

Inhaltsverzeichnis

1	Komplexe Zahlen	2
1.1	Definition	2
1.2	Veranschaulichung	3
1.3	Rechenregeln in \mathbb{C}	3
1.4	Definition Absolutbetrag	4
1.5	Rechenregeln für den Absolutbetrag	4
1.6	Darstellung durch Polarkoordinaten	5
1.7	Additionstheoreme der Trigonometrie	6
1.8	geometrische Interpretation der Multiplikation	6
1.9	Bemerkung und Definition	6
1.10	Satz: Komplexe Wurzeln	7
1.11	Beispiel	7
1.12	Bemerkung	7
2	Folgen und Reihen	7
2.1	Definition	7
2.2	Beispiel	8
2.3	Definition	8
2.4	Definition	9
2.5	Beispiele	9
2.6	Satz: Beschränktheit und Konvergenz	10
2.7	Bemerkung	10
2.8	Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)	10
2.9	Satz: Kriterien für Nullfolgen	11
2.10	Bemerkung	12
2.11	Definition	12
2.12	Satz: Landausymbole bei Polynomen	13
2.13	Bemerkung	13
2.14	Definition	13
2.15	Beispiel	13
2.16	Satz: Monotonie und Konvergenz	13
2.17	Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)	14
2.18	Definition	14
2.19	Satz: Reihenkonvergenz	15
2.20	Beispiele	15
2.21	Satz (Leibniz-Kriterium)	17
2.22	Satz (Majoranten-Kriterium)	17
2.23	Beispiel	17
2.24	Definition	17
2.25	Korollar	17
2.26	Satz: Wurzel- und Quotientenkriterium	18
2.27	Bemerkung	19
2.28	Beispiel	19
2.29	Bemerkung	19
2.30	Definition	19
2.31	Satz: Konvergenz im Cauchy Produkt	19

3	Potenzreihen	20
3.1	Definition	20
3.2	Beispiel	20
3.3	Satz	20
3.4	Bemerkung	21
3.5	Die Exponentialreihe	22
4	Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen	23
4.1	Definition	24
4.2	Beispiel	24
4.3	Definition	26
4.4	Beispiel	26
4.5	Definition	26
4.6	Beispiel	27
4.7	Satz $(\varepsilon - \delta)$ -Kriterium	29
4.8	Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)	30
4.9	Beispiel	31
4.10	Bemerkung	31
4.11	Beispiel	31
4.12	Definition	32
4.13	Beispiel	32
4.14	Bemerkung	32
4.15	Definition	32
4.16	Satz: Grenzwerte gegen unendlich	33
4.17	Beispiel	34

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

Addition: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplikation: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
(Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ beachten)

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$

Rein imaginäre Zahlen : $bi, b \in \mathbb{R}, (0 + bi)$

i imaginäre Einheit

$z = a + bi \in \mathbb{C}$

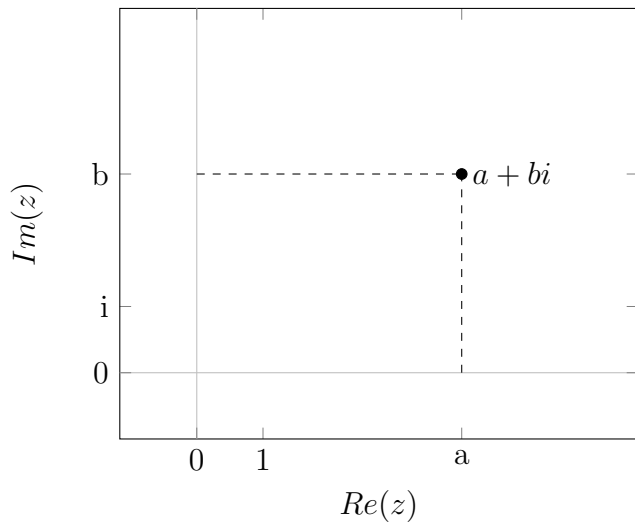
$a = \Re(z)$ Realteil von z ($Re(z)$)

$b = \Im(z)$ Imaginärteil von z ($Im(z)$)

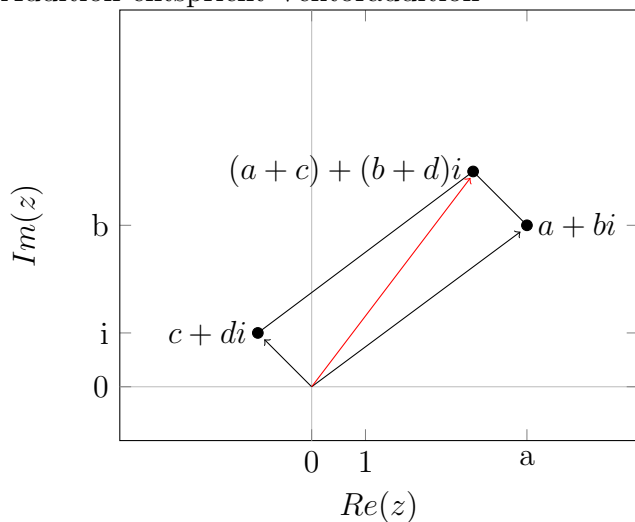
$\bar{z} = a - bi (= a + (-b)i)$

Die zu z konjugiert komplexe Zahl

1.2 Veranschaulichung



Addition entspricht Vektoraddition



1.3 Rechenregeln in \mathbb{C}

a) Es gelten alle Rechenregeln wie in \mathbb{R} . (z.B Kommutativität bzgl. $+$, \cdot : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Inversenbildung bzgl. \cdot :

$$z = a + bi \neq 0, \text{ d.h. } a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$z \cdot z^{-1} = \frac{1}{\frac{5-7i}{3+2i}} = (5-7i) \cdot (3+2i)^{-1}$$

$$\text{Beispiel:} \quad = (5-7i) \cdot \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right)$$

$$= \left(\frac{15}{13} - \frac{14}{13}\right) + \left(-\frac{10}{13} - \frac{21}{13}\right)i$$

$$= \frac{1}{13} - \frac{31}{13}i$$

$$\text{Speziell: } (bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i ; \text{ insbesondere: } \frac{1}{i} = -i$$

b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

1.4 Definition Absolutbetrag

a) Absolutbetrag von $z = a + bi \in \mathbb{C}$:

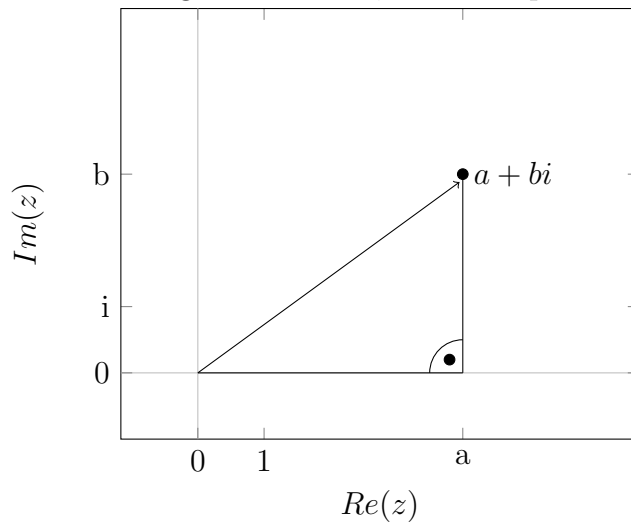
$$|z| = \underbrace{+\sqrt{a^2 + b^2}}_{\in \mathbb{R}, \geq 0}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}} \quad |z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2$$

$$|z| = \text{Abstand von } z \text{ zu } 0$$

$$= \text{Länge des Vektors, der } z \text{ entspricht}$$



b) Abstand von $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

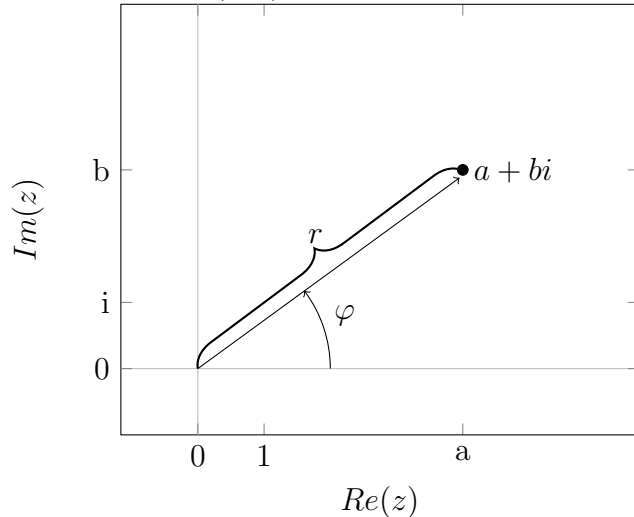
a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 $|-z| = |z|$

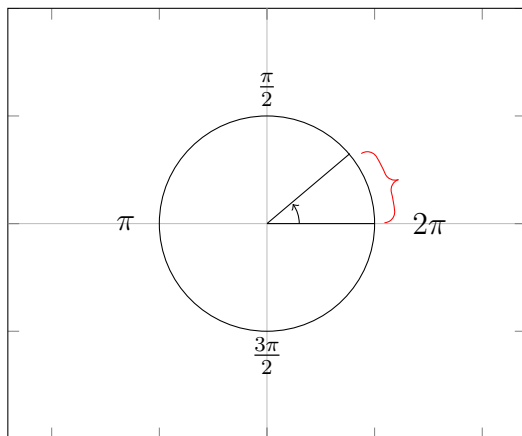
1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

a) Jeder Punkt $\neq (0, 0)$ lässt sich durch seine Polarkoordinaten (r, φ) beschreiben:



$$-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes



Umfang: 2π

φ in Grad $\hat{=}\frac{2\pi \cdot \varphi}{360}$ im Bogenmaß

Für Punkte mit kartesischen Koordinaten $\neq (0,0)$ werden als Polarkoordinate (r, φ) verwendet.

b) komplexe Zahl $z = a + ib$

$$r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |z| \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

Darstellung von z durch Polarkoordinate

Beispiel: a) $z_1 = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
 $= 2 \cdot (0,5\sqrt{2} + i \cdot 0,5\sqrt{2})$

b) $z_2 = 2 + i$

$$|z_2| = \sqrt{5}$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i) \text{ Suche } \varphi \text{ mit } 0 \leq 2\pi \text{ mit } \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}}z_2) \approx \sqrt{5} \cdot (\cos(0,46) + i \cdot \sin(0,46))$$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis; $\cos(\varphi) + i \sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

a) $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

b) $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

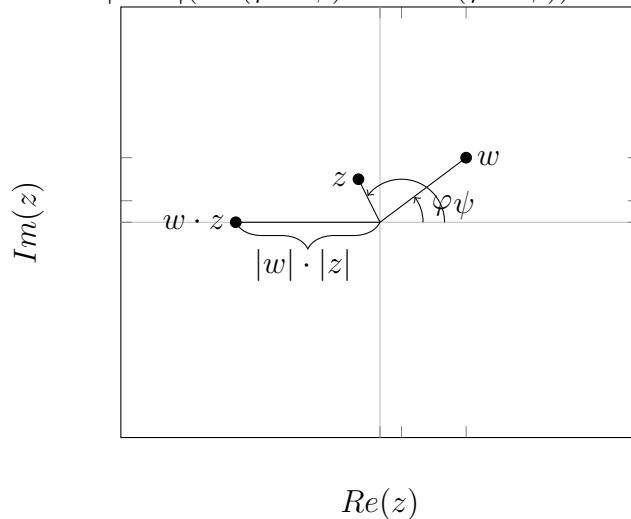
1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a) $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

$z = |z| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$

$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + i(\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi))$

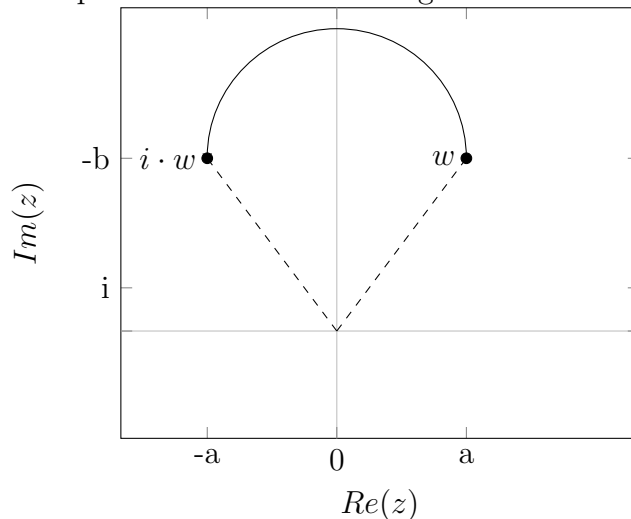
$w \cdot z = |w \cdot z|(\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$



b) $z = i, w = a + ib$

$i \cdot w = -b \cdot ia$

Multiplikation mit $i \hat{=}$ Drehung um 90°



1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexe Exponentialfunktion einführen.

e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ e = Euler'sche Zahl $\approx 2,718718\dots$

$e^{z_1} = cde^{z_2} = e^{z_1+z_2}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Es gilt: $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben $z = r \cdot e^{i\varphi}, r = |z|, \varphi$ Winkel

$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ ist Polarform von z .

$z = a + bi$ ist kartesische Form von z . $\bullet(r, \varphi)$ Polarkoordinaten

$$|e^{i\varphi}| = +\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Punkte auf dem Einheitskreis.

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \text{ Euler'sche Gleichung}$$

1.10 Satz

Sei $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

a) Ist $m \in \mathbb{Z}$, so ist $w^m = |w|^m \cdot (\cos(m \cdot \varphi) + i \cdot \sin(m \cdot \varphi))$
 $(m < 0 : w^m = \frac{1}{|w|^{|m|}}), w \neq 0$

b) Quadratwurzeln

c) Ist $n \in \mathbb{N}, w \neq 0$, so gibt es genau n -te Wurzeln von w :

$$\sqrt[n]{w} = +\sqrt[n]{|w|} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n})), n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Beweis. a) richtig, wenn $m = 0, 1$

$m \geq 2$. Folgt aus (\star)

$m = -a$:

$$\begin{aligned} w^{-1} &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \sin^2(\varphi))} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w| \cdot (\cos^2(\varphi) + i \sin^2(\varphi))} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = |w|^{-1} \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \end{aligned}$$

□

1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus i :

$$|i| = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Nach 1.10 b): } \sqrt{i} &= \pm(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})) \\ &= \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i) \end{aligned}$$

1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom

$$x^n - w \quad (w \in \mathbb{C})$$

eine Nullstelle in \mathbb{C} (sogar n verschiedene wenn $w \neq 0$)

Es gilt sogar : Fundamentalsatz der Algebra

(C. F. Gauß 1777-1855)

Jedes Polynom $a_n x^n + \dots + a_0$

mit irgendwelchen Koeffizienten: $a_n \dots a_0 \in \mathbb{C}$ hat Nullstelle in \mathbb{C}

2 Folgen und Reihen

2.1 Definition

Sei $k \in \mathbb{Z}, A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$

$(k = 0, A_0 \in \mathbb{N}_0, k = 1, A_n \in \mathbb{N})$

Abbildung $a : A \Rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

$$m \Rightarrow a_m$$

heißt Folge reeller Zahlen

$$(a_k, a_{k-1} \dots)$$

Schreibweise:

$(a_m)_{m>k}$ oder einfach (a_m)

a_m heißt m-tes Glied der Folge, m Index

2.2 Beispiel

a) $a_n = 5$ für alle $n > 1$
 $(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \dots)$

b) $a_n = n$ für alle $n > 1$
 $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots)$

c) $a_n = \frac{1}{n}$
 $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

d) $a_n = \frac{(n+1)^2}{2^n}$
 $(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \dots)$

e) $a_n = (-1)^n$
 $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

f) $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}}$ für $n \geq 2, a_1 = 1$
 $(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots)$

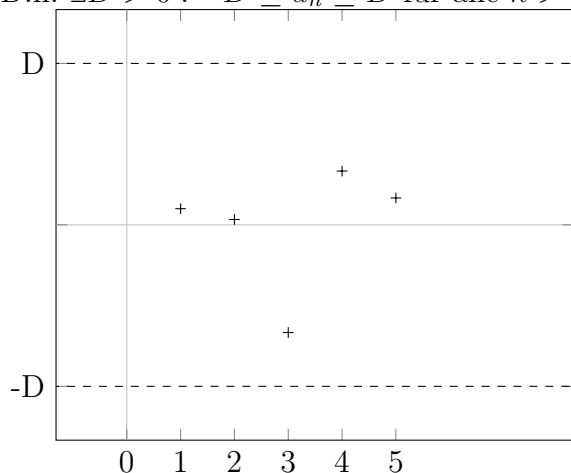
g) $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$
 $(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \dots)$

h) $a_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$
 $(-1, \frac{-1}{2}, -\frac{5}{6}, \dots)$

2.3 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n>k}$ heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

D.h. $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$ für alle $n > k$.



2.4 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt konvergent gegen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (konvergent gegen ε), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) : |a_n - c| < \varepsilon$$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (oder einfach } c = \lim a_n)$$

c heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge (a_n)

(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))

Eine Folge die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge

2.5 Beispiele

- a) $r \in \mathbb{R} : a_n = r$ für alle $n \geq 1$

$$(r, r, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = r$$

$$|a_n - r| = 0 \text{ für alle } n$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man $n(\varepsilon) = 1$ wählen

- b) $a_n = n$ für alle $n \geq 1$

Folge ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

- c) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$

(a_n) ist Nullfolge.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Suche Index $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$

D.s. es muss gelten.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

Ich brauche : $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$

Ich brauche $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$

Aus Mathe I folgt, dass solch ein $n(\varepsilon)$ existiert.

$$\text{z.B. } n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Dann:

$$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

- d) $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$ für alle $n \geq 1$

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a - 3| &= \left| \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1} \right| \\ &= \left| \frac{-3n-2}{n^2+n+1} \right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Benötigt wird $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ für alle $n > n(\varepsilon)$.

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$$

Wähle $n(\varepsilon)$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$

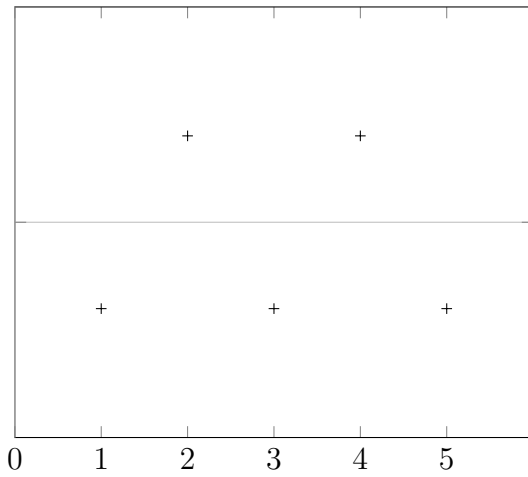
Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$.

$$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

- e) $a_n = (-1)^n$ beschränkte Folge $-1 \leq a_n \leq 1$ konvergiert nicht.

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$



$$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \nless$$

2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: 2.5_e)

Beweis. Sei $c = \lim a_n$, wähle $\varepsilon = 1$,

Es existiert $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - c| < 1$ für alle $n \geq n(1)$

Dann ist

$$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c| \text{ für alle } n \geq n(1)$$

$$M = \max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \dots, |a_{n(1)-1}|, 1 + |c|\}$$

Dann: $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq k$

$$-M \leq a_n \leq M$$

□

2.7 Bemerkung

$$\text{a) } (a_n)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n|)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge} \quad (|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0|)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n - c|)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge}$$

2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien $(a_n)_{n \geq k}$ und $(b_n)_{n \geq k}$ konvergente Folgen, $\lim a_n = c$, $\lim b_n = d$.

$$\text{a) } \lim |a_n| = |c|$$

$$\text{b) } \lim(a_n \pm b_n) = c \pm d$$

$$\text{c) } \lim(a_n \cdot b_n) = c \cdot d$$

insbesondere $\lim(r \cdot b_n) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.

$$\text{d) } \text{Ist } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k \text{ und ist } d \neq 0, \text{ so } \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{c}{d}$$

$$\text{e) } \text{Ist } (b_n) \text{ Nullfolge, } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k, \text{ so konvergiert } \left(\frac{1}{b_n}\right) \underline{\text{nicht!}}$$

$$\text{f) } \text{Existiert } m \geq k \text{ mit } a_n \leq b_n \text{ für alle } n \geq m, \text{ so ist } c \leq d.$$

$$\text{g) } \text{Ist } (c_n)_{n \geq k} \text{ Folge und existiert } m \geq k \text{ mit } 0 \leq c_n \leq a_n \text{ für alle } n \geq m \text{ und ist } (a_n) \text{ eine Nullfolge, so ist auch } (c_n) \text{ eine Nullfolge.}$$

$$\text{h) } \text{Ist } (c_n)_{n \geq l} \text{ beschränkte Folge und ist } (a_n)_{n \geq k} \text{ Nullfolge, so ist auch } (c_n \cdot a_n)_{n \geq k} \text{ Nullfolge.}$$

c_n muss nicht konvergieren!

Beweis. Exemplarisch:

- b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$ und $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$ und $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$
 $|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$
 Suche $n(\varepsilon) = \max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}), n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$
 Dann gilt für alle $n > n(\varepsilon)$:
 $|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
- f) Angenommen $c > d$. Setze $\delta = c - d > 0$
 Es existiert $\tilde{m} \geq m$ mit $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$
 und $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq \tilde{m}$.
 Für diese n gilt:
 $0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$ nach Voraussetzung
 $= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$
 $\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \not\leq$

□

2.9 Satz

- a) $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge
- b) Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{1}{n^m})_{n \geq 1}$ Nullfolge.
- c) Sei $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$
 Dann ist $(n^m \cdot q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge
- d) Ist $r > 1, m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{n^m}{r^n})_{n \geq 1}$ eine Nullfolge
- e) $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$
 $Q(x) = b_e \cdot x^e + \dots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$
 Sei $Q(n) \neq 0$ für alle $n \geq k$.

- Ist $m > e$, so ist $\frac{P(n)}{Q(n)}$ nicht konvergent
- Ist $m = e$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$
- Ist $m < e$, so ist $(\frac{P(n)}{Q(n)})$ eine Nullfolge

- a) Sei $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge

Beweis. a) Richtig für $q > 0$. Sei jetzt $q > 0$.
 Sei $\varepsilon > 0$. Mathe I: Es gibt ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.
 Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt: $|q^n - 0| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

□

- b) 2.5.c): $\frac{1}{n^m}$ Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

- c) Richtig für $q = 0$. Sei jetzt $q > 0$.

1. Fall: $m = 1$
 $\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0$.

$$(t+1)^n \stackrel{\text{Binomialsatz}}{=} 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 > \frac{n(n-1)}{2}t^2 \text{ für alle } n \geq 2$$

$$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$$

$$0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftrightarrow \text{Nullfolge 2.5e), 2.8e)}$$

Nach 2.9g) ist $(n \cdot q^n)_{n \geq q}$ Nullfolge, also auch $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$.

2.Fall: $m > 1$.

Setze $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} n^m \cdot q^n &= n^m \cdot (q')^n)^m \\ &= (n \cdot (q')^n)^m = 1 \text{ anwenden} \end{aligned}$$

$$0 < q' < 1$$

$(n^m + q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge noch Fall $m = 1$ und 2.8e)

d) Folgt aus c) und $q = \frac{1}{r}$

$$\text{e) Ist } m \leq l, \text{ so ist } \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^m(a_m + a_{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^m})}{n^l(b_l + b_{l-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$$

$$(I) \rightarrow a_m, (II) \rightarrow b_l \quad \frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{a_m}{b_l}$$

$$n < l, \frac{1}{n^{l-m}} \text{ Nullfolge}$$

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$$

$m > l$:

Beh. folgt aus Fall $m < l$ und 2.8e).

2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, die Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$$

$$a_n \leq x \leq b_n$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \Leftrightarrow \text{Nullfolge (2.9b)}$$

$$2.8e)(|x - a_n|) \text{ Nullfolge.}$$

$$2.7e): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

$$\text{Analog: } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$$

2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

2.11 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt strikt positiv, falls $a_n > 0$ für alle $n \geq k$.

Sei im Folgenden $(a_n)_{n \geq k}$ eine strikt positive Folge.

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n \geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n \geq k} \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \mathcal{O}(a_n) = \{(b_n)_{n \geq k} : (\frac{b_n}{a_n} \text{ ist Nullfolge})\}$$

$(b_n) \in \mathcal{O}(a_n)$ heißt Folge (a_n) wächst wesentlich schneller als die Folge (b_n) . Klar: $\mathcal{O}(a_n) \subset \mathcal{O}(a_n)$

\mathcal{O}, \mathcal{o} („groß Oh“, „klein Oh“)

Landau-Symbole

$$\begin{aligned} \text{z.B. } (n^2) &\in \mathcal{O}(n^3) \\ (n^2 + n + 1) &\in \mathcal{O}(n^2) & n^2 + n + 1 \leq 3n^2 \\ (n^2) &\in \mathcal{O}(n^2 + n + 1) & n^2 \leq n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{O}(1)$ = Menge der beschränkten Folgen

$\mathcal{o}(1)$ = Menge aller Nullfolgen

Häufig gewählte Schreibweise:

$$n^2 \underbrace{=} o(n^2) \text{ statt } (n^2) \in o(n^3)$$

eig. falsch!

$$n^2 + n + 1 = O(n^2) \text{ statt } (n^2 + n + 1)$$

2.12 Satz

Sei $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots + a_1 \cdot x + a_0, m \geq 0, a_m \neq 0$.

- a) $(P(n)) \in o(n!)$ für alle $l > m$ und
 $(P(n)) \in O(n')$ für alle $l \geq m$.
- b) ist $r > 1$, so ist $(P(n)) \in o(r^n)$.
 $[(r^n) \text{ wächst deutlich schneller als } (P(n))]$

Beweis. a) folgt aus 2.9e).

$m = l$ (2.6)

b) folgt aus 2.9d) und 2.8 b)c) □

2.13 Bemerkung

Algorithmus:

Sei t_n = maximale Anzahl von Reihenschritten des Algorithmus' bei Input der Länge n (binär codiert).

Worst-Case-Komplexität:

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $(t_n) \in O(n^l)$. (gutartig)

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mindestens exponentielle Zeitkomplexität, falls $r > 1$ existiert mit $(r^n) \in O(b_n)$ (bösartig)

2.14 Definition

- a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt monoton wachsend (steigend), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$. Sie heißt steng monoton wachsend (steigend), wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq k$
- b) $(a_n)_{n \geq k}$ heißt monoton fallend, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$

2.15 Beispiel

- a) $a_n = 1$ für alle $n > 1$ (a_n) ist monoton steigend und monoton fallend.
- b) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$.
 (a_n) streng monoton fallend.
- c) $a_n = \sqrt{n}$ (positive Wurzel)
 $(a_n)_{n \geq 1}$ streng monoton steigend.
- d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$
 $(a_n)_{n \geq 1}$ streng monoton steigend.
- e) $a_n = (-1)^n, n \geq 1$
 (a_n) ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

2.16 Satz

- a) Ist $(a_n)_{n \geq k}$ monoton steigend und nach oben beschränkt (d.h es existiert $D \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq D$ für alle $n \geq k$), so konvergiert $(a_n)'$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$

- b) $(a_n)_{n \geq k}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n \geq k}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$.

Beweis. a)

$c \sup\{a_n : n \geq k\}$ existiert (Mathe I). Zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n(\varepsilon)$ mit $c - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq c$

Denn sonst $a_n \leq c - \varepsilon$ für alle $n \geq k$ und $c - \varepsilon$ wäre obere Schranke für $\{a_n : n \geq k\}$ Widerspruch dazu, dass c kleinste obere Schranke. Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

$$c - \varepsilon \leq a_{n(\varepsilon)} \leq a_n \leq c$$

$$|a_n - c| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon).$$

b) analog

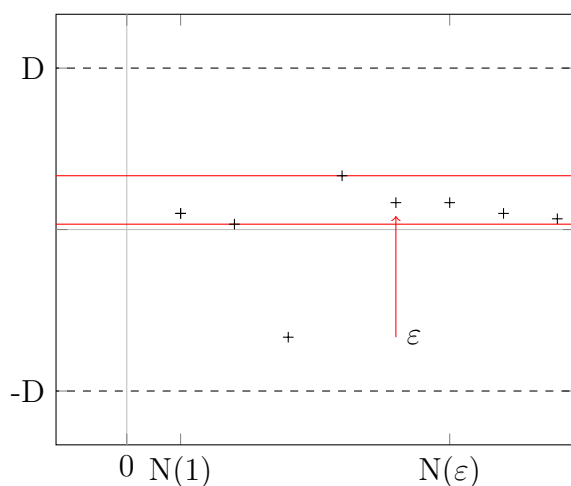
□

2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

(Cauchy, 1789 - 1859)

Sei $(a_n)_{n \geq k}$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

- (1) $(a_n)_{n \geq k}$ konvergent
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N - M(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$ (Cauchyfolge)
Grenzwert muss nicht bekannt sein!



2.18 Definition

- a) Sei $(a_i)_{i \geq k}$ eine Folge, $s_n = \sum_{i=k}^n a_i, n \geq k$ (Partialsummen der Folge)

Dann heißt $(s_n)_{n \geq k}$ eine unendliche Reihe

$(k-1 : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$

Schreibweise : $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$

- b) Ist die Folge $(s_n)_{n \geq k}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c$,

so schreibt man $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$. Reihe konvergiert.

Wenn (s_n) nicht konvergiert, so heißt die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ divergent.

(Zwei Bedeutungen von $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$:

- Folge der Partialsummen
- Grenzwert von (s_n) , falls dieser existiert

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \sum_{n=k}^{\infty} a_n = (s_m)_{m \geq k}$$

2.19 Satz

- a) Ist die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine Nullfolge.
- b) Ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$ beschränkt und ist $a_i \geq 0$ für alle i , so ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis. a)

Sei $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$.

Sei $\varepsilon > 0$ Dann existiert $n(\frac{\varepsilon}{2}) \geq k$ mit $|\sum_{i=k}^{\infty} 2a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n(\frac{\varepsilon}{2})$

Dann gilt $|a_{n+1} - 0| = |a_{n+1}| = |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + \sum_{i=k}^n a_i| =$

$$|\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c - \sum_{i=k}^n a_i + c| \leq |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c| + |\sum_{i=k}^n a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(a_n) ist Nullfolge

b) folgt aus 2.16a), denn (s_n) ist monoton steigend □

2.20 Beispiele

- a) Sei $q \in \mathbb{R}$.

Ist $q \neq 1$, so ist $\sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$\left[\left(\sum_{i=k}^n q^i \right) \cdot (q-1) \right]$$

Sei $|q| < 1$, d.h. $-1 < q < 1$.

Dann ist $\sum_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ (konvergiert)

$$s_n = \sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

(q^n) Nullfolge (2.9_a) für $q \geq 0, 2.8_e) + 2.9_a)$ für $q < 0, q = -|q|$

Geometrische Reihe

Sei $|q| \geq 1$. Dann ist $\sum_{i=k}^{\infty} q^i$ divergent, da dann (q^i) keine Nullfolge (2.18_a)

- b) $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert

harmonische Reihe

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{i}$$

$$n = 2^0 = 1 : s_1 = 1$$

$$n = 2^1 = 2 : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

...

$$n = 2^3 = 8 : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_7 > s_6 \dots$$

Per Induktion zu beweisen!

c) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Folge der Partialsummen ist monoton steigend.

2.16a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^2}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{2}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^2} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

2.16a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ Kgt., Grenzwert ≤ 2 . (später: Grenzwert ist $\frac{\pi^2}{6}$)

Es gilt allgemeiner:

$s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert.

Allgemeiner: $s \in \mathbb{R}, s > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert

d) $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ konvergiert:

$$s_{2n} = \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{<0} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)}_{<0}$$

$s_{2n} \leq s_{2(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

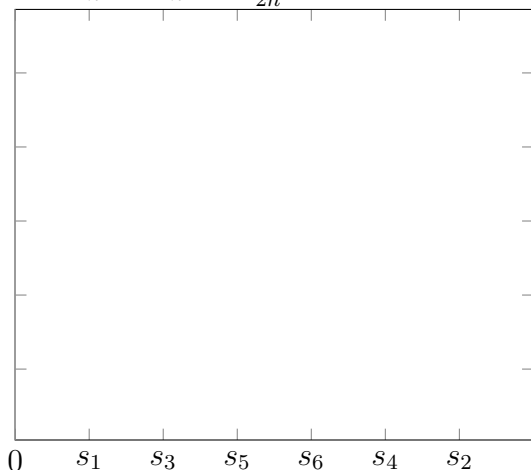
$$(s_{2n}) \text{ ist monoton fallend. } s_{2n-1} = -1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right)}_{>0}$$

(s_{2n-1}) ist monoton wachsend

Ist k ungerade, so ist $s_k < s_l$: Wähle n so, dass $2n - a \geq k, 2n \geq l$

$$s_k \underset{(2)}{\leq} s_{2n-1} \underset{\uparrow}{\leq} s_{2n} \underset{(1)}{\leq} s_l$$

$$s_{2n} = s_{2n-1} + \frac{1}{2n}$$



Abstand $s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n}$ geht gegen 0.

$$\sup\{s_{2n-1} : n \geq 1\}$$

$$\inf\{s_{2n} : n \geq 1\}$$

$$= \lim_{i \leftarrow \infty} (-1)^i \frac{1}{i} \in]-1, -\frac{1}{2}[\text{ (Es gilt } \lim_{i \leftarrow \infty} \frac{1}{i} = -\ln 2)$$

Bemerkung

Was bedeutet $0.\bar{8} = 0.88888888\dots$? (Dezimalsystem)

$$0.\bar{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots = 8 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i+1}} = 8 \cdot \left(\frac{10}{9} - 1\right) = \frac{8}{9}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere $a_i \geq 0$ falls $i \geq k$), so ist $\sum_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent.

2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_i)_{i \geq k}$, $(b_i)_{i \geq k}$ Folgen, wobei $b_i \geq 0$ für alle $i \geq k$ und $|a_i| \leq b_i$ für alle $i \geq k$. Dann gilt

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent, so auch $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$. Für die Grenzwerte gilt:

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$$

Beweis. Konvergenz

von $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ folgt aus 2.16 a).

$\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$ folgt aus 2.8 f).

Sei $m > n$:

$$\left| \sum_{i=k}^m a_i - \sum_{i=k}^n a_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^m a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^m |a_i| = \left| \sum_{i=k}^m |a_i| - \sum_{i=k}^n |a_i| \right|$$

Mit Cauchy-Kriterium 2.17 folgt daher aus der Konvergenz von $\sum_{i=k}^m |a_i|$ auch die von $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$.

□

2.23 Beispiel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$$

$$\sqrt{i} \leq i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

Ang. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$ konvergiert. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ konvergiert. \nexists

Widerspruch zu 2.20 b)

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{i}$$

2.20d): $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, aber $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert nicht. (★)

2.24 Definition

$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

(Falls alle $a_i \geq 0$: Konvergent = absolut Konvergent)

2.25 Korollar

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist auch konvergiert. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beweis: 1. Behauptung 2.22 mit $b_i = |a_i|$

Umkehrung siehe (★)

Bemerkung

Was bedeutet $0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

$a_i \in \{0 \dots 9\}$ (Dezimalsystem)

$$a_1 \cdot \frac{1}{10} a_2 \cdot \frac{1}{100} \dots a_n \cdot \frac{1}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10} 9 \cdot \frac{1}{100} \dots 9 \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$a_i \frac{1}{10} \leq 9 \frac{1}{10}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} 9 \frac{1}{10} = 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 \right) = 1 \Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \frac{1}{10} \text{ konvergiert}$$

2.26 Satz

Sei $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ eine Reihe.

a) Wurzelkriterium

Existiert $q < 1$ und ein Index i_0 , so dass $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ für alle $i \geq i_0$.

so konvergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i so divergiert $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$.

b) Quotientenkriterium

Existiert $q > 1$ und ein Index i_0 , so dass $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ für alle $i \geq i_0$,

so konvergiert $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Beweis.

a) $|a_i| \leq q^i$ für alle $i \geq i_0$

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} q^i \text{ konvergiert (2.20 a))}$$

$$\stackrel{2.22}{\Rightarrow} \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert.}$$

$$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } i$$

$$\Rightarrow |a_i| \geq 1 \text{ für unendlich viele } i$$

$$\Rightarrow (a_i) \text{ sind keine Nullfolge}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \text{ divergiert.}$$

b) Sei $i \geq i_0$.

$$\left| \frac{a_i}{a_{i_0}} \right| = \left| \frac{a_i}{a_{i-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{i_0+1}}{a_{i_0}} \right| \leq q \cdot q \cdot \dots \leq q^{i-i_0} = \frac{q^i}{q^{i_0}}$$

↑ Voraussetzung:

jeder dieser Quotienten ist $\leq q$

$$|a_i| \leq \underbrace{\left| \frac{a_i}{q^{i_0}} \right|}_{=:c} \cdot q^i \quad \sum_{i=i_0}^{\infty} c \cdot q^i \text{ konvergent}$$

$\Rightarrow \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert

□

2.27 Bemerkung

a) Es reicht nicht in 2.26 nur vorauszusetzen, dass $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für alle $i \geq i_0$
bzw. $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$ für alle $i \geq i_0$.

z.B. harmonische Reihen : $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert.

Aber: $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} > 1$ für alle i .
 $\frac{i}{i+1} < 1$ für alle i

b) Es gibt Beispiele von absolut konvergenten Reihen mit $|\frac{a_{i+1}}{a_i}|$ für unendlich viele i .

2.28 Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ absolut ($0^0 = 1, 0! = 1$) :

Quotientenkriterium:

$|\frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i}| = |\frac{x}{i+1}|$ Wähle i_0 , so dass $i_0 + 1 > 2 \cdot |x|$

Für alle $i \geq i_0$:

$\frac{|x|}{(i+1)} \leq \frac{|x|}{(i_0+1)} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q$.

2.29 Bemerkung

Gegeben seien zwei endliche Summen

$$\sum_{a_n}^k n = 0, \sum_{b_n}^l n = 0.$$

$$(\sum_{a_n}^k n = 0)(\sum_{b_n}^l n = 0) \quad (\star)$$

Distributivgesetz: Multipliziere a_i mit jedem b_i und addiere diese Produkte.

$$(\star) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Indexsumme 0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Indexsumme 2}} + \dots + \underbrace{a_k b_l}_{\text{Indexsumme k+l}}$$

2.30 Definition

Seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_n, \sum_{i=0}^{\infty} b_n$ unendliche Reihen.

Das Cauchy-Produkt(Faltungsprodukt) der beiden Reihen ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_n$, wobei $c_n = \sum_{i=0}^n a_i \cdot$

$$b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

2.31 Satz

Sind $\sum_{i=0}^{\infty} a_n, \sum_{i=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent Reihen mit Grenzwert c, d , so ist das Cauchy Produkt auch absolut konvergent mit Grenzwert $c \cdot d$.

Beweis: [1]

3 Potenzreihen

3.1 Definition

Sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge, $a \in \mathbb{R}$

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - a)^n$ eine Potenzreihe (mit Entwicklungspunkt a) Speziell: $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

(Potenzreihe im engeren Sinne)

Hauptfrage: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konv. die Potenzreihe (absolut)?

Suche für $x = a$

Dann Grenzwert b_0 (da $0^0 = 1$)

Ob Potenzreihe für andere x konvergiert, hängt von b_n ab!

3.2 Beispiel

a) $\sum_{i=0}^{\infty} x^n (b_n = 1 \text{ für alle } n)$

geometrische Reihe, konvergiert für alle $x \in]-1, 1[$

b) $\sum_{i=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n (b_n = 2^n) = \sum_{i=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$ konvergiert genau dann nach a), wenn $|2x| < 1$, d.h. $|x| < \frac{1}{2}$ d.h.
 $x \in]-0.5, 0.5[$

c) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n!})$

konvergiert für alle x , $x \in]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

3.3 Satz

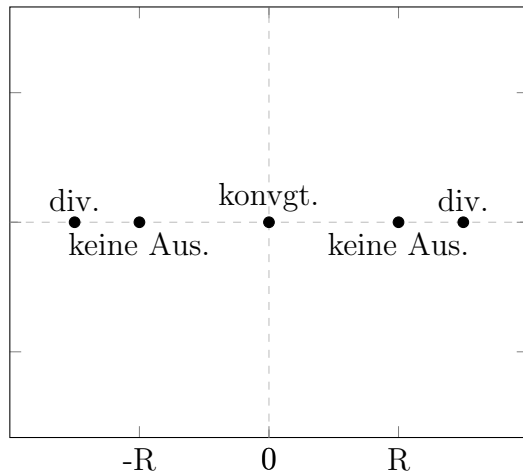
Sei $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ eine Potenzreihe (um 0). Dann gibt es $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $R \geq 0$, so dass gilt.

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < R$ konvergiert Potenzreihe absolut (d.h. $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert, dann

auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$)

Falls $R = \infty$, so heißt das, dass Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ divergiert $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$



($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$) (Für $|x| = R$ lassen sich keine allgemeine Aussagen treffen).

R heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

Konvergenzintervall $< -R, R >$

besteht aus allen x für die $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert.

$<$ kann $[$ oder $]$ bedeuten.

$>$ kann $]$ oder $[$ bedeuten.

Beweis. $|x_1, x_2| \mathbb{R}, |x_1| \leq |x_2|$

Dann: Falls $\sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ konvergiert, so auch $\sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ (2.22) (\star)

Falls $\sum b_n \cdot x_n$ für alle x absolut konvergiert, so setze $R = \infty$

Wenn nicht, so setze $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n| \text{ konvergiert}\} < \infty$ Nach (\star) gilt: $|x| < R \Rightarrow$

$\sum b_n x^n$ konvergiert absolut.

Für $|x| > R$ konvergiert $\sum b_n x^n$ nicht absolut.

Sie konvergiert sogar selbst nicht. ([?])

$$\sqrt[n]{|b_n|} \cdot |x|^n \leq q < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

$$\uparrow \text{ (setze } \varepsilon = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} > 0)$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : s - \frac{\varepsilon}{2} < |x| \cdot \sqrt[n]{b_n} \leq s + \frac{\varepsilon}{2} =: q < 1$$

□

3.4 Bemerkung

Konvergenz von Potenzreihen der Form $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot (x - a)^n$:

gleichen Konvergenzradius R wie $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

konvergiert absolut für $|x - a| < R$, d.h. $x \in]a - R, a + R[$ Divergiert für $|x - a| > R$.

Keine Aussage für $|x - a| = R$, d.h. $x = a - R$ oder $x = a + R$

Konvergenzintervall $< a - R, a + R >$

3.5 Die Exponentialreihe

a) Exponentialreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n!})$$

2.28 Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setze für $x \in \mathbb{R} : \exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Exponentialfunktion $\exp(0) = \frac{0^n}{0!} = 1$

b) Serien $x, y \in \mathbb{R}$

$\exp(x) \cdot \exp(y) \underset{2.31}{=} \text{Limes des Cauchy Produkts der beiden Reihen.}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot x^i \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \cdot x \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x + y)^n = \exp(x+y)$$

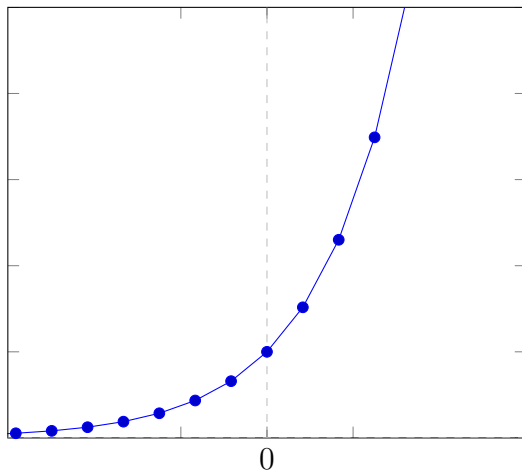
$$\boxed{\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}}$$

Daraus folgt: $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

$$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}} (\star)$$

Für alle $x \geq 0 : \exp(x) > 0$. Dann auch wegen (\star)

$$\boxed{\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}}$$



c) $\exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Euler'sche Zahl Approximation e durch $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$m = 2$	$1 + 1 + \frac{1}{2}$	$= 2,5$
$m = 3$	$2,5 + \frac{1}{6}$	$= 2,\bar{6}$
$\dots m = 6$	$\frac{326}{126} + \frac{1}{720}$	$= 2,7180\bar{5}$

Es ist: $e \approx$

2,71828... (irrationale Zahl)

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert schnell

$$m \in \mathbb{N}$$

$$\exp(m) = \exp(1 + \dots + 1)$$

$$\exp(1)^m = e^m \quad \leftarrow m \rightarrow$$

$$e^0 = 1 \quad \exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = e^{-m}$$

$$n \neq 0, n \in \mathbb{N} :$$

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = +\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}$$

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ stimmt $\exp(x)$ mit der 'normalen' Potenz e^x überein.

Dann definiert man für beliebige $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x := \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

In kürze: Definition a^x für $a > 0, x \in \mathbb{R}$

d) Bei komplexen Zahlen kam e^{it} ($i^2 = -1, t \in \mathbb{R}$) vor als Abkürzung für $\cos(t) + i \sin(t)$

Tatsächlich kann auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ definieren $e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Dabei: Konvergenz von Folgen/Reihen in \mathbb{C} wie in \mathbb{R} mit komplexem Absolutbetrag.

Man kann dann zeigen:

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Dass tatsächlich dann gilt:

$$e^{it} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + i \sin(t). \text{ zeigen wir später}$$

2.718...) Man kann zeigen.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Bedeutung:

- Angelegtes Guthaben G wird in einem Jahr mit 100% verzinst. Guthaben am Ende eines Jahres $2G (= G(1 + 1))$

- Angelegtes Geld wird jedes halbe Jahr mit 50% verzinst. Am Ende eines Jahres (mit Zinseszinsen)

$$G(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) = 2,25G$$

n -mal pro Jahr mit $\frac{100}{n}\%$ verzinsen. Am Ende des Jahres $G(1 + \frac{1}{n})^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(1 + \frac{1}{n})^n = e \cdot G \approx 2.718 \dots \cdot G \text{ (stetige Verzinsung)}$$

$$a\% \text{ statt } 100\% \cdot G e^{\frac{a}{100}}$$

4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

4.1 Definition

Reelle Funktionen f in einer Variable ist Abbildung

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ($D = \text{Definitionsbereich}$).

Typisch: $D = \mathbb{R}$, Intervall, Verschachtelung von Intervallen

4.2 Beispiel

a) Polynomfunktionen (ganzrationale Funktion, Polynome)

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow a_n \cdot x^n + \dots a_1 x + a_0 \end{cases}$$

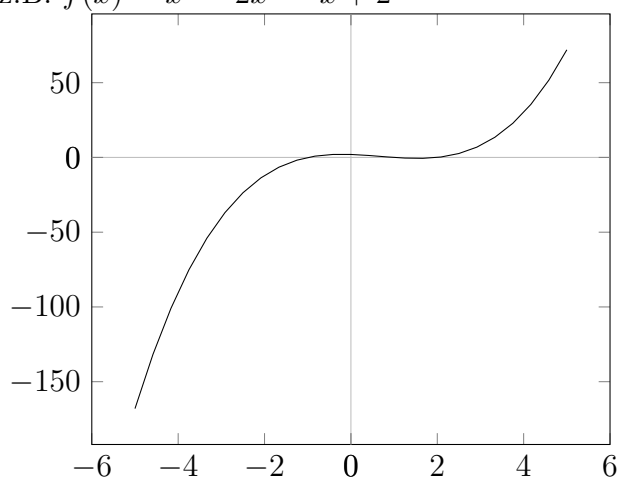
$$f(x) = a_n \cdot x^n + \dots a_1 \cdot x + q$$

$a_n \neq 0 : n = \text{Grad}(f)$ $f = 0$ (Nullfunktion), $\text{Grad}(f) = \infty$

Grad 0: konstante Funktionen $\neq 0$

Graph von f :

z.B. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$



b) $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($f \pm g$)(x) := $f(x) \pm g(x)$ für alle $x \in D$

Summe: Differenz, Produkt von f und g .

Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so Quotient. $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$,

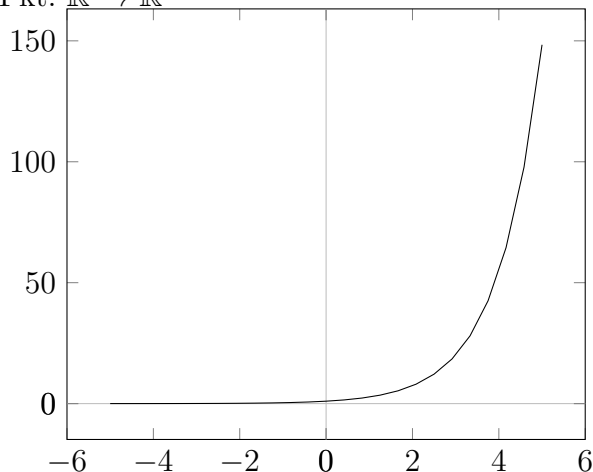
Quotient von Polynomen = (gebrochen-)rationalen Funktionen

$|f|(x) := |f(x)|$ Betrag von f .

c) Potenzreihe definiert Funktion auf ihrem Konvergenzintervall.

z.B. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Fkt. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



d) Hintereinanderausführung von Funktionen:

$f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f(D_1) \subset D_2$, dann $g \circ f :$

$$\begin{cases} D_1 \Rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow g(f(x)) \end{cases}$$

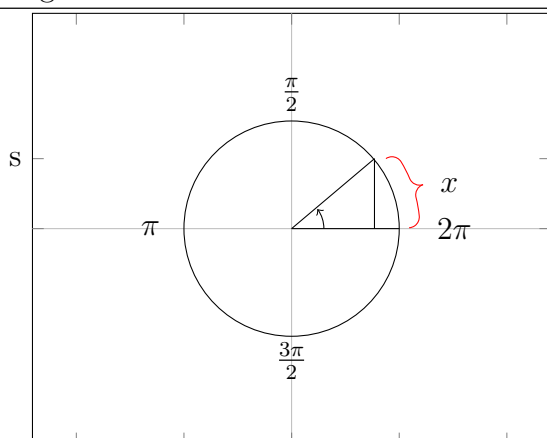
e) $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = e^{x^2 + 1}$$

f) Trigonometrische Funktionen: Sinus- und Cosinusfunktion (vgl. C)



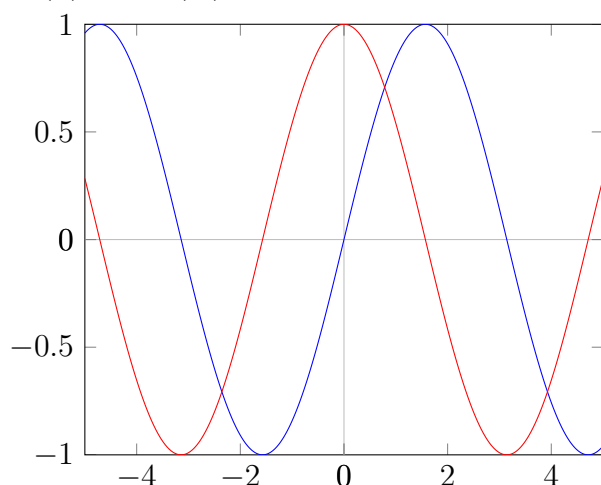
$0 \leq x \leq 2\pi$ $x =$ Bogenmaß von φ in Grad, so $x = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi$

$\sin(x) = s, \cos(x) = c$ Für beliebig $x \in \mathbb{R}$:

Periodische Fortsetzung, d.h. $x \in \mathbb{R} \mid x = x' + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}, x' \in [0, 2\pi[$

$$\sin(x) := \sin(x')$$

$$\cos(x) := \cos(x')$$



$$|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

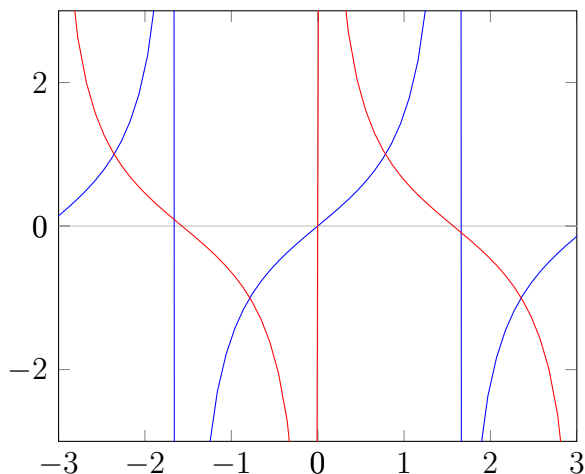
$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Tangens und Cotangensfunktion

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \cos(x) \neq 0$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \sin(x) \neq 0$$



4.3 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ heißt Adhärenzpunkt von D , falls es eine Folge $(a_n)_n$, $a_n \in D$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ gibt.

\bar{D} = Menge der Adhärenzpunkte von D

= Abschluss von D

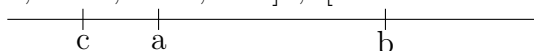
klar: $D \subset \bar{D}$.

$d \in D$. konstante Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = d$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d = d$.

Also: $d \in \bar{D}$.

4.4 Beispiel:

a) $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$, $D =]a, b[$



$$\bar{D} = [a, b]$$

$$a \in \bar{D}$$

$$a_n = a + \frac{b-a}{n} \in D, n \geq 2$$

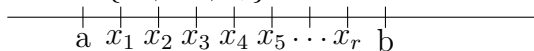
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Also $[a, b] \subset \bar{D}$.

Ist $c \notin [a, b]$, etwa $c < a$, dann ist $|a_n - c| \geq a - c > 0$ für alle $a_n \in]a, b[$. Also: $\lim_{a_n} \neq c$

b) \mathcal{I} Intervall in \mathbb{R} , $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{I}$,

$$D = \mathcal{I} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$$



$$\bar{D} = \bar{\mathcal{I}} = [a, b],$$

falls $\mathcal{I} =]a, b[$.

c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

4.5 Definition

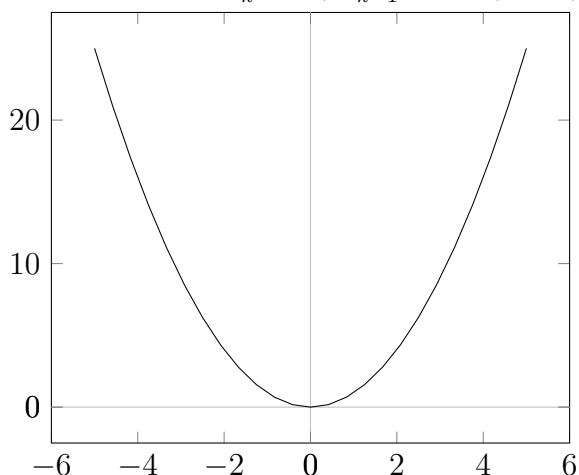
$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \bar{D}$.

$d \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $f(x)$ für x gegen c , $d = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, wenn für jede Folge $(a_n) \in D$, die gegen c konvergiert, die Bildfolge $(f(a_n))_n$ gegen d konvergiert.

4.6 Beispiel:

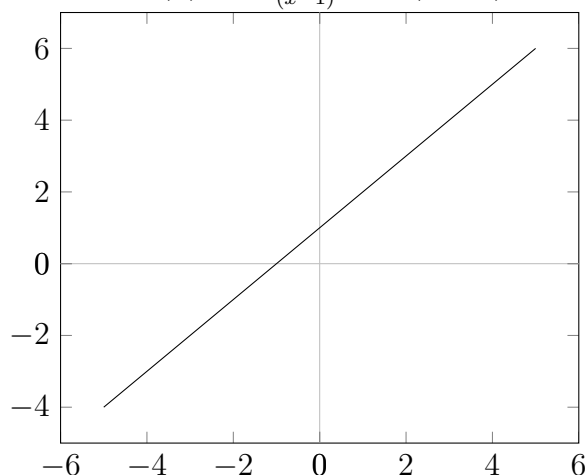
a) Sei $f(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$, eine Polynomfunktion, $c \in \mathbb{R}$. Sei (a_n) Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0 \\ &= b_k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k + b_{k-1} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{k-1} + \dots + b_0 \quad \text{Rechenregeln für Folgen, 2.8} \\ &= b_k \cdot c^k + b_{k-1} \cdot c^{k-1} + \dots + b_1 \cdot c + b_0 = f(c). \end{aligned}$$



b) Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Auf D ist $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1)$



$\bar{D} = \mathbb{R}$

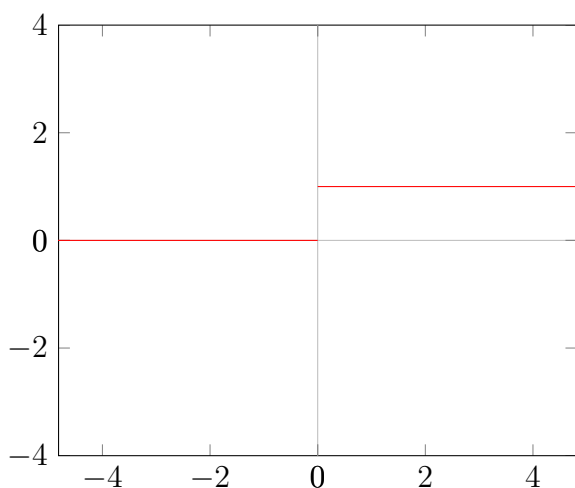
$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$

Sei (a_n) Folge mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$f(a_n) = a_n + 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = 1 + 1 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} = 2.$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R}$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) ?$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

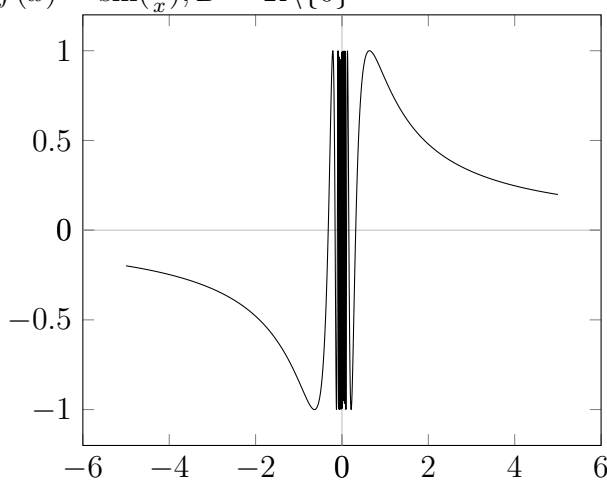
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \underline{1}$$

$$a_n = -\frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \underline{0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{ existiert nicht.}$$

d) $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$a_n = \frac{1}{n\pi}, f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$$

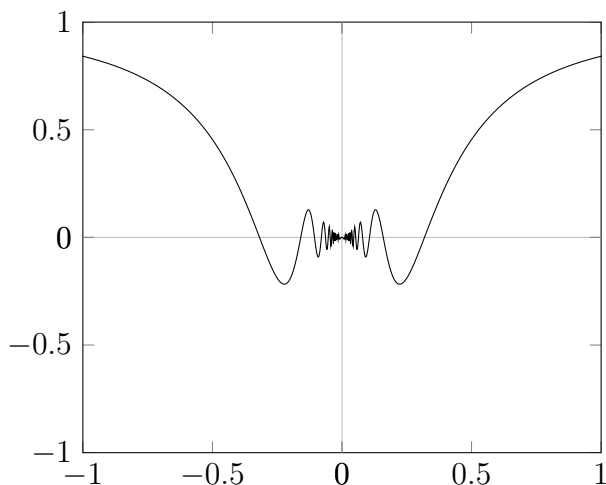
$$a'_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2}\pi)} \rightarrow 0, f(a'_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim(a_n) = 0$$

$$\lim(f(a_n)) = \lim 0 = 0 \quad \lim(f(a'_n)) = \lim 1 = 1$$

$$\lim(f(x))_{x \rightarrow 0} \text{ existiert nicht}$$

e) $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



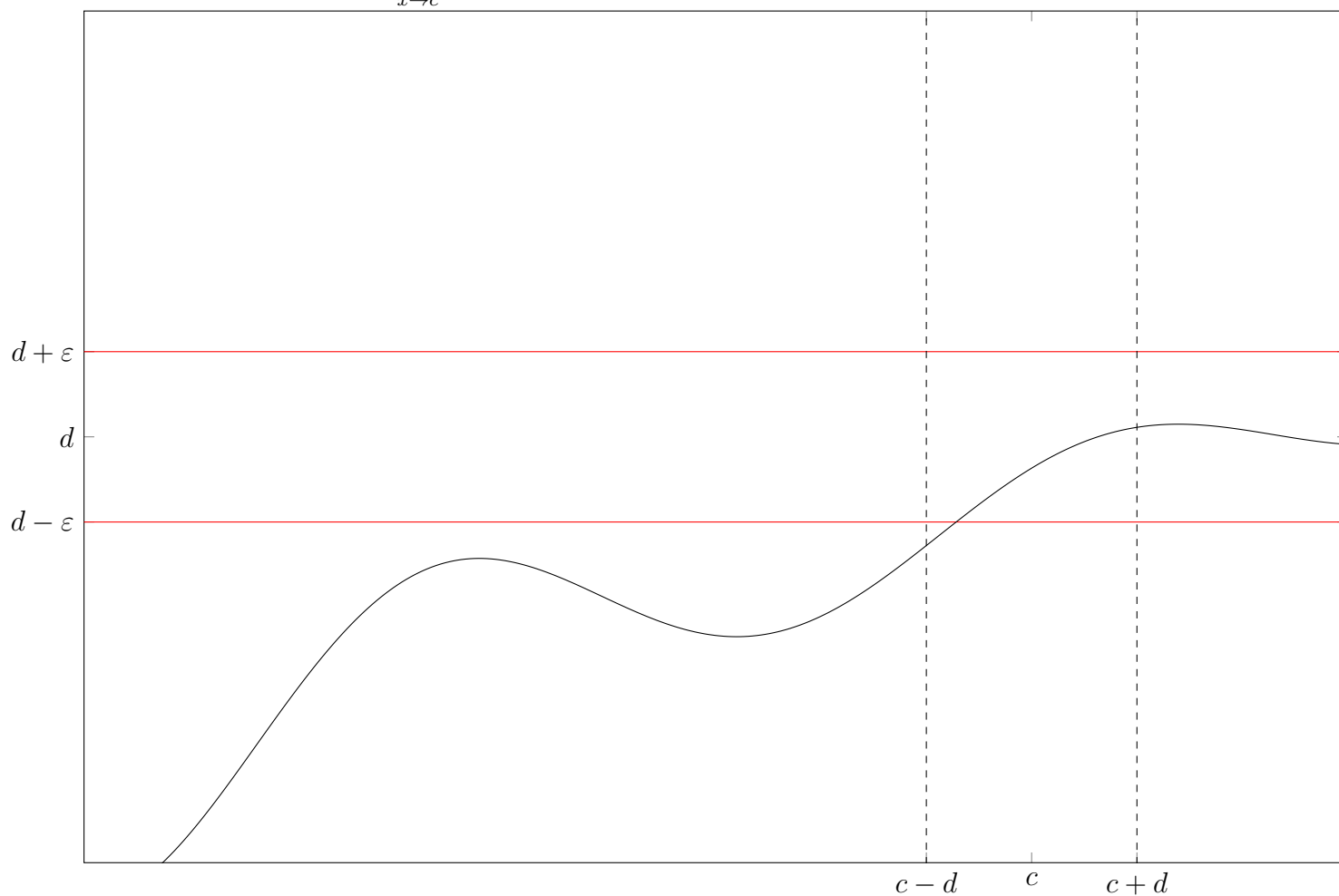
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ dann:

$(a_n) \rightarrow 0, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \stackrel{2.8g)}{=} 0$$

4.7 Satz $(\varepsilon - \delta)$ -Kriterium

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$. Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - d| < \varepsilon$



Beweis. \rightarrow : Angenommen falsch.

Dass heißt $\exists \varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ (z.B. $\delta = \frac{1}{n}$) ein $x_n \in D$ existiert mit $|x_n - c| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - d| \geq \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Aber:

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq d$

\Leftarrow : Sei (a_n) Folge, $a_n \in D$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

Zu zeigen : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall n \geq n(\varepsilon) : |f(a_n) - d| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, ex. $d > 0$:

(\star)

Für alle $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$ gilt $|f(x) - d| < \varepsilon$.

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, existiert n_0 mit $|a_n - c| \geq \delta$ für alle $n \geq n_0$

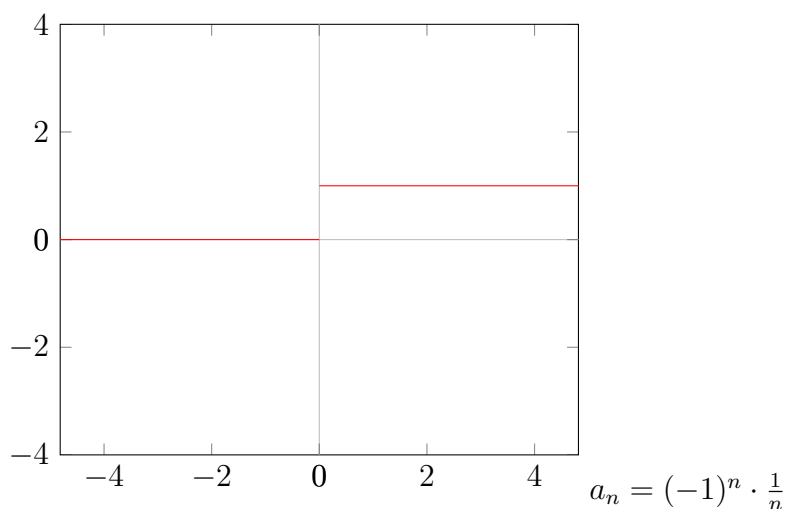
Nach (\star) gilt: $|f(a_n) - d| < \varepsilon \forall n \geq n_0$. ✓

□

Bemerkung

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow$ Für alle Folgen $(a_n), a_n \in D$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$ Wenn man zeigen will, dass $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ nicht existiert, gibt es 2 Möglichkeiten:

- Suche eine bestimmte Folge (a_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, so dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n)$ nicht existiert.
- Suche zwei Folgen $(a_n), (b_n)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = c$, $\lim_{x \rightarrow \infty} b_n = c$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(b_n)$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$f(a_n) = (101010 \dots)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ existiert nicht.

Oder:

$$a_n = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Aber: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(b_n)$

4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

$f, g, D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$, Existieren die Grenzwerte auf der rechten Seite der folgenden Gleichungen, so auch die auf der linken (und es gilt Gleichheit)

$$a) \lim_{x \rightarrow c} (f \pm / \cdot g) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm / \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

b) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$, so

$$\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

c) $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow c} f(x)|$

Beweis. Folgt aus den entsprechenden Regeln für Folgen. □

4.9 Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3+3x+1}{2x^2+1}, D = \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3+3x+1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2+1)} \\ &= \frac{4+6+1}{8+1} = \frac{11}{9} \end{aligned}$$

4.2b) 4.6a)

4.10 Bemerkung

Rechts- und linksseitige Grenzwerte:

Rechtsseitiger Grenzwert:

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = d \Rightarrow \forall (a_n)_n, a_n \in D, a_n \geq c$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$. Analog: linksseitiger

Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$

$(a_n \leq c)$.

4.11 Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, c = 0 \in \bar{D}$$

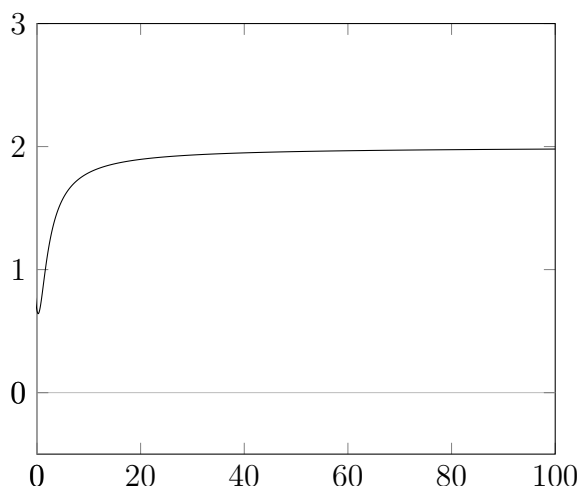
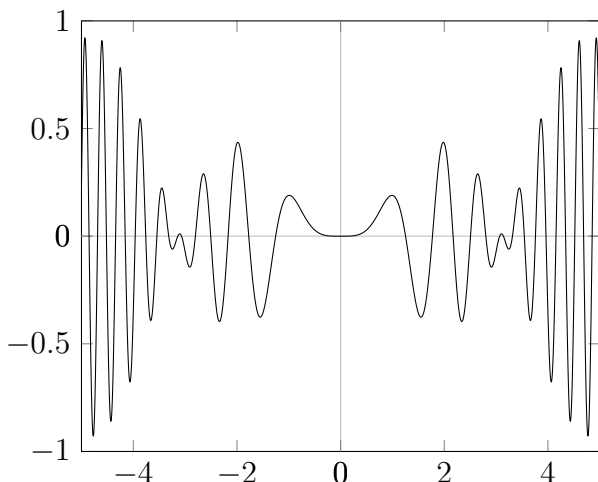
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht.

Falls $\lim_{x \rightarrow c^+}$ und $\lim_{x \rightarrow c^-}$ existieren

$$\text{und } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$$

so existiert $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$.



Grenzwert: $d \in \mathbb{R}$

4.12 Definition

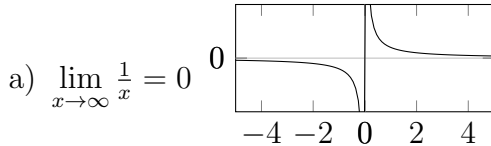
$D =]b, \infty[, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (z.B. $D = \mathbb{R}$)

f konvergiert gegen $d \in \mathbb{R}$ für x gegen unendlich,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = d$, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x \geq M : |f(x) - d| < \varepsilon.$

(Analog : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d$)

4.13 Beispiel

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $x \geq M$:

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

b) Allgemein gilt:

P, Q Polynome vom Grad k bzw. $l \geq k$

$$P(x) = a_k \cdot x^k + \dots, Q(x) = b_l \cdot x^l + \dots, a_k \neq 0, b_l \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l > k \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{für } l = k \end{cases}$$

(Beweis wie für Folgen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 205x^3 + x^2 + 17}{14x^5 + 0,5} = \frac{1}{2}$$

4.14 Bemerkung

Die Rechenregeln aus 4.8 gelten auch für $x \rightarrow \infty / -\infty$

4.15 Definition

a) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$

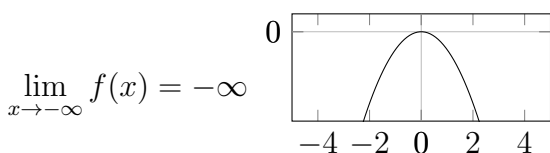
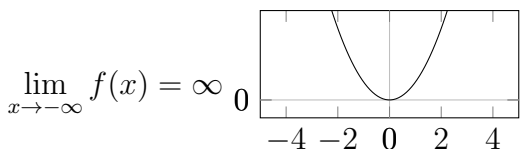
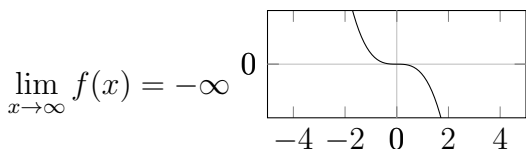
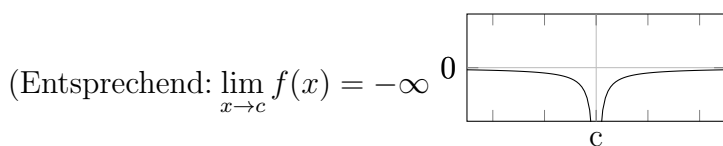
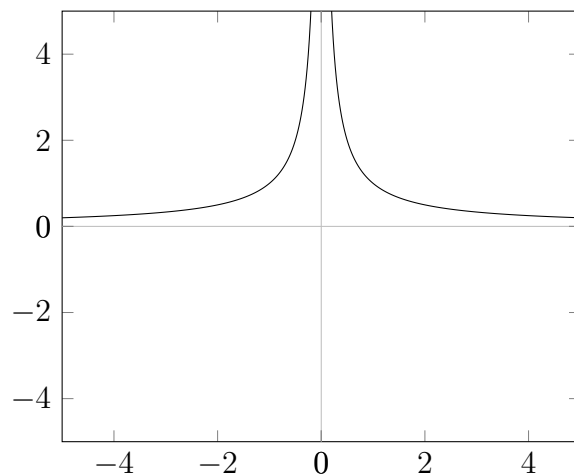
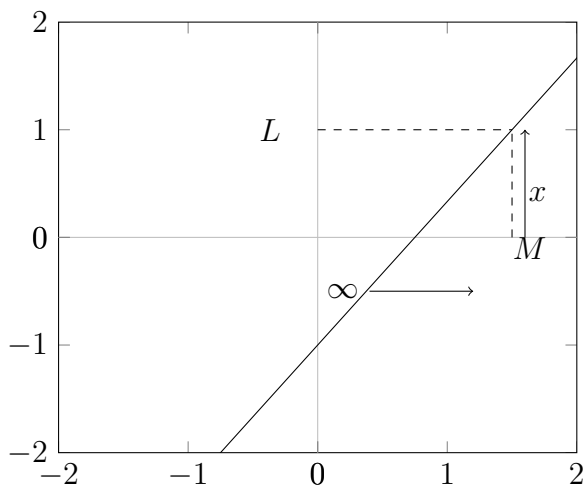
f geht gegen ∞ für x gegen c ,

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, falls gilt:

$\forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq L.$
 $=\delta(L)$

b) $]b, \infty[\subset D, f : D \rightarrow \mathbb{R}, f$ geht gegen ∞ für x gegen ∞ : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, falls gilt:

$\forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D, x \geq M, f(x) \geq L.$



4.16 Satz

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Sei $c \in \bar{D}$, oder $c = \infty, -\infty$

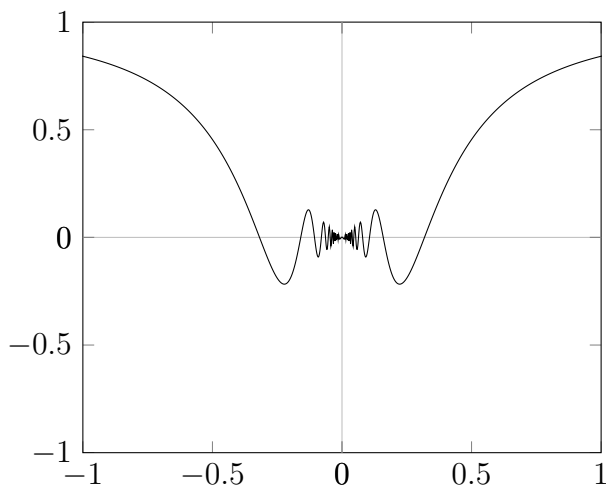
falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ oder $-\infty$, so ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = 0$.

b) $c \in \bar{D} \supset \mathbb{R}$.

Falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ und falls $s > 0$

existiert mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [c - s, c + s]$, ($f(x) < 0$)

dann ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$

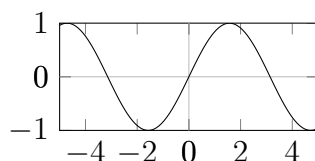


- c) Falls $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ und falls $T > 0$ existiert mit $f(x) > 0$ $\forall x \geq T$, so $(f(x) < 0)$
 ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty (-\infty)$
 (Entsprechend für $\lim_{x \rightarrow -\infty}$)

4.17 Beispiel

- a) • $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]-\infty, 0[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ existiert nicht



- c) $P(x) = ak_x^k + \dots + a_0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \text{ k gerade oder } a_k < 0 \text{ k ungerade} \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \text{ k gerade oder } a_k > 0 \text{ k ungerade} \end{cases}$$

- d) $P(x)$ wie in c)

$$Q(x) = b_l^l + \dots + b_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ gleiche Vorzeichen} \\ -\infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ verschiedene Vorzeichen} \end{cases}$$

Literatur

- [1] Kreußler, Phister Satz 33.16

[2] WHK 5.37