denn noch 0.12 gibt es im $\mathbb{R}^n$ keine n+1 linear unabhängige Vektoren) □

0.16 Satz

Je zwei Basen B_1, B_2 eines Unterraums $\mathcal{U}$ des $\mathbb{R}^n$ enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren $|B_1| = |B_2|$.
Insbesondere:
Je zwei Basen des $\mathbb{R}^n$ enthalten n Vektoren

0.17 Definition

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$, B Basis von $\mathcal{U}$, $|B| = m$.
Dann ist m die *Dimension* von $\mathcal{U}$, $\dim(u) = m$.
$\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathcal{U}) \neq n$.

0.18 Satz (Basisergänzungssatz)

Sei $\mathcal{U}$ Unterraum der $\mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathcal{U}$ eine Menge m linear unabhängiger Vektoren. Dann lässt sich M zu einer Basis von $\mathcal{U}$ ergänzen.

Beweis. Analog zu 0.15 □

0.19 Korollar

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $\dim(\mathcal{U}) = n$, dann ist $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

Beweis. Sei B Basis von $\mathcal{U}$, also $|B| = n$.
Nach 0.18 (dort mit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, $M = B$) lässt sich B zu Basis B' von $\mathbb{R}^n$ ergänzen.
$\dim(\mathbb{R}^n) = n \Rightarrow |B'| = n$.
Also B = B'
$\mathbb{R}^n = \langle B' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{U}$ □

0.20 Definition

Ist $\mathcal{U}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$, B = $(u_1 \dots, u_m)$ eine geordnete Basis von $\mathcal{U}$. Nach 0.11b), lässt sich jeder Vektorraum $\mathcal{U} = \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$ *eindeutig* als Linearkombination

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

schreiben.
$(a_1 \dots, a_m)$ heißen *Koordinaten* von u bzgl. der Basis B.

0.21 Beispiele

a) $B(e_1 \dots, e_m)$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$.
   Koordinaten von $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ bzgl. B:
   $(a_1 \dots, a_n)$ *kartesische* Koordinaten. (*Rene Descartes, 1596-1650*)

Anfang des WS 2015/16

1 Algebraische Strukturen

13.10.2015

1.1 Definition

Sei $X \neq \varnothing$. Eine *Verknüpfung* auf X ist :

$$\begin{cases} X \times X & \longrightarrow X \\ (a,b) & \longrightarrow a \star b \end{cases} \text{ ('Produkt' von a und b)}$$

$\star$ ist Platzhalter für andere Verknüpfungssymbole, die in speziellen Beispielen auftreten können.

1.2 Beispiele

a) Addition + und Multiplikation $\cdot$ sind Verknüpfungen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Multiplikation ist *keine* Verknüpfung auf der Menge der negativen ganzen Zahlen.

b) Division ist keine Verknüpfung auf $\mathbb{N}$. Division ist Verknüpfung auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c) $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$

$a \oplus b := (a+b) \mod n \in \mathbb{Z}_n$

$a \circledcirc b := (a \cdot b) \mod n \in \mathbb{Z}_n$

Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}_n$

$n = 7:$ $\quad 5 \circledcirc 6 = 2$

$\quad 5 \oplus 6 = 4$

$n = 2:$ $\quad \mathbb{Z}_n = \{0, 1\}$

$\quad 0 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 = 0$

$\quad \circledcirc = \cdot$

d) M Menge, X = Menge aller Abbildungen $M \longrightarrow M$. Verknüpfung auf X: Hintereinanderausführung von Abbildungen: $\circ$

$(f, g) : M \longrightarrow M$, So $f \circ g : M \to M$

$(f \circ g)(m) = f(g(m)) \in M, m \in M$

Im Allgemeinen ist $g \circ f \neq f \circ g$

e) $X = \{0,1\}$
2-stellige Aussagen, Junktoren wie $\wedge, \vee, \text{ XOR }, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ heißen Verknüpfungen auf X. 0 entspricht f, 1 entspricht w.
$0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 1 = 1$
$0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1$ (= 'Multiplikation')
$0 \text{ XOR } 0 = 0, 1 \text{ XOR } 0 = 1, 0 \text{ XOR } 1 = 1, 1 \text{ XOR } 1 = 0$ (= Addition mod 2)

f) $X = M_n(\mathbb{R})$ = Menge der $n \times n$- Matrizen über $\mathbb{R}$.
Matrizenaddition ist Verknüpfung auf X.
Matrizenmultiplikation ist Verknüpfung auf X.

g) M Menge. X Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus M ('Wörter' über M).
Verknüpfung: Hintereinanderausführung zweier Folgen (Konkatenation).
$M = \{0,1\}, w_1 = 1101, w_2 = 001$
$w_1 w_2 = 110111$
$w_2 w_1 = 0011101$

1.3 Definition

Sei $X \neq 0$ eine Menge mit Verknüpfung $\star$.

a) X, genauer $(X, \star)$ ist *Halbgruppe*, falls $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ für alle $a, b, c \in X$. (*Assoziativgesetz*)

b) $(X, \star)$ heißt *Monoid*, falls $(X, \star)$ Halbgruppe ist und ein $e \in X$ existiert mit $e \star a = a$ und $a \star e = a$ für alle $a \in X$. e heißt *neutrales Element* (später, e ist eindeutig bestimmt).

c) Sei $(X, \star)$ ein Monoid. Ein Element $a \in X$ heißt *invertierbar*, falls $b \in X$ existiert (abhängig von a) mit $a \star b = b \star a = e$. b heißt *inverses Element* (das *Inverse*) zu a (später: wenn b existiert, so ist es eindeutig bestimmt).

d) Monoid $(X, \star)$ heißt *Gruppe*, falls jedes Element in X bezüglich $\star$ invertierbar ist.

e) Halbgruppe, Monoid, Gruppe $(X,\star)$ bezüglich kommutativ (oder *abelsch*) falls $a \star b = b \star a$ für alle $a, b \in X$ (Kommutativgesetz).
(Nach: Abel, 1802-1829)

14.10.2015

«««< HEAD

1.4 Bermerkung

In Halbgruppe liefert jede sinnvolle Klammerung eines Produktes mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element. =======

1.5 Bemerkung

In Halbgruppe liefert jede sinnvolle Klammerung eines Produktes mit endlich vielen Faktoren das gleiche Element.
»»»> dbd12bd4a4b0c211913e023b2cc43fbc6e314244
(n = 4)

$$(a\star(b\star c))\star d \underset{\text{AG}^1}{=} ((a\star b)\star c)\star d \underset{\text{AG}^1}{=} (a\star b)\star(c\star d) \underset{\text{AG}^1}{=} a\star(b(c\star d)) \underset{\text{AG}^1}{=} a\star((b\star c)\star d)$$

Klammern werden daher meist weggelassen.
$a^n = \underset{n\in\mathbb{R}}{\underset{\longleftarrow n \longrightarrow}{a\star\ldots\star a}}$ "Potenzen eindeutig definiert"

1.6 Proposition

a) In einem Monoid $(X,\star)$ ist das neutrale Element eindeutig bestimmt.

b) Ist $(X,\star)$ Monoid und ist $a \in X$ invertierbar, so ist das Inverse zu a eindeutig bestimmt. Bezeichnung: a^{-1}

c) Ist $(X,\star)$ Monoid und wenn $a, b \in X$ invertierbar sind, so auch $a \star b$.
$(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$

d) Die Menge der invertierbaren Elemente in einem Monoid $(X,\star)$ bilden bezüglich $\star$ eine Gruppe.

[1] Assoziativgesetz

Beweis. a) Angenommen: $e_!, e_2$ sind neutrale Elemente. Dann:

$$e_1 = e_1 \star e_2 = e_1 \star e_2 = e_2 \qquad ↯$$

b) Angenommen a hat 2 inverse Elemente b_1, b_2 also.

$$a \star b_1 = e, b_2 \star a = e$$
$$b_1 = e \star b_1 = (b_2 \star a) \star b_1 = b_2 \star (a \star b_1) = b_2 \star e = b_2 \qquad ↯$$

c)
$$(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = a \star (b \star b^{-1}) \star a^{-1} = a \star e \star a^{-1} = e$$

Analog: $(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = e$
Also: $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$
d) $\mathscr{I}$= Menge der inversen Elemente in $(X, \star)$,
$e \in \mathscr{I}$, dann $e \star e = e$, dass heißt $e^{-1} = e, \star$ ist Verknüpfung auf $\mathscr{I}$.
Zu zeigen: $a, b \in \mathscr{I} \Rightarrow a \star b \in \mathscr{I}$ Folgt aus c).
Assozativgesetz gilt in $\mathscr{I}$, $a \in \mathscr{I} \Rightarrow a^{-1} \in \mathscr{I}$, denn $(a^{-1})^{-1} = a$ □

Bemerkung: Multiplikation mit a^{-1} macht Multiplikation mit a (Verknüpfung) rückgängig.

1.7 Beispiel

a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Halbgruppen bezüglich +.
   $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind bezüglich + Monoide mit neutralen Element 0.
   $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ ist kein Monoid bezüglich +, aber $\mathbb{N}_0$.
   $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Gruppen bezüglich +. Inverses Element zu $a : -a$
   $\mathbb{N}$ ist keine Gruppe bezüglich +, Inverse Elemente in $\mathbb{N}_0$: $\{0\}$

b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Monoide bezüglich $\cdot$ (neutrales Element 1). Keine Gruppen (in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist 0 nicht invertierbar).
   $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Gruppen.

Invertierbare Elemente in $\mathbb{Z}$ :: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenes Inverses}}}{\{1,-1\}}$ $\leftarrow$ Gruppe bezüglich $\cdot$

c) M Menge.
X = Menge aller Abbildungen $M \longrightarrow M$ mit Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung.
Monoid, neutrales Element. id_M
$f \circ id_M = f = id_M \circ f$
$id_M(m) = m$ für alle $m \in M$.
Invertierbar sind genau die bijektiven Abbildungen $M \longrightarrow M$, Inverse = Umkehrabbildung.
$f : M \longrightarrow M$ bijektiv
$\quad f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$
'Proposition' on page 23 d): Die bijektive n Abbildung, $M \longrightarrow M$ bilden bezüglich $\circ$ eine Gruppe

d) M = Menge z.B $\{0,1\}$, x Menge aller endlichen Folgen über m.Halbgruppe mit Verknüpfung Konkatenation . Nimmt man die leere Folge mit hinzu, ist es das neutrale Element. Dann: Monoid.

e) $M_n(\mathbb{R})$ Menge der Matrizen über $\mathbb{R}$.
Addition: neutrales Element $0-Matrix$, Inverse zu A ist -A. (M,Addition) ist Gruppe
Multiplikation: $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ Halbgruppe mit neutralem Element I_m

f) $n \in \mathbb{N}$ $\qquad \mathbb{Z}_n = \{0,\dots,n-1\}$ $\qquad$ Verknüpfung $\oplus$
$a \oplus b = a + b \mod n$
$(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ ist Gruppe.
Assoziativgesetz: $a,b,c \in \mathbb{Z}_n$

$$\begin{aligned}
(a\oplus b)\oplus c &= (a+b \mod n) \mod n \\
&\underset{\text{Mathe I}}{=} ((a+b)+c) \mod n \\
&= (a+(b+c)) \mod n \\
&\underset{\text{Mathe I}}{=} (a+(b+c) \mod n) \mod n \\
&= (a+(b\oplus c)) \mod n \\
&= (a\oplus(b\oplus c))
\end{aligned}$$

0 ist neutrales Element bezüglich $\oplus$

0 ist sein eigenes Inverse.

$1 \leq i \leq n \qquad n - i \in \mathbb{Z}_n$ Inverses zu i

$i \oplus (n-i)$

$= (i + (n-i)) \mod n = n \mod n = 0$

g) $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}_0$ Verknüpfung $\circledcirc$ *n > 1*

$a \circledcirc b = a \cdot b \mod n$

$(\mathbb{Z}_n \circledcirc)$ *ist Monoid*

Assoziativgesetz wie bei $\oplus$.

1 ist neutrales Element bei $\circledcirc$ Keine Gruppe bezüglich $\circledcirc$, denn 0 hat kein Inverses

1.8 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$

a) Die Elemente in $(\mathbb{Z}_n, \circledcirc)$, die invertierbar bezüglich $\circledcirc$ sind, sind genau diejenigen $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$.
Für solche a bestimmt man das Inverse folgendermaßen:
Bestimme $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot a + t \cdot n = 1$ (Erweiterter Euklidischer Algorithmus)
Dann ist $a^{-1} = s \mod n$

b) $\mathbb{Z}_n{}^* := \{a \in \mathbb{Z}_n : \mathrm{ggT}(a, n) = 1\}$ ist Gruppe bezüglich $\circledcirc$.
$|\mathbb{Z}_n{}^*| =: \varphi(n)$ *Euler'sche φ-Funktion* (Leonard Euler 1707-1783)

c) Ist p eine Primzahl so ist $(\mathbb{Z}_p \setminus 0, \circledcirc)$ eine Gruppe. *Beweis* folgt aus b)

Beweis. a) Angenommen $a \in \mathbb{Z}_n$ invertierbar bezüglich $\circledcirc$

D.h es existiert $b \in Z_n$ mit $a \circledcirc b = 1$

$a \cdot b \mod n = 1$, d.h es existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot b = 1 + k \cdot n, 1 = a \cdot b - k \cdot n$

Sei $d = \mathrm{ggT}(a.n)$:

$$\begin{array}{lll} & d \mid a & \Rightarrow d \mid a \cdot b \\ & d \mid n & \Rightarrow d \mid k \cdot n \\ \Rightarrow & d \mid a \cdot b & -k \cdot n = 1 \\ \Rightarrow & d = 1 & ggT(a, n) = 1. \end{array}$$

Umgekehrt sei $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $\mathrm{ggT}(a,n) = 1$
EEA liefert $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot a + t \cdot n = 1$.

$$\begin{aligned}
& (s \mod n) \circledcirc a && = ((s \mod n) \cdot a) \mod n \\
\underset{\text{Mathe I}}{=}\ & (s \cdot a) \mod n && = (1 - t \cdot n) \mod n \\
=\ & (1 - \underbrace{(t \cdot n) \mod n)}_{=0} \mod n && = 1 \mod n = 1
\end{aligned}$$

b) 'Proposition' on page 23 d) □

1.9 Beispiel

$n = 24, \quad a = 7$ ist invertierbar in $(Z_{24}, \circledcirc)$
EEA:

$$1 = (-2) \cdot 24 + 7 \cdot 7$$

$a^{-1} = 7 \mod 24 = 7 = a$

1.10 Beispiel

Sei $M = \{1, \dots, n\}$
Die Menge der bijektiven Abbildungen auf M (*Permutationen*) bilden nach 1.7c) eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung $\circ$.
Bezeichnung: S_n *systematische Gruppe von Grad n*
Es ist $|S_n| = n!$ (Mathe I)

z.B : $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi$$

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\varrho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \varrho^{-1} = id$$

$$\pi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varrho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

S_n ist für $n \geq 3$ nicht abelsch (nicht kommutativ)

1.11 Satz (Gleichungslösen in Gruppen)

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe $a, b \in G$ (in allgemeinen Gruppen schreibt man Verknüpfungen oft als $\cdot$ statt $\star$, oft auch ab statt $a \cdot b$)

a) Es gibt genau ein $x \in G$ mit $ax = b$ (nämlich $x = a^{-1}b$) ["Teilen durch" a von links = Multiplikation von links mit a^{-1}]

b) Es gibt genau ein $y \in G$ mit $ya = b$ (nämlich $y = ba^{-1}$)

c) Ist $ax = bx$ für ein $x \in G$, so ist $a = b$
Ist $ya = yb$ für ein $y \in G$, so ist $a = b$

Beweis. a) Setze $x = a^{-1} b \in G$.
$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1})b = a \cdot b = b$ Eindeutigkeit : Sei $x \in G$ mit $ax = b$
Multiplikation beide Seiten mit a^{-1},
$x = (a^{-1}a)x = a^{-1}b$

b) analog
c) $ax = bx$ Multiplikation mit x^{-1} Dann a= b □

1.12 Beispiel

a) Suche Permutation $\xi \in S_3$ mit $\varrho \circ \xi = \pi$ (vgl. 1.10). 'Satz (Gleichungslösen in Gruppen)' on page 28a):

$$\xi = \varrho^{-1} \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) 1.11c) gilt in Monoiden, die keine Gruppen sind, im Allgemeinen nicht:
Beispiel: $(\mathbb{Z}_0, \circledcirc)$
$2 \circledcirc 3 - 0 = 3 \circledcirc 3$, aber $2 \neq 4$

1.13 Definition

a) $R \neq \emptyset$ Menge mit 2 Verknüpfungen + und · heißt *Ring*, falls

(1) $(R,+)$ ist kommutative Gruppe (neutrales Element: 0, *Nullelement*, Inverses zu a : $-a$ $\qquad b+(-a) =: b-a$)

(2) $(R,\cdot)$ ist Halbgruppe

(3) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ und $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ $\qquad$ (· vor +)
Distributivgesetz

b) Ring R heißt *kommutativer Ring* falls $(R,\cdot)$ kommutative Halbgruppe ist.

c) Ring R heißt *Ring mit Eins*, falls $(R,\cdot)$ Monoid, neutrales Element $1 \neq 0$ (*Einselement, Eins*)

1.14 Beispiele

a) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kommutativer Ring mit 1, invertierbare Elemente bezüglich · sind 1 und -1.

b) $(\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathbb{R},+,\cdot),(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind kommutative Ringe mit Eins.
Alle Elemente $\neq 0$ sind invertierbar bezüglich ·

c) $n \in \mathbb{N}, n > 1$.
$\mathbb{Z}_n = \{0,\ldots,n-1\}$
$(\mathbb{Z}_N,\oplus,\circledcirc)$ ist kommutativer Ring mit Eins:
Wegen 'Beispiel' on page 24 f),g) sind nur die Distributivgesetz zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
& (a\oplus b)\circledcirc c = ((a\oplus b)\cdot c) \mod n \\
= \ & (((a+b) \mod n)\cdot c) \mod n \\
\underset{\text{Mathe I}}{=} \ & ((a+b)\cdot) \mod n \\
= \ & (a\cdot c + b\cdot c) \mod n \\
\underset{\text{Mathe I}}{=} \ & ((a\cdot c) \mod n + (b\cdot c) \mod n) \mod n \\
= \ & a\circledcirc c \oplus b\circledcirc c
\end{aligned}
$$

d) $M_n(\mathbb{R}), n\times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$, mit Matrizenaddition + und, Multiplikation · ist Ring mit Eins.

(Folgt aus Rechenregeln für Matrizen, Mathe II) Eins : E_n $\quad n \times n$-Einheitsmatrix
Für $n \geq 2$ ist $M_n(\mathbb{R})$ kein kommutativer Ring

1.15 Proposition

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$.

a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

b) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Beweis.

a) $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a \underset{\text{DG}^2}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a$
Addiere auf beiden Seiten $-(0 \cdot a)$
$0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$

b) $(-a) \cdot b + ab = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b \underset{\text{a)}}{=} 0$
$\Rightarrow (-a) \cdot b = -(ab)$ Analog $a \cdot (-b) = -(ab)$

c) $(-a) \cdot (-b) \underset{\text{b)}}{=} -(a \cdot (-b)) \underset{\text{b)}}{=} -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$

□

1.16 Bemerkung

a) In einem Ring mit Eins sind 1 und −1 bezüglich · invertierbar.
$1 \cdot 1 = 1 \quad (1^{-1} = 1)$
$(-1) \cdot (-1) = 1 \quad$ (1.15c)), dass heißt. $(-1)^{-1} = -1$
0 Ist nie bezüglich Multiplikation invertierbar, denn $0 \cdot a = 0 \neq 1$. 1.15a)

b) Es kann sein dass $1 = -1$ gilt. Zum Beispiel:
$(\mathbb{Z}_2, \oplus, \circledcirc) \quad 1 \oplus 1 = 0 \quad 1 = -1$

[2] Distributivgesetz

1.17 Definition

Ein kommutativer Ring $(R, +, \cdot)$ mit Eins heißt *Körper*, wenn jedes Element $\neq 0$ bezüglich Multiplikation invertierbar ist.

1.18 Beispiel

a) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper, $\mathbb{Z}$ nicht.

b) $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \circledcirc)$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl.
$\mathbb{Z}_n$ ist kommutativer Ring mit 1.
'Beispiele' on page 29c: Die invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}_n$ sind alle $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = a$

1.19 Proposition (Nullteilerfreiheit in Körpern)

Ist K ein Körper, $a, b \in K$, mit $a \cdot b = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$

Beweis.
Sei $a \cdot b = 0$ Angenommen $a \neq 0$. Dann existiert $a^{-1} \in K$
$0 \underset{1.15a)}{=} a^{-1} \cdot 0 \underset{\text{Vor.}}{=} a^{-1}(a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b$ □

Beispiel: $R = (\mathbb{Z}_6, \oplus, \circledcirc)$
$2 \circledcirc 3 = 0 \qquad 2 \neq 0, 3 \neq 0$

1.20 Definition

Sei K ein Körper,

a) Ein (Formales) *Polynom* über K ist ein Ausdruck $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ wobei $n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K$. (Manchmal $f(x)$ statt f, +-Zeichen hat zunächst nichts mit einer Addition zu tun. a_i *Koeffizienten* von f
Ist $a_i = 0$ so kann man in der Schreibweise von f $0 \cdot x^i$ auch weglassen.
Statt $a_0 x^0$ schreibt man a_o, statt $a_1 x^1$ schreibt man $a_1 x$. Sind alle $a_i = 0$, so $f = 0$, *Nullpolynom* .
Ist $a_i = 1$, so schreibt man x^i statt $1 x^i$

b) Zwei Polynome f und g sind *gleich*, wenn *entweder* $f = 0$ und $g = 0$ *oder* $f \neq 0$ und $g \neq 0$
d.h $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0$
$g = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, b_m \neq 0$
und $n = m$ und $a_i = b_i$ für $i = 0...n$

c) Menge aller Polynome über K. $K[x]$
Wir wollen $K[x]$ zu einem Ring machen. Wie?
Beispiel:$f = 3x^2 + 2x + 1$,
$g = 5x^3 + x^2 + x \in Q[x]$
$f + g = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$
$f \cdot g = (3^x + 2x + 1) \cdot (5x^3 + x^2 + x)$
$= 15x^5 + 10x^4 + 5x^3 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x^2 + 2x^2 + x$
$= 15x^5 + 13x^4 + 10x^3 + 3x^2 + x$

27.10.2015

1.21 Satz und Definition

K Körper. $K[x]$ wird zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgenden Verknüpfungen.
$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g = \sum_{i=0}^{m} b_i x_i$ so
$f + g \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$
$f \cdot g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$,wobei $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$ (Faltungsprodukt)
In beiden Fällen sind Koeffizienten a_i mit $i > n$ bzw. b_i mit $i > m$ gleich 0 zu setzen. Das Einselement ist 1 $(= 1x^0)$
Das Nullelement ist das Nullpolynom.
$-f = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i$
$(K[x], +, \cdot)$ heißt *Polynomring* in einer Variable *Beweis:* Nachrechnen

1.22 Bemerkung

a) $f = \sum_{i=0}^{n} a^i x^i \in K[x],\ a \in K \subseteq K[x]$

$a \cdot f = \sum_{i=0}^{n} (a \cdot a_i) x^i$

$x \cdot f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+1} = a_n x^{n+1} + \ldots + a_0 x$

b) Das +− Zeichen in der Definition der Polynome entspricht genau der Addition der *Monome* $a_i x^i$.

$(a_0 x^0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Add. aus 1.21}}}{+} a_1 x^1) = a_0 x^0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{+ aus 1.20}}}{+} a_1 x^1$

1.23 Definition

Sei $0 \neq f \in k[x], f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0$.
Dann heißt n der *Grad* in f, $\mathrm{Grad}(f) = n$
$\mathrm{Grad}(0) := -\infty$
$\mathrm{Grad}(f) := 0$:*Konstante Polynome* $= \neq 0$

1.24 Satz

Sei K ein Körper, $f, g \in K[x]$.
Dann ist $\mathrm{Grad}(f \cdot g) = \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g)$
(Konvention: $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty + \infty)$,
Sei $f \neq 0$ und $g \neq 0$
$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0, n = \mathrm{Grad}(f)$
$g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, b_m \neq 0, m = \mathrm{Grad}(g)$
Koeffizienten von x^{n+m} in $f \cdot g : a_n b_m \underset{1.19}{\neq} 0$

1.25 Korollar

Sei K ein Körper

a) Genau die konstanten Polynome $\neq 0$ sind in $K[x]$ bezüglich $\cdot$ invertierbar
Insbesondere ist $K[x]$ *kein* Körper

b) Sind $f, g \in K[x]$ mit $f \cdot g = 0$, so ist $f = 0$ oder $g = 0$ (Nullteilerfreiheit in $K[x]$)

c) Sind $f, g_1, g_2 \in K[x]$ mit $f \cdot g_1$ und ist $f \neq 0$, so ist $g_1 = g_2$

Beweis.

a) Sei $f \in K[x]$ invertierbar bezüglich $\cdot$. Dann ist $f \neq 0$ und es existiert $g \in K[x]$ mit $f \cdot g = 1$.
Mit 1.24:
$$0 = \operatorname{Grad}(1) = \operatorname{Grad}(f \cdot g)$$
$$= \operatorname{Grad}(f) + \operatorname{Grad}(1).$$
Also: $\operatorname{Grad}(f) = 0 (= \operatorname{Grad}(g))$
Dass heißt f ist konstantes Polynom.
Ist umgekehrt $f = a \in L, a \neq 0$, so $f^{-1} = a^{-1} \in K$

b) Folgt aus 1.24:
$$\begin{aligned} -\infty = \operatorname{Grad}(0) &= \operatorname{Grad}(f \cdot g) \\ &= \operatorname{Grad}(f) + \operatorname{Grad}(g) \end{aligned}$$
$\Rightarrow$ $\operatorname{Grad}(f) = -\infty$ oder $\operatorname{Grad}(g) = -\infty$, d.h $f = 0$, oder $g = 0$

c) $f g_1 = f g_2$
$\Rightarrow 0 = f g_1 - f g_2 \quad = f \cdot (g_1 - g_2)$
Da $f \neq 0$, folgt mit b)
$g_1 - g_2 = 0$, d.h $g_1 = g_2$

□

1.26 Bemerkung

a) Jedem Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$
kann man eine Funktion $K \to K$ zuordnen. $a \in K \longmapsto f(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i \in K$
(Polynomfunktion aus Analysis $K = \mathbb{R}$)

Aufgrund der Definition von Addition/Multiplikation von Polynomen gilt:
$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$
$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$
Es kann passieren, dass zwei verschiedene Polynome die gleiche Funktion beschreiben.
Z.B $K = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$
$f = x^2, g = x$
$f \neq g$
$f(1) = 1 = g(1)$
$f(0) = -g(0)$
Über unendlichen Körpern passiert das nicht (später)

b) Schnelle Berechnung von $f(a)$:
$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
$f(a) = a_0 + a(a(a_1 + a(a_2 + \ldots + a(a_{n-1} + a a_n)))$

Horner-Schema

1.27 Definition

K Körper, $f, g \in K[x]$
f *teilt* g $\quad (f \mid g)$ falls $q \in K[x]$ existiert mit $g = q \cdot f$ (Falls $g \neq 0 \mod f \mid g$, so ist $\mathrm{Grad}(f) \leq \mathrm{Grad}(g)$ nach 'Satz' on page 33)

1.28 Satz

K Körper, $0 \neq f \in K[x], g \in K[x]$
Dann existiert eindeutig bestimmte Polynome q, r

(1) $$g = q \cdot f + r$$
(2) $$\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(f)$$

(Beweis WHK, Satz 4.69) *Division mit Rest*

28.10.2015

1.29 Beispiel

a) $g = x^4 + 2x^3 - x + 2, f = 3x^2 - 1, f, g \in Q[x]$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 + 2x^3 \quad - x \ + 2 \right) : \left(3x^2 - 1\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \dfrac{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}{3x^2 - 1} \\
\underline{-x^4 \qquad + \frac{1}{3}x^2} \\
\qquad 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 \ - x \\
\qquad \underline{-2x^3 \qquad + \frac{2}{3}x} \\
\qquad\qquad \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \ + 2 \\
\qquad\qquad \underline{-\frac{1}{3}x^2 \qquad + \frac{1}{9}} \\
\qquad\qquad\quad - \frac{1}{3}x + \frac{19}{9}
\end{array}
$$

b) $g = x^4 - x^2 + 1 \quad f = x^2 + x \quad f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$

$$
\begin{array}{l}
x^4 + 3x^3 + 1 : x^2 + x = x^2 + 2x \\
-\underline{(x^4 + x^3)} \\
\qquad 2x^3 + 2x^2 + 1 \\
\qquad -(\underline{2x^3 + 2x^2}) \\
\qquad\quad 1 \leftarrow r
\end{array}
$$

1.30 Korollar

K Körper,$a \in K$.
$f \in K[x]$ ist genau dann durch $(x - a)$ teilbar, wenn $f(a) = 0$ (d.h a ist Nullstelle von f)
$[f = g \cdot (x - a), q \in K[x]]$

Beweis.
Falls $x - a \mid f$, so existiert $q \in K[x]$ mit $f \underset{1.26}{=} q(x - a)$.
Dann $f(a) = q(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_{=0} = 0$.
Umgekehrt: Angenommen $f(a) = 0$. Division mit Rest von f durch $x - a$:
$f = q \cdot (x - a)r, q, r \in K[x]$
$\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(x - a) = 1, r \in K$
Zeige: $r = 0$.
$r = f - q \cdot (x - a)$

Setze $a \in K$ ein.
$r \underset{1.26}{=} f(a) - q(a) \cdot (a-a) = 0 - 0 = 0$
$f = q \cdot (x-a)$ □

1.31 Definition

K Körper $a \in K$ heißt*m-fache Nullstelle* von $f \in K[x]$, falls $(x-a)^m \mid f$ und $(x-a)^{m+1} \nmid f$.
Dass heißt $f = q \cdot (x-a)^m$ und $q(a) \neq 0$

1.32 Beispiel

$x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
In Z_3 hat f die Nullstelle 1
'Korollar' on page 36: $x - 1 (= x+2)$ teilt f
Dividiere f durch $x - 1:$
$f = (x^4 + 2x^3 + 2x + 2) \cdot (x-1)$

1.33 Satz

K Körper, $f \in K[x], \mathrm{Grad}(f) = n \geq 0$ (dass heißt $f \neq 0$).
Dann hat f höchstens n Nullstellen in K (einschließend Vielfachheit). Genauer: Sind $a_1, \ldots, a_k$ die verschiedenen Nullstellen von f, so ist
$f = g \cdot (x-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{m_k}$, m_i Vielfachheiten der Nullstellen a_i, g hat keine Nullstelle in K6

Beweis. Durch Induktion nach n.
$n = 0:$ $f = a_0 \neq 0$, ohne Nullstelle.✓.
Sei $n > 0$. Behauptung sei richtig für alle Polynome von Grad $< n$.
Hat f keine Nullstellen, $g = f$✓
Hat f Nullstellen $a_1 \ldots, a_k, k \geq 1$
so $f = q \cdot (x-a_1)^{m-1}$ (nach Definition) $q(a_1) \neq 0$.
$\mathrm{Grad}(q) \underset{1.24}{=} n - m_1 \underset{m_1 > 0}{<} n$
Wir zeigen:

q hat genau die Nullstellen $a_2, \dots, a_k$ mit Vielfachheiten $m_2, \dots, m_k$.
Klar: Jede Nullstelle von q ist Nullstelle von f, Dass heißt q hat höchstens Nullstellen $a_2, \dots, a_k$.
Diese Nullstellen hat q mit Vielfachheit $0 \geq n_i \geq m_i$, denn $(x-a_i)^{m_i} | q \Rightarrow (x-a_i)^{n_i} \mid f$
Sei $i \in \{2, \dots, k\}$. Es ist $f = s \cdot (x-a_i)^{m_i}, s \in K[x], s(a_i) \neq 0$

$$q = q_1 \cdot (x-a_i)^{n_i}, q_1 \in K[x], q(a_i) \neq 0, \qquad ((x-a_i)^0 = 1)$$

$$f = q_1(x-a_1)^{n_i} \cdot (x-a_1)^{m_1}$$ 'Korollar' on page 33c):

$s(x-a_i)^{m_i-n_i} = q_1 \cdot (x-a_1)^{m_1}$
Ist $m_i > n_i$, so ist $m_i - n_i > 0$
$0 = s(a_i)(a_i-a_i)^{m_i-n_i} = q(a_i)(a_i-a_i) \neq 0E$
Dass heißt $.n_i = m_i.i, 2 \dots, k$
$q = g(x-a_2)^{m_2} \dots (x-a_k)^{m_k}$, g ohne Nullstelle in K
$f = g(x-a_1)^{m_2} \cdots (x-a_2)^{m_1}$ (Nach Induktionsvorsaussetzung) □

1.34 Korollar

K Körper, $f, g \in K[x], m = \max(\mathrm{Grad}(f), \mathrm{Grad}(g)$
Gibt es $m+1$ Elemente $a_1, \dots, a_{m+1} \in K$, paarweise verschieden, mit $f(a_i) = g(a_i), i = 1, \dots, m+1$ so $f = g$.
Insbesondere: Ist K unendlich ,$f, g \in K[x]$ mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in K$, so ist $f = g$

Beweis. $f - g \in K[x], \mathrm{Grad}(f-g) \leq m$.
$f - g$hat $m+1$ Nullstellen $a_1, \dots a_{m+1}$
1.33 $f - g = 0, f = g$ □

1.35 Bemerkung

Über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$($p$ Primzahl) gibt es Polynome beliebig hohen Grades ohne Nullstellen
Über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$: $(x^2+1)^m$ hat Grad$(2m)$, keine Nullstellen in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$
über $\mathbb{Z}_p$ z.B $(x^p - x + 1)^m$ hat Grad pm, ohne Nullstellen (ohne Beweis)

1.36 Fundamentalsatz der Algebra

Ist $f \in \mathbb{C}[x], f \neq 0$ so ist $(f = a_n x^n + \ldots + a_0)$
$f = a_n(x-c_1)^{m_1} \ldots (x-c_k)^{m_k}, a_n.c_i, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ (Nullstellen mit Vielfachen m_1, m_2)
$m_1 + \ldots + m_k = \mathrm{Grad}(f)$
$\mathrm{Grad}(f) = n$ f hat n Nullstellen (einschließend Vielfachheit)

2 Vektorräume

3.11.2015

2.1 Definition

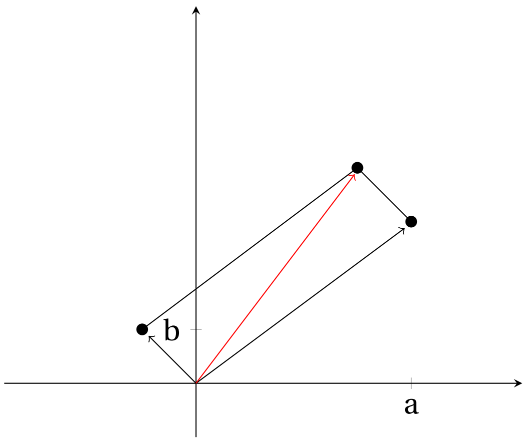
Sei K ein Körper. Ein *K-Vektorraum* V besitzt Verknüpfung + bezüglich derer eine Kommutative Gruppe ist (Neutrales Element σ, *Nullvektor*, Inverses zu $v \in V : -v$). AuSSerdem existiert Abbildung $K \times V \longrightarrow V$
$(a, v) \longmapsto av, a \in K, v \in V$
(„Multiplikation“von Elementen aus V, (”Vektoren”) mit Körperelementen (”Skalare”)), so dass gilt:
$(a \underset{\text{in } K}{+} b)v = av \underset{\text{in } V}{+} bv$ für alle $a, b \in K,\ v \in V$
$a(v \underset{\text{in } V}{+} w) = av \underset{\text{in } V}{+} aw$ für alle $a \in K,\ v, w \in V$
$\underset{\text{in } K}{(ab)}v = a(\underset{\in V}{bv})$ für alle $a, b \in K, v \in V$
$1v = v$ für alle $v \in V$.

2.2 Beispiel

a) K Körper, $n \in \mathbb{N}$
$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$ ist K-Vektorraum bezüglich $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$
$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$ für alle $a \in K, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix} \in K^n$. Raum der *Spaltenvektoren* der *Länge n* über K.

Entsprechend: Raum der Zeilenvektor, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)^t$

Für $K = \mathbb{R} : \mathbb{R}^n$
$n = 2, 3$ Elemente aus $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, identifizierbar mit Ortsvektor der Ebene oder des 3-dimensionalen Raumes.



b) Sei K ein Körper Polynomring $K[x]$ ist ein K-Vektorraum, bezüglich

- Addition von Polynomen
- Multiplikation von Körperelementen mit Polynomen

$$a\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) := \sum_{i=0}^{n} (a a_i) x^i \in K[x]$$

(Multiplikation von Polynomen mit Polynom Grad ≤ 0)
2.1 folgt aus den Ringeingenschaften von $K[x]$

c) K Körper. V = Abbildung $(K,K) = \{\alpha : K \to K : \alpha \text{Abbildung}\}$ Addition auf V
$\alpha + \beta \in V (\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ für alle $x \in K$
Skalare Multiplikation:
$a \in \mathbb{R}, \alpha \in V (a\alpha)(x) = a \cdot \alpha(x)$ Für alle $x \in K$
Nachrechnen : Damit wird V ein K-Vektorraum

2.3 Proposition

K Körper, $V, K - VR$

a) $a \cdot \sigma = \sigma$

b) $0 \cdot v = \sigma$

c) $(-1) \cdot v = -v$
a,b,c Für alle $v \in V$

2.4 Definition

K Körper, V $K - VR$.
$\varnothing + U \subseteq V$ heißt *Unterraum* (*Untervektorraum* , oder *Teilraum*) von V, falls U bezüglich Addition auf V und der skalaren Multiplikation mit Elementen aus K selbst K Vektorraum ist.

2.5 Proposition

U ist Unterraum von V
$\Leftrightarrow$

(1) $u_1 + 1_2 \in U$ für alle $u_1, u_2 \in U$

(2) $au \in U$ für alle $u \in U, a \in L$
(Nullvektor in U = Nullvektor in V)

Beweis. $\Rightarrow \checkmark \Leftarrow$: Da $U \neq \varnothing$, existiert $u \in U$.
$\sigma = 0 \cdot u \in U$
$u \in U \Rightarrow -u = (-1)u \in U$
Mit (1): $(U, +)$ ist kommutative Gruppe. Restliche Axiome gelten auch für U, K.

$\square$

2.6 Beispiel

a) $V-K-VR$, so ist V Unterraum von V.
und $\{0\}$ ist Unterraum von V (*Nullraum*)

b) Betrachte $K[x]$ als $K-VR$. (2.2).
Sei $n \in \mathbb{N}_0$.
$U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) \leq n\}$ Unterraum von $K[x]$

2.7 Proposition

Seien U_1, U_2 Unterräume von K-VR V.

a) $U_1 \cap U_2$ ist Unterraum

b) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in u_1 \in U_2, u_2 \in U_2\}$ ist Unterraum von V (*Summe* von Unterräume)

c) $U_1 + U_2$ ist der kleinste Unterraum von V, der $U_1 \cup U_2$ enthält.

d) $U_1 \cap U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum.
Beweis: 0.4

2.8 Definition

V K-VR

a) $v_1, \ldots, v_m \in V$, $a-i, \ldots a_m \in K$
Dann heißt
$a_1 v_1 + \ldots a_m v_m = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \in V$
Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$ (mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_m$).
[Beachte: Zwei formell verschiedene Linearkombinationen derselben Vektoren können den gleichen Vektor darstellen z.B. in $\mathbb{R}^2$:
$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3cd \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$]

b) Ist $M \subseteq V$, so ist der von M *erzeugte* oder *aufgespannte Unterraum* $< M >_k$ (oder kurz $(< M >)$ die Menge aller endlichen Linearkombination, die man mit Vektoren aus M bilden kann:
$< M > = \{\sum_{i=1}^{n} a_i v_1 : n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in M\}$
$< \emptyset >_K := \{\emptyset\}$
$M = \{v_1, \ldots v_m\} :< M >=:< v_1, \ldots, v_m >$

c) Ist $< M >_K = V$, so heißt M *Erzeugungssystem*

2.9 Satz

V $K-$VR, $M \subseteq V$

a) $< M >_K$ ist Unterraum von V

b) $< M >_K$ ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält.
Insbesondere: Sind u_1, u_2 Unterräume von V, so ist $< U_1 \cup U_2 >_K = U_1 + U_2$
Beweis: 0.7

2.10 Definition

V K-VR V heißt *endlich erzeugt*, falls es eine *endliche* Teilmenge $M \subseteq V$ gibt mit $V =< M >_K$

2.11 Beispiel

a) $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$
K^n ist endlich erzeugt.

$$e_1, \ldots, e_n \text{ } \textit{Einheitsvektor } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$K^n =< e_1, \ldots, e_n >_K, \text{ denn } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$$

b) $K[x]$ als K-Vr ist nicht endlich erzeugt. Angenommen e existiert $f_1, \ldots, f_n \in K[x]$ mit $K[x] =< f_1, \ldots, f_n >_K$.
Sei t, max Grad$(f_i) \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$
Dann haben alle Polynome in $< f_1, \ldots, f_n >_K$ höchstens Grad t. Also $x^{t+1} \in K[x] \backslash < f_1, \ldots, f_n >_K E$
$M = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\} = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$
$K[x] =< M >_K$. $\quad f = \sum_{n=0}^{t} a_i x^i$

c) $n \in \mathbb{N}$. $\quad U = \{f \in K[x] : \text{Grad}(f) = n\}$
Unterram von $K[x]$, endlich erzeugt

2.12 Definition

Sei V K-VR, $v_1, \ldots, v_m \in V$ heißen *linear abhängig*, wenn es $a_1, \ldots, a_n \in K$, *nicht alle = 0*, gibt mit

$$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \sigma$$

(Beachte: Immer mit $0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_m = \sigma$, aber bei lineare Abhängigkeit soll es noch eine andere Möglichkeit geben) Andernfalls nennt man $v_1, \ldots, v_m$ *linear unabhängig*:
(D.h aus $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \sigma$ folt $a_1 = \ldots = a_m = 0$)
Entsprechend: $\{v_1, \ldots, v_m\}$ linear abhängig, linear unabhängig.
$\varnothing$ per Definition linear unabhängig. Klar: Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren wieder linear unabhängig

2.13 Beispiel

a) σ ist linear abhängig: $1 \cdot \sigma = \sigma$

b) $v, w \in V, v \neq \sigma \neq w$.
Wann sind v und w linear abhängig?

v, w linear abhängig $\Rightarrow \exists a, b \in K$,nicht beide = 0 mit $a \cdot v + b \cdot w = \sigma$
Angenommen : $a \neq 0 \qquad a \cdot v = -b \cdot w | a^{-1}$ (K Körper)
$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1}(-bw) = (-a^{-1}b)w \in < w >_K = \{cw : c \in K\}$
$d \in K$
$dv = (-da^{-1}b)w \in < w >_K$
$< v >_K \subseteq < w >_K$
Dann auch $b \neq 0$.
Angenommen $b = 0, \quad a \cdot v = -0w = \sigma$
$v = a^{-1}\sigma = \sigma E$ Vertausche Rollen von $v, w :< w >_K \subseteq < v >_K$
v, w linear abhängig $\Leftrightarrow < v >_K = < w >_K$

Beweis. $\Rightarrow \checkmark$
$\Leftarrow v \in < v >_K = < w >_K$
$\Rightarrow v = c \cdot w$ für ein $c \in K$.
$\Rightarrow \sigma = -v + c \cdot w = (-1)v + c \cdot w$
$\Rightarrow v, w$ linear abhängig. □

c) $e_1, \ldots e_n \in K^n$ sind linear unabhängig.
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1e_1 + \ldots + a_ne + n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow a_1 = \ldots a_n = 0$.

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig, linear unabhängig? Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$
gilt $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?
Führt auf LGS für die unbekannten a, b, c
$$\begin{array}{llll} 1a & 3b & 2c & = 0 \\ 2a & 2b & 3c & = 0 \\ 3a & 1b & 4c & = 0 \end{array}$$
Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c frei wählbar, $b = -\frac{1}{4}c \qquad a = -3b - 2c = -\frac{3}{4}c - 2c = -\frac{5}{4}c$

z.B $c = 4, b = -1, a = -5$

$$(-5)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Vektoren sind linear abhängig.

2.14 Bemerkung

Man kann auch für unendliche Mengen $M \subseteq V$ lineare Unabhängigkeit definieren.

Jede endliche Teilmenge von M ist linear unabhängig. Zum Beispiel $\{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig in $K[x]$.

2.15 Satz !!!

V K-VR, $v_1, \ldots, v_m$ sind linear abhängig

1. $\Leftrightarrow \exists i : v_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} b_j v_j$ für geignete $b_j \in K$

   $\Leftrightarrow \exists i :< v_1 \ldots, v_m >_K = < v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m >_K$

2. $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig

   $\Leftrightarrow$ jedes $v \in < v_1, \ldots v_m$ lässt sich als $v_1, \ldots, v_m$ schreiben.

3. Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig und ist $V \notin < v_1, \ldots, v_m >_K$, so sind v_1, v_m, v linear unabhängig.

   Beweis. Wie in 0.11, aber $v_1, \ldots, v_m \in V$ □

2.16 Definition

Sei V endliche erzeugter K-VR.

Eine endliche Teilmenge $B \subseteq V$ heißt *Basis* von V, falls

(1) $V\langle B\rangle_K$

(2) B linear unabhängig

($V = \{\sigma\}$: $\varnothing$ ist Basis von V)

2.17 Beispiel

a) $e_1, \ldots, e_n$ Basis K^n (*kanonische Basis*)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_5$:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden keine Basis von $\mathbb{Z}_5^2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{Z}_7$:

Lineare Unabhängigkeit:

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Führt auf LGS für a,b:

$\begin{matrix} 1 \cdot a & +3 \cdot b & = 0 \\ 2 \cdot a & +1 \cdot b & = 0 \end{matrix}$ Gauß-Algorithmus (funktioniert über jedem Körper K)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b = 0 \quad , a + 3b = 0, \quad a = 0$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}_5} = \mathbb{Z}_7^2$$

Sei $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^2$

Gesucht sind $a, b \in \mathbb{Z}_7$

Gauß:

$$\begin{aligned} 1\cdot a \quad &+3\cdot b &= c \\ 2\cdot a \quad &+1\cdot b &= d \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 2 & 1 & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & d-2c \end{pmatrix} \xrightarrow{II\cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & 2 & 4d-c \end{pmatrix}$$

$b = 4d - c = 4d + 6c$

$a = c - 3b = 4c + 2d$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (4c+2d)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (4d+6c)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.18 Satz (Existenz von Basen)

Sei V endliches Erzeugter K-VR. Dann enthält jedes endliche Erzeugendensystem von V eine Basis vom V.

Beweis. Sei $M \subseteq V$ endlich mit $V = \langle M \rangle_K$. Ist M linear unabhängig, so ist M Basis ✓

ist M linear abhängig, so existier nach 2.15a)

$v \in M$ mit $V = \langle M \rangle_K = \langle M \setminus \{v\} \rangle_K$

Da M endlich, endet dieses Verfahren mit Basis □

2.19 Lemma

V endlich erzeugter $K-$VR

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V. Sei $\sigma \neq w \in V$.

Dann $w = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j v_j, a_j \in K$.

Ist $a_i \neq 0$, so ist $(B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\}$ wieder eine Basis von V

Beweis. $w = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j v_j \Rightarrow a_i v_j = w - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_i v_j$

$\Rightarrow v_i = a^{-1}(a_i v_i) = a_i^{-1} w + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i^{-1} a_j) v_j$

$v_i \in \langle (B \setminus \{v_i\} \cup \{w\} \rangle_K$

$V = \langle B \rangle_K = \langle B \cup \{w\} \rangle_K \underset{2.15}{=} \langle B \setminus \{v_i\} \cup \{w\} \rangle_K$

Zeige $(B \setminus \{v_i\} \cup \{w\})$ ist linear unabhängig:

Angenommen $\sigma = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{6} c_j v_j + cw = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{6} c_i v_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{6} ca_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{6} (c_j + ca_j) v_j + ca_i v_i$
$v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig
$\Rightarrow (1) ca_i = 0$ und

$(2) c_j + ca_j = 0$ für alle $j \neq i$

$(1) ca_i = 0, a_i \neq 0 \Rightarrow c = 0$
$(2) c_j = 0$ für alle $i \neq j$.
Fertig. □

2.20 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

(Ernst Steinitz, 1871-1928, Kiel)

V endlich. erzeugter $K-$VR, B Basis von V, M endliche linear unabhängige Teilmenge von V. Dann existiert $C \subseteq B$ mit $|C| = |M|$, so dass $(B \setminus C) \cup M$ Basis von V ist.
Insbesondere $|M| \leq |B|$.

Beweis. Sei $|M| = k$
Induktions nach k.
$k = 0$✓
$k > 0$. Sei $M = \tilde{M} \cup \{w\}, |\tilde{M}| = k - 1$
Induktionsvorraussetzung: Existiert $\tilde{C} \subseteq B$ mit $|\tilde{]}C = |\tilde{]}M$ und $(B \setminus \tilde{C}) \cup \tilde{M}$ ist Basis von V
$w = \sum_{u \in B \setminus \tilde{C}} a_u u + \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$
Mindestens eines der a_U ist $\neq 0$, denn sonst $W = \sum_{v \in \tilde{M}} a_v v$,also $M = \tilde{M} \cup \{w\}$ linear abhängig E
Also sei $a_i \neq 0$ für ein $u \in B \setminus \tilde{C}$.
Nach 2.19 ist $(B \setminus C) \cup M$ Basis von v_i wobei $c = \tilde{C} \cup \{w\}$.
Fertig. □

2.21 Korollar

V endlich erzeugre $K-$VR

a) Je zwei Basen von V enthalten gleich viele Vektoren

b) Jede linear unabhängige Teilmenge von V ist endlich

c) (Basisergänzungssatz)
Jede linear unabhängige Menge von Vektoren lässt sich zu Basis ergänzen.

Beweis. a) $B, \tilde{B}$ Basen von V.
2.20:$|B| \leq |\tilde{|}B$
:$|\tilde{|}B \leq |B|$
Also $|B| = ||||\tilde{B}$.
b) Angenommen V enthält unendlich linear abhängige Teilmenge M, Sei B Basis von V. Wähle $M_0 \subset M$ mit M_0 endlich, $|M_0| > |B|$.
Nach Voraussetzung ist M_0 linear abhängig Widerspruch zu 2.20
c) Sei M linear unabhängig Teilmenge von V. Nach b) ist M endlich.
Sei B eine Basis von V 2.20: $\exists c \subseteq B, |c| = |M|$ so dass $\underbrace{(B \setminus C)}_{\text{Basisergänzung}} \cup M$ Basis. □

2.22 Satz

V endlich erzeugter $K-$VR,
$B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(1) B ist Basis von V

(2) B ist maximal unabhängige Teilmenge von V

(3) B ist minimales Erzeugungssystem von V (d.h. $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K \neq V$ für alle $w \in B$.)

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (1)
Angenommen $\langle B \rangle_K \neq V$
Sei $v \in V \setminus \langle B \rangle_K$.

2.15c): $B \cup \{v\}$ linear abhängig $\lightning$. $\langle B\rangle_K = V$ B ist Basis
$(1) \Rightarrow (2)$: Angenommen $B \subseteq C$, C linear unabhängig.
2.21 c ist endlich.
2.20 $|c| \leq |B|$ Daher $B = c$.
$(3) \Rightarrow (1)$. Angenommen B ist linear abhängig
2.15a): $\exists w\ inB :\ V = \langle B\rangle_K = \langle B \setminus \{w\}\rangle_K \lightning$
B ist linear unabhängig also Basis.
$(1) \Rightarrow (3)$. Angenommen $\exists w \in B$ mit $\rangle B \setminus \{w\}\rangle_K = V_i = \langle B\rangle_K$
2.15a): B ist linear abhängig $\lightning$ □

2.23 Definition

V K−VR.

a) Ist V endlich erzeugt, B ist Basis von V, $|B| = n$, so hat V *Dimension n*, $\dim_K(V) = n$ (oder einfach $\dim(V) = n$)

b) (V heißt nicht endlich erzeugt, so heißt V *unendlich-dimensional*)
(Also endlich erzeugt = endlich-dimensional)

2.24 Korollar

V K-VR, $\dim_K(V) = n$, $\quad B \subseteq V, |B| = n$

a) Ist B linear unabhängig, dann ist B Basis.

b) Ist $\langle B\rangle_K = V$, dann ist B Basis
Beweis: Folgt aus 2.22

2.25 Beispiel

a) $\dim_K(K^n) = n$, da $e_1, \ldots, e_n$ Basis.

b) $V = \mathbb{R}^4$
$U = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}}_{=u_2} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

u_1, u_2 sind linear unabhängig.
$a\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ nur für $a, b = 0$
$\{u_1, u_2\}$ Basis von U $\dim_R(U) = 2$.
Ergänze u_1, u_2 zu Basis von $V = \mathbb{R}^4$:

Erste Möglichkeit:
e_1, e_2, e_3, e_4 kanonische Basis des R^4
$U_1 = 1e_1 + 2e_2 + 0e_3 + 1e_4$
2.19: U_1, e_3, e_4 Basis von $\mathbb{R}^4$
$U_2 = au_1 + be_2 + ce_3 + de_4 =$

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\d\end{pmatrix} \qquad c = 1$$

2.19 : u_1, u_2, e_3, e_4 Basis von $\mathbb{R}^4$
Zweite Möglichkeit:
2.15c):
$v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig

$v \notin \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \Rightarrow v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$e_1 \notin U$ (1. Koordinate ≠ 4. Koordinate)
2.15c) U_1, U_2, e_1 linear unabhängig.
$\langle u_1, u_2, e_1 \rangle = ?$

$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a+c \\ 2a+2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$e_2 \notin U$
2.15c): u_1, U_2, e_1, e_2 linear unabhängig
2.24: $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$

2.26 Satz

V K–VR, $\dim_K(V) = n$.

a) Ist U Unterraum von V, so ist $\dim_K(U) \leq n$. Ist $\dim_K(U) = n$, so ist $U = V$.

b) (Dimensionenformel)
U, W Unterräume von V, so gilt:
$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

A, B endliche Mengen ($|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$)

Beweis. a) Ergänze Basis von U zu Basis von V. (2.21c)
b) Basis von $U \cup W \to$ Basis von U
$\to$ Basis von w (WHK 9.23) □

2.27 Definition

V K-VR, $\dim_K(V) = n$, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ *geordnete* von V.
Jedes $v \in V$ hat *eindeutige* Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad a_i \in K \quad$ 2.15b)
$(a_1, a_n$ (in dieser Anordnung) heißen *Koordinaten* von V bezüglich B) Insbesondere v_i hat Koordinaten $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

2.28 Beispiel

a) $V = K^n, (e_1, \ldots, e_n) = B$ kanonische Basis.
Koordinaten von $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ bezüglich B: $(a_1, \ldots, a_n)$
Kartesische Koordinaten

(R. Decartes, 1596-1650)

b) $\mathrm{V} = \mathbb{Q}^3, B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
B ist geordnete Basis von V. (nachprüfen)

Koordinaten von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ bezüglich B:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Gauß Algorithmus:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -0.5 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -0.5 & 1\\ 0 & 0 & 2.5 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -0.5 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -0.4\end{pmatrix}$$

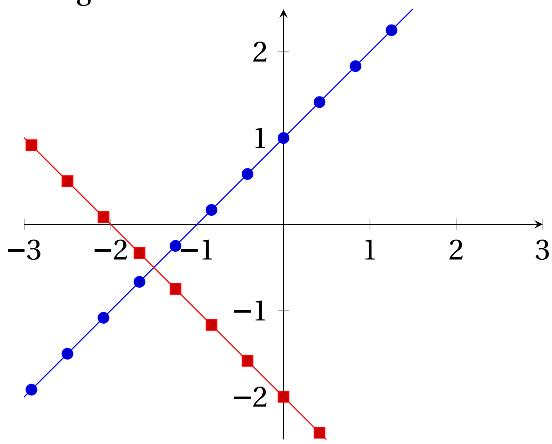
$a_3 = -0,4$

$a_2 = 0.8$

$a_1 = 0.2$

Koordinaten von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ bezüglich B $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

Abbildung 4: Eindimensionale Unterräume im $\mathbb{R}^2$



2.29 Definition

V K-VR, U Unterraum von V, $w \in V$. Dann heißt $w+U := \{w+u : u \in U\}$ *affiner Unterraum* von v.
($w+$ ist im allgemeinen kein Untervektorraum)
$\dim(w+u) := \dim(U)$

2.30 Satz

V K-VR, U, W Unterräume von V,

a) $w+U$ ist Unterraum ①
$\Leftrightarrow W \in U$ ②
$\Leftrightarrow w+U = U$ ③

b) Ist $v \in w+U$, so ist $v+U = w+U$

c) Sind v_1+U, v_w+W affine Unterräume, so ist entweder $(v_1+U)\cap(v_2+w) = \varnothing$ oder es existiert $v \in V$ mit $(v_1+U)\cup(v_2+W) = v+(U\cup w)$ affiner Unterraum.

Beweis. ③ $\Rightarrow$ ① ✓
a) ① $\Rightarrow$ ②
$w+U$ Unterraum $\Rightarrow \sigma \in w+U$
$\Rightarrow \exists u \in U$ mit $w+u=\sigma$
$\Rightarrow w = -u \in U$
② $\Rightarrow$ ③: $w \in U$, $w+U \subseteq U$ (da U Unterraum)
Sei $u \in U$. Dann $u-w \in U$ $\quad u = w+(u-w) \in w+U$
b) $v \in w+U$, $v = w+u$ für ein $n \in U$
$v+U = w \underbrace{u+U}_{=U \text{ nach a)}} = w+U$
c) Angenommen $(v_1+U)\cup(v_2+W) \neq \varnothing$
Sei $v \in (v_1+U)\cup(v_2+U)$
Nach b) $v+U = v_1+U$
$v+W+v_2+w$

$$\begin{aligned}(v_1+U)\cup(v_2+W) &= (v+U)\cup(v+W)\\ &= v+(U\cap W)\end{aligned}$$

$\supseteq$ ✓

$\subset x \in (v+U)\cup(v+W), x = v+u = v+w, u \in U, w \in W$

$u = W \in U \cap W.$

$x = v+u = v+(U\cap W)$ □

2.31 Bemerkung

affine Unterräume:
spezielle Rolle von σ ist aufgehoben. Zur Beschreibung eines $x \in K^n$ kann man jeden Punkt p als „Nullpunkt "wählen und dann die Koordinaten von x bezüglich einer nach p „verschobenen "Basis berechnen. p hat Koordinaten $(p_1,\dots,p_n)$ bezüglich Basis $v_1,\dots,v_n$

Ursprüngliche Koordinatensystem I : $\sigma, v_1,\dots,v_n$

Neues Koordinatensystem II: $:p, v_1+p,\dots,v_n+p$

x hat Koordinaten $(a_1,\dots,a_n)$ bezüglich I

$\Rightarrow$ Koordinaten von x bezüglich II $= (a_1-p_1,\dots,a_n-p_n)$
= Koordinaten von $x-p$ bezüglich I

x hat Koordinaten $(a'_1,\dots,a'_n)$ bezüglich II

$\Rightarrow$ x hat Koordinaten $(a'_1+p_1,\dots a'_n+p_n)$ bezüglich I. (Robotik)

2.32 Bemerkung

a) In Mathe II:
$x \times m$ über $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$. Das geht auch bei die Körpern K.
Addition, Multiplikation mit Skalaren, Matrixmultiplikation werden analog definiert.
Es gelten die gleichen Rechenregeln wie in (Mathe II, 9.5 `www.ffgti.org`)

b) In Mathe II, wurden Matrizen verwendet zur Beschreibung von LGS $\underset{m\times n}{A}\ x = \underset{n\times 1}{b}\ x =$
Analog : LGS über beliebigen Körpern K. GaußAlgorithmus funktioniert analog.

$(a_1, \ldots, a_n), a_1 \neq 0$
$\to (1, a_1^{-1}, a_2, \ldots)$

(*K* Körper!)

2.33 Satz

a) Die Menge der Lösungen eines *homogenen* LGS.

$$A \cdot x = 0$$

$(A \in \mathscr{M}_{n,m}(K), x \in K^m$
0 ist Nullvektor in K^n)

b) Ist das *inhomogene* LGS

$$A \cdot x = b$$

lösbar und ist $x_0 \in K^n$ eine spezielle Lösung (d.h $A \cdot x_0 = b$), so erhält man alle Lösungen von $A \cdot x = b$ durch $\{x_0 + y : Ay = 0\}$, $y =$ Zugehöriges homogenes LGS.
Ist U der Lösungsraum von $Ax = 0$, so ist die Lösungsmenge von $Ax = B$ gerade der affine Unterraum $x_0 + U$ von K^n

Beweis. a) Folgt aus Rechenregeln für Matrizen:
$x_1, x_2 \in K^m$ Lösungen von $A \cdot x = 0$.
$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$
$x_1 + x_2$ Lösung.
$a \in K$.
$A(a \cdot x_1) = a \cdot (Ax_1) = a \cdot 0 = 0$
$a \cdot x_1$ Lösung.
Null-Lösung existiert. b) $Ax_0 = b$. Sei $y \in K^m$ mit $Ay = 0$.
$A \cdot (x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$
$x_0 + y$ ist Lösung von $Ax = b$
Zeige: Jede Lösung von $Ax = b$ ist von der Form $x_0 + y$ für ein y mit $Ay = 0$.
Sei x Lösung von $Ax = b$.
$x = x_0 + (x - x_0)$
$A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$ □

2.34 Beispiel

gegebenes LGS : $\begin{matrix} x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & & x_4 & =1 \end{matrix}$

Über $\mathbb{Q}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Gauß:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

x_3, x_4 Frei wählbar.

Zugehöriges homogenes System:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Lösungsmenge = Unterraum.

Basis des Lösungsraum:

Setze die frei wählbaren x_4, x_3.

- $x_4 = 1, x_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Lösung
- $x_4 = 0, x_3 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ Lösung

$\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ** \\ ** \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Jede Lösung $d \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}01 \\ + \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Lösungsraum vom zugehörigen homogenen LGS:

$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

3 Lineare Abbildungen

3.1 Definition

$V, W, K-$VR

a) $\alpha : V \longrightarrow$ heißt *(K-) lineare Abbildung* (oder *Vektorraum-Homomorphismus*) falls:

Additivität $\leftarrow$(1) $\alpha(u+v) = \alpha(u) + \alpha(v)$ für alle $u, v \in V$

Homogenität $\leftarrow$(2) $\alpha(kv) = k\alpha(v)$ für alle $k \in K, v \in V$

3.2 Bemerkung

$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung.

a) $\alpha(\sigma) = \sigma$

b) $\alpha(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha(v_i)$

Beweis. a) $\alpha(\sigma) = \alpha(\sigma + \sigma) = \alpha(\sigma$

b) Definition + Induktion nach n. □

3.3 Beispiel

a) Nullabbildung $\alpha : V \to W$

$\alpha(v) = \sigma$ für alle $v \in V$

b) $c \in K$

$\alpha : V \to V, \alpha(v) = c \cdot v$ lineare Abbildung $c = 1 :\quad id_v$

c) $$\varsigma : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - x_3 \end{cases}$$

Spiegelung an der $\{x_1, x_2\}$-Ebene in $\mathbb{R}^3$

d) $$\alpha = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \to x_1^2 \end{cases}$$

nicht linear

Index