

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen	8
1.1 Definition	8
1.2 Veranschaulichung	8
1.3 Rechenregeln in \mathbb{C}	8
1.4 Definition Absolutbetrag	9
1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag	10
1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten	11
1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie	12
1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation	12
1.9 Bemerkung und Definition	13
1.10 Satz: Komplexe Wurzeln	14
1.11 Beispiel	14
1.12 Bemerkung	15
2 Folgen und Reihen	15
2.1 Definition	15
2.2 Beispiel	15
2.3 Definition	16
2.4 Definition	16
2.5 Beispiele	17
2.6 Satz: Beschränktheit und Konvergenz	19
2.7 Bemerkung	19
2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)	19
2.9 Satz: Kriterien für Nullfolgen	20
2.10 Bemerkung	22
2.11 Definition	22
2.12 Satz: Landausymbole bei Polynomen	23
2.13 Bemerkung	23
2.14 Definition	24
2.15 Beispiel	24
2.16 Satz: Monotonie und Konvergenz	24

2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)	25
2.18 Definition	25
2.19 Satz: Reihenkonvergenz	26
2.20 Beispiele	27
2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)	29
2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)	29
2.23 Beispiel	29
2.24 Definition	30
2.25 Korollar	30
2.26 Satz: Wurzel- und Quotientenkriterium	30
2.27 Bemerkung	32
2.28 Beispiel	32
2.29 Bemerkung	32
2.30 Definition	32
2.31 Satz: Konvergenz im Cauchy Produkt	33
3 Potenzreihen	33
3.1 Definition	33
3.2 Beispiel	33
3.3 Satz	34
3.4 Bemerkung	35
3.5 Die Exponentialreihe	35
4 Funktionen und Grenzwerte	38
4.1 Definition	38
4.2 Beispiel	38
4.3 Definition	41
4.4 Beispiel	42
4.5 Definition	43
4.6 Beispiel	43
4.7 Satz ($\varepsilon - \delta$)-Kriterium	45
4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)	48
4.9 Beispiel	48
4.10 Bemerkung	48

4.11 Beispiel	49
4.12 Definition	49
4.13 Beispiel	50
4.14 Bemerkung	50
4.15 Definition	50
4.16 Satz: Grenzwerte gegen unendlich	51
4.17 Beispiel	52
5 Stetigkeit	54
5.1 Definition	54
5.2 Satz	54
5.3 Beispiel	54
5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit)	56
5.5 Satz: Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen	56
5.6 Beispiel	56
5.7 Satz: Stetigkeit von Potenzreihen	56
5.8 Korollar	57
5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen)	57
5.10 Korollar (Zwischenwertsatz)	58
5.11 Satz (Min-Max-Theorem)	58
5.12 Definition	59
5.13 Satz: Injektive Funktionen nur bei Monotonie	59
5.14 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion)	59
5.15 Korollar	61
5.16 Satz: Exponentialfunktion und Logarithmus naturalis	61
5.17 Satz: Wachstum des natürlichen Logarithmus'	62
5.18 Definition	62
5.19 Satz:	62
5.20 Bemerkung	63
5.21 Definition	63
5.22 Satz:	64

6 Differenzierbare Funktionen	64
6.1 Definition	64
6.2 Beispiel	65
6.3 Satz:	65
6.4 Korollar	66
6.5 Satz (Ableitungsregeln)	66
6.6 Beispiel	67
6.7 Satz:	67
6.8 Satz: Ableitungsregeln von cosinus und sinus	68
6.9 Beispiel	68
6.10 Satz: Potenzreihen und diverenzierbarkeit	69
6.11 Korollar	69
6.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)	70
6.13 Bemerkung	71
6.14 Satz:	71
6.15 Satz (logarithmische Abbildung)	71
6.16 Beispiel	72
6.17 Definition	72
6.18 Satz:	72
6.19 Satz (Mittelwertsatz)	73
6.20 Korollar	74
6.21 Korollar	74
6.22 Satz (Regeln von L'Hôpital)	75
6.23 Beispiel	75
7 Das bestimmte Integral	76
7.1 Definition	76
7.2 Definition	76
7.3 Satz: Regelfunktionen	77
7.4 Satz: Regelfunktion und Stetigkeit	78
7.5 Beispiel	78
7.6 Lemma	80
7.7 Definition	81

7.8	Beispiel	81
7.9	Satz (Rechenregeln für Integrale)	82
7.10	Beispiel	82
7.11	Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)	82
8	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	83
8.1	Definition	83
8.2	Definition	84
8.3	Bemerkung	84
8.4	Beispiel	85
8.5	Satz:Rechenregeln von Stammfunktionen	85
8.6	Satz:	87
8.7	Definiton	87
8.8	Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)	88
8.9	Beispiele	89
8.10	Beispiel	89
8.11	Satz (Partielle Integration)	90
8.12	Beispiele	90
8.13	Satz (Integration durch Substitution)	91
8.14	Satz:	92
8.15	Beispiel	93
9	Matrizen und lineare Gleichungssysteme	93
9.1	Definition	93
9.2	Definition	95
9.3	Definition	95
9.4	Beispiel	96
9.5	Satz (Rechenregeln von Matrizen)	97
9.6	Definition	98
9.7	Definition	100
9.8	Definition	100
9.9	Bemerkung	100
9.10	Algorithmus zur Transformation einer Matrix auf Zeilenstufenform mit elementaren Zeilenumformungen	101

9.11 Beispiel	101
9.12 Gauß-Algorithmus zur Lösung von LGS	102
9.13 Beispiel	103

Abbildungsverzeichnis

1 Veranschaulichung Komplexe Zahlen	8
2 Absolutbetrag	10
3 Imaginäre Zahlen im Koordinatensystem durch Polarkoordinaten . . .	11
4 Winkel im Bogenmaß	11
5 Multiplizieren komplexer Zahlen	13
6 Multiplikation mit i	13
7 Beschränktheit von Folgen	17
8 Beschränkte aber nicht konvergente Folge	18
9 Cauchy'sches Konvergenzkriterium	25
10 Monotonie	28
11 Konvergenzradien	34
12 Die Exponentialreihe	37
13 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$	39
14 e^x	40
15 Bogenmaß	40
16 Sinus und Cosinus	41
17 Tangens und Kotangens	42
18 x^2	43
19 $x+1$	44
20 Abschnittsweise definierte Funktion	45
21 $\sin(\frac{1}{x})$	45
22 $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$	46
23 geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums	46
24 Abschnittsweise definierte Funktion	47
25 Grenzwerte gegen einen Festen Wert	49
26 Funktionen $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$	51

27	$\sin(\frac{1}{x})$	52
28	$\frac{e^x}{x^n}$	53
29	Abschnittsweise definierte Funktion	55
30	Zwischenwerte	58
31	Eine Fallunterscheidung für 5.13	60
32	Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion	60
33	$\exp(x)$ und $\ln(x)$	61
34	Logarithmen mit Basen > 1 und < 1	63
35	Sekante an Funktion	66
36	Abschnittsweise definierte cosinus Funktion	69
37	Zwei Funktionen an der Winkelhalbierenden	70
38	Ableitung keine Hinreichende Bedingung für Minima/Maxima	73
39	Eine Funktion und ihrer Steigung an der Stelle c	73
40	Flächeninhalt unter einer Funktion f	77
41	Treppenfunktion	78
42	Treppenfunktion	79
43	Abschnittsweise stetige Funktion	79
44	Treppenfunktion (Untersumme) von x^2	80
45	Nicht integrierbare Funktion	80
46	Mittelwertsatz der Integralrechnung	83
47	Die Welt der Funktionen	86
48	Stammfunktionbildung	87
49	Integral Berechnung $x \cdot \cos(x)$	91

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Addition: } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Multiplikation: } (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i^1$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$. Rein imaginäre Zahlen: $b \cdot i$, $b \in \mathbb{R}$, $(0 + bi)$

i imaginäre Einheit. $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

$a = \Re(z)$ Realteil von z ($\Re(z)$).

$b = \Im(z)$ Imaginärteil von z ($\Im(z)$).

$\bar{z} = a - bi$ ($= a + (-b)i$) Die zu z konjugiert komplexe Zahl.

1.2 Veranschaulichung

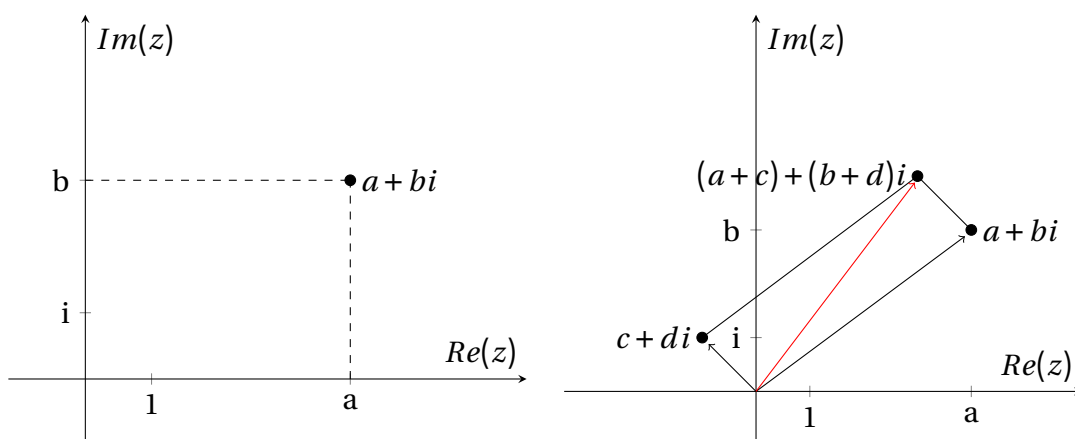


Abbildung 1: Addition entspricht Vektoraddition

1.3 Rechenregeln in \mathbb{C}

a) Es gelten alle Rechenregeln wie in \mathbb{R} .

(z.B Kommutativität bzgl. $+$, \cdot : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$)

¹Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ beachten

Inversenbildung bzgl. \cdot :

$z = a + bi \neq 0$, d.h. $a \neq 0$ oder $b \neq 0$:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \frac{5-7i}{3+2i} &= (5-7i) \cdot (3+2i)^{-1} \\ &= (5-7i) \cdot \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right) \\ &= \left(\frac{15}{13} - \frac{14}{13}\right) + \left(-\frac{10}{13} - \frac{21}{13}\right)i \\ &= \frac{1}{13} - \frac{31}{13}i \end{aligned}$$

$$\text{Speziell: } (bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i$$

$$\text{insbesondere: } \frac{1}{i} = -i$$

$$\begin{aligned} z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \quad \bar{\bar{z}} &= z \\ \text{b) } \quad \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

1.4 Definition Absolutbetrag

$$\text{a) Absolutbetrag von } z = a + bi \in \mathbb{C}: |z| = \underbrace{+\sqrt{a^2 + b^2}}_{\in \mathbb{R}, \geq 0}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}}$$

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} |z| &= \text{Abstand von } z \text{ zu } 0 \\ &= \text{Länge des Vektors, der } z \text{ entspricht} \end{aligned}$$

$$\text{b) Abstand von } z_1, z_2 \in \mathbb{C}:$$

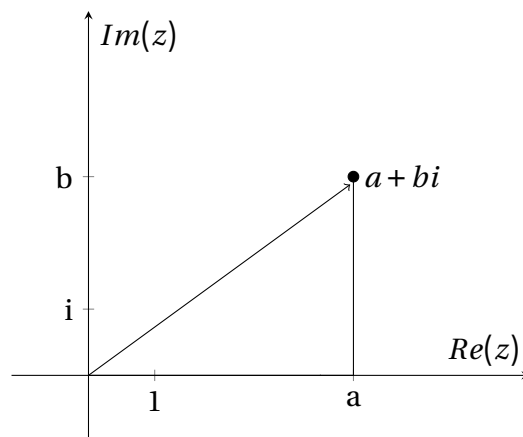


Abbildung 2: Graphische Definition des Absolutbetrages

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag

(a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|-z| = |z|$$

1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

- a) Jeder Punkt $\neq (0,0)$ lässt sich durch seine Polarkoordinaten (r, φ) beschreiben:
 $-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$

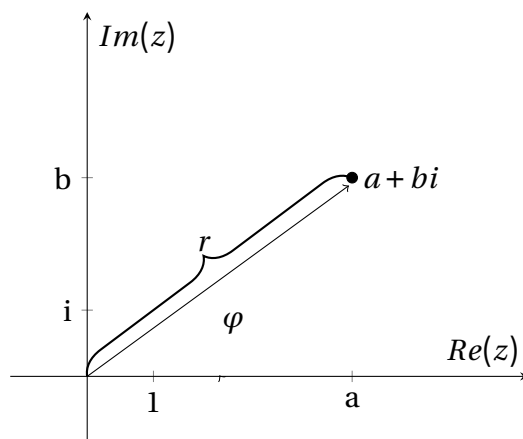
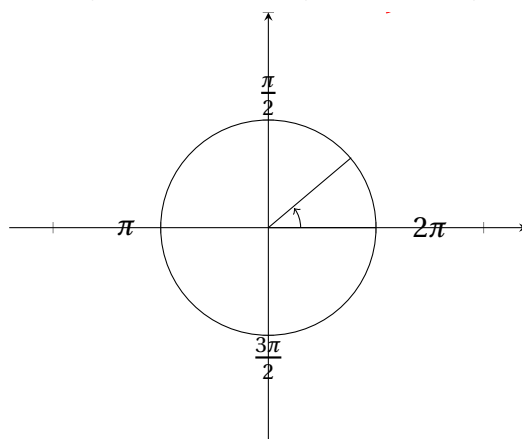


Abbildung 3: Polarkoordinaten

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes

Abbildung 4: Umrechnung Grad zu Bogenmaß



Umfang: 2π

φ in Grad $\xrightarrow{\frac{2\pi \cdot \varphi}{360}}$ im Bogenmaß

Für Punkte mit kartesischen Koordinaten $\neq (0,0)$ werden als Polarkoordinate (r, φ) verwendet.

b) komplexe Zahl $z = a + ib$

$$r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |z| \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

Darstellung von z durch Polarkoordinate

Beispiel: a) $z_1 = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
 $= 2 \cdot (0,5\sqrt{2} + i \cdot 0,5\sqrt{2})$

b) $z_2 = 2 + i$

$$|z_2| = \sqrt{5}$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\frac{2}{\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}} i) \text{ Suche } \varphi \text{ mit } 0 \leq 2\pi \text{ mit } \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}} z_2 \approx \sqrt{5} \cdot (\cos(0,46) + i \cdot \sin(0,46))$$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis:

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

(a) $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

(b) $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a) $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

$$z = |z| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$$

$$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + i (\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi))$$

$$w \cdot z = |w \cdot z| (\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$$

b) $z = i, w = a + ib$

$$i \cdot w = -b + ia$$

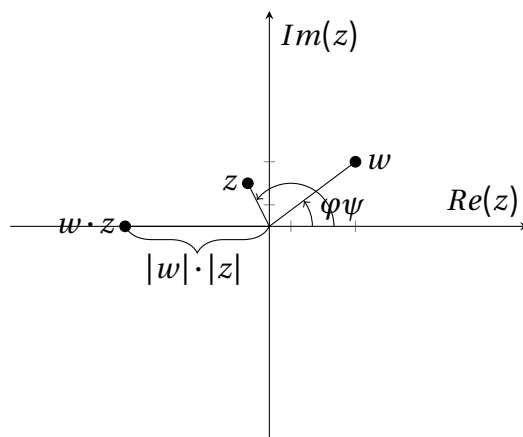
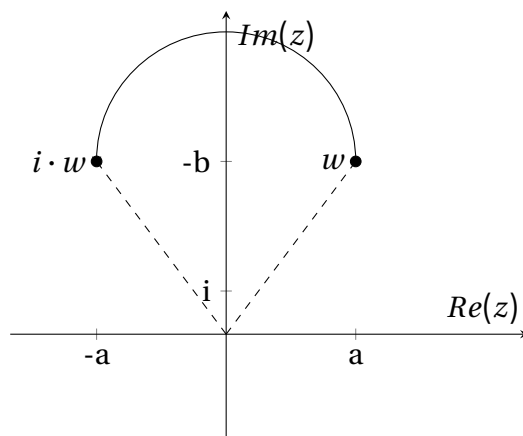


Abbildung 5: Multiplizieren komplexer Zahlen

Multiplikation mit i \Downarrow Drehung um 90°

Abbildung 6: Multiplikation mit i

1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexe Exponentialfunktion einführen.

e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ e = Euler'sche Zahl $\approx 2,718718\dots$

$$e^{z_1} = c d e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

Es gilt: $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, $r = |z|$, φ Winkel

$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ ist Polarform von z .

$z = a + bi$ ist kartesische Form von z . $\bullet(r, \varphi)$ Polarkoordinaten

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Punkte auf dem Einheitskreis.

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \text{ Euler'sche Gleichung}$$

1.10 Satz

Sei $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

- a) Ist $m \in \mathbb{Z}$, so ist $w^m = |w|^m \cdot (\cos(m \cdot \varphi) + i \sin(m \cdot \varphi))$
 $(m < 0 : w^m = \frac{1}{w^{|m|}}), w \neq 0$

b) Quadratwurzeln

- c) Ist $n \in \mathbb{N}, w \neq 0$, so gibt es genau n n -te Wurzeln von w :

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}\right) \right), n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Beweis. a) richtig, wenn $m = 0, 1$

$m \geq 2$. Folgt aus (\star)

$m = -a$:

$$\begin{aligned} w^{-1} &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \sin^2(\varphi))} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{w} = \frac{1}{m \cdot |w| \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + i \sin^2(\varphi))}_{=1}} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = |w|^{-1} \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \end{aligned}$$

□

1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus i :

$$|i| = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Nach 1.10 b): } \sqrt{i} &= \pm \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i \right) \end{aligned}$$

1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom

$$x^n - w \quad (w \in \mathbb{C})$$

eine Nullstelle in \mathbb{C} (sogar n verschiedene wenn $w \neq 0$)

Es gilt sogar : *Fundamentalsatz der Algebra*

(C. F. Gauß 1777-1855)

Jedes Polynom $a_n x^n + \dots + a_0$

mit irgendwelchen Koeffizienten: $a_n \dots a_0 \in \mathbb{C}$ hat Nullstelle in \mathbb{C}

2 Folgen und Reihen**2.1 Definition**

Sei $k \in \mathbb{Z}$, $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$

($k = 0, A_0 \in \mathbb{N}_0, k = 1, A_n \in \mathbb{N}$)

Abbildung $a : A \Rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

$$m \Rightarrow a_m$$

heißt *Folge* reeller Zahlen

$$(a_k, a_{k-1} \dots)$$

Schreibweise:

$(a_m)_{m>k}$ oder einfach (a_m)

a_m heißt *m-tes Glied* der Folge, m *Index*

2.2 Beispiel

a) $a_n = 5$ für alle $n > 1$

(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...)

b) $a_n = n$ für alle $n > 1$

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...)

$$\text{c) } a_n = \frac{1}{n} \\ \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

$$\text{d) } a_n = \frac{(n+1)^2}{2^n} \\ \left(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \dots\right)$$

$$\text{e) } a_n = (-1)^n \\ (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

$$\text{f) } a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}} \text{ für } n \geq 2, a_1 = 1 \\ \left(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots\right)$$

$$\text{g) } a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \\ \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \dots\right)$$

$$\text{h) } a_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \frac{1}{i} \\ \left(-1, \frac{-1}{2}, -\frac{5}{6}, \dots\right)$$

2.3 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

D.h. $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$ für alle $n > k$.

2.4 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *konvergent* gegen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (konvergent gegen ε), falls gilt:

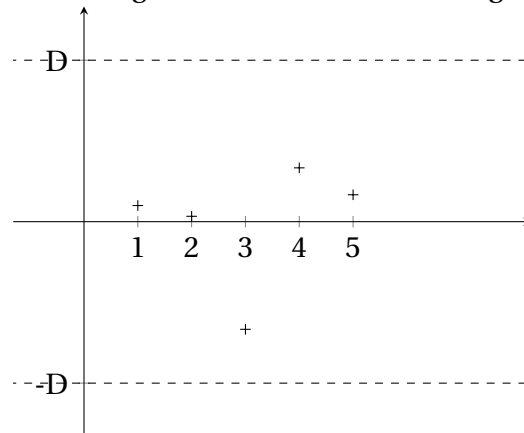
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) : |a_n - c| < \varepsilon$$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (oder einfach } c = \lim a_n)$$

c heißt *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge (a_n)

(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))

Abbildung 7: Beschränktheit von Folgen



Eine Folge die gegen 0 konvertiert, heißt *Nullfolge*

2.5 Beispiele

- a) $r \in \mathbb{R} : a_n = r$ für alle $n \geq 1$

(r, r, \dots)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$$

$$|a_n - r| = 0 \text{ für alle } n$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man $n(\varepsilon) = 1$ wählen

- b) $a_n = n$ für alle $n \geq 1$

Folge ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

- c) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$

(a_n) ist Nullfolge.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Suche Index $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$

D.s. es muss gelten.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

$$\text{Ich brauche : } \frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$$

$$\text{Ich brauche } n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Aus Mathe I folgt, dass solch ein $n(\varepsilon)$ existiert.

$$\text{z.B. } n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Dann:

$$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

d) $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$ für alle $n \geq 1$

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a - 3| &= \left| \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1} \right| \\ &= \left| \frac{-3n-2}{n^2+n+1} \right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Benötigt wird $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ für alle $n > n(\varepsilon)$.

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$$

Wähle $n(\varepsilon)$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$

Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$.

$$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

e) $a_n = (-1)^n$ beschränkte Folge $-1 \leq a_n \leq 1$ konvergiert nicht.

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$

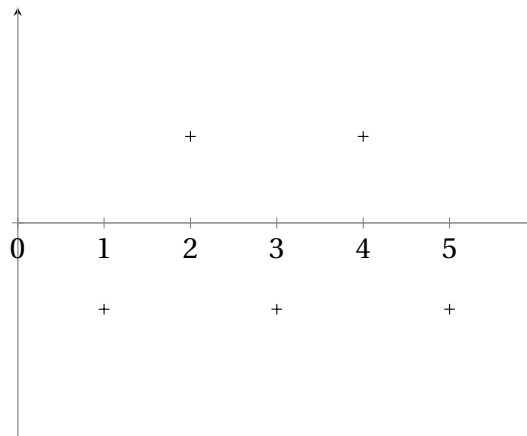


Abbildung 8: $(-1)^n$ ist beschränkt aber konvergiert nicht

$$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \nless$$

2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: 2.5e))

Beweis. Sei $c = \lim a_n$, wähle $\varepsilon = 1$,

Es existiert $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - c| < 1$ für alle $n \geq n(1)$

Dann ist

$$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c| \text{ für alle } n \geq n(1)$$

$$M = \max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \dots, |a_{n(1)-1}|, 1 + |c|\}$$

Dann: $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq k$

$$-M \leq a_n \leq M$$

□

2.7 Bemerkung

$$\text{a) } (a_n)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n|)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge } (|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0|)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n - c|)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge}$$

2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien $(a_n)_{n \geq k}$ und $(b_n)_{n \geq k}$ konvergente Folgen, $\lim a_n = c, \lim b_n = d$.

$$\text{a) } \lim |a_n| = |c|$$

$$\text{b) } \lim (a_n \pm b_n) = c \pm d$$

$$\text{c) } \lim (a_n \cdot b_n) = c \cdot d$$

insbesondere $\lim (r \cdot b_n) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.

$$\text{d) } \text{Ist } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k \text{ und ist } d \neq 0, \text{ so } \lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{c}{d}$$

$$\text{e) } \text{Ist } (b_n) \text{ Nullfolge, } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k, \text{ so konvergiert } \left(\frac{1}{b_n} \right) \text{ nicht!}$$

$$\text{f) } \text{Existiert } m \geq k \text{ mit } a_n \leq b_n \text{ für alle } n \geq m, \text{ so ist } c \leq d.$$

$$\text{g) } \text{Ist } (c_n)_{n \geq k} \text{ Folge und existiert } m \geq k \text{ mit } 0 \leq c_n \leq a_n \text{ für alle } n \geq m \text{ und ist } (a_n) \text{ eine Nullfolge, so ist auch } (c_n) \text{ eine Nullfolge.}$$

- h) Ist $(c_n)_{n \geq l}$ beschränkte Folge und ist $(a_n)_{n \geq k}$ Nullfolge, so ist auch $(c_n \cdot a_n)_{n \geq k}$ Nullfolge.

c_n muss nicht konvergieren!

Beweis. Exemplarisch:

- b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$ und $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$ und $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$
 $|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$
 Suche $n(\varepsilon) = \max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}), n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$
 Dann gilt für alle $n > n(\varepsilon)$:
 $|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
- f) Angenommen $c > d$. Setze $\delta = c - d > 0$
 Es existiert $\tilde{m} \geq m$ mit $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$
 und $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq \tilde{m}$.
 Für diese n gilt:
 $0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$ nach Voraussetzung
 $= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$
 $\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \nmid$

□

2.9 Satz

- a) $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge
- b) Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{1}{n^m})_{n \geq 1}$ Nullfolge.
- c) Sei $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$
 Dann ist $(n^m \cdot q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge
- d) Ist $r > 1, m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{n^m}{r^n})_{n \geq 1}$ eine Nullfolge
- e) $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$
 $Q(x) = b_e \cdot x^e + \dots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$
 Sei $Q(n) \neq 0$ für alle $n \geq k$.

- Ist $m > e$, so ist $\frac{P(n)}{Q(n)}$ nicht konvergent
- Ist $m = e$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$
- Ist $m < l$, so ist $(\frac{P(n)}{Q(n)})$ eine Nullfolge

a) Sei $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge

Beweis. a) Richtig für $q > 0$. Sei jetzt $q > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Mathe I: Es gibt ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt: $|q^n - 0| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

□

b) 2.5c): $\frac{1}{n}$ Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

c) Richtig für $q = 0$. Sei jetzt $q > 0$.

1. Fall: $m = 1$

$$\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0.$$

$$(t+1)^n \stackrel{\text{Binomialsatz}}{=} 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 > \frac{n(n-1)}{2}t^2 \text{ für alle } n \geq 2$$

$$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$$

$$0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftrightarrow \text{Nullfolge 2.5e), 2.8e)}$$

Nach 2.8g) ist $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge, also auch $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$.

2. Fall: $m > 1$.

Setze $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} n^m \cdot q^n &= n^m \cdot (q')^{nm} \\ &= (n \cdot (q')^n)^m \end{aligned}$$

$$0 < q' < 1$$

$(n^m \cdot q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge nach Fall $m = 1$ und 2.8e)

d) Folgt aus c) und $q = \frac{1}{r}$

$$\text{e) Ist } m \leq l, \text{ so ist } \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^m(a_m + a_{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^m})}{n^l(b_l + b_{l-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$$

$$(I) \longrightarrow a_m, (II) \longrightarrow b_l \quad \frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{a_m}{b_l}$$

$$n < l, \frac{1}{n^{l-m}} \text{ Nullfolge}$$

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$$

$$m > l:$$

Beh. folgt aus Fall $m < l$ und 2.8e).

2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, die Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$$

$$a_n \leq x \leq b_n$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_n}{2} \Leftarrow \text{Nullfolge (2.9b)}$$

$$2.8e)(|x - a_n|) \text{ Nullfolge.}$$

$$2.7e): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

$$\text{Analog: } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$$

2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

2.11 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *strikt positiv*, falls $a_n > 0$ für alle $n \geq k$.

Sei im Folgenden $(a_n)_{n \geq k}$ eine strikt positive Folge.

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n \geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n \geq k} : \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \mathcal{O}(a_n) = \{(b_n)_{n \geq k} : (\frac{b_n}{a_n} \text{ ist Nullfolge})\}$$

$(b_n) \in \mathcal{O}(a_n)$ heißt Folge (a_n) wächst wesentlich schneller als die Folge (b_n) . Klar:

$$\mathcal{O}(a_n) \subset \mathcal{O}(a_n)$$

\mathcal{O}, \mathcal{o} „groß Oh“, „klein Oh“

Landau-Symbole

$$\begin{aligned} \text{z.B. } (n^2) &\in o(n^3) \\ (n^2 + n + 1) &\in O(n^2) \quad n^2 + n + 1 \leq 3n^2 \\ (n^2) &\in O(n^2 + n + 1) \quad n^2 \leq n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

$O(1)$ = Menge der beschränkten Folgen

$o(1)$ = Menge aller Nullfolgen

Häufig gewählte Schreibweise:

$$n^2 \stackrel{\underbrace{\quad}}{=} o(n^2) \text{ statt } (n^2) \in o(n^3)$$

eig. falsch!

$$n^2 + n + 1 = O(n^2) \text{ statt } (n^2 + n + 1)$$

2.12 Satz

Sei $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, $m \geq 0$, $a_m \neq 0$.

a) $(P(n)) \in o(n^l)$ für alle $l > m$ und

$(P(n)) \in O(n^l)$ für alle $l \geq m$.

b) ist $r > 1$, so ist $(P(n)) \in o(r^n)$.

$[(r^n) \text{ wächst deutlich schneller als } (P(n))]$

Beweis. a) folgt aus 2.9e).

$m = l$ (2.6)

b) folgt aus 2.9d) und 2.8 b)c) □

2.13 Bemerkung

Algorithmus:

Sei t_n = maximale Anzahl von Reihenschritten des Algorithmus' bei Input der Länge n (binär codiert).

Worst-Case-Komplexität:

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $(t_n) \in O(n^l)$.
(gutartig)

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mindestens
exponentielle Zeitkomplexität, falls $r > 1$ existiert mit $(r^n) \in O(t_n)$ (böseartig)

2.14 Definition

- a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *monoton wachsend (steigend)*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$. Sie heißt *steng monoton wachsend (steigend)*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq k$.
- b) $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$.

2.15 Beispiel

- a) $a_n = 1$ für alle $n > 1$ (a_n) ist monoton steigend und monoton fallend.
- b) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$.
 (a_n) streng monoton fallend.
- c) $a_n = \sqrt{n}$ (positive Wurzel)
 $(a_n)_{n \geq 1}$ streng monoton steigend.
- d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$
 $(a_n)_{n \geq 1}$ streng monoton steigend.
- e) $a_n = (-1)^n, n \geq 1$
 (a_n) ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

2.16 Satz

- a) Ist $(a_n)_{n \geq k}$ monoton steigend und nach oben beschränkt (d.h. es existiert $D \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq D$ für alle $n \geq k$), so konvergiert $(a_n)'$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$.
- b) $(a_n)_{n \geq k}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n \geq k}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$.

Beweis. a)

$c = \sup\{a_n : n \geq k\}$ existiert (Mathe I). Zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n(\varepsilon)$ mit $c - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq c$.

Denn sonst $a_n \leq c - \varepsilon$ für alle $n \geq k$ und $c - \varepsilon$ wäre obere Schranke für $\{a_n : n \geq k\}$.

Widerspruch dazu, dass c kleinste obere Schranke. Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

$$c - \varepsilon \leq a_{n(\varepsilon)} \leq a_n \leq c$$

$$|a_n - c| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon).$$

b) analog

□

2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

(Cauchy, 1789 - 1859)

Sei $(a_n)_{n \geq k}$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

(1) $(a_n)_{n \geq k}$ konvergent

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$ (Cauchyfolge)

Grenzwert muss nicht bekannt sein!

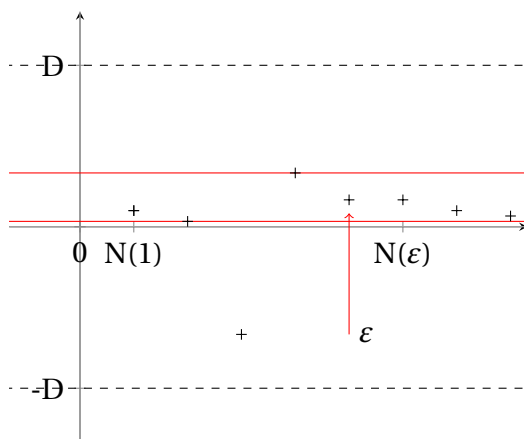


Abbildung 9: Cauchy'sches Konvergenzkriterium

2.18 Definition

a) Sei $(a_i)_{i \geq k}$ eine Folge, $s_n = \sum_{i=k}^n a_i$, $n \geq k$ (Partialsummen der Folge)

Dann heißt $(s_n)_{n \geq k}$ eine *unendliche Reihe*

$(k-1 : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$

Schreibweise : $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$

b) Ist die Folge $(s_n)_{n \geq k}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c$,

so schreibt man $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$. Reihe *konvergiert*.

Wenn (s_n) nicht konvergiert, so heißt die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *divergent*.

(Zwei Bedeutungen von $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$:

- Folge der Partialsummen

- Grenzwert von (s_n) , falls dieser existiert

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \sum_{n=k}^{\infty} a_n = (s_m)_{m \geq k}$$

2.19 Satz

a) Ist die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine Nullfolge.

b) Ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$ beschränkt und ist $a_i \geq 0$ für alle i , so

ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis. a)

Sei $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$.

Sei $\varepsilon > 0$ Dann existiert $n(\frac{\varepsilon}{2}) \geq k$ mit $|\sum_{i=k}^{\infty} 2a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n(\frac{\varepsilon}{2})$

Dann gilt $|a_{n+1} - 0| = |a_{n+1}| = |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + \sum_{i=k}^n a_i| =$

$$|\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c - \sum_{i=k}^n a_i + c| \leq |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c| + |\sum_{i=k}^n a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(a_n) ist Nullfolge

b) folgt aus 2.16 a), denn (s_n) ist monoton steigend

□

2.20 Beispiele

a) Sei $q \in \mathbb{R}$.

Ist $q \neq 1$, so ist $\sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$\left[\left(\sum_{i=k}^n q^i \right) \cdot (q-1) \right]$$

Sei $|q| < 1$, d.h. $-1 < q < 1$.

Dann ist $\sum_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ (konvergiert)

$$s_n = \sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

(q^n) Nullfolge (2.9_a) für $q \geq 0$, (2.8_e) + 2.9_a) für $q < 0$, $q = -|q|$)

Geometrische Reihe

Sei $|q| \geq 1$. Dann ist $\sum_{i=k}^{\infty} q^i$ divergent, da dann (q^i) keine Nullfolge (2.18_a)

b) $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert

harmonische Reihe

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{n}$$

$$n = 2^0 = 1 : s_1 = 1$$

$$n = 2^1 = 2 : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

...

$$n = 2^3 = 8 : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_7 > s_6 \dots$$

Per Induktion zu beweisen!

c) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Folge der Partialsummen ist monoton steigend.

2.16a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^2}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{2}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^4} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

2.16a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ Kgt., Grenzwert ≤ 2 . (später: Grenzwert ist $\frac{\pi^2}{6}$)

Es gilt allgemeiner:

$$s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s} \text{ konvergiert.}$$

$$\text{Allgemeiner: } s \in \mathbb{R}, s > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s} \text{ konvergiert}$$

d) $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ konvergiert:

$$s_{2n} = \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{<0} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)}_{<0}$$

$$s_{2n} \leq s_{2(n+1)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$(s_{2n}) \text{ ist monoton fallend. } s_{2n-1} = -1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right)}_{>0}$$

$$(s_{2n-1}) \text{ ist monoton wachsend}$$

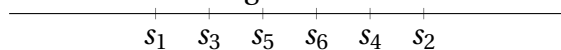
Ist k ungerade, so ist $s_k < s_l$: Wähle n so, dass $2n - a \geq k, 2n \geq l$

$$s_k \leq s_{2n-1} \underset{(2)}{<} s_{2n} \underset{(1)}{\leq} s_l$$

$$s_{2n} = s_{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

Abstand $s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n}$ geht gegen 0.

Abbildung 10: Monotonie



$$\sup\{s_{2n-1} : n \geq 1\}$$

$$\inf\{s_{2n} : n \geq 1\}$$

$$= \lim_{i \leftarrow \infty} (-1)^i \frac{1}{i} \in]-1, -\frac{1}{2}[\text{ (Es gilt } \lim_{i \leftarrow \infty} \frac{1}{i} = 0 \text{)}$$

Bemerkung

Was bedeutet $0.\bar{8} = 0.88888888\dots$? (Dezimalsystem)

$$0.\bar{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots = 8 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i+1}} = 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{i+1} = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere $a_i \geq 0$ falls $i \geq k$), so ist $\sum_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent.

2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_i)_{i \geq k}, (b_i)_{i \geq k}$ Folgen, wobei $b_i \geq 0$ für alle $i \geq k$ und $|a_i| \leq b_i$ für alle $i \geq k$.

Dann gilt

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent, so auch $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$. Für die Grenzwerte gilt:

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$$

Beweis. Konvergenz

von $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ folgt aus 2.16 a).

$\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$ folgt aus 2.8 f).

Sei $m > n$:

$$\left| \sum_{i=k}^m a_i - \sum_{i=k}^n b_i \right| = \sum_{i=n+1}^m a_i \leq \sum_{i=n+1}^m |a_i| = \left| \sum_{i=k}^m |a_i| - \sum_{i=k}^n |a_i| \right|$$

Mit Cauchy-Kriterium 2.17 folgt daher aus der Konvergenz von $\sum_{i=k}^m |a_i|$ auch die von

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i.$$

□

2.23 Beispiel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$$

$$\sqrt{i} \leq i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

Ang. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$ konvergiert. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ konvergiert. \nexists

Widerspruch zu 2.20 b)

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{i}$$

2.20d): $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, aber $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert nicht. (★)

2.24 Definition

$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.
(Falls alle $a_i \geq 0$: Konvergent = absolut Konvergent)

2.25 Korollar

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist auch konvergiert. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beweis: 1. Behauptung 2.22 mit $b_i = |a_i|$

Umkehrung siehe (★)

Bemerkung

Was bedeutet $0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

$a_i \in \{0 \dots 9\}$ (Dezimalsystem)

$$a_1 \cdot \frac{1}{10} a_2 \cdot \frac{1}{100} \dots a_n \cdot \frac{1}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10} 9 \cdot \frac{1}{100} \dots 9 \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$a_i \frac{1}{10} \leq 9 \frac{1}{10}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} 9 \frac{1}{10} = 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 1 \Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \frac{1}{10} \text{ konvergiert}$$

2.26 Satz

Sei $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ eine Reihe.

a) *Wurzelkriterium*

Existiert $q < 1$ und ein Index i_0 , so dass $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ für alle $i \geq i_0$.

so konvergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i so divergiert $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$.

b) *Quotientenkriterium*

Existiert $q > 1$ und ein Index i_0 , so dass $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \leq q$ für alle $i \geq i_0$,

so konvergiert $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Beweis.

$$\text{a) } |a_i| \leq q^i \text{ für alle } i \geq i_0$$

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} q^i \text{ konvergiert (2.20 a))}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert.}$$

$$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } i$$

$$\Rightarrow |a_i| \geq 1 \text{ für unendlich viele } i$$

$$\Rightarrow (a_i) \text{ sind keine Nullfolge}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \text{ divergiert.}$$

b) Sei $i \geq i_0$.

$$\left| \frac{a_i}{a_{i_0}} \right| = \left| \frac{a_i}{a_{i-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{i_0+1}}{a_{i_0}} \right| \leq q \cdot q \cdot \dots \leq q^{i-i_0} = \frac{q^i}{q^{i_0}}$$

↑ Voraussetzung:

jeder dieser Quotienten ist $\leq q$

$$|a_i| \leq \underbrace{\frac{|a_{i_0}|}{q^{i_0}}}_{=:c} \cdot q^i \quad \sum_{i=i_0}^{\infty} c \cdot q^i \text{ konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert.}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert}$$

□

2.27 Bemerkung

- a) Es reicht *nicht* in 2.26 nur vorauszusetzen, dass $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für alle $i \geq i_0$
 bzw. $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$ für alle $i \geq i_0$.

z.B. harmonische Reihen: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert.

Aber: $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} > 1$ für alle i .
 $\frac{i}{i+1} < 1$ für alle i

- b) Es gibt Beispiele von absolut konvergenten Reihen mit $|\frac{a_{i+1}}{a_i}|$ für unendlich viele i .

2.28 Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ absolut ($0^0 = 1, 0! = 1$):

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i} \right| = |f r a c x i + 1| = \frac{|x|}{i+1} \quad \text{Wähle } i_0, \text{ so dass } i_0 + 1 > 2 \cdot |x|$$

Für alle $i \geq i_0$:

$$\frac{|x|}{(i+1)} \leq \frac{|x|}{(i_0+1)} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q.$$

2.29 Bemerkung

Gegeben seien zwei endliche Summen

$$\sum_{a_n}^k n = 0, \sum_{b_n}^l n = 0.$$

$$\left(\sum_{a_n}^k n = 0 \right) \left(\sum_{b_n}^l n = 0 \right) \quad (\star)$$

Distributivgesetz: Multipliziere a_i mit jedem b_i und addiere diese Produkte.

$$(\star) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Indexsumme 0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Indexsumme 2}} + \dots + \underbrace{a_k b_l}_{\text{Indexsumme k+l}}$$

2.30 Definition

Seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_n, \sum_{i=0}^{\infty} b_n$ unendliche Reihen.

Das *Cauchy-Produkt* (*Faltungsprodukt*) der beiden Reihen ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_n$, wobei

$$c_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_{n-1} = a_0 b_n + a b_{n-1} + \dots a_n b_0$$

2.31 Satz

Sind $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ absolut konvergent Reihen mit Grenzwert c, d , so ist das Cauchy Produkt auch absolut konvergent mit Grenzwert $c \cdot d$.

Beweis: [1]

3 Potenzreihen

3.1 Definition

Sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge, $a \in \mathbb{R}$

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$ eine *Potenzreihe* (mit *Entwicklungspunkt* a) Speziell: $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

(Potenzreihe im engeren Sinne)

Hauptfrage: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konv. die Potenzreihe (absolut)?

Suche für $x = a$

Dann Grenzwert b_0 (da $0^0 = 1$)

Ob Potenzreihe für andere x konvergiert, hängt von b_n ab!

3.2 Beispiel

a) $\sum_{i=0}^{\infty} x^n (b_n = 1 \text{ für alle } n)$

geometrische Reihe, konvergiert für alle $x \in]-1, 1[$

b) $\sum_{i=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n (b_n = 2^n) = \sum_{i=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$ konvergiert genau dann nach a), wenn $|2x| < 1$, d.h. $|x| < \frac{1}{2}$ d.h. $x \in]-0.5, 0.5[$

- c) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n})$
 konvergiert für alle $x, x \in]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

3.3 Satz

Sei $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ eine Potenzreihe (um 0). Dann gibt es $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, R \geq 0$, so dass gilt.

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < R$ konvergiert Potenzreihe absolut (d.h. $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert, dann auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$)
 Falls $R = \infty$, so heißt das, dass Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ divergiert $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
 $(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty)$ (Für $|x| = R$ lassen sich keine allgemeine Aussagen

Abbildung 11: Konvergenzradien und ihre Aussagen



treffen).

R heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

Konvergenzintervall $< -R, R >$

besteht aus allen x für die $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert.

$<$ kann $[$ oder $]$ bedeuten.

$>$ kann $]$ oder $[$ bedeuten.

Beweis. $|x_1, x_2| \in \mathbb{R}, |x_1| \leq |x_2|$

Dann: Falls $\sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ konvergiert, so auch $\sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ (2.22) (\star)

Falls $\sum b_n \cdot x_n$ für alle x absolut konvergiert, so setze $R = \infty$

Wenn nicht, so setze $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n \text{ konvergiert}\} < \infty$ Nach (\star) gilt:

$|x| < R \Rightarrow \sum b_n x^n$ konvergiert absolut.

Für $|x| > R$ konvergiert $\sum b_n x^n$ nicht absolut.

Sie konvergiert sogar selbst nicht. ([?])

$$\sqrt[n]{|b_n| \cdot |x|^n} \leq q < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

$$\uparrow \text{ (setze } \varepsilon = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} > 0)$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : s - \frac{\varepsilon}{2} < |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq s + \frac{\varepsilon}{2} =: q < 1$$

□

3.4 Bemerkung

Konvergenz von Potenzreihen der Form $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$:

gleichen Konvergenzradius R wie $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

konvergiert absolut für $|x-a| < R$, d.h. $x \in]a-R, a+R[$ Divergiert für $|x-a| > R$.

Keine Aussage für $|x-a| = R$, d.h. $x = a-R$ oder $x = a+R$

Konvergenzintervall $< a-R, a+R >$

3.5 Die Exponentialreihe

a) Exponentialreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n!})$$

2.28 Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setze für $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

Exponentialfunktion $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$

b) Serien $x, y \in \mathbb{R}$

$\exp(x) \cdot \exp(y) \stackrel{2.31}{=} \text{Limes des Cauchy Produkts der beiden Reihen.}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot x^i \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = \exp(x+y)$$

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}}$$

Daraus folgt: $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

$$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad (\star)}$$

Für alle $x \geq 0$: $\exp(x) > 0$. Dann auch wegen (\star)

$$\boxed{\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}}$$

c) $\exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$

Euler'sche Zahl

Approximation e durch $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$	$m = 2$	$1 + 1 + \frac{1}{2}$	$= 2,5$
	$m = 3$	$2,5 + \frac{1}{6}$	$= 2,\bar{6}$
	$\dots m = 6$	$\frac{326}{126} + \frac{1}{720}$	$= 2,7180\bar{5}$

Es ist: $e \approx 2,71828\dots$ (irrationale Zahl)

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ konvergiert schnell

$m \in \mathbb{N}$

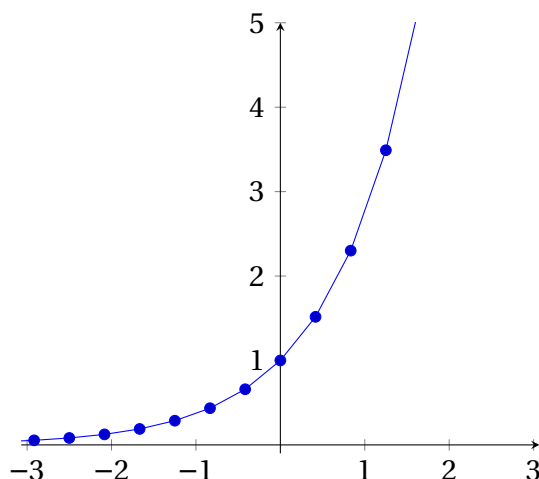


Abbildung 12: Die Exponentialreihe

$$\exp(m) = \exp(1 + \dots + 1)$$

$$\exp(1)^m = e^m \quad \leftarrow m \rightarrow$$

$$e^0 = 1 \quad \exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = e^{-m}$$

$$n \neq 0, n \in \mathbb{N}:$$

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}^n\right)$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = +\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}.$$

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ stimmt $\exp(x)$ mit der 'normalen' Potenz e^x überein.

Dann definiert man für beliebige $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x := \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

In kürze: Definition a^x für $a > 0, x \in \mathbb{R}$

- d) Bei komplexen Zahlen kam e^{it} ($i^2 = -1, t \in \mathbb{R}$) vor als Abkürzung für $\cos(t) + i \sin(t)$

$$\text{Tatsächlich kann auch für jedes } z \in \mathbb{C} \text{ definieren } e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$$

Dabei: Konvergenz von Folgen/Reihen in \mathbb{C} wie in \mathbb{R} mit komplexem Absolutbetrag.

Man kann dann zeigen:

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Dass tatsächlich dann gilt:

$$e^{it} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + i\sin(t). \text{ zeigen wir später}$$

2.718...) Man kann zeigen.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Bedeutung:

- Angelegtes Guthaben G wird in einem Jahr mit 100% verzinst. Guthaben am Ende eines Jahres $2G (= G(1 + 1))$

- Angelegtes Geld wird jedes halbe Jahr mit 50% verzinst. Am Ende eines Jahres (mit Zinsenzinsen)

$$G\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2,25G$$

n - mal pro Jahr mit $\frac{100}{n}\%$ verzinsen. Am Ende des Jahres $G\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot G \approx 2.718 \dots \cdot G \text{ (stetige Verzinsung)}$$

$$a\% \text{ statt } 100\% \cdot G e^{\frac{a}{100}}$$

4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

4.1 Definition

Reelle Funktionen f in einer Variable ist Abbildung

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ (D = Definitionsbereich).

Typisch: $D = \mathbb{R}$, Intervall, Verschachtelung von Intervallen

4.2 Beispiel

a) *Polynomfunktionen* (ganzrationale Funktion, Polynome)

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow a_n \cdot x^n + \dots a_1 x + a_0 \\ f(x) = a_n \cdot x^n + \dots a_1 \cdot x + a_0 \end{cases}$$

$a_n \neq 0 : n = \text{Grad}(f)$ $f = 0$ (Nullfunktion), $\text{Grad}(f) = \infty$

Grad 0: konstante Funktionen $\neq 0$

Graph von f :

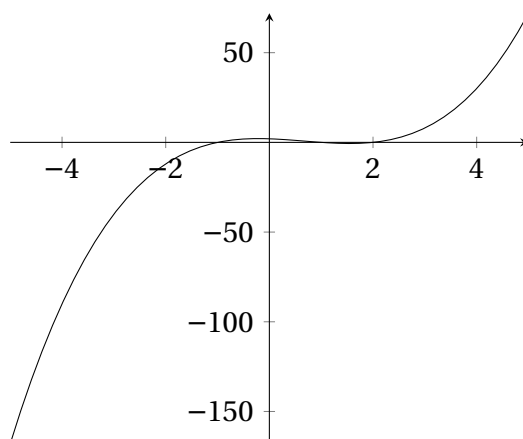


Abbildung 13: $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ für alle $x \in D$

Summe: Differenz, Produkt von f und g .

Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so *Quotient*. $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$,

Quotient von Polynomen = (gebrochen-)rationalen Funktionen

$|f|(x) := |f(x)|$ Betrag von f .

c) Potenzreihe definiert Funktion auf ihrem Konvergenzintervall.

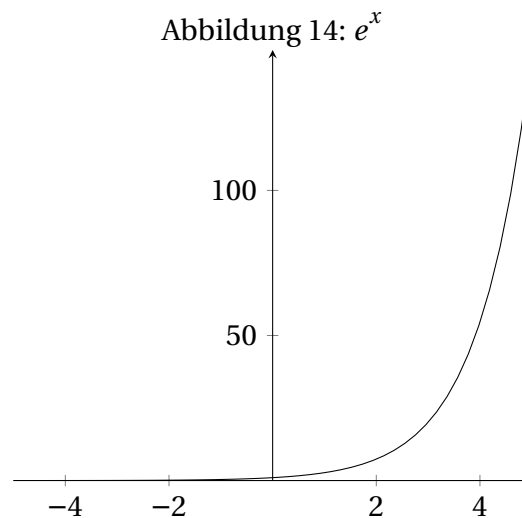
$$\text{z.B. : } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fkt. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

d) Hintereinanderausführung von Funktionen:

$f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(D_1) \subset D_2$, dann $g \circ f :$

$$\begin{cases} D_1 \Rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow g(f(x)) \end{cases}$$



e) $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = e^{x^2 + 1}$$

f) *Trigonometrische Funktionen: Sinus- und Cosinusfunktion (vgl. \mathbb{C})*

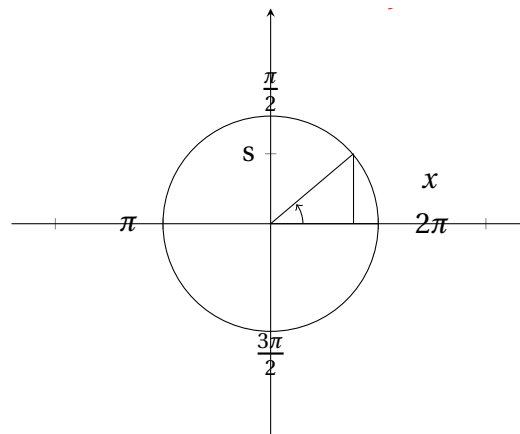


Abbildung 15: Bogenmaß

$0 \leq x < 2\pi$ x = Bogenmaß von φ in Grad, so $x = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi$

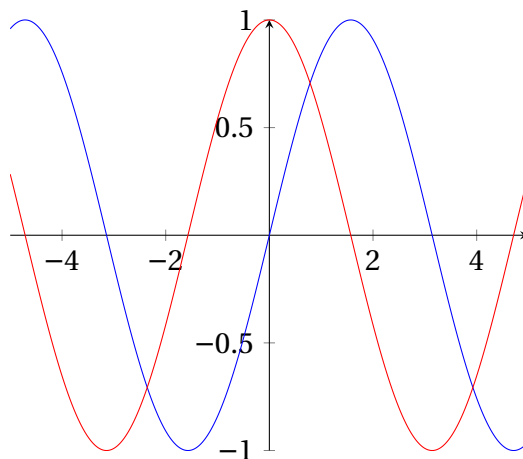
$\sin(x) = s, \cos(x) = c$ Für beliebig $x \in \mathbb{R}$:

Periodische Fortsetzung, d.h. $x \in \mathbb{R}, x = x' + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}, x' \in [0, 2\pi[$

$$\sin(x) := \sin(x')$$

$$\cos(x) := \cos(x')$$

$$|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$$

Abbildung 16: $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Tangens und Cotangensfunktion

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \cos(x) \neq 0$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \sin(x) \neq 0$$

4.3 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ heißt *Adhärenzpunkt* von D , falls es eine Folge $(a_n)_n$, $a_n \in D$, mit

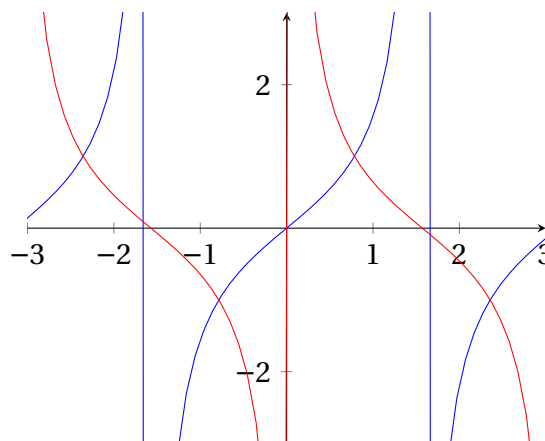
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \text{ gibt.}$$

\bar{D} = Menge der Adhärenzpunkte von D

= *Abschluss* von D

klar: $D \subset \bar{D}$.

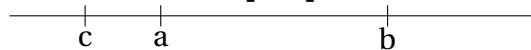
$d \in D$. konstante Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = d$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d = d$.

Abbildung 17: $\tan(x)$ and $\cot(x)$

Also: $d \in \bar{D}$.

4.4 Beispiel:

a) $a, b \in \mathbb{R}, a > b, D =]a, b[$



$$\bar{D} = [a, b] \quad D \in \bar{D}$$

$$a \in \bar{D}$$

$$a_n = a + \frac{b-a}{n} \in D, n \geq 2$$

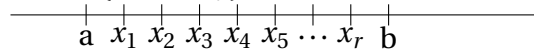
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Also $[a, b] \subset \bar{D}$.

Ist $c \notin [a, b]$, etwa $c < a$, dann ist $|a_n - c| \geq a - c > 0$ für alle $a_n \in]a, b[$. Also: $\lim_{a_n} \neq c$

b) \mathcal{J} Intervall in $\mathbb{R}, x_1, \dots, x_r \in \mathcal{J}$,

$$D = \mathcal{J} \{x_1, \dots, x_r\}$$



$$\bar{D} = \bar{\mathcal{J}} = [a, b],$$

falls $\mathcal{J} =]a, b[$.

c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

4.5 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$.

$d \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $f(x)$ für x gegen c , $d = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, wenn für jede Folge $(a_n) \in D$, die gegen c konvergiert, die Bildfolge $(f(a_n))_n$ gegen d konvergiert.

4.6 Beispiel:

a) Sei $f(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$, eine Polynomfunktion, $c \in \mathbb{R}$. Sei (a_n) Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0 \\ &= b_k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k + b_{k-1} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{k-1} + \dots + b_0 \quad \text{Rechenregeln für Folgen, 2.8} \\ &= b_k \cdot c^k + b_{k-1} \cdot c^{k-1} + \dots + b_1 \cdot c + b_0 = f(c). \end{aligned}$$

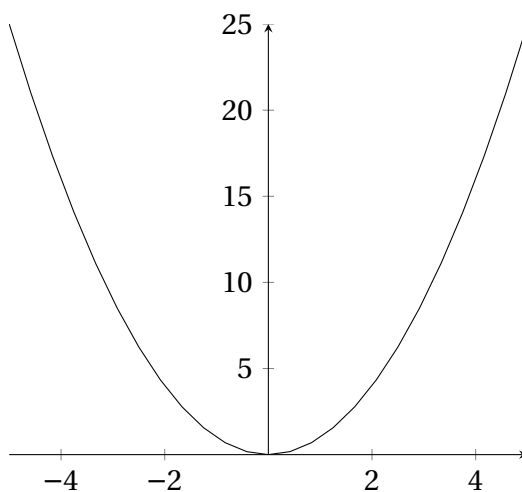
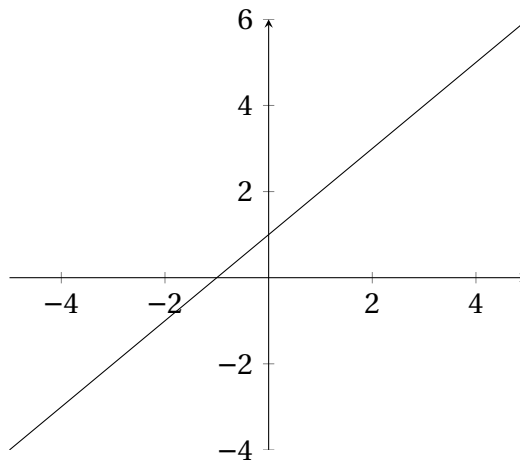


Abbildung 18: x^2

b) Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Auf D ist $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1) \quad \bar{D} = \mathbb{R}$

Abbildung 19: $x+1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

Sei (a_n) Folge mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$$f(a_n) = a_n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = 1 + 1 = 2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} = 2.$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$a_n = -\frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow 0}$ existiert nicht.

$$\text{d) } f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad a_n = \frac{1}{n\pi}, f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$$

$$a'_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2}\pi)} \rightarrow 0, f(a'_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lim(a_n) = 0$$

$$\lim(f(a_n)) = \lim 0 = 0 \quad \lim(f(a'_n)) = \lim 1 = 1$$

$\lim(f(x))_{x \rightarrow 0}$ existiert nicht

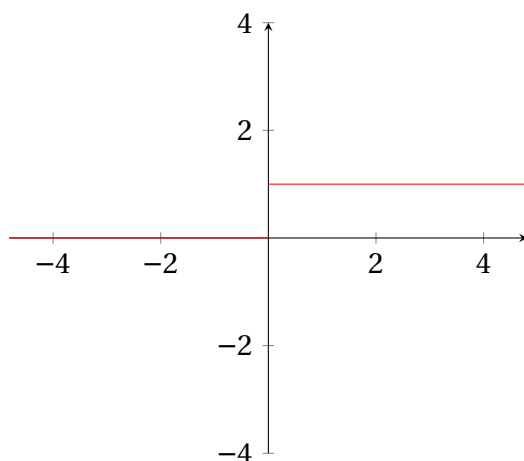
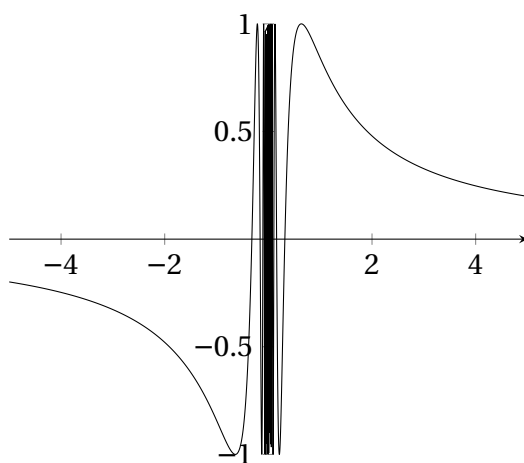


Abbildung 20: Abschnittsweise definierte Funktion

Abbildung 21: $\sin(\frac{1}{x})$

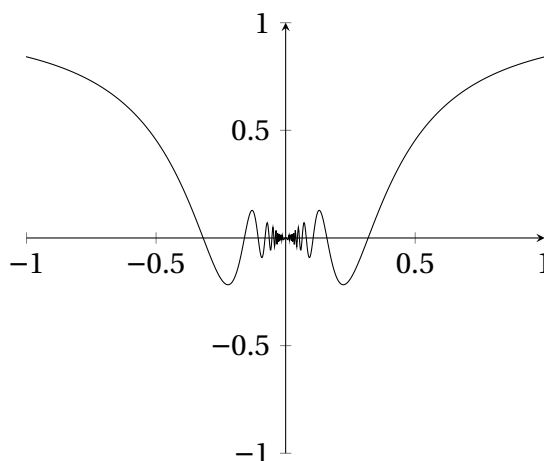
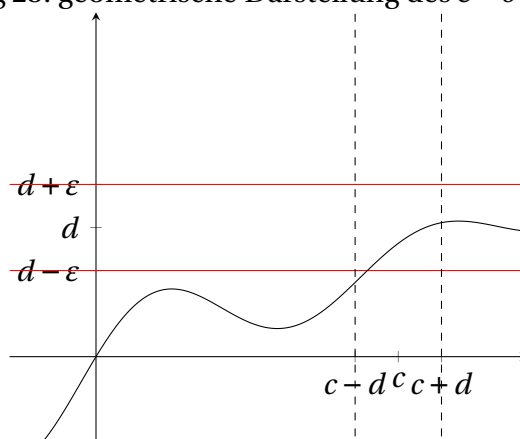
e) $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ dann:

$$(a_n) \rightarrow 0, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin(\frac{1}{a_n}) \stackrel{2.8g)}{=} 0$$

4.7 Satz $(\varepsilon - \delta)$ -Kriterium

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \bar{D}$. Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \rightarrow |f(x) - d| \leq \varepsilon$

Abbildung 22: $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ Abbildung 23: geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums

Beweis. \rightarrow : Angenommen falsch.

Dass heißt $\exists \varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ (z.B. $\delta = \frac{1}{n}$) ein $x_n \in D$ existiert mit $|x_n - c| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - d| > \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Aber:

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq d$

\Leftarrow : Sei (a_n) Folge, $a_n \in D$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall n \geq n(\varepsilon): |f(a_n) - d| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, ex. $d > 0$:

(★)

Für alle $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$ gilt $|f(x) - d| < \varepsilon$.

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, existiert n_0 mit $|a_n - c| \geq \delta$ für alle $n \geq n_0$

Nach (★) gilt: $|f(a_n) - d| < \varepsilon \forall n \geq n_0$. ✓

□

Bemerkung

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow$ Für alle Folgen $(a_n), a_n \in D$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$. Wenn man zeigen will, dass $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ nicht existiert, gibt es 2 Möglichkeiten:

- Suche *eine bestimmte* Folge (a_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ nicht existiert.
- Suche zwei Folgen $(a_n), (b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$

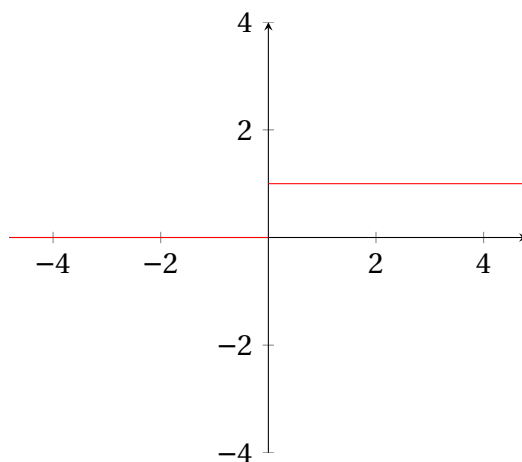


Abbildung 24: Abschnittsweise definierte Funktion

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$f(a_n) = (101010\dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \text{ existiert nicht.}$$

Oder:

$$a_n = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\text{Aber: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

$f, g, D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$, Existieren die Grenzwerte auf der rechten Seite der folgenden Gleichungen, so auch die auf der linken (und es gilt Gleichheit)

$$a) \lim_{x \rightarrow c} (f \pm / \cdot g) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm / \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

$$b) \text{ Ist } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D \text{ und } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0, \text{ so}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right|$$

Beweis. Folgt aus den entsprechenden Regeln für Folgen. □

4.9 Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + 1}, D = \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1)} \\ &= \frac{4 + 6 + 1}{8 + 1} = \frac{11}{9} \end{aligned}$$

4.6a)

4.10 Bemerkung

Rechts- und linksseitige Grenzwerte:

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = d \Rightarrow \forall (a_n)_n, a_n \in D, a_n \geq c \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d. \text{ Analog:}$$

$$\text{linksseitiger Grenzwert: } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$$

$$(a_n \leq c).$$

4.11 Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, c = 0 \in \bar{D}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht.

Falls $\lim_{x \rightarrow c^+}$ und $\lim_{x \rightarrow c^-}$ existieren

$$\text{und } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$$

so existiert $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$. Grenzwert: $d \in \mathbb{R}$

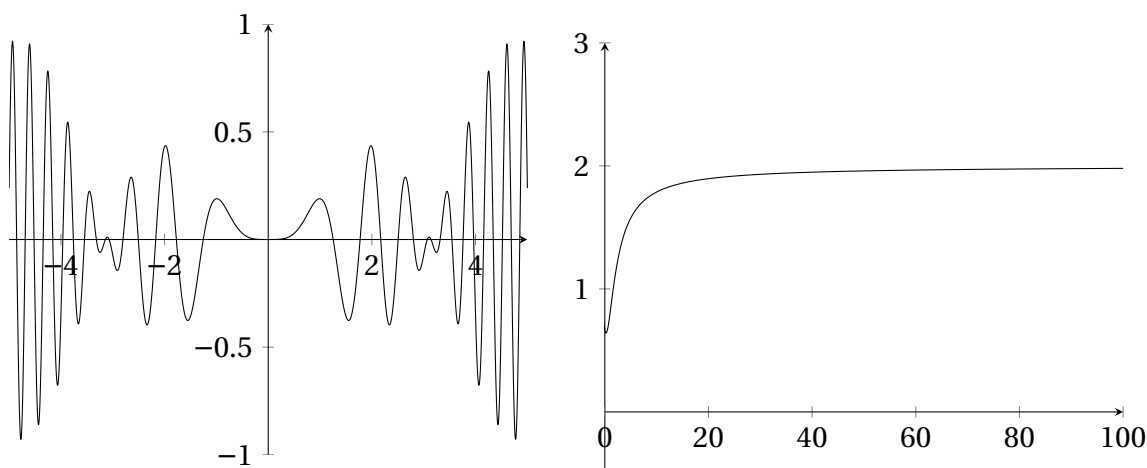


Abbildung 25: Grenzwerte gegen einen Festen Wert

4.12 Definition

$$D =]b, \infty[, f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{z.B. } D = \mathbb{R})$$

f konvergiert gegen $d \in \mathbb{R}$ für x gegen unendlich,

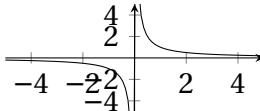
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = d$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x \geq M : |f(x) - d| < \varepsilon.$$

(Analog: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d$)

4.13 Beispiel

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$



Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $x \geq M$:

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

b) Allgemein gilt:

P, Q Polynome vom Grad k bzw. $l \geq k$

$$P(x) = a_k \cdot x^k + \dots, Q(x) = b_l \cdot x^l + \dots, a_k \neq 0, b_l \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l > k \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{für } l = k \end{cases}$$

(Beweis wie für Folgen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 205x^3 + x^2 + 17}{14x^5 + 0,5} = \frac{1}{2}$$

4.14 Bemerkung

Die Rechenregeln aus 4.8 gelten auch für $x \rightarrow \infty / -\infty$

4.15 Definition

a) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$

f geht gegen ∞ für x gegen c ,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \text{ falls gilt:}$$

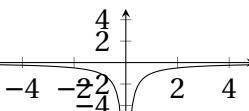
$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq L.$$

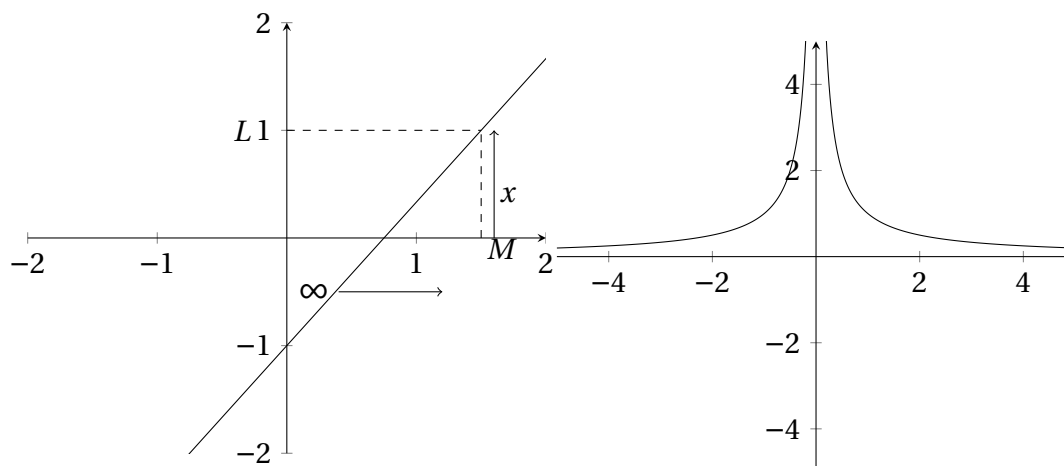
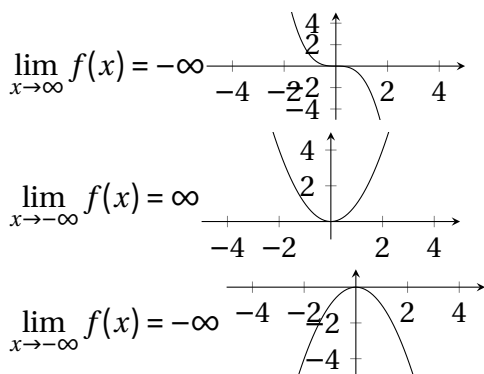
$= \delta(L)$

b) $< b, \infty[\cap D, f : D \rightarrow \mathbb{R}, f$ geht gegen ∞ , für x gegen ∞ : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, falls gilt:

$$\forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D, x \geq M, f(x) \geq L.$$

(Entsprechend: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$)



Abbildung 26: Funktionen $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$ **4.16 Satz**

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

- a) Sei $c \in \bar{D}$, oder $c = \infty, -\infty$

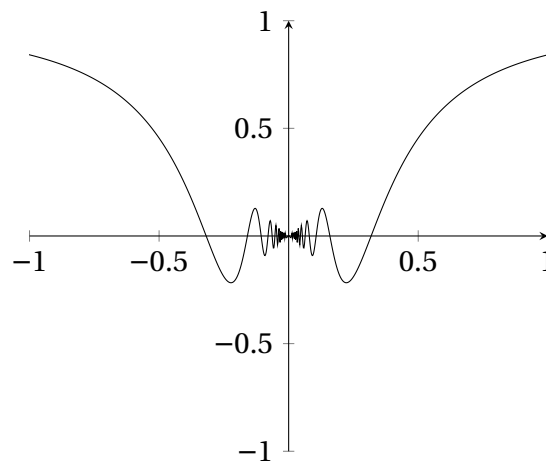
falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ oder $-\infty$, so ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = 0$.

- b) $c \in \bar{D} \supset \mathbb{R}$.

Falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ und falls $s > 0$

existiert mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [c - s, c + s]$, ($f(x) < 0$)

dann ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty (-\infty)$

Abbildung 27: $\sin(\frac{1}{x})$

- c) Falls $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ und falls $T > 0$ existiert mit $f(x) > 0$ für $x \geq T$, so $(f(x) < 0)$
 ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty (-\infty)$
 (Entsprechend für $\lim_{x \rightarrow -\infty}$)

4.17 Beispiel

- a) • $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]-\infty, 0[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ existiert nicht
-

- c) $P(x) = ak_x^k + \dots + a_0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \text{ k gerade oder } a_k < 0 \text{ k ungerade} \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \text{ k gerade oder } a_k > 0 \text{ k ungerade} \end{cases}$$

d) $P(x)$ wie in c)

$$Q(x) = b_l + \dots + b_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ gleiche Vorzeichen} \\ -\infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ verschiedene Vorzeichen} \end{cases}$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \forall L > 0 \exists M \forall x \gg M : f(x) \gg L$

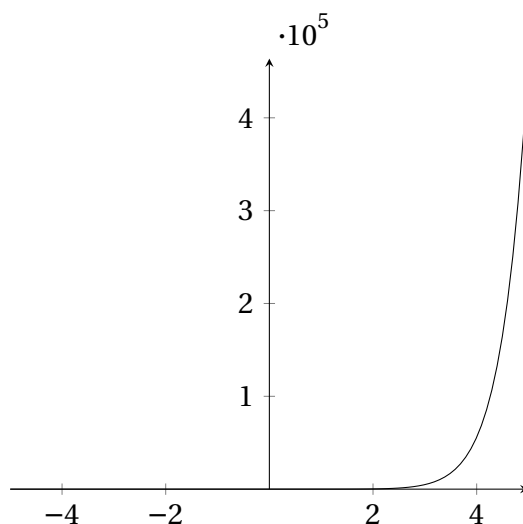


Abbildung 28: $\frac{e^x}{x^n}$

Sei $L \geq 0, x > 0$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$$

Ist $x \geq (n+1)!L =: M$, so ist $\frac{e^x}{x^n} > L$.

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$. Folgt aus e) und 4.16a)

5 Stetigkeit

5.1 Definition

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

a) f ist *stetig* an $c \in D$, falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

b) f heißt (absolut) stetig, falls f an allen $c \in D$ stetig ist.

5.2 Satz

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D.$$

Existiert Konstante $\mathbf{K} > 0$ mit $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c|$ für alle $x \in D$, dann ist f stetig in c .

Beweis.

Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbf{K}}$. Ist $|x - c| \leq \delta$, so ist $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c| \leq \mathbf{K} \cdot \delta = \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

□

5.3 Beispiel

a) Polynome sind auf ganz \mathbb{R} stetig

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases} \quad f \text{ ist nicht stetig in } 0.$$

$$a_n = \frac{1}{n}, a_n \rightarrow 0$$

$$f(a_n) = 0$$

$$(f(a_n)) \rightarrow 0 \neq f(0)$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

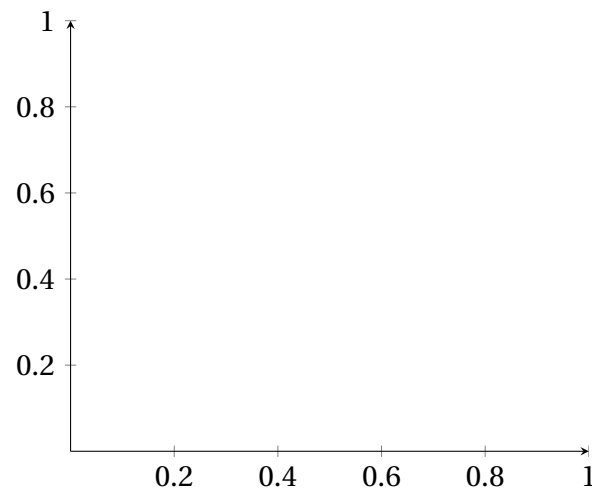
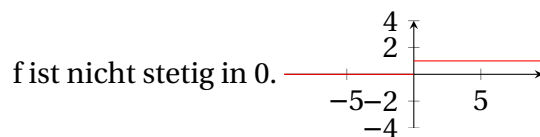
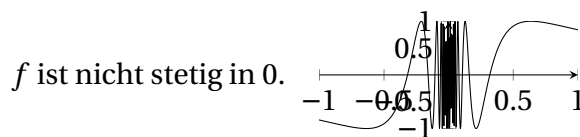


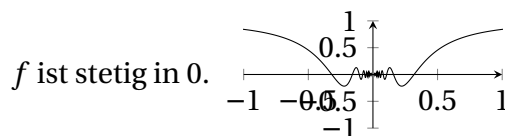
Abbildung 29: Abschnittsweise definierte Funktion



$$d) f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x}) \text{ ex. nicht.}$$



$$e) f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$$



f) $f(x) = \sin(x)$

$g(x) = \sin(x)$ Sind stetig auf \mathbb{R} : TODO: Halbkreis plotten.

Für alle $x, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin(x) - \sin(c)| \leq |x - c|.$$

$\sin(x)$ ist stetig auf \mathbb{R} (5.2, $\mathbf{K}=1$)

5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit)

$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D$,

sind f und g stetig in c , dann auch $f \pm \cdot$ und $|f|$. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in c .

Beweis. Folgt aus 4.8 □

5.5 Satz

$D, D' \subseteq \mathbb{R}, F : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$g : D' \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'$. Ist f stetig in $c \in D$ und ist g stetig in $f(c) \in D'$, so ist $g \circ f$ stetig in c ,

Beweis. $(a_n) \rightarrow c, a_n \in D$.

f stetig: $f(a_n) \rightarrow f(c)$

g stetig in $f(c)$: $(g \circ f)(a_n) \rightarrow (g \circ f)(c)$ □

5.6 Beispiel

a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{|x^2-1|}\right), D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. f ist stetig auf D . Folgt aus 5.3_{a),f} und 5.4,5.5.

b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ stetig auf \mathbb{R} , 5.3e) für $c = 0$ für $c \neq 0$. 5.3,5.4,5.5

c) $f(x) = \tan(x) (= \frac{\sin(x)}{\cos(x)})$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ f stetig auf D

5.7 Satz

Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann ist f stetig $]a-R[=: D$

$c \in D \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i \quad [3]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i = f(c)$$

5.8 Korollar

$f(x) = \exp(x) = e^x$ ist stetig auf \mathbb{R}

5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $[u, v] \subset D$, $u < v$

Es gelte $f(u) \cdot f(v) < 0$

(d.h. $f(u) > 0, f(v) < 0$, oder $f(u) < 0, f(v) > 0$) Dann existiert $w \in]u, v[$ mit $f(w) = 0$

Beweis. O.B.d.A., $f(u) < 0 < f(v)$.

Bijektionsverfahren:



Falls $f(c) < 0$, so $a = c$, sonst $b = c$. Liefert Folgen $(a_n), (b_n)$ und eindeutig bestimmte $w \in [u, v]$ mit $a_n \leq a_{n+1} \leq w \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle n

$$f(a_n) < 0$$

$$f(b_n) \geq 0$$

für alle n . $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = w$ f ist stetig in $w \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(w)$.

$$f(a_n) < 0 \forall n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0.$$

$$f(b_n) \geq 0 \forall n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0.$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(w).$$

□

5.10 Korollar (Zwischenwertsatz)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $[u, v] \subseteq D$

Dann nimmt f in $[u, v]$ jeden Wert zwischen $f(u)$ und $f(v)$ an (und evtl. weitere)

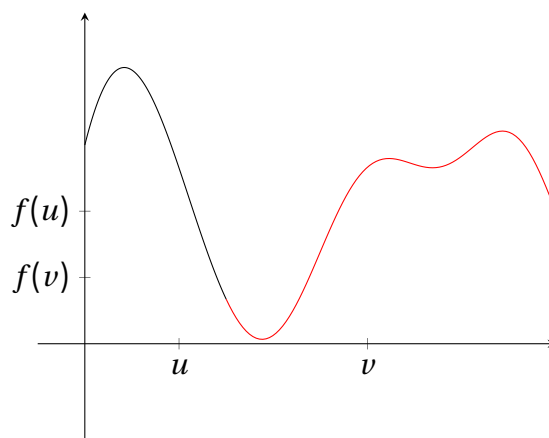


Abbildung 30: Zwischenwerte

Beweis. O.B.d.A $f(u) < f(v)$

Sei $f(u) < b < f(v)$ b beliebig, aber dann fest.

Definiere $g(x) = f(x) - b$ stetig

$g(u) = f(u) - b$ $g(v) = f(v) - b$

5.9 (angewandt auf g): Ex. $w \in]u, v[$ mit $g(w) = 0$, d.h. $f(w) = b$. □

5.11 Satz (Min-Max-Theorem)

$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

(Wichtig: *abgeschlossenes* Intervall)

Dann hat f ein Maximum und ein Minimum auf $[a, b]$, d.h. es existieren

$x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit $f(x_{\max}) \leq f(x) \leq f(x_{\min})$ für alle $x \in [a, b]$ (Beweis mit Bisektionsverfahren, [4])

Zur Erinnerung

$f : D \rightarrow D'$ bijektiv, dann existiert Umkehrfunktion $f^{-1} : D' \rightarrow D$ mit

$f \circ f^{-1} = id_{D'}$ und

$$f^{-1} \circ f = id_D$$

zum Beispiel $f(x) = x^2$

$$f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

bijektiv

$$f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

$$f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$$

5.12 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton wachsend (oder steigend), falls gilt:

Sind $x, y \in D, x < y$, so ist $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$)

Entsprechend: streng monoton fallend. f heißt (streng) monoton, falls sie entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

5.13 Satz

D Intervall (rechte

linke Grenze) $\infty, -\infty$ möglich), $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: f ist injektiv auf $D \Leftrightarrow f$ ist streng monoton auf D .

Beweis. $\Leftarrow \checkmark$

\Rightarrow : Angenommen f ist nicht streng monoton auf D .

Dann existieren $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) < f(x_2)$ und $x_3 < x_4$ und $f(x_3) > f(x_4)$

($f(x_1) = f(x_2)$ bzw. $f(x_3) = f(x_4)$ nicht möglich, da f injektiv) Jetzt muss man Fallunterscheidungen machen.

z.B

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

□

5.14 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

D Intervall, $f : D \rightarrow f(D) =: D'$

eine stetige, streng monotone (also bijektive) Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion

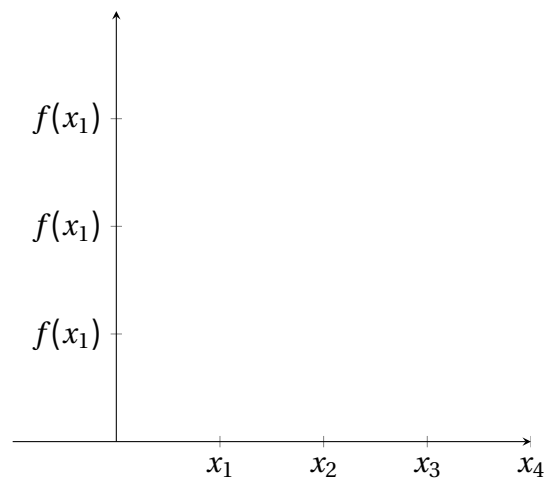


Abbildung 31: Eine Fallunterscheidung für 5.13

$f^{-1}D' \rightarrow D$ stetig.

Beweis: [5] f streng monoton wachsend (fallend) $\Rightarrow f^{-1}$ streng monoton wachsend

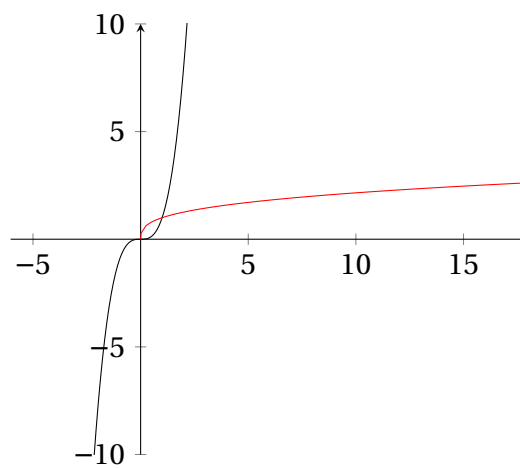


Abbildung 32: Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion

(fallend)

5.15 Korollar

Ist $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$, so

ist $f(x) = x^n$ stetig und bijektiv $\begin{cases} [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[\\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

Die Umkehrfunktion $f^{-1} = \sqrt[n]{x}$ ist stetig und bijektiv $\begin{cases} [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[\\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ Nach 5.8 ist

$\exp(x)$ stetig auf \mathbb{R} . Nach 3.5b) ist $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$, so ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3!} + \dots \geq 1$, Ist $x > y$ so ist $\exp(y) = \exp(x + (y-x)) \underset{3.5b)}{=} \exp(x) \cdot \underbrace{\exp(y-x)}_{\substack{<0 \\ >1}} > \exp(x)$

5.16 Satz

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt $\ln(x) :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend und bijektiv.

Es gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$, $\ln(1) = 0$

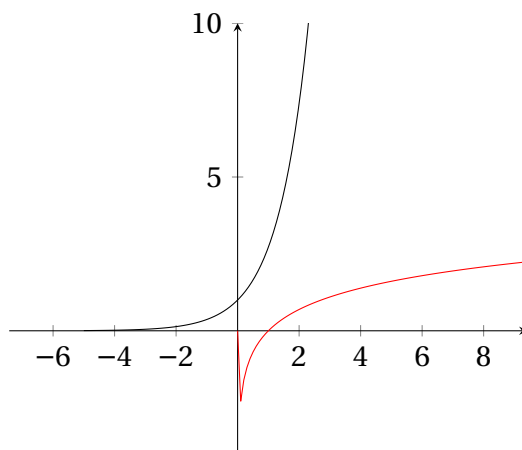


Abbildung 33: $\exp(x)$ und $\ln(x)$

Beweis. \exp streng monoton steigen s.V,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty \quad (4.17e))$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$ Also: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ bijektiv

$\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, streng monoton wachsend, stetig, bijektiv (5.14).

$x, y > 0, \exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $x = \exp(a), y = \exp(b)$.

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(\exp(a) \cdot \exp(b)) \\ &= \ln(\exp(a+b)) = a+b \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

□

5.17 Satz

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ (für jedes $k \in \mathbb{N}$)
(D.h. $(\ln(n)) \in o(n)$)

Beweis. $x = \exp(y), x \leq 1$, d.h. $y \leq 0$.

$$\frac{\ln(x)}{x^k} = \frac{y}{(\exp(y))^k} \leq \frac{y}{\exp(y)} \rightarrow 0 \text{ (4.17e)}$$

□

5.18 Definition

Für $a > 0$ setze $a^x = \exp(x \cdot \ln(a)) \underbrace{(\exp(\ln(a)))}_0$ $a \leq e: e^x = \exp(x), a^x$, falls $a > 0$ TODO:

komischer plott mit exponentialfunktionen

5.19 Satz

Sei $a > 0$

a) $a^x: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend für alle $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

b) $a^x, a^y = a^{x+y}$
 $(a^{x^y} = a^{x \cdot y})$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

c) Für $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} (p \in \mathbb{Z}, q > 0)$ stimmt Def. von a^x entsprechend. 5.18 mit der üblichen Definition $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ überein.

Beweis. Folgt aus Definition mit 3.5 □

5.20 Bemerkung

Ist $x \in \mathbb{R}$ und (x_n) Folge mit $x_n \in \mathbb{Q}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$,

so $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x$

(Stetigkeit)

D.h. a^x lässt sich durch a^{x_n} , $x_n \in \mathbb{Q}$, beliebig gut approximieren

5.21 Definition

Für $a > 0$, $a \neq 1$, heißt die Umkehrfunktion von a^x *Logarithmus zur Basis a*

$\log_a(x)$

($a = 2$, $a = e$, $a = 10$ wichtig)

$\log_e(x) = \ln(x)$

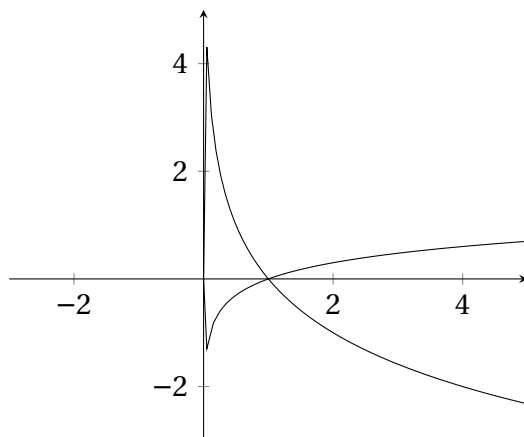


Abbildung 34: Logarithmen mit Basen > 1 und < 1

5.22 Satz

Seien $a, b > 0, a \neq 1 \neq b, x, y > 0$

- (a) $\log_a(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$
- (b) $\log_a(x^y) = y \cdot \log(x)$
- (c) $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$
- (d) Sind $a, b > 1$, so $O(\log_a(n)) = O(\log_b(n))$

Beweis. a) wie 5.10

$$\text{b) } a^{y \cdot \log_a(a^y)} \stackrel{5.19b)}{=} (a^{\log_a(x)})^y = x^y$$

$$\Rightarrow \log_a(x^y) = \log_a(a^{y \cdot \log_a(x)}) = y \cdot \log_a(x)$$

$$\text{c) } \log_a(x) = \log_a(b^{\log_a(x)}) \stackrel{b)}{=} \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

d) Folgt aus c), da $\log_a(b) > 0$

□

6 Differenzierbare Funktionen

TODO PLOT mit steigungsdreieck

Sekante durch $(c, f(c)), (x, f(x))$

Steigung der Sekante:

$$x \neq c: \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = s(x) \text{ definiert auf } \mathbb{R} \setminus \{c\}$$

Differenzenquotient

Falls $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existiert: Steigung der Tangente an Graph von f in $(c, f(c))$
(Änderungsrate von f in $(c, f(c))$)

6.1 Definition

\mathcal{I} Intervall, $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}, c \in \mathcal{I}$

a) f heißt *differenzierbar* (diffbar) an der Stelle c , falls $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existiert.

Grenzwert heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f an der Stelle c .

$$f'(c) = \left(\frac{df}{dx}(c) \right) \quad \left[f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, h := x - c \right]$$

b) f heißt *differenzierbar* auf \mathcal{I} , falls f in jedem Punkt von \mathcal{I} differenzierbar ist.

$$f' : \begin{cases} \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

6.2 Beispiel

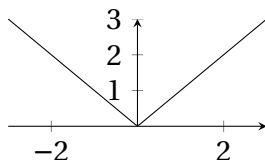
a) $f(x) = a \cdot x^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$.

$$x \neq c : \frac{ax^n - ac^n}{x - c} = \frac{a(x-c)(x^{n-1} + \dots + c^{n-1})}{x - c}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{ax^n - ac^n}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{a(x-c)(x^{n-1} + \dots + c^{n-1})}{x - c} = a \cdot n \cdot c^{n-1} = f'(x).$$

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \text{ Gilt auch für } n = 0. (f \text{ konstant auf } f' = 0)$$

b) $f(x) = |x|$



f ist diffbar in 0?

Zu zeigen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$ existiert nicht.

Sei (a_n) Folge, $a_n < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (z.B. $a_n = -\frac{1}{n}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{a_n} = -1$$

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ (z.B. } b_n = \frac{1}{n} \text{)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_n} = 1$$

$f'(0)$ existiert nicht!

6.3 Satz

$f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ in $c \in \mathcal{I}$ diffbar. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{I}$:

$$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + \mathcal{R}(x) \cdot (x - c),$$

wobei $\mathcal{R} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in c , $\lim_{x \rightarrow c} \mathcal{R}(x) = 0$

D.h. : f lässt sich in der Nähe von c sehr gut durch eine lineare Funktion (d.h. Graph ist Gerade) approximieren.

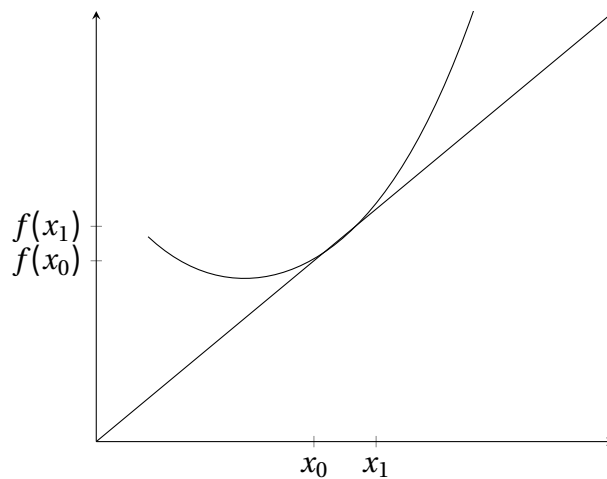


Abbildung 35: Sekante an Funktion

6.4 Korollar

$f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $c \Rightarrow f$ ist steig in c . Beweis folgt aus 6.3

Beachte: Umkehrung von 6.4 gilt im Allgemeinen nicht. 6.2b).

Diffbare Funktionen sind stetig, aber sie haben keine Knicke im Graphen.

6.5 Satz (Ableitungsregeln)

\mathcal{I} Intervall, $c \in \mathcal{I}$. Für a)-c)

seien $f, g : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in c

a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so $\alpha f + \beta g$ diffbar in c ,

$$(\alpha f + \beta g)'(c) = \alpha \cdot f'(c) + \beta \cdot g'(c)$$

b) (Produktregel) $f \cdot g$ diffbar in c ,

$$(f \cdot g)'(c) = f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c)$$

c) (Quotientenregel) Ist $g(x) \neq 0$ auf \mathcal{I} , so

$$\frac{f'}{g}(c) = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g(c)^2}$$

d) (Kettenregel) \mathcal{I}_1 Intervall, $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}_1$, diffbar in c , $g: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $f(c)$, so $g \circ f$ diffbar in c , und

$$(g \circ f)' = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

Beweis. Nur b):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)(g(x) - g(c)) + g(c)(f(x) - f(c))}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \\ &g(c) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \stackrel{6.4}{=} f(c)g'(c) + g(c)f'(c). \end{aligned}$$

□

6.6 Beispiel

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \\ f'(x) &\stackrel{6.5a)}{=} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \\ &\stackrel{6.2a)}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \mathcal{I} &=]0, \infty[\\ f'(x) &\stackrel{6.2a)}{=} \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = (-n) \cdot x^{-n-1} \text{ gilt auch auf }]-\infty, 0[\\ &\stackrel{6.5c)}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h(x) &= (x^2 + x + 1)^2 \\ (6.5d): f(x) &= x^2 + x + 1 \\ g(x) &= x^2 \\ h'(x) &= 2 \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1) \end{aligned}$$

6.7 Satz

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Beweis.

a) Elementargeometrisch + Additionstheoreme 1.7 (Man zeig: $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

$$\text{b) } \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{(1 - \cos(x))}{x(1 + \cos(x))} = \frac{1 - \cos(x)}{x(1 + \cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \rightarrow 0$$

□

6.8 Satz

a) $f(x) = \sin(x)$, so $f'(x) = \cos(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$, so $f'(x) = -\sin(x)$

c) $f(x) = \tan(x)$, so $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Beweis. a), $c \in \mathbb{R}$

$$\sin'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h+c) - \sin(c)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(c) \cdot \cos(h) + \cos(c) \cdot \sin(h) - \sin(c)}{h}$$

$$= \frac{\sin(c) \cdot \cos(h) - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(c) \sin(h)}{h} = \sin(c) \cdot 0 + \cos(c) \cdot 1 = \cos(c) \text{ b) analog}$$

c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ Quotientenregel + a)b) $+ \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

□

6.9 Beispiel

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

f ist diffbar für alle $x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x} \stackrel{6.7b)}{=} 0$$

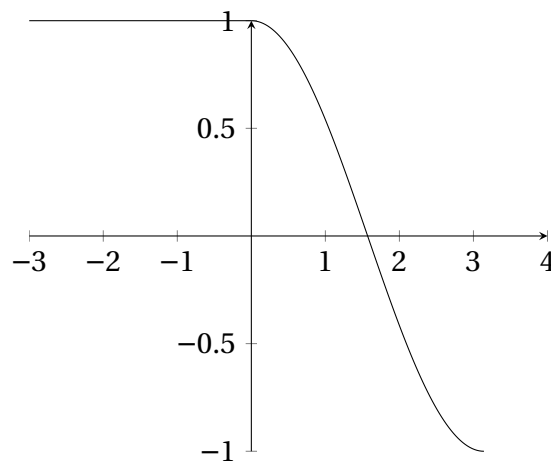


Abbildung 36: Abschnittsweise definierte cosinus Funktion

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 = f'(0)$$

b) $f(x) = \sin^2(x^3) = (\sin(x^3))^2$
 $f'(x) = 2 \cdot \sin(x^3) \cdot (\sin(x^3))' = 6 \cdot \sin(x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot x^2$

6.10 Satz

Im Inneren ihres Konvergenzintervalls definieren Potenzreihen eine Funktion

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$

eine Potenzreihe um a mit Konvergenzradius $R > 0$.

Dann ist f in $]a-R, a+R[$ diffbar und es gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1} = f'(x)$.

(gliedweise Ableitung)

(Beweis [7])

6.11 Korollar

$$(\exp(x))' = \exp(x)$$

Beweis. $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$k = 1, \dots$

Beweis folgt. □

6.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}_1$ bijektiv, $\mathcal{I}, \mathcal{J}_1$ Intervall (linke und rechte Grenze darf nicht $-\infty/\infty$ sein)

Sei f in $c \in \mathcal{I}$ diffbar und $f'(c) \neq 0$.

Dann ist $f^{-1}: \mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{I}$ in $f(c) \in \mathcal{J}_1$ diffbar, und es gilt: $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$

Ist f überall auf \mathcal{I} diffbar und $f'(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathcal{I}$, so ist f^{-1} auf \mathcal{J}_1 diffbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

für alle $x \in \mathcal{J}_1$.

Beweisidee: f^{-1} diffbar an Stelle $f(c)$, falls $f'(c) \neq 0$. Grund: Graph von f^{-1} = Graph von f gespiegelt an Winkelhalbierende $s(x) = x$.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

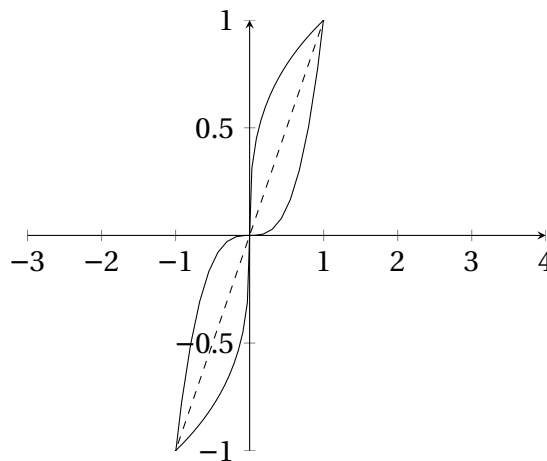


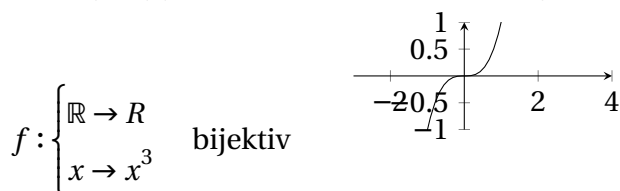
Abbildung 37: Zwei Funktionen an der Winkelhalbierenden

Ableiten mit Kettenregel.

$f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = 1$. Beweis folgt.

6.13 Bemerkung

Bedingung $f'(c) \neq 0$ in 6.12 ist notwendig.



$$f'(0) = 0.$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

$(f^{-1})'(0)$ existiert nicht. (jedenfalls nicht als reelle Zahl!)

$$(f'(x) = 3x^2)$$

6.14 Satz

$f(x)$	$f'(x)$
a) a^x ($a \in \mathbb{R}, a > 0$), $x \in \mathbb{R}$	$\ln(a) \cdot a^x$
b) $\ln(x)$ auf $]0, \infty[$	$\frac{1}{x}$
c) $\log_{10}(x)$ (konst. $a > 0, a \neq 1$) auf $]0, \infty[$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
d) $x \cdot (\ln(x) - 1)$ auf $]0, \infty[$	$\ln(x)$
e) $x^b \cdot (b \in \mathbb{R})$ auf $]0, \infty[$	$b \cdot x^{b-1}$

Beweis. a)

$$f(x) = \exp(x \cdot \ln(a))$$

$$f'(x) \stackrel{6.12}{=} \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

Kettenregel

$$\text{b) } \ln(x)' \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{\exp'(\ln(x))} \stackrel{6.11}{=} \frac{1}{x}$$

$$\text{c) } \log'_a(x) \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{\ln(a) \cdot a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

□

6.15 Satz (logarithmische Abbildung)

$f: \mathcal{I} \rightarrow]0, \infty[$ diffbar.

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Beweis : Kettenregel und 6.14b)

6.16 Beispiel

$$f(x) = e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^6 \text{ für } x \neq 0$$

$$\ln(f(x)) = x + \ln(\sin(x) + 2) + 6 \cdot \ln(x)$$

$$\ln(f(x))' = 1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{6}{x}$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{6}{x}\right) \cdot e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^6$$

6.17 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat *lokales Maximum*

6.18 Satz

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Hat f in $c \in D$ lokales Minimum/Maximum, so $f'(c) = 0$

Beweis.

c lokale Max.stelle.

$f'(c)$ existiert nach Voraussetzung.

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0.$$

□

Vorsicht: $f'(c) = 0$ ist nicht hinreichend für lokale Maxima/Minima.

$$\text{z.B. } f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$$

f hat kein Maximum oder Minimum in 0

Globale Max/Min von f auf $[a, b]$:

- Bestimme $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$ Teste, ob lokale Max/Min.
- Teste Intervallgrenzen a und b .

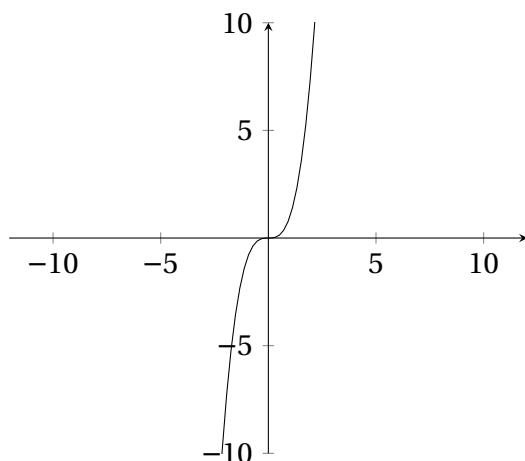


Abbildung 38: Ableitung keine Hinreichende Bedingung für Minima/Maxima

6.19 Satz (Mittelwertsatz)

$\mathcal{I} = [a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$

$f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf $]a, b[$.

Dann existiert $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Speziell:

$f(a) = f(b) \Rightarrow$

$\exists c \in]a, b[$ mit

$f'(c) = 0$ Satz von Rolle

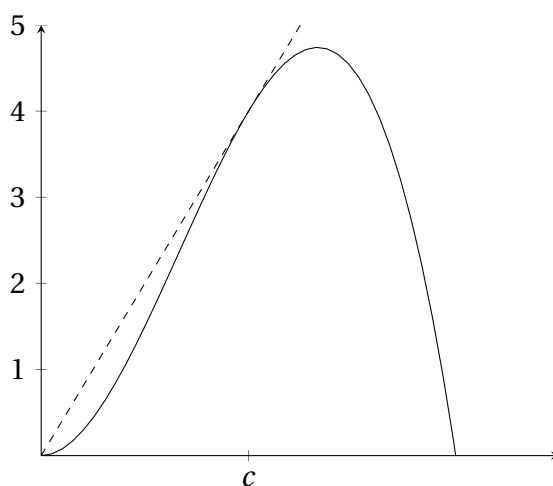


Abbildung 39: Eine Funktion und ihrer Steigung an der Stelle c

Beweis. Setze $s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

(Sekante durch $(a, f(a)), (b, f(b))$)

Def. $h(x) = f(x) - s(x)$. $h(a) = h(b) = 0$.

Zeige: $\exists c \in]a, b[$ mit $h'(c) = 0$.

Fertig, denn

$$h'(x) = f'(x) - s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ist h konstant, so kann man jedes $c \in]a, b[$ wählen. Also sei h nicht konstant. h ist stetig auf $[a, b]$. 5.11. h nimmt auf $[a, b]$ globales Max. und Min. an: $x_{max}, x_{min}, x_{max} \neq x_{min}$, da h nicht konstant $h(a) = h(b)$ O.B.d.A
 $x_{max} \in]a, b[$. 6.18 : $h'(x_{max}) = 0$ □

6.20 Korollar

$\mathcal{J} = [a, b]$, $a < b$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, diffbar in $]a, b[$. (auch $\mathcal{J} = \mathbb{R}$ oder $[a, \infty[$, $] - \infty, b]$ erlaubt)

- a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f konstant auf $[a, b]$,
- b) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f (streng) monoton wachsend auf \mathcal{J}
- c) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[$ so ist f (streng) monoton fallend auf \mathcal{J} .

Beweis.

Wähle $u < v$, $u, v \in [a, b]$ beliebig.

Wende 6.19 auf $[u, v]$ an. $\exists c \in]u, v[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

Daraus folgt im Fall

- a) $f(v) = f(u)$
- b) $f(v) \geq f(u)$
- c) $f(v) \leq f(u)$

Bedingung für strenge Monotonie nur hinreichend, nicht notwendig $f(x) = x^3$
 streng monoton steigend $f'(0) = 0$

□

6.21 Korollar

$\mathcal{J} = [a, b]$, $a < b$ wie in 6.20.

$c \in]a, b[$. $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in \mathcal{J} .

f auf $\mathcal{I}_0 =]a, b[\setminus \{c\}$ diffbar

Existiert $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ auf \mathcal{I}_0 , so existiert $f'(c)$ und $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$.

6.22 Satz (Regeln von L'Hôpital)

a) \mathcal{I} Intervall, $c \in \mathcal{I}$, $f, g: \mathcal{I} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Es gelte $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{I} \setminus \{c\}$

Oder $g'(x) < 0$ für alle $x \in \mathcal{I} \setminus \{c\}$

Es gelte $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ oder ∞

Existiert $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

b) $f, g: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Es gelte $g'(x) > 0$ für alle $x \in [a, \infty[$

oder $g'(x) < 0$ für alle $x \in [a, \infty[$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ oder ∞

Existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

6.23 Beispiel

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+ax)}{x} = ?$ ($a \in \mathbb{R}$) Zähler definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $1+ax > 0$ 6.22a):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{1+ax} = a$$

b) $\lim_{x \cdot \ln(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{6.22}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x \cdot \ln(x))$
 $= \exp(\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x)) \stackrel{b)}{=} \exp(0) = 1$.
 (Deshalb definiert man $0^0 = 1$)

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} &= \frac{6.22}{x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} &= 0 \text{ (schon in 5.17)} \end{aligned}$$

7 Das bestimmte Integral

Ziel: Bestimmung des Flächeninhalts zwischen Graph einer Funktion und x-Achse zwischen zwei Grenzen a und b (sofern möglich).

7.1 Definition

a) $a, b \in \mathbb{R}, a < b. f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ gibt, so dass f auf jedem offenem Intervall $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 0 \dots, n-1$, konstant ist. (Wert an den a_i beliebig.)

b) f wie in a).

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f(x) dx := \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)$$

wobei $f(x) = c_i$ auf $]a_i, a_{i+1}[$.

Integral von f über $[a, b]$ (Integral kann negativ sein)

7.2 Definition

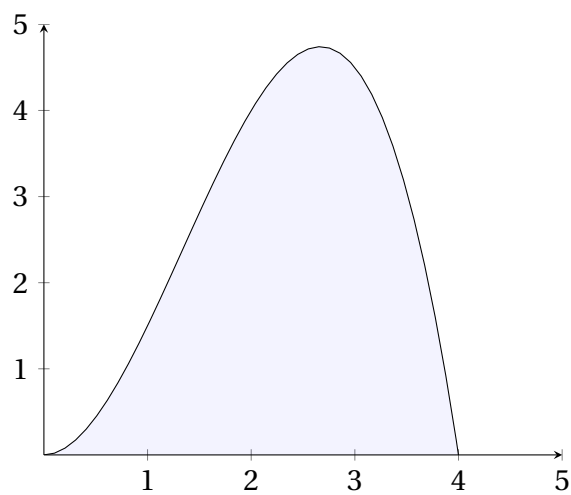
$a, b \in \mathbb{R}. a < b.$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion* (oder integrierbare Funktion) \Leftrightarrow

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (abh. von ε): $|f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$.

Bedeutung:

Gleichmäßige Approximierbarkeit durch Treppenfunktion.

Abbildung 40: Flächeninhalt unter einer Funktion f

7.3 Satz

$\mathcal{I} = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- a) Jede Regelfunktion f auf \mathcal{I} ist beschränkt d.h. $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

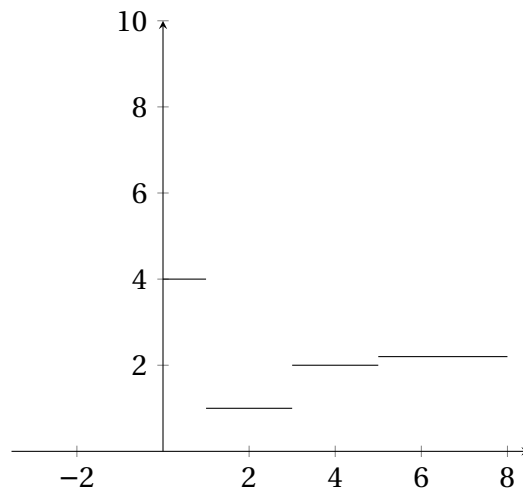


Abbildung 41: Treppenfunktion

b) Summe, Produkt und Betrag von Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion

Beweisidee für a), b):

Man beweist 7.3 zunächst für Treppenfunktionen. Für b): Bestimme gemeinsame Verfeinerung der Intervallunterteilung der beiden Treppenfunktionen Dann auf Regelfunktionen übertragen.

7.4 Satz

Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist Regelfunktion *Beweis:* [8] 7.4 gilt auch für sogenannte *stückweise stetige* Funktionen auf $[a, b]$ $[a, b]$ ist Vereinigung *endlicher* Teilintervalle, auf denen Funktion stetig ist.

7.5 Beispiel

a) $f(x) = x^2$, $\mathcal{J} = [0, t]$

Definition für $x \in \mathbb{N}$ Treppenfunktion.

$$f_n : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{it^2}{n}\right) & \text{falls } x \in \left[\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}\right] \text{ für ein } i \in \{0, \dots, n-1\} \\ t^2 & \text{falls } x = t \end{cases}$$

$$x \in [0, t] : |f(x) - f_n(x)| = ?$$

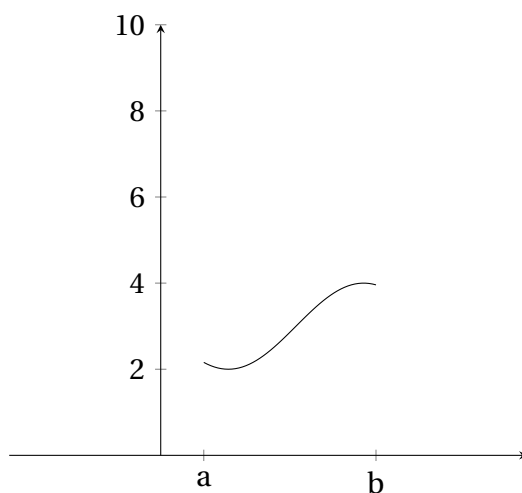


Abbildung 42: Treppenfunktion

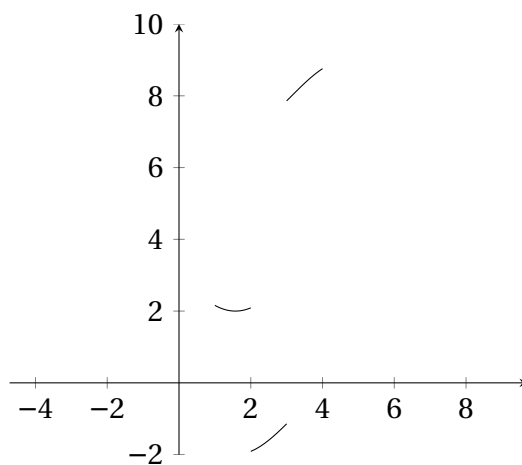


Abbildung 43: Abschnittsweise stetige Funktion

$$x = t : |f(t) - f_n(x)| = 0.$$

$$0 \leq x < t : \text{Dann } x \in \left[\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}\right] \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|x^2 - \left(\frac{it}{n}\right)^2\right| \leq \left(\frac{(i+1)t}{n}\right)^2 - \left(\frac{it}{n}\right)^2 = \frac{2it + t^2}{n^2} \leq \frac{2t}{n} + \frac{t^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

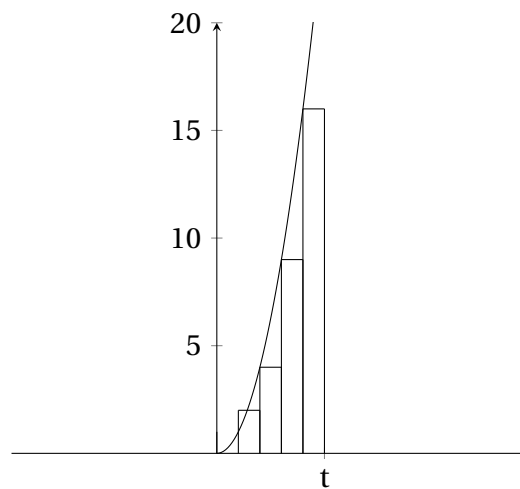
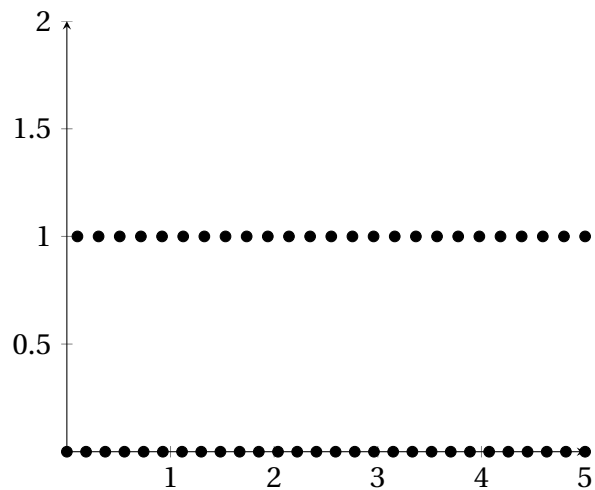
Abbildung 44: Treppenfunktion (Untersumme) von x^2 

Abbildung 45: Nicht integrierbare Funktion

7.6 Lemma

f Regelfunktion auf $[a, b]$

- a) $(f_n)_n$ Folge von Treppenfunktion, die *gleichmäßig* gegen f konvergiert, das heißt es existiert Nullfolge $(a_n)_n$, $a \geq 0$, und $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ für alle $x \in [a, b]$.

Dann konvergiert die Folge

$$\underbrace{\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_n}_{\in \mathbb{R}}$$

b) Sind $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ zwei Folgen von Treppenfunktionen die gegen f gleichmäßig konvergieren, so :

$$(WHK, 7.20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx$$


7.7 Definition

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktion, $(f_n)_n$ Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert (wie in 7.6 a).

Definition (*bestimmtes*) *Integral*:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Treppenfunktion:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)$$


7.8 Beispiel

$f(x) = x^2$ auf $[0, t]$

f_n wie in 7.5.

$$\int_a^b f_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{it}{n} \right)^2 \cdot \frac{t}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \cdot \frac{t^2}{n^3} = \frac{t^3}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Per Induktion nach n kann man zeigen : $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$$\text{Also : } \int_0^t f_n(x) dx = \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(x) dx = \frac{t^3}{6} \cdot 2 = \frac{t^3}{3} \text{ Falls } t > 0 - \frac{t^3}{3}$$

7.9 Satz (Rechenregeln für Integrale)

f, g Regelfunktionen auf $[a, b]$.

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(a) \quad \int_a^b a \cdot f(x) dx = a \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$(b) \quad f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(c) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Sei $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$:

$$(d) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$(e) \quad a < c < b, \text{ so } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

7.10 Beispiel

$$a < b. \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$(0 < a < b :) 7.9e \int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Analog für die Fälle $a \leq 0 < b$ und $a < b \leq 0$

7.11 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert $c \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$

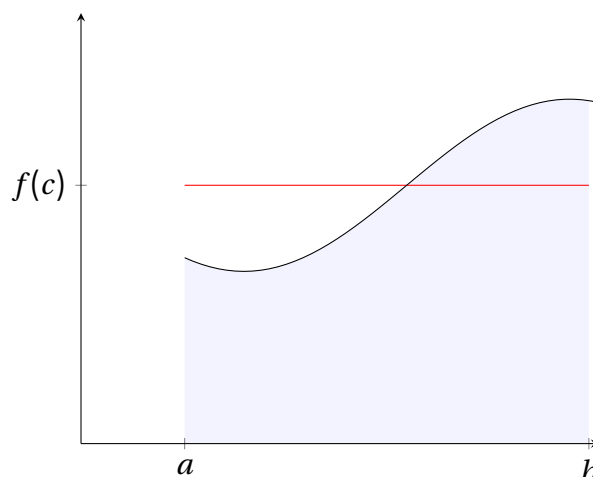


Abbildung 46: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Beweis. f ist stetig nimmt also das Maximum von m an Stelle x_{min} und Maximum M an der Stelle x_{max} an. (5.11)

$$7.9d) : m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x_{min}) = m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M = f(x_{max})$$

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen 5.10: $\exists c$ zwischen x_{min} und x_{max} (d.h. $c \in [a, b]$) mit $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

□

8 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

8.1 Definition

- a) Sei $[a, b]$ abgeschlossenes, beschränktes (d.h. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) Intervall.
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar,

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

- b)

$$\int_a^a f(t) dt = 0$$

$$7.8 \ x > 0$$

$$x > 0 \int_0^x t^2 dt = \boxed{\frac{x^3}{3}}$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

Kein Zufall

$$x \leq 0$$

$$\int_0^x t^2 dt = - \int_x^0 t^2 dt = - \left(-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_a^b t^2 dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \text{ gilt für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

8.2 Definition

Sei \mathcal{I} beliebiges Intervall ($-\infty$ bzw. ∞ als linke/rechte Grenze erlaubt).

- a) $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn f auf jedem abgeschlossenen beschränkten Teilintervall $[u, v]$ von \mathcal{I} integrierbar ist.

TODO: Sehr wellige Funktion

(Ist \mathcal{I} selbst abgeschlossen und beschränkt, so „lokal integrierbar“ = „integrierbar“)

- b) $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* der lokal integrierbaren Funktion $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\int_a^v f(t) dt = F(v) - F(u)$$

für alle $u, v \in \mathcal{I}$.

Eine Stammfunktion von f wird auch als *unbestimmtes Integral* von f bezeichnet

$$F = \int f(t) dt$$

8.3 Bemerkung

Ist f lokal integrierbar auf \mathcal{I} , so gilt

$$\int_u^v f(t) dt + \int_v^w f(t) dt = \int_u^w f(t) dt$$

Folgt aus 7.9 + 8.1

für alle $u, v, w \in \mathcal{I}$ (nicht notwendig $u < v < w$)

8.4 Beispiel

a) $f(x) = x^2$ lokal integrierbar auf \mathbb{R} .

Stammfunktion von f .

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_a^b F(b) - F(a)$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Heaviside - Funktion

f ist lokal integrierbar auf \mathbb{R}

TODO: PLOT abschnittsweise definierte Funktion

Stammfunktion von f :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

TODO: PLOT

Zeige: $\forall u, v \in \mathbb{R}$:

$$\int_u^v f(t) dt = F(v) - F(u)$$

$$(u < v < 0) \quad \int_u^v f(t) dt = 0F(v) - F(u)$$

$$(u < 0 < v) \quad \int_u^v f(t) dt = 0 = \int_0^v f(t) dt = 1 \cdot v = F(v) - F(u)$$

$$(0 < u < v) \quad \int_u^v f(t) dt = 1 \cdot (v - u)F(v) - F(u)$$

$$(u \geq 0) \quad \int_u^v f(t) dt = -(F(u) - F(v)) = F(v) - F(u)$$

8.5 Satz

Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ Intervall, $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal „Integrierbar“

- a) Ist F Stammfunktion von f , so auch $G(x) = F(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- b) Sind F und G Stammfunktionen von f , so ist $F(x) = G(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$
- c) Sei $x_0 \in \mathcal{I}$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f .

(Beachte

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x'_0}^x f(t) dt + \int_{x'_0}^{x_0} f(t) dt$$

)

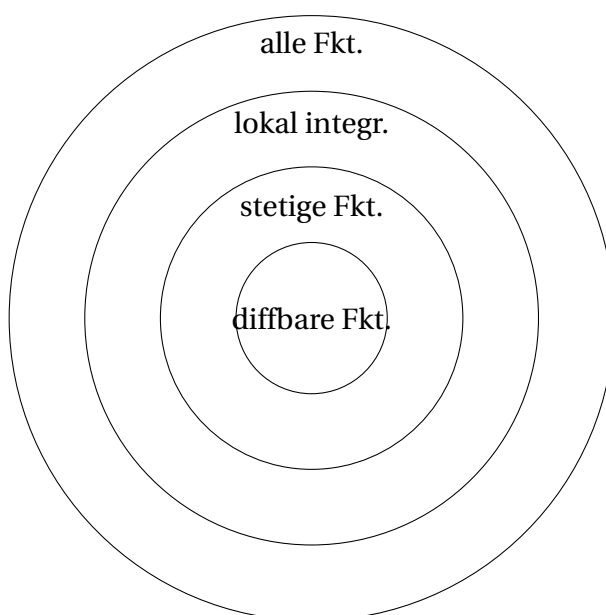


Abbildung 47: Die Welt der Funktionen

Beweis. a), b)

F Stammfunktion, $c \in \mathbb{R}$ $G(x) = F(x) + c$ ist Stammfunktion von f :

$$G(v) - G(u) = F(v) - F(u) = \int_u^v f(t) dt$$

Umgekehrt: Seien F, G zwei Stammfunktionen von f . Sei $x_0 \in \mathcal{I}$ halte es fest.

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0) \text{ für alle } x \in \mathcal{I}$$

$$G(x) = F(x) + \underbrace{G(x_0) - F(x_0)}_{=:c} \text{ für alle } x \in \mathcal{I} \text{ c) } u, v \in \mathcal{I}$$

$$F(v) - F(u) = \int_{x_0}^v f(t) dt = \int_{x_0}^u f(t) dt + \int_u^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^v f(t) dt = \int_u^{x_0} f(t) dt$$

□

8.6 Satz

Jede Stammfunktion einer lokal integrierbaren Funktion ist stetig.

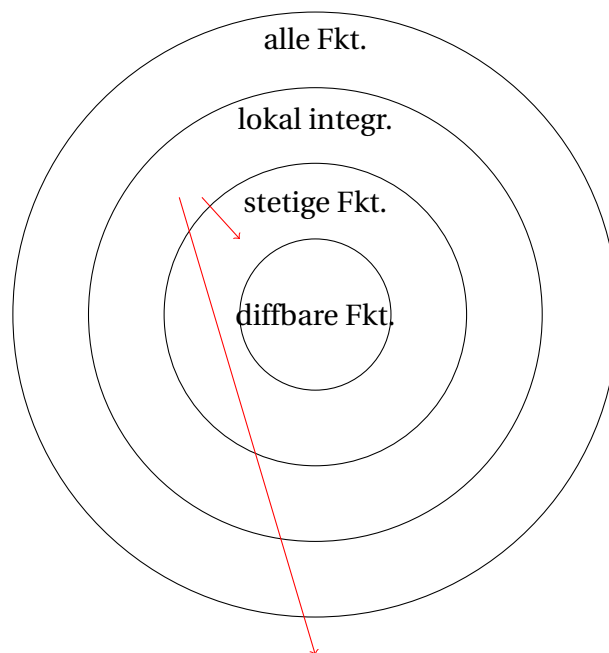


Abbildung 48: Stammfunktionbildung

Beweis. $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar

$x_0 \in \mathcal{J}$. Zeige: F ist stetig in x_0 (Stammfunktion von f).

Betrachte f auf $[x_0 - 1, x_0 + 1] \cap \mathcal{J}$

Sei $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathcal{J}_0$. (7.3a)

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \stackrel{7.9c)}{\geq} \int_{x_0}^x |f(t)| dt \stackrel{7.9d)}{\geq} M \cdot |x - x_0| \text{ für alle } x \in \mathcal{J}_0.$$

F stetig in x_0 nach 5.2

□

8.7 Definiton

$f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar*, falls f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.

[Beachte : Nicht jede differenzierbare Funktion ist stetig diffbar

$$\text{Bsp: } f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

f' nicht stetig in 0

8.8 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

\mathcal{J} beliebiges Intervall, $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Ist f stetig, so ist jede Stammfunktion F von f differejzierbar auf \mathcal{J} und es gilt $F' = f$.

$$(a) \quad \left(\int f(t) dt \right)' = f$$

$$\text{Dass heißt } F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

b) Ist f stetig diffbar auf \mathcal{J} , so ist f Stammfunktion von f' , dass heißt.

$$(b) \quad \int_{x_0}^x f'(t) dt = f + c$$

$\forall u, v \in \mathcal{J} :$

$$\int_u^v f'(t) dt = f(v) - f(u) = f(x) \Big|_u^v$$

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{I} & \longrightarrow & F = \int f(t) dt \\ F' = f & \longleftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f' & \longleftarrow & \textcircled{I} \text{ stetig diffbar} \\ & \longrightarrow & F = \int f'(t) dt = f + c \end{array}$$

Beweis. a) Sei $c \in \mathcal{J}$.

Zu zeigen: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c), x \neq c, x \in \mathcal{J} :$

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \underset{\text{E. St.fkt. von } f}{=} \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (??). Es existiert $\Theta(x)$ zwischen x und c mit

$$\int_x^c f(t) dt = f(\Theta(x)) \cdot (x - c)$$

$$\begin{aligned} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} &= \frac{1}{x-c} \cdot f(\Theta(x)) \cdot (x-c) \\ &= f(\Theta(x)) \xrightarrow[\Theta(x) \rightarrow c]{x \rightarrow c, \text{ so}} f(c), \text{ da } f \text{ stetig} \quad \text{b) } f' \text{ ist stetig.} \end{aligned}$$

Sei F eine Stammfunktion von f' . Nach a): $F' = f'$.

$$(F - f)' = 0.$$

6.20a) $F - f = c$ konstant, dass heißt $F = f + c$

□

8.9 Beispiele

Zu 8.8a):

$$\text{a) } g(x) = \int_1^{x^2} \underbrace{e^t \cdot (\sin(t) + \cos(\frac{t}{2}))}_{\text{stetig}} dt \quad 8.8a) : g'(x) = e^{x^2} \cdot (\sin(x) + \cos(\frac{x}{2}))$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x) &= \int_0^{x^2} e^t \cdot \sin(t) dt \\ F(x) &= \int_0^x e^t \cdot \sin(t) dt \\ h(x) &= x^2 \\ g &= F(h(x)) = (F \circ h)(x) \\ g'(x) &= F'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

8.10 Beispiel

zu 8.8b)

$$\begin{aligned} \text{a) } n \in \mathbb{N}_0: \\ \int ax^n dx &= a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ denn } \left(a \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = ax^n \\ \text{d.h. : } \int_u^v a \cdot x^n dx &= \frac{a}{n+1} (v^{n+1} - u^{n+1}) \\ \text{Damit : } \int \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i &= \sum_{i=0}^n a_i \frac{x^{i+1}}{(i+1)} \end{aligned}$$

b) $n \geq -2$, so

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{x^{1-n}} + c$$

c) Für $x > 0$ ist $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ (6.14b)

Also $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$ auf $]0, \infty[$

Auf $] -\infty, 0[$ gilt $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$

d) $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$ auf $]0, \infty[$ (6.14d)

e) $\int e^x dx = e^x + c$

f) $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$ $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

8.11 Satz (Partielle Integration)

Seien f und g stetig diffbare Funktionen auf Intervall \mathcal{J} . Dann:

$$\int f g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$$

Für bestimmte Integrale heißt das:

$$\int_u^v f(x) \cdot g'(x) dx = \left. \underbrace{f \cdot g}_{f(v) \cdot g(v) - f(u) \cdot g(u)} \right|_u^v - \int_y^u f'(x) g(x) dx$$

Für alle $u, v \in \mathcal{J}$

Beweis. 8.8b)

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

$$\int (f \cdot g' + f' \cdot g) dx = f \cdot g + c$$

$$\int f \cdot g' + \int f' \cdot g = f \cdot g$$

□

8.12 Beispiele

$$\text{a) } \int \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} dx \stackrel{8.11}{=} x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c$$

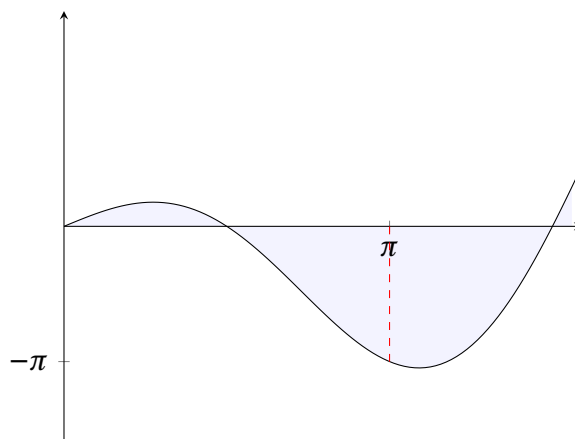


Abbildung 49: $\int_0^\pi x \cdot \cos(x) dx = 2$

b) $\int \ln(x) dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ f'}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\ln(x)} dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + c$ (vgl. ??d)

c) $\int \cos^2(x) dx \stackrel{8.11}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ f'}}{\cos(x)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\sin(x)} + \int \sin(x) dx$ (★)

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) dx &= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1 - \cos^2(x) dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \cos^2(x) dx \\ &\Rightarrow 2 \cdot \int \cos^2(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + x + c \end{aligned}$$

8.13 Satz (Integration durch Substitution)

\mathcal{I}, \mathcal{J} Intervalle $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ stetig diffbar, $g: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion G . Dann ist:

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(x)) + c$$

Für das bestimmte Integral heißt das:

$$\int_u^v g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(v)) - G(f(u)) = \int_{f(u)}^{f(v)} g(t) dt$$

für alle $u, v \in \mathcal{I}$

Beweis. $G \circ f$ diffbar: 8.8a)

Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 (G \circ f)'(x) &= G'(f(x)) \cdot f'(x) \\
 &\stackrel{8.8a}{=} \underbrace{g(f(x)) \cdot f'(x)}_{\text{stetig}}
 \end{aligned}$$

Hauptsatz $G \circ f$ ist Stammfunktion von $g(f(x)) \cdot f'(x)$ □

Bemerkung: 8.13 kann in 2 Arten angewandt werden:

1. Art: Mann hat ein Integral der Form

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$$

Berechne

$$\int g(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{und ersetze} \\ x \text{ durch } f(x)}}{G(x)}$$

2. Art:

Man will $\int g(t) dt$ berechnen

Ersetze t durch $f(x)$ (Substitution)

$$\left[\frac{dt}{dx} = f'(x) \rightarrow dt = f'(x) dx \right]$$

und dt durch $f'(x) dx$ ersetzen.

$$\rightarrow \int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$$

Hoffnung: \uparrow ist einfacher zu berechnen.

8.14 Satz

f ist stetig diffbar auf \mathcal{I} , f stetig auf \mathcal{I} .

a) Ist $f(x) \neq 0$ auf \mathcal{I} ,

$$\text{so } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c$$

$$\text{dass hei\ss t } \int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|)$$

für alle $a, b \in \mathcal{I}$

$$\text{b) } \int_a^b g(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x) dx$$

für alle c mit $a+c, b+c \in \mathcal{I}$.

$$c) \int_a^b g(c \cdot x) dx = \frac{1}{c} \int_{a \cdot c}^{b \cdot c} g(x) dx \text{ für alle } c \neq 0 \text{ mit } a \cdot c, b \cdot c \in \mathcal{J}$$

Beweis. a) Setze $g(x) = \frac{1}{x}$.

Also: $G(x) = \ln(|x|) + c$ für alle $x \neq 0$.

$$8.13 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c \quad b) \text{ Setze } f(x) = x + c, 8.13$$

$$c) \text{ Setze } f(x) = x \cdot c, 8.13^2$$

□

8.15 Beispiel

$$a) \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{-(\cos(x))'}{\cos(x)} dx \stackrel{8.13a)}{=} -\ln(|\cos(x)|) + c^3$$

$$b) \int x \cdot \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) dx \stackrel{8.13}{=} -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$$

$$c) \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx \stackrel{8.13a)}{=} \ln(x^2 + a^2) + c \text{ auf } \mathbb{R} (a \neq 0)$$

$$d) \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

Fläche des Halbkreises vom Radius 1.

Substitution $t = \sin(x)$

$$\frac{dt}{dx} = \cos(x), dt = \cos(x) dx$$

$$\int_{-1=\sin(-\frac{\pi}{2})}^{1=\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-t^2} \stackrel{8.13}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(x)} \cdot \cos(x) dx = \int \cos^2(x) dx \stackrel{8.11c}{=} \frac{\cos(x) \cdot \sin(x)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) - \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{4} + \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{2}\right)$$

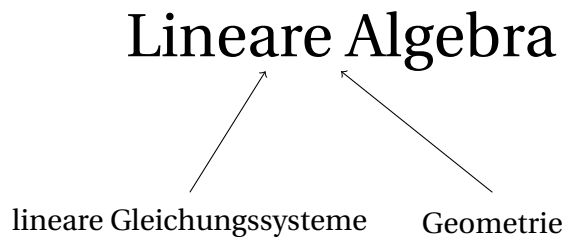
9 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

9.1 Definition

$$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

²Beachte $f'(x) = c$

³Gilt auf jedem Intervall $]k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}[$



- a) Eine $m \times n$ Matrix A über K ist rechteckiges Schema .

$$\text{Spalten} \downarrow A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen}}$$

mit m Zeilen und n Spalten, $a_{ij} \in K$.

(Bezeichnung der Indizes ist Standard! 1.Index : Zeile, 2.Index : Spalte)

(m,n) heißt *Typ* der Matrix.

Schreibweise:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}, A = (a_{ij})$$

- b) $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ = Menge aller $m \times n$ -Matrizen über K (*quadratische Matrizen*)

- c) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$..

Definiere $A^t = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ mit $b_{ij} = a_{ji}$ für $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$

A^t ist die zu A *transponierte* Matrix.

TODO Plot, Transponierung.

(Manchmal A^T statt A^t oder andere Schreibweise)

$1 \times n$ -Matrix $(a_1 \ 1, \dots \ 1 \ n)$ *Zeilenvektor*

$$m \times 1\text{-Matrix Spaltenvektor} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Alle $a_{ij} = 0$: $A = \begin{Bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix} =: 0\text{Nullmatrix}$ (vom Typ (m,n))

$n \times n$ -Matrix $E_n = \begin{Bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{Bmatrix}$ $n \times n$ -Einheitsmatrix

$$E_n = (\delta_{ij})_{i,j=1 \dots n}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j, \\ 0 & , \text{ falls } i \neq j \end{cases} \quad \text{Kronecker Symbol}$$

9.2 Definition

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ (beide vom gleichen Typ!) $a \in K$.

a) $A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$
Summe von Matrizen

b) $a \cdot A = (a \cdot a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$
(skalares) Vielfaches von A.

Für Matrizen unterschiedlichen Typs ist keine Summe definiert.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 6 \\ \frac{9}{2} & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$A + B^t$ nicht definiert

$$B^t = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + A = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \text{ Produkt:}$$

- Produkt von Matrizen gleichen Typs durch komponentenweise Multiplikation (kaum Anwendungen)
- wichtig ist Produkt von $m \times n$ -Matrizen mit $n \times p$ Matrizen:

9.3 Definition

$m, n, p \in \mathbb{N}$.

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

$B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

Das *Produkt* $A \cdot B$ von A und $B = (d_{ik})_{\substack{i=1\dots m \\ k=1\dots p}}$

$$\text{mit } d_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$

($m \times n$ multiplizieren mit $n \times p \rightarrow m \times p$)

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{matrix} + \cdot \\ \cdot + \\ + \cdot \end{matrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}_{n \times p} = \begin{pmatrix} \\ \\ \downarrow \\ \bullet \end{pmatrix}_{m \times p}$$

Beachte : Produkt von $m \times n$ - mit $r \times p$ -Matrix ist nicht definiert falls $n \neq r$

9.4 Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}, AB \neq BA,$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ wie in a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^t = B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\infty,3}(\mathbb{R})$

$$A \cdot B = (5) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) (= \mathbb{R})$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

$$E_m \cdot A = A$$

$$A \cdot E_n = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & a & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \cdot A$$

9.5 Satz (Rechenregeln von Matrizen)

$$A, A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{m,n}(K),$$

$$B, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{n,r}(K),$$

$$C \in \mathcal{M}_{r,s}(K), a \in K.$$

$$(a) \quad (A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$$

$$(b) \quad A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$

$$(c) \quad (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (aB) = a(A \cdot B)$$

$$(d) \quad \underbrace{(A \cdot B)}_{m \times r} \cdot \underbrace{C}_{r \times s} = \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{n \times s}$$

$$(e) \quad (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

$$\text{Beweis. Nur d) } A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots r}}$$

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1 \dots r \\ j=1 \dots s}}$$

$$A \cdot B = (d_{ik})_{\substack{i=1 \dots m \\ k=1 \dots r}}$$

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

$$B \cdot C = (e_{jl})_{\substack{j=1 \dots n \\ l=1 \dots s}}$$

$$e_{jl} = \sum_{k=1}^r b_{jk} c_{kl}$$

$$(A \cdot B) \cdot C$$

Eintrag an der Stelle (i, l) :

$$\sum_{k=1}^r d_{ik} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl}$$

$A \cdot (B \cdot C)$ Eintrag an Stelle (i, l) :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot e_{jl} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^r b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^r a_{ij} b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \cdot c_{kl} \quad \square$$

9.6 Definition

Allgemeine Form eines *lineares Gleichungssystem* (LGS) über K :

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ (*) & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + & \dots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

m Gleichungen, n unbekannte x_1, \dots, x_n

$$(n = 2 || 3 : x, y || z)$$

Koeffizienten $a_{ij} \in K$, rechte Seite $b_1 \dots b_m \in K$ (fest).

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K) = K^n$$

(Elemente der $K^n = K \times K \dots \times K$ werden als Spalten geschrieben) heißt Lösung von $(*)$ wenn $x_1 \dots x_n$ sämtliche Gleichungen erfüllen.

Ist $b_1 = \dots b_m = 0$, so heißt $(*)$ *homogenes* LGS, sonst *inhomogenes* LGS.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

$$\text{Koeffizientenmatrix des LGS } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1} = K^m \quad (\text{rechte Seite})$$

$(*)$, lässt sich schreiben in *Matrizenform*: $A \cdot x = b$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sind s_1, \dots, s_n die Spaltenvektoren von A , d.h. $s_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, so lässt sich (*) schreiben

$$\text{als } x_1 \cdot s_1 + \dots + x_n \cdot s_n = b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 a_{11} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_n a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Spaltenform des LGS Beachte: Homogenes LGS hat immer *mindestens* eine Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Null-Lösung} \quad (\text{triviale Lösung})$$

Fragen:

- (1) Wann hat LGS mindestens eine Lösung?
- (2) Wenn es Lösungen gibt, wie bestimmt man alle?

Antwort: Gauß Algorithmus (C.F.Gauß 1777-1855)

Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht bei :

- Addition der Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung
- Multiplikation einer Gleichung mit Zahl $\neq 0$.
- Vertauschen zweier Gleichungen

Was passiert dann:

Aus $Ax = b$ wird

$$A'x = b'$$

Die Menge der x , die $ax = b$ erfüllen, stimmt mit der überein, die $A'x = b'$ erfüllen.

Ziel des Gauß Algorithmus: Mit obigen Umformungen einfache Form A' zu finden.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 4 & & x + y = -2 \\ x + y = -2 & \rightarrow & 2x + 3y = 4 \end{array} \quad (-2) \text{ fache 1. Gl. zu 2. Gl. addieren}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y = -2 & & y = 8, \quad x + 8 = -2 \quad x = -10, \text{ eindeutige Lösung} \\ y = 8 & & \end{array}$$

9.7 Definition

Unter *elementaren Zeilenumformungen* an einer Matrix versteht man folgende Operationen:

- Addition des skalaren vielfachem einer Zeile zu anderen
- Multiplikation einer Zeile mit Zahl $\neq 0$
- Vertauschen von zwei Zeilen

Analog: *Elementare Spaltenumformungen*

(wird nicht für :GS benötigt — außer ggf. Spaltenvertauschung)

9.8 Definition

Ist $Ax = b$ ein LGS, so nennt man $(A, b) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(K)$ die *erweiterte Koeffizientenmatrix*. b als letzte Spalte an A anhängen.

9.9 Bemerkung

Führt man an (A, b) elementare Zeilenumformungen durch und erhält man dabei Matrix (A', b') , so ist $x \in k^n$ ist Lösung von $A \cdot x = b$ genau dann wenn x Lösung von $A'x = b'$.

Beispiel 9.6:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (A' b') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Kernstück des Gauß-Algorithmus:

Jede Matrix B lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf *Zeilenstufenform*

(Treppenform) bringen

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ & \boxed{0} & \boxed{0} \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.10 Gauß Algorithmus

Sei B eine (m, n) -Matrix über K , Ist B Nullmatrix, so fertig.

Sei also im Folgenden B nicht Nullmatrix.

- (1) Suche erste Spalte j_1 , die nicht nur Nullen enthält.
- (2) Eventuell durch Zeilenvertauschung:
 Eintrag a am der Stelle (i, j_1) ist $\neq 0$
- (3) Multipliziere die 1. Zeile mit $\frac{1}{a}$, Jetzt: Eintrag 1 an der Stelle (i, j_1) .
- (4) Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeilen zu den übrigen Zeilen alle
 Einträge in der Spalte j_1 unterhalb der ersten Zeile gleich 0 sind. Ab jetzt wird
 Zeile 1 nicht mehr benutzt. Sie bleibt unverändert.
- (5) Suche erste Spalte $j_2(> j_1)$, der unterhalb der ersten Zeile einen Eintrag $\neq 0$ ent-
 hält.
- (6) Wie in (2) imd (3) Eintrag 1 an Stelle $(2, j_2)$
- (7) Wie in (4) alle Einträge in Spalte j_2 unterhalb der 2. Zeile zu Null machen.
 Ab jetzt wird Zeile 2 nie mehr benutzt.

So fortfahrend erhält man Zeilenstufenform.

9.11 Beispiel

$$\begin{aligned}
 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{Vert. 1Z./2.Z.}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1Z. \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3Z. + (-3) \cdot 1.Z.} \\
 B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -9/2 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{1/6 \cdot 2. Z.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 4 & -9/2 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/6 \cdot 2. Z.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

9.12 Gauß-Algorithmus zur Lösung von LGS

Gegeben sei LGS $A \cdot x = b$
 $m \times n \quad n \times 1 \quad m \times 1$

Wende Algorithmus ?? auf (A,b) an, bis man Matrix (\tilde{A}, b') erhält, so dem \tilde{A} Zeilenstufenform hat (letzte Spalte b' muss nicht mehr bearbeitet werden).

Man kann noch Spaltenvertauschung am \tilde{A} vornehmen,

Beachte: Vertauschung von Spalte i und k bedeutet vertauschung von x_i und x_k (Buch führen). Dann kann Matrix (A', b') erhalten werden wobei

$$(A', b') = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b'_m \end{pmatrix}$$

Neues LGS $A'x' = b'$

$x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ entsteht aus x . durch Permutation der Einträge entsprechend der durchgeführten Spaltenvertauschungen.

Lösungsmenge des LGS $A'x' = b'$ ist leicht zu ermitteln:

(1) Ist $r < m$ und einer der Einträge $b'_r + a, b'_m$ ungleich 0 ist, so ist LGS nicht lösbar.

$$(2) \text{ Ist } r = m \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & b'_1 \\ 0 & 1 & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b'_m \end{pmatrix}$$

oder $r < m$ und $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & b'_1 \\ 0 & 1 & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_m \end{pmatrix}$$

(betrachte dann nur die ersten r Gleichungen),so gibt es mindestens eine Lösung:

(2a) $r < n$:

Wähle x_{r+1}, \dots, x'_n beliebig uas K . Dann:

$$x'_r = b'_r - \sum_{j=r+1}^n a'_{rj} x'_j$$

$$\vdots$$

$$x'_1 = b'_1 - \sum_{j=2}^n a'_{1j} x'_j$$

(rekursive Bestimmung der Lösungsmenge).

(2b) $r = n$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann sind x'_1, \dots, x'_r eindeutig bestimmt.

$$x'_n = b'_n$$

$$x'_{n-1} = b'_{n-1} - a'_{n-1} x'_n$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x'_1 = b'_1 - \sum_{j=2}^n a'_{1j} \cdot x'_j$$

9.13 Beispiel

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

a) $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2Z. + (-2) \cdot 1.Z \\ 3Z. + (-1) \cdot 1.Z}]{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5} \cdot 2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3.Z + 2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3} \cdot 3.Z} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = 2 + 2x_3 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = 5 - \frac{4}{3} - 2 = \frac{5}{3} \text{ eindeutige Lösung: Lösungsmenge } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{b) } \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \end{aligned} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & +2 & 1 & +1 & 0 \\ 1 & -1 & +2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +2 & 1 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix} \\
 & \text{(Fall 2a)}
 \end{aligned}$$

x_4, x_3 frei wählbar

$$x_2 = -2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$$

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4$$

$$= -2 \cdot \left(-2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4\right) - x_3 - x_4$$

$$= 4 - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_4$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ -2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in K \right\}$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$\text{c) } 2x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 - x_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

LGS nicht lösbar (Fall 1)

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$\text{d) } 2x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$$

LGS eindeutig lösbar

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 1 - x_2 = 1$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ (Fall 2b)}$$

e)

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ -2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & = 1 \\ -2 & 2 & -2 & = 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & = 1 \\ 0 & 0 & 0 & = 5 \end{pmatrix}$$

LGS ist nicht lösbar

f)

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ Vert. 2./3.Sp.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

x'_3 frei wählbar

$$x'_2 = -\frac{1}{3} - 0 \cdot x'_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x'_1 = 9 - x'_2 - x'_3 = \frac{1}{3} - x'_3$$

x_2 frei wählbar

$$x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} - x_2$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - x_2 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} : x_2 \in K \right\}$$

g) LGS über \mathbb{C}

$$\begin{array}{rrcr} (1+i)x_1 & & +2x_2 & = 3-i \\ ix_1 & & +(-2+2i)x_2 & = 4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} (1+i) & 2 & 3-i \\ i & (-2+2i) & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ i & (-2+2i) & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ 0 & -3+i & 2-i \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i \end{pmatrix}$$

$$x_2 = -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$x_1 = 1 - 2i - (1-i)x_2 = \frac{8}{5} - \frac{14}{5}i$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{14}{5}i \\ -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i \end{pmatrix} \right\}$$

Literatur

- [1] Kreußler, Phister Satz 33.16
- [2] WHK 5.37
- [3] WHK 6.21
- [4] WHK 6.24
- [5] WHK 6.25
- [6] WHK 6.25
- [7] WHK 7.32
- [8] WHK 7.19