

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen	6
1.1 Definition	6
1.2 Veranschaulichung	6
1.3 Rechenregeln in \mathbb{C}	6
1.4 Definition Absolutbetrag	7
1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag	8
1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten	9
1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie	10
1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation	10
1.9 Bemerkung und Definition	10
1.10 Satz: Komplexe Wurzeln	12
1.11 Beispiel	12
1.12 Bemerkung	12
2 Folgen und Reihen	13
2.1 Definition	13
2.2 Beispiel	13
2.3 Definition	14
2.4 Definition	14
2.5 Beispiele	14
2.6 Satz: Beschränktheit und Konvergenz	15
2.7 Bemerkung	16
2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)	16
2.9 Satz: Kriterien für Nullfolgen	17
2.10 Bemerkung	18
2.11 Definition	19
2.12 Satz: Landausymbole bei Polynomen	19
2.13 Bemerkung	20
2.14 Definition	20
2.15 Beispiel	20
2.16 Satz: Monotonie und Konvergenz	20
2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)	21
2.18 Definition	22
2.19 Satz: Reihenkonvergenz	22
2.20 Beispiele	23
2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)	24
2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)	25
2.23 Beispiel	25
2.24 Definition	25

2.25	Korollar	26
2.26	Satz: Wurzel- und Quotientenkriterium	26
2.27	Bemerkung	27
2.28	Beispiel	28
2.29	Bemerkung	28
2.30	Definition	28
2.31	Satz: Konvergenz im Cauchy Produkt	28
3	Potenzreihen	29
3.1	Definition	29
3.2	Beispiel	29
3.3	Satz	29
3.4	Bemerkung	31
3.5	Die Exponentialreihe	31
4	Funktionen und Grenzwerte	33
4.1	Definition	33
4.2	Beispiel	33
4.3	Definition	36
4.4	Beispiel	37
4.5	Definition	37
4.6	Beispiel	37
4.7	Satz ($\varepsilon - \delta$)-Kriterium	40
4.8	Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)	42
4.9	Beispiel	42
4.10	Bemerkung	43
4.11	Beispiel	43
4.12	Definition	43
4.13	Beispiel	44
4.14	Bemerkung	44
4.15	Definition	44
4.16	Satz: Grenzwerte gegen unendlich	45
4.17	Beispiel	46
5	Stetigkeit	47
5.1	Definition	47
5.2	Satz	48
5.3	Beispiel	48
5.4	Satz (Rechenregeln für Stetigkeit)	49
5.5	Satz: Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen	49
5.6	Beispiel	50

5.7	Satz: Stetigkeit von Potenzreihen	50
5.8	Korollar	50
5.9	Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen)	50
5.10	Korollar (Zwischenwertsatz)	51
5.11	Satz (Min-Max-Theorem)	51
5.12	Definition	52
5.13	Satz: Injektive Funktionen nur bei Monotonie	52
5.14	Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion)	52
5.15	Korollar	54
5.16	Satz: Exponentialfunktion und Logarithmus naturalis	54
5.17	Satz: Wachstum des natürlichen Logarithmus'	55
5.18	Definition	55
5.19	Satz:	55
5.20	Bemerkung	55
5.21	Definition	56
5.22	Satz:	56
6	Differenzierbare Funktionen	56
6.1	Definition	57
6.2	Beispiel	57
6.3	Satz:	58
6.4	Korollar	58
6.5	Satz (Ableitungsregeln)	58
6.6	Beispiel	59
6.7	Satz:	60
6.8	Satz: Ableitungsregeln von cosinus und sinus	60
6.9	Beispiel	60
6.10	Satz: Potenzreihen und diverenzierbarkeit	61
6.11	Korollar	61
6.12	Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)	62
6.13	Bemerkung	62
6.14	Satz:	63
6.15	Satz (logarithmische Abbildung)	63
6.16	Beispiel	63
6.17	Definition	63
6.18	Satz:	64
6.19	Satz (Mittelwertsatz)	64
6.20	Korollar	65
6.21	Korollar	66
6.22	Satz (Regeln von L'Hôpital)	66
6.23	Beispiel	66

7	Das bestimmte Integral	67
7.1	Definition	67
7.2	Definition	68
7.3	Satz: Regelfunktionen	68
7.4	Satz: Regelfunktion und Stetigkeit	69
7.5	Beispiel	70
7.6	Lemma	70
7.7	Definition	71
7.8	Beispiel	72
7.9	Satz (Rechenregeln für Integrale)	72
7.10	Beispiel	73
7.11	Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)	73
8	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	74
8.1	Definition	74
8.2	Definition	74
8.3	Bemerkung	75
8.4	Beispiel	75
8.5	Satz:	76

Abbildungsverzeichnis

1	Veranschaulichung Komplexe Zahlen	6
2	Absolutbetrag	8
3	Imaginäre Zahlen im Koordinatensystem durch Polarkoordinaten . . .	9
4	Winkel im Bogenmaß	9
5	Multiplizieren komplexer Zahlen	11
6	Multiplikation mit i	11
7	Beschränktheit von Folgen	14
8	Beschränkte aber nicht konvergente Folge	16
9	Cauchy'sches Konvergenzkriterium	21
10	Monotonie	24
11	Konvergenzradien	30
12	Die Exponentialreihe	32
13	$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$	34
14	e^x	35
15	Bogenmaß	35
16	Sinus und Cosinus	36
17	Tangens und Kotangens	36
18	x^2	38

19	$x+1$	38
20	Abschnittsweise definierte Funktion	39
21	$\sin(\frac{1}{x})$	40
22	$x \cdot \sin(\frac{1}{x})$	40
23	geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums	41
24	Abschnittsweise definierte Funktion	42
25	Grenzwerte gegen einen Festen Wert	43
26	Funktionen $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$	45
27	$\sin(\frac{1}{x})$	46
28	$\frac{e^x}{x^n}$	47
29	Abschnittsweise definierte Funktion	48
30	Zwischenwerte	51
31	Eine Fallunterscheidung für 5.13	53
32	Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion	53
33	$\exp(x)$ und $\ln(x)$	54
34	Logithmen mit Basen > 1 und < 1	56
35	Sekante an Funktion	58
36	Abschnittsweise definierte cosinus Funktion	61
37	Zwei Funktionen an der Winkelhalbierenden	62
38	Ableitung keine Hinreichende Bedingung für Minima/Maxima	64
39	Eine Funktion und ihrer Steigung an der Stelle c	65
40	Flächeninhalt unter einer Funktion f	67
41	Treppenfunktion	68
42	Treppenfunktion	69
43	Abschnittsweise stetige Funktion	69
44	Treppenfunktion (Untersumme) von x^2	70
45	Nicht integrierbare Funktion	71
46	Mittelwertsatz der Integralrechnung	73

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Addition: } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Multiplikation: } (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i^1$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$. Rein imaginäre Zahlen: $b \cdot i$, $b \in \mathbb{R}$, $(0 + bi)$

i imaginäre Einheit. $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

$a = \Re(z)$ Realteil von z ($\text{Re}(z)$).

$b = \Im(z)$ Imaginärteil von z ($\text{Im}(z)$).

$\bar{z} = a - bi$ ($= a + (-b)i$) Die zu z konjugiert komplexe Zahl.

1.2 Veranschaulichung

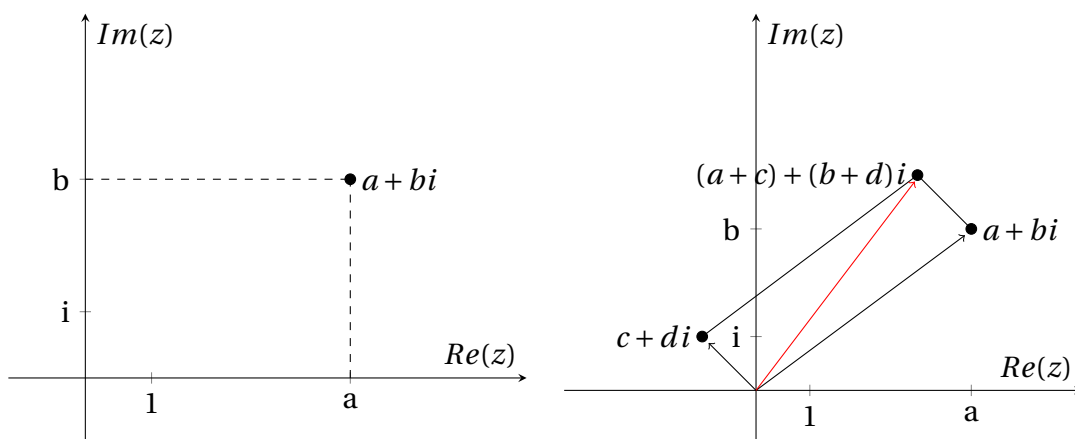


Abbildung 1: Addition entspricht Vektoraddition

1.3 Rechenregeln in \mathbb{C}

a) Es gelten alle Rechenregeln wie in \mathbb{R} .

(z.B Kommutativität bzgl. $+$, \cdot : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$)

Inversenbildung bzgl. \cdot :

$z = a + bi \neq 0$, d.h $a \neq 0$ oder $b \neq 0$:

¹Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ beachten

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Beispiel: $\frac{5-7i}{3+2i} = (5-7i) \cdot (3+2i)^{-1}$

$$= (5-7i) \cdot \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right)$$

$$= \left(\frac{15}{13} - \frac{14}{13}\right) + \left(-\frac{10}{13} - \frac{21}{13}\right)i$$

$$= \frac{1}{13} - \frac{31}{13}i$$

Speziell: $(bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i$
 insbesondere: $\frac{1}{i} = -i$

b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} :$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

1.4 Definition Absolutbetrag

a) *Absolutbetrag* von $z = a + bi \in \mathbb{C} : |z| = \underbrace{+\sqrt{a^2 + b^2}}_{\in \mathbb{R}, \geq 0}$

$$\boxed{a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}}$$

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2$$

$$|z| = \text{Abstand von } z \text{ zu } 0$$

$$= \text{Länge des Vektors, der } z \text{ entspricht}$$

b) Abstand von $z_1, z_2 \in \mathbb{C} :$

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

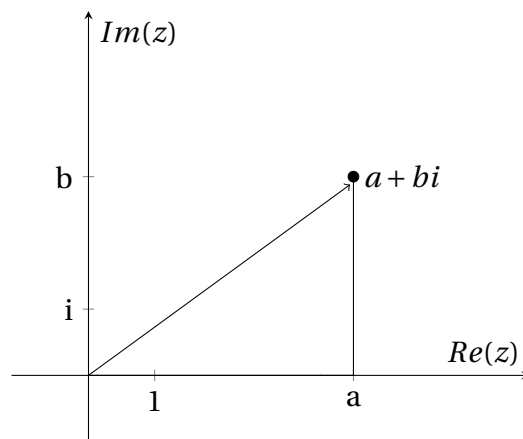


Abbildung 2: Graphische Definition des Absolutbetrages

1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag

(a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 $|-z| = |z|$

1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

- a) Jeder Punkt $\neq (0,0)$ lässt sich durch seine Polarkoordinaten (r, φ) beschreiben:
 $-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$

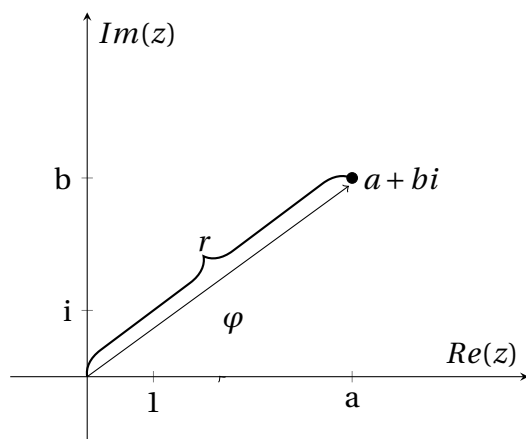
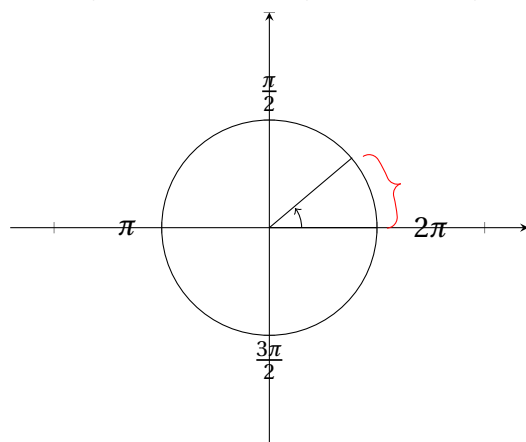


Abbildung 3: Polarkoordinaten

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes

Abbildung 4: Umrechnung Grad zu Bogenmaß



Umfang: 2π

φ in Grad $\hat{=}$ $\frac{2\pi \cdot \varphi}{360}$ im Bogenmaß

Für Punkte mit kartesischen Koordinaten $\neq (0,0)$ werden als Polarkoordinate (r, φ) verwendet.

b) komplexe Zahl $z = a + ib$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |z| \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

Darstellung von z durch Polarkoordinate

Beispiel: a) $z_1 = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
 $= 2 \cdot (0,5\sqrt{2} + i \cdot 0,5\sqrt{2})$

b) $z_2 = 2 + i$

$$|z_2| = \sqrt{5}$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i) \text{ Suche } \varphi \text{ mit } 0 \leq 2\pi \text{ mit } \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}})z_2 \approx \sqrt{5} \cdot$$

$$(\cos(0,46) + i \cdot \sin(0,46))$$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis:

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

(a) $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

(b) $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a) $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

$$z = |z| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$$

$$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + i(\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi))$$

$$w \cdot z = |w \cdot z|(\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$$

b) $z = i, w = a + ib$

$$i \cdot w = -b + ia$$

Multiplikation mit $i \hat{=}$ Drehung um 90°

1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexe Exponentialfunktion einführen.

e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ e = Euler'sche Zahl $\approx 2,718718\dots$

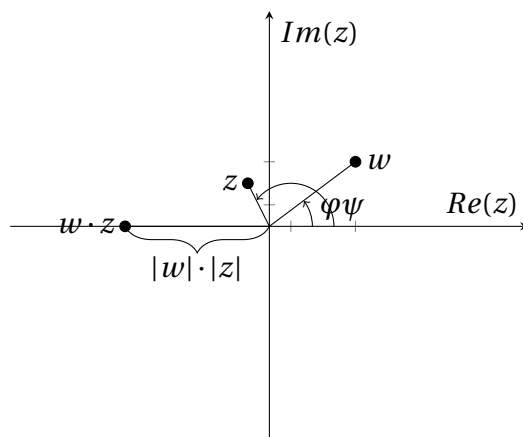


Abbildung 5: Multiplizieren komplexer Zahlen

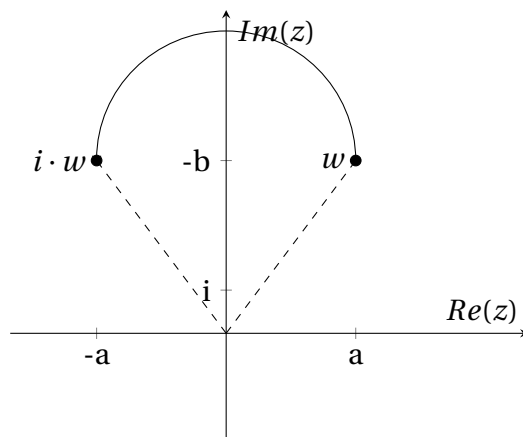


Abbildung 6: Multiplikation mit i

$$e^{z_1} = cde^{z_2} = e^{z_1+z_2}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

Es gilt: $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, $r = |z|$, φ Winkel

$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ ist Polarform von z .

$z = a + bi$ ist kartesische Form von z . $\bullet(r, \varphi)$ Polarkoordinaten

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Punkte auf dem Einheitskreis.

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \text{ Euler'sche Gleichung}$$

1.10 Satz

Sei $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

a) Ist $m \in \mathbb{Z}$, so ist $w^m = |w|^m \cdot (\cos(m \cdot \varphi) + i \cdot \sin(m \cdot \varphi))$
 $(m < 0 : w^m = \frac{1}{|w|^{|m|}}, w \neq 0)$

b) Quadratwurzeln

c) Ist $n \in \mathbb{N}$, $w \neq 0$, so gibt es genau n n -te Wurzeln von w :
 $\sqrt[n]{w} = + \sqrt[n]{|w|} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n})), n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

Beweis. a) richtig, wenn $m = 0, 1$

$m \geq 2$. Folgt aus (\star)

$m = -a$:

$$\begin{aligned} w^{-1} &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w| \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) = |w|^{-1} \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) \end{aligned}$$

□

1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus i :

$$|i| = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Nach 1.10 b): } \sqrt{i} &= \pm (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})) \\ &= \pm (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i) \end{aligned}$$

1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom

$$x^n - w \quad (w \in \mathbb{C})$$

eine Nullstelle in \mathbb{C} (sogar n verschiedene wenn $w \neq 0$)

Es gilt sogar : *Fundamentalsatz der Algebra*

(C. F. Gauß 1777-1855)

Jedes Polynom $a_n x^n + \dots + a_0$

mit irgendwelchen Koeffizienten: $a_n \dots a_0 \in \mathbb{C}$ hat Nullstelle in \mathbb{C}

2 Folgen und Reihen

2.1 Definition

Sei $k \in \mathbb{Z}$, $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$

($k = 0, A_0 \in \mathbb{N}_0, k = 1, A_n \in \mathbb{N}$)

Abbildung $a : A \Rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

$$m \Rightarrow a_m$$

heißt *Folge* reeller Zahlen

$$(a_k, a_{k+1}, \dots)$$

Schreibweise:

$(a_m)_{m \geq k}$ oder einfach (a_m)

a_m heißt *m-tes Glied* der Folge, m *Index*

2.2 Beispiel

a) $a_n = 5$ für alle $n \geq 1$

$$(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \dots)$$

b) $a_n = n$ für alle $n \geq 1$

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots)$$

c) $a_n = \frac{1}{n}$

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

d) $a_n = \frac{(n+1)^2}{2^n}$

$$\left(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \dots\right)$$

e) $a_n = (-1)^n$

$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

f) $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}}$ für $n \geq 2, a_1 = 1$

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots\right)$$

g) $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \dots\right)$$

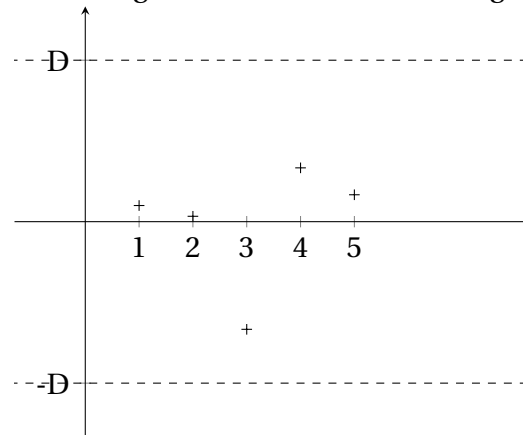
$$\text{h) } a_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \frac{1}{i} \\ (-1, \frac{-1}{2}, -\frac{5}{6}, \dots)$$

2.3 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

D.h. $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$ für alle $n > k$.

Abbildung 7: Beschränktheit von Folgen



2.4 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *konvergent* gegen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (konvergent gegen ε), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) : |a_n - c| < \varepsilon$$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (oder einfach } c = \lim a_n)$$

c heißt *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge (a_n)

(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))

Eine Folge die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*

2.5 Beispiele

$$\text{a) } r \in \mathbb{R} : a_n = r \text{ für alle } n \geq 1$$

$$(r, r, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$$

$$|a_n - r| = 0 \text{ für alle } n$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man $n(\varepsilon) = 1$ wählen

- b)
- $a_n = n$
- für alle
- $n \geq 1$

Folge ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

- c)
- $a_n = \frac{1}{n}$
- für alle
- $n \geq 1$

(a_n) ist Nullfolge.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Suche Index $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$

D.s. es muss gelten.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

$$\text{Ich brauche: } \frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$$

$$\text{Ich brauche } n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Aus Mathe I folgt, dass solch ein $n(\varepsilon)$ existiert.

$$\text{z.B. } n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Dann:

$$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

- d)
- $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$
- für alle
- $n \geq 1$

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a - 3| &= \left| \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1} \right| \\ &= \left| \frac{-3n-2}{n^2+n+1} \right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Benötigt wird $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ für alle $n > n(\varepsilon)$.

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$$

Wähle $n(\varepsilon)$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$

Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$.

$$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

- e)
- $a_n = (-1)^n$
- beschränkte Folge
- $-1 \leq a_n \leq 1$
- konvergiert nicht.

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \nexists$$

2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: 2.5e))

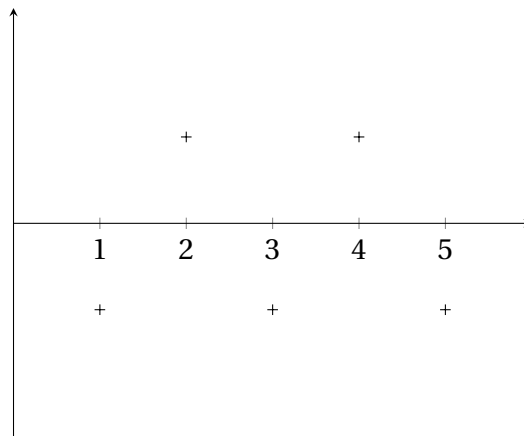
Beweis. Sei $c = \lim a_n$, wähle $\varepsilon = 1$,

Es existiert $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - c| < 1$ für alle $n \geq n(1)$

Dann ist

$$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c| \text{ für alle } n \geq n(1)$$

$$M = \max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \dots, |a_{n(1)-1}|, 1 + |c|\}$$

Abbildung 8: $(-1)^n$ ist beschränkt aber konvergiert nicht

Dann: $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq k$

$-M \leq a_n \leq M$

□

2.7 Bemerkung

- a) $(a_n)_{n \geq 1}$ Nullfolge $\Leftrightarrow (|a_n|)_{n \geq 1}$ Nullfolge ($|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0||$)
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n \geq k}$ ist Nullfolge $\Leftrightarrow (|a_n - c|)_{n \geq k}$ ist Nullfolge

2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien $(a_n)_{n \geq k}$ und $(b_n)_{n \geq k}$ konvergente Folgen, $\lim a_n = c, \lim b_n = d$.

- a) $\lim |a_n| = |c|$
- b) $\lim (a_n \pm b_n) = c \pm d$
- c) $\lim (a_n \cdot b_n) = c \cdot d$
insbesondere $\lim (r \cdot b_n) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.
- d) Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$ und ist $d \neq 0$, so $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{c}{d}$
- e) Ist (b_n) Nullfolge, $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$, so konvergiert $(\frac{1}{b_n})$ nicht!
- f) Existiert $m \geq k$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$, so ist $c \leq d$.
- g) Ist $(c_n)_{n \geq k}$ Folge und existiert $m \geq k$ mit $0 \leq c_n \leq a_n$ für alle $n \geq m$ und ist (a_n) eine Nullfolge, so ist auch (c_n) eine Nullfolge.

- h) Ist $(c_n)_{n \geq l}$ beschränkte Folge und ist $(a_n)_{n \geq k}$ Nullfolge, so ist auch $(c_n \cdot a_n)_{n \geq k}$ Nullfolge.

c_n muss nicht konvergieren!

Beweis. Exemplarisch:

- b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$ und $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$ und $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$
 $|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$
 Suche $n(\varepsilon) = \max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}), n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$
 Dann gilt für alle $n > n(\varepsilon)$:
 $|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
- f) Angenommen $c > d$. Setze $\delta = c - d > 0$
 Es existiert $\tilde{m} \geq m$ mit $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$
 und $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq \tilde{m}$.
 Für diese n gilt:
 $0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$ nach Voraussetzung
 $= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$
 $\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \nless$

□

2.9 Satz

- a) $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge
- b) Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{1}{n^m})_{n \geq 1}$ Nullfolge.
- c) Sei $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$
 Dann ist $(n^m \cdot q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge
- d) Ist $r > 1, m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{n^m}{r^n})_{n \geq 1}$ eine Nullfolge)
- e) $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$
 $Q(x) = b_e \cdot x^e + \dots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$
 Sei $Q(n) \neq 0$ für alle $n \geq k$.

- Ist $m > e$, so ist $\frac{P(n)}{Q(n)}$ nicht konvergent

- Ist $m = e$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$

- Ist $m < e$, so ist $(\frac{P(n)}{Q(n)})$ eine Nullfolge

a) Sei $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge

Beweis. a) Richtig für $q > 0$. Sei jetzt $q > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Mathe I: Es gibt ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt: $|q^n - 0| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

□

b) 2.5c): $\frac{1}{n}$ $n \geq 1$ Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

c) Richtig für $q = 0$. Sei jetzt $q > 0$.

1.Fall: $m = 1$

$\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0$.

$(t+1)^n \underset{=}{=} 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 > \frac{n(n-1)}{2} t^2$ für alle $n \geq 2$

$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$

$0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftarrow$ Nullfolge 2.5e), 2.8e)

Nach 2.8g) ist $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge, also auch $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$.

2.Fall: $m > 1$.

Setze $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$n^m \cdot q^n = n^m \cdot (q')^{nm}$
 $= (n \cdot (q')^n)^m$ $m = 1$ anwenden

$0 < q' < 1$

$(n^m + q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge noch Fall $m = 1$ und 2.8e)

d) Folgt aus c) und $q = \frac{1}{r}$

e) Ist $m \leq l$, so ist $\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^m(a_m + a_{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^m})}{n^l(b_l + b_{l-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$

$(I) \rightarrow a_m, (II) \rightarrow b_l \frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{a_m}{b_l}$

$n < l, \frac{1}{n^{l-m}}$ Nullfolge

$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$

$m > l$:

Beh. folgt aus Fall $m < l$ und 2.8e).

2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, die Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.

$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$

$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$

$$a_n \leq x \leq b_n$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2} \Leftarrow \text{Nullfolge (2.9b)}$$

2.8e) $(|x - a_n|)$ Nullfolge.

$$2.7e): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

$$\text{Analog: } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$$

2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

2.11 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *strikt positiv*, falls $a_n > 0$ für alle $n \geq k$.

Sei im Folgenden $(a_n)_{n \geq k}$ eine strikt positive Folge.

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathbb{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n \geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n \geq k} \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } O(a_n) = \{(b_n)_{n \geq k} : \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{ ist Nullfolge}\}$$

$(b_n) \in o(a_n)$ heißt Folge (a_n) wächst wesentlich schneller als die Folge (b_n) . Klar:

$$o(a_n) \subset O(a_n)$$

O, o („groß Oh“, „klein Oh“)

Landau-Symbole

$$\begin{array}{lll} \text{z.B.} & (n^2) & \in o(n^3) \\ & (n^2 + n + 1) & \in O(n^2) \quad n^2 + n + 1 \leq 3n^2 \\ & (n^2) & \in O(n^2 + n + 1) \quad n^2 \leq n^2 + n + 1 \end{array}$$

$O(1)$ = Menge der beschränkten Folgen

$o(1)$ = Menge aller Nullfolgen

Häufig gewählte Schreibweise:

$$n^2 \underbrace{=} o(n^2) \text{ statt } (n^2) \in o(n^3)$$

eig. falsch!

$$n^2 + n + 1 = O(n^2) \text{ statt } (n^2 + n + 1)$$

2.12 Satz

Sei $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots + a_1 \cdot x + a_0, m \geq 0, a_m \neq 0$.

a) $(P(n)) \in o(n!)$ für alle $l > m$ und

$$(P(n)) \in O(n^l) \text{ für alle } l \geq m.$$

b) ist $r > 1$, so ist $(P(n)) \in o(r^n)$.

$[(r^n) \text{ wächst deutlich schneller als } (P(n))]$

Beweis. a) folgt aus 2.9e).

$m = l$ (2.6)

b) folgt aus 2.9d) und 2.8 b)c) □

2.13 Bemerkung

Algorithmus:

Sei t_n = maximale Anzahl von Reihenschritten des Algorithmus' bei Input der Länge n (binär codiert).

Worst-Case-Komplexität:

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $(t_n) \in O(n^l)$.
(gutartig)

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mindestens exponentielle Zeitkomplexität, falls $r > 1$ existiert mit $(r^n) \in O(b_n)$ (bösaartig)

2.14 Definition

- a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *monoton wachsend (steigend)*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$. Sie heißt *steng monoton wachsend (steigend)*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq k$
- b) $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$

2.15 Beispiel

- a) $a_n = 1$ für alle $n > 1$ (a_n) ist monoton steigend und monoton fallend.
- b) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$.
(a_n) streng monoton fallend.
- c) $a_n = \sqrt{n}$ (positive Wurzel)
(a_n) $n \geq 1$ streng monoton steigend.
- d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$
(a_n) $n \geq 1$ streng monoton steigend.
- e) $a_n = (-1)^n, n \geq 1$
(a_n) ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

2.16 Satz

- a) Ist $(a_n)_{n \geq k}$ monoton steigend und nach oben beschränkt (d.h es existiert $D \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq D$ für alle $n \geq k$), so konvergiert $(a_n)'$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$

- b) $(a_n)_{n \geq k}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n \geq k}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$.

Beweis. a)

$c = \sup\{a_n : n \geq k\}$ existiert (Mathe I). Zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n(\varepsilon)$ mit $c - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq c$

Denn sonst $a_n \leq c - \varepsilon$ für alle $n \geq k$ und $c - \varepsilon$ wäre obere Schranke für $\{a_n : n \geq k\}$

Widerspruch dazu, dass c kleinste obere Schranke. Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

$$c - \varepsilon \leq a_{n(\varepsilon)} \leq a_n \leq c$$

$$|a_n - c| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon).$$

b) analog

□

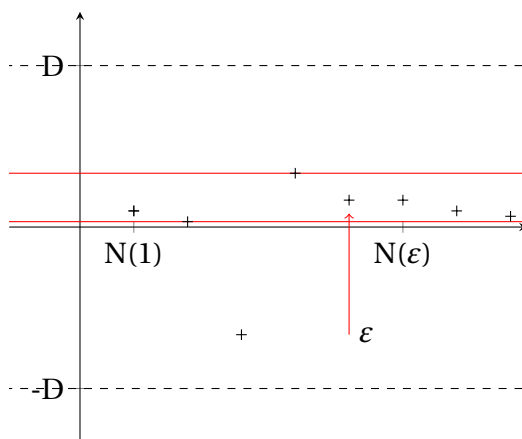
2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

(Cauchy, 1789 - 1859)

Sei $(a_n)_{n \geq k}$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

(1) $(a_n)_{n \geq k}$ konvergent

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$ (Cauchyfolge)
Grenzwert muss nicht bekannt sein!



Abbildungung 9: Cauchy'sches Konvergenzkriterium

2.18 Definition

- a) Sei $(a_i)_{i \geq k}$ eine Folge, $s_n = \sum_{i=k}^n a_i, n \geq k$ (Partialsummen der Folge)

Dann heißt $(s_n)_{n \geq k}$ eine *unendliche Reihe*

$(k-1 : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$

Schreibweise : $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$

- b) Ist die Folge $(s_n)_{n \geq k}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c$,

so schreibt man $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$. Reihe *konvergiert*.

Wenn (s_n) nicht konvergiert, so heißt die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *divergent*.

(Zwei Bedeutungen von $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$:

- Folge der Partialsummen

- Grenzwert von (s_n) , falls dieser existiert

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \sum_{n=k}^{\infty} a_n = (s_m)_{m \geq k}$$

2.19 Satz

- a) Ist die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine Nullfolge.

- b) Ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{i=k}^n a_i$ beschränkt und ist $a_i \geq 0$ für alle i , so

ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis. a)

Sei $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$.

Sei $\varepsilon > 0$ Dann existiert $n(\frac{\varepsilon}{2}) \geq k$ mit $|\sum_{i=k}^n a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n(\frac{\varepsilon}{2})$

Dann gilt $|a_{n+1} - 0| = |a_{n+1}| = |\sum_{i=k}^{n+1} a_i - \sum_{i=k}^n a_i| =$

$$|\sum_{i=k}^{n+1} a_i - c - \sum_{i=k}^n a_i + c| \leq |\sum_{i=k}^{n+1} a_i - c| + |\sum_{i=k}^n a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(a_n) ist Nullfolge

b) folgt aus 2.16 a), denn (s_n) ist monoton steigend

□

2.20 Beispiele

a) Sei $q \in \mathbb{R}$.

Ist $q \neq 1$, so ist $\sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$\left[\left(\sum_{i=k}^n q^i \right) \cdot (q-1) \right]$$

Sei $|q| < 1$, d.h. $-1 < q < 1$.

Dann ist $\sum_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ (konvergiert)

$$s_n = \sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

(q^n) Nullfolge (2.9_a) für $q \geq 0, 2.8_e) + 2.9_a)$ für $q < 0, q = -|q|$

Geometrische Reihe

Sei $|q| \geq 1$. Dann ist $\sum_{i=k}^{\infty} q^i$ divergent, da dann (q^i) keine Nullfolge (2.18_a)

b) $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert

harmonische Reihe

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{n}$$

$$n = 2^0 = 1 : s_1 = 1$$

$$n = 2^1 = 2 : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

...

$$n = 2^3 = 8 : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_7 > s_6 \dots$$

Per Induktion zu beweisen!

c) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Folge der Partialsummen ist monoton steigend.

2.16a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^2}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{2}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^4} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

2.16a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ Kgt., Grenzwert ≤ 2 . (später: Grenzwert ist $\frac{\pi^2}{6}$)

Es gilt allgemeiner:

$s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert.

Allgemeiner: $s \in \mathbb{R}, s > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert

d) $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ konvergiert:

$$s_{2n} = \underbrace{(-1 + \frac{1}{2})}_{<0} + \underbrace{(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}_{<0} + \dots + \underbrace{(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n})}_{<0}$$

$$s_{2n} \leq s_{2(n+1)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$(s_{2n}) \text{ ist monoton fallend. } s_{2n-1} = -1 + \underbrace{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})}_{>0} + \dots + \underbrace{(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1})}_{>0}$$

(s_{2n-1}) ist monoton wachsend

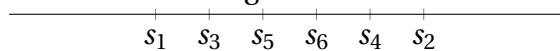
Ist k ungerade, so ist $s_k < s_l$: Wähle n so, dass $2n - a \geq k, 2n \geq l$

$$s_k \leq s_{2n-1} < s_{2n} \leq s_l$$

$$s_{2n} = s_{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

Abstand $s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n}$ geht gegen 0.

Abbildung 10: Monotonie



$$\sup\{s_{2n-1} : n \geq 1\}$$

$$\inf\{s_{2n} : n \geq 1\}$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} (-1)^i \frac{1}{i} \in]-1, -\frac{1}{2}[\text{ (Es gilt } \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} = 0 \text{)}$$

Bemerkung

Was bedeutet $0.\bar{8} = 0.88888888\dots$? (Dezimalsystem)

$$0.\bar{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots = 8 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i+1}} = 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{i+1} = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere $a_i \geq 0$ falls $i \geq k$), so ist

$$\sum_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i \text{ konvergent.}$$

2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_i)_{i \geq k}$, $(b_i)_{i \geq k}$ Folgen, wobei $b_i \geq 0$ für alle $i \geq k$ und $|a_i| \leq b_i$ für alle $i \geq k$. Dann gilt

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent, so auch $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$. Für die Grenzwerte gilt:

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$$

Beweis. Konvergenz

von $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ folgt aus 2.16 a).

$\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$ folgt aus 2.8 f).

Sei $m > n$:

$$\left| \sum_{i=k}^m a_i - \sum_{i=k}^n a_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^m a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^m |a_i| \leq \sum_{i=n+1}^m b_i = \sum_{i=n+1}^m |a_i|$$

Mit Cauchy-Kriterium 2.17 folgt daher aus der Konvergenz von $\sum_{i=k}^m |a_i|$ auch die von

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i.$$

□

2.23 Beispiel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$$

$$\sqrt{i} \leq i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

Ang. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ konvergiert. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ konvergiert. \nexists

Widerspruch zu 2.20 b)

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{i}$$

2.20d): $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, aber $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert nicht. (★)

2.24 Definition

$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

(Falls alle $a_i \geq 0$: Konvergent = absolut Konvergent)

2.25 Korollar

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist auch konvergiert. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beweis: 1. Behauptung 2.22 mit $b_i = |a_i|$

Umkehrung siehe (★)

Bemerkung

Was bedeutet $0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

$a_i \in \{0 \dots 9\}$ (Dezimalsystem)

$$a_1 \cdot \frac{1}{10} a_2 \cdot \frac{1}{100} \dots a_n \cdot \frac{1}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10} 9 \cdot \frac{1}{100} \dots 9 \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$a_i \frac{1}{10} \leq 9 \frac{1}{10}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} 9 \frac{1}{10} = 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 \right) = 1 \Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \frac{1}{10} \text{ konvergiert}$$

2.26 Satz

Sei $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ eine Reihe.

a) Wurzelkriterium

Existiert $q < 1$ und ein Index i_0 , so dass $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ für alle $i \geq i_0$.

so konvergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i so divergiert $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$.

b) Quotientenkriterium

Existiert $q > 1$ und ein Index i_0 , so dass $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \leq q$ für alle $i \geq i_0$,

so konvergiert $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Beweis.

a) $|a_i| \leq q^i$ für alle $i \geq i_0$

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} q^i \text{ konvergiert (2.20 a))}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert}$$

2.22

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert.}$$

$$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1 \text{ f\"ur unendlich viele } i$$

$$\Rightarrow |a_i| \geq 1 \text{ f\"ur unendlich viele } i$$

$$\Rightarrow (a_i) \text{ sind keine Nullfolge}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \text{ divergiert.}$$

b) Sei $i \geq i_0$.

$$\left| \frac{a_i}{a_{i_0}} \right| = \left| \frac{a_i}{a_{i-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{i_0+1}}{a_{i_0}} \right| \leq q \cdot q \cdot \dots \leq q^{i-i_0} = \frac{q^i}{q^{i_0}}$$

↑ Voraussetzung:

jeder dieser Quotienten ist $\leq q$

$$|a_i| \leq \underbrace{\frac{|a_{i_0}|}{q^{i_0}}}_{=:c} \cdot q^i \quad \sum_{i=i_0}^{\infty} c \cdot q^i \text{ konvergent}$$

$$\stackrel{2.22}{\Rightarrow} \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert.}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert}$$

□

2.27 Bemerkung

a) Es reicht *nicht* in 2.26 nur vorauszusetzen, dass $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für alle $i \geq i_0$

bzw. $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$ für alle $i \geq i_0$.

z.B. harmonische Reihen: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert.

Aber: $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} > 1$ für alle i .

$\frac{i}{i+1} < 1$ für alle i

b) Es gibt Beispiele von absolut konvergenten Reihen mit $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|$ für unendlich viele i .

2.28 Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ absolut ($0^0 = 1, 0! = 1$) :

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i} \right| = \left| \frac{x}{i+1} \right| = \frac{|x|}{i+1} \quad \text{Wähle } i_0, \text{ so dass } i_0 + 1 > 2 \cdot |x|$$

Für alle $i \geq i_0$:

$$\frac{|x|}{(i+1)} \leq \frac{|x|}{(i_0+1)} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q.$$

2.29 Bemerkung

Gegeben seien zwei endliche Summen

$$\sum_{a_n}^k n = 0, \sum_{b_n}^l n = 0.$$

$$\left(\sum_{a_n}^k n = 0 \right) \left(\sum_{b_n}^l n = 0 \right) \quad (\star)$$

Distributivgesetz: Multipliziere a_i mit jedem b_i und addiere diese Produkte.

$$(\star) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Indexsumme 0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Indexsumme 2}} + \dots + \underbrace{a_k b_l}_{\text{Indexsumme k+l}}$$

2.30 Definition

Seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_n, \sum_{i=0}^{\infty} b_n$ unendliche Reihen.

Das *Cauchy-Produkt* (*Faltungsprodukt*) der beiden Reihen ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_n$, wobei

$$c_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_{n-1} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

2.31 Satz

Sind $\sum_{i=0}^{\infty} a_n, \sum_{i=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit Grenzwert c, d , so ist das Cauchy Produkt auch absolut konvergent mit Grenzwert $c \cdot d$.

Beweis: [1]

3 Potenzreihen

3.1 Definition

Sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge, $a \in \mathbb{R}$

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$ eine *Potenzreihe* (mit *Entwicklungspunkt* a) Speziell: $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

(Potenzreihe im engeren Sinne)

Hauptfolge: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konv. die Potenzreihe (absolut)?

Suche für $x = a$

Dann Grenzwert b_0 (da $0^0 = 1$)

Ob Potenzreihe für andere x konvergiert, hängt von b_n ab!

3.2 Beispiel

a) $\sum_{i=0}^{\infty} x^n$ ($b_n = 1$ für alle n)

geometrische Reihe, konvergiert für alle $x \in]-1, 1[$

b) $\sum_{i=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$ ($b_n = 2^n$) = $\sum_{i=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$ konvergiert genau dann nach a), wenn $|2x| < 1$, d.h.
 $|x| < \frac{1}{2}$ d.h. $x \in]-0.5, 0.5[$

c) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($b_n = \frac{1}{n!}$)

konvergiert für alle x , $x \in]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

3.3 Satz

Sei $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ eine Potenzreihe (um 0). Dann gibt es $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $R \geq 0$, so dass gilt.

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < R$ konvergiert Potenzreihe absolut (d.h. $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ kon-

vergiert, dann auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$)

Falls $R = \infty$, so heißt das, dass Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

Abbildung 11: Konvergenzradien und ihre Aussagen



2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ divergiert $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$) (Für $|x| = R$ lassen sich keine allgemeine Aussagen treffen).

R heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

Konvergenzintervall $< -R, R >$

besteht aus allen x für die $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert.

$<$ kann [oder] bedeuten.

$>$ kann] oder [bedeuten.

Beweis. $|x_1, x_2| \in \mathbb{R}, |x_1| \leq |x_2|$

Dann: Falls $\sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ konvergiert, so auch $\sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ (2.22) (\star)

Falls $\sum b_n \cdot x_n$ für alle x absolut konvergiert, so setze $R = \infty$

Wenn nicht, so setze $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n| \text{ konvergiert}\} < \infty$ Nach (\star) gilt:

$|x| < R \Rightarrow \sum b_n x^n$ konvergiert absolut.

Für $|x| > R$ konvergiert $\sum b_n x^n$ nicht absolut.

Sie konvergiert sogar selbst nicht. ([?])

$$\sqrt[n]{|b_n| \cdot |x|^n} \leq q < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

$$\uparrow \text{ (setze } \varepsilon = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} > 0)$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : s - \frac{\varepsilon}{2} < |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq s + \frac{\varepsilon}{2} =: q < 1$$

□

3.4 Bemerkung

Konvergenz von Potenzreihen der Form $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$:

gleichen Konvergenzradius R wie $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

konvergiert absolut für $|x-a| < R$, d.h. $x \in]a-R, a+R[$ Divergiert für $|x-a| > R$.

Keine Aussage für $|x-a| = R$, d.h. $x = a-R$ oder $x = a+R$

Konvergenzintervall $< a-R, a+R >$

3.5 Die Exponentialreihe

a) Exponentialreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (b_n = \frac{1}{n!})$$

2.28 Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setze für $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Exponentialfunktion $\exp(0) = \frac{0^n}{0!} = 1$

b) Serien $x, y \in \mathbb{R}$

$\exp(x) \cdot \exp(y) \underset{2.31}{=} \text{Limes des Cauchy Produkts der beiden Reihen.}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot x^i \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \cdot x \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = \exp(x+y)$$

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}}$$

Daraus folgt: $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

$$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}} \quad (\star)$$

Für alle $x \geq 0$: $\exp(x) > 0$. Dann auch wegen (\star)

$$\boxed{\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}}$$

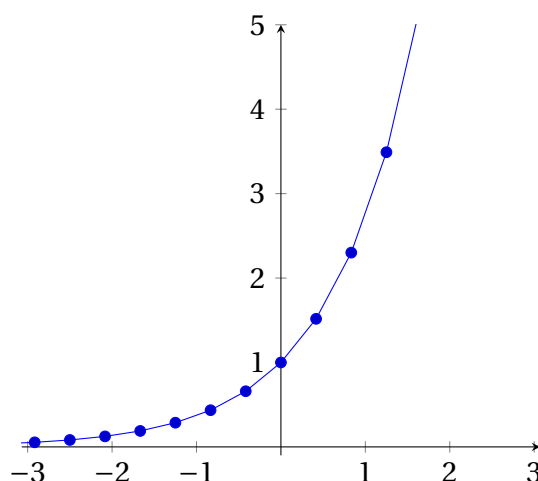


Abbildung 12: Die Exponentialreihe

$$c) \exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Euler'sche Zahl

$$\text{Approximation } e \text{ durch } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \begin{array}{ll} m=2 & 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5 \\ m=3 & 2,5 + \frac{1}{6} = 2,6\bar{6} \\ \dots m=6 & \frac{326}{126} + \frac{1}{720} = 2,7180\bar{5} \end{array}$$

Es ist: $e \approx 2,71828\dots$ (irrationale Zahl)

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert schnell

$$m \in \mathbb{N}$$

$$\exp(m) = \exp(1 + \dots + 1)$$

$$\exp(1)^m = e^m \quad \leftarrow m \rightarrow$$

$$e^0 = 1 \quad \exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = e^{-m}$$

$$n \neq 0, n \in \mathbb{N}:$$

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = + \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}.$$

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ stimmt $\exp(x)$ mit der 'normalen' Potenz e^x überein.

Dann definiert man für beliebige $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x := \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

In kürze: Definition a^x für $a > 0, x \in \mathbb{R}$

d) Bei komplexen Zahlen kam e^{it} ($i^2 = -1, t \in \mathbb{R}$) vor als Abkürzung für $\cos(t) +$

$$i \sin(t)$$

Tatsächlich kann auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ definieren $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Dabei: Konvergenz von Folgen/Reihen in \mathbb{C} wie in \mathbb{R} mit komplexem Absolutbetrag.

Man kann dann zeigen:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Dass tatsächlich dann gilt:

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + i \sin(t). \text{ zeigen wir später}$$

2.718...) Man kann zeigen.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Bedeutung:

- Angelegtes Guthaben G wird in einem Jahr mit 100% verzinst. Guthaben am Ende eines Jahres $2G (= G(1 + 1))$

- Angelegtes Geld wird jedes halbe Jahr mit 50% verzinst. Am Ende eines Jahres (mit Zinsenzinsen)

$$G\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2,25G$$

n - mal pro Jahr mit $\frac{100}{n}\%$ verzinsen. Am Ende des Jahres $G\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot G \approx 2.718 \dots \cdot G \text{ (stetige Verzinsung)}$$

$$a\% \text{ statt } 100\% \cdot G e^{\frac{a}{100}}$$

4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

4.1 Definition

Reelle Funktionen f in einer Variable ist Abbildung

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ (D = Definitionsbereich).

Typisch: $D = \mathbb{R}$, Intervall, Verschachtelung von Intervallen

4.2 Beispiel

a) Polynomfunktionen (ganzrationale Funktion, Polynome)

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow a_n \cdot x^n + \dots a_1 x + a_0 \end{cases}$$

$$f(x) = a_n \cdot x^n + \dots a_1 \cdot x + a_0$$

$$a_n \neq 0: n = \text{Grad}(f) \quad f = 0 \text{ (Nullfunktion)}, \text{Grad}(f) = \infty$$

Grad 0: konstante Funktionen $\neq 0$

Graph von f :

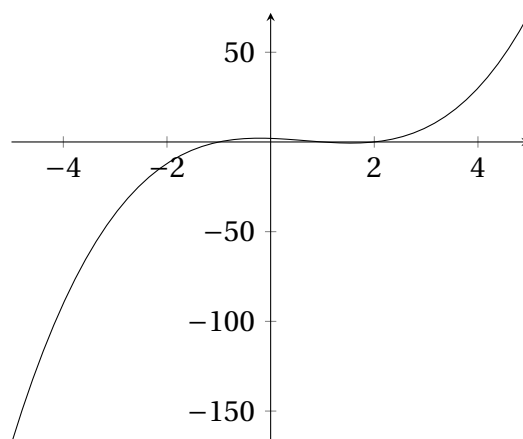


Abbildung 13: $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

- b) $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($f \pm g$)(x) := $f(x) \pm g(x)$ für alle $x \in D$

Summe: Differenz, Produkt von f und g .

Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so *Quotient*. $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$,
 Quotient von Polynomen = (gebrochen-)rationalen Funktionen
 $|f|(x) := |f(x)|$ Betrag von f .

- c) Potenzreihe definiert Funktion auf ihrem Konvergenzintervall.

$$\text{z.B.: } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fkt. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- d) Hintereinanderausführung von Funktionen:

$f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(D_1) \subset D_2$, dann $g \circ f$:

$$\begin{cases} D_1 \Rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

- e) $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = e^{x^2 + 1}$$

- f) *Trigonometrische Funktionen: Sinus- und Cosinusfunktion (vgl. \mathbb{C})*

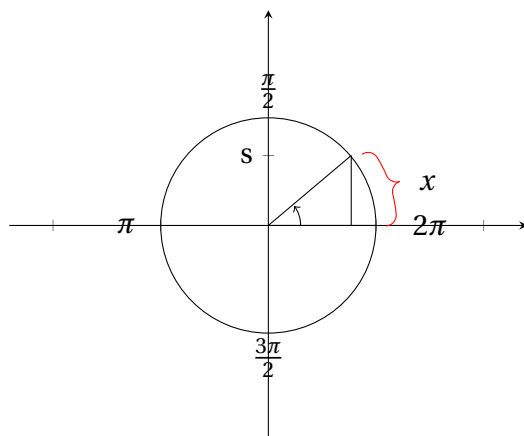
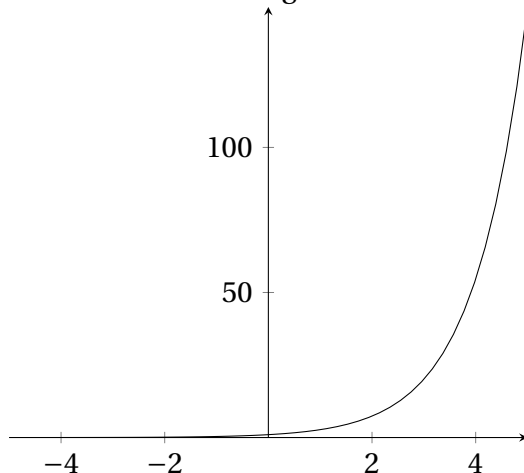
Abbildung 14: e^x 

Abbildung 15: Bogenmaß

$0 \leq x < 2\pi$ x = Bogenmaß von φ in Grad, so $x = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi$

$\sin(x) = s, \cos(x) = c$ Für beliebig $x \in \mathbb{R}$:

Periodische Fortsetzung, d.h. $x \in \mathbb{R}. x = x' + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}, x' \in [0, 2\pi[$

$\sin(x) := \sin(x')$

$\cos(x) := \cos(x')$

$|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$

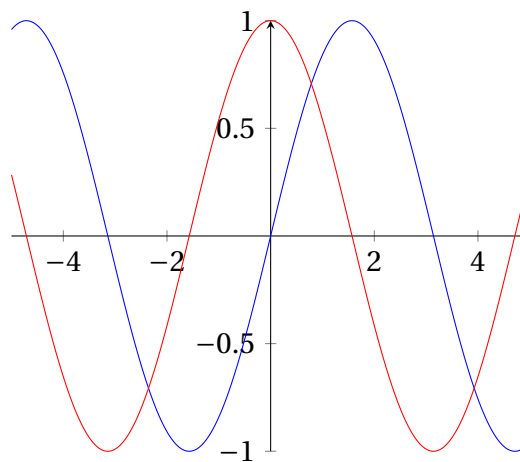
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

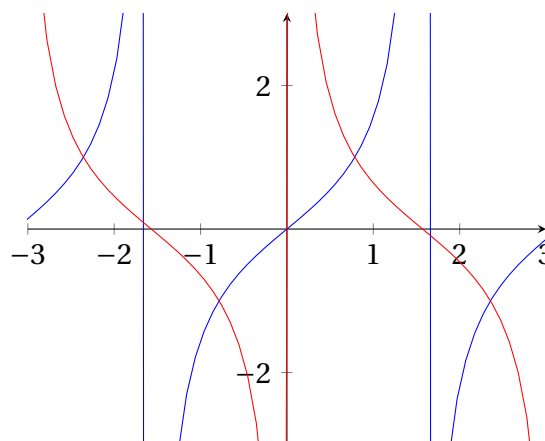
$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tangens und Cotangensfunktion

Abbildung 16: $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \cos(x) \neq 0$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \sin(x) \neq 0$$

Abbildung 17: $\tan(x)$ and $\cot(x)$

4.3 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ heißt *Adhärenzpunkt* von D , falls es eine Folge $(a_n)_n, a_n \in D$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ gibt.

\bar{D} = Menge der Adhärenzpunkte von D
 = *Abschluss* von D

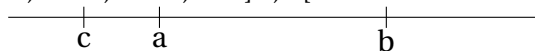
klar: $D \subset \bar{D}$.

$d \in D$. konstante Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = d$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d = d$.

Also: $d \in \bar{D}$.

4.4 Beispiel:

a) $a, b \in \mathbb{R}, a > b, D =]a, b[$



$$\bar{D} = [a, b] \quad D \in \bar{D}$$

$$a \in \bar{D}$$

$$a_n = a + \frac{b-a}{n} \in D, n \geq 2$$

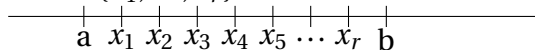
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\text{Also } [a, b] \subset \bar{D}.$$

Ist $c \notin [a, b]$, etwa $c < a$, dann ist $|a_n - c| \geq a - c > 0$ für alle $a_n \in]a, b[$. Also: $\lim_{a_n} \neq c$

b) \mathcal{J} Intervall in $\mathbb{R}, x_1, \dots, x_r \in \mathcal{J}$,

$$D = \mathcal{J} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$$



$$\bar{D} = \bar{\mathcal{J}} = [a, b],$$

falls $\mathcal{J} =]a, b[$.

c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

4.5 Definition

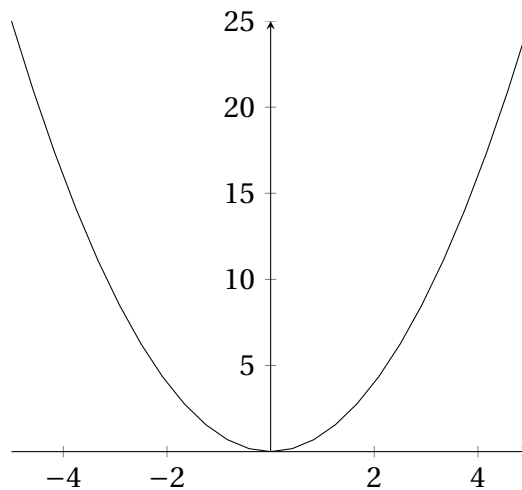
$f: D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$.

$d \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $f(x)$ für x gegen c , $d = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, wenn für jede Folge $(a_n) \in D$, die gegen c konvergiert, die Bildfolge $(f(a_n))_n$ gegen d konvergiert.

4.6 Beispiel:

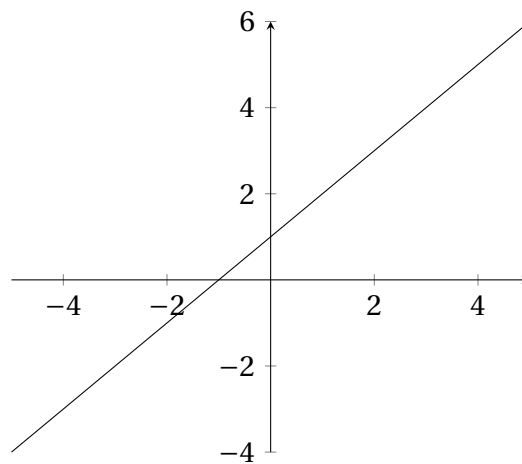
a) Sei $f(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$, eine Polynomfunktion, $c \in \mathbb{R}$. Sei (a_n) Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0 \\
&= b_k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k + b_{k-1} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{k-1} + \dots + b_0 \quad \text{Rechenregeln für Folgen, 2.8} \\
&= b_k \cdot c^k + b_{k-1} \cdot c^{k-1} + \dots + b_1 \cdot c + b_0 = f(c).
\end{aligned}$$

Abbildung 18: x^2

b) Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Auf D ist $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1) \quad \bar{D} = \mathbb{R}$

Abbildung 19: $x+1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

Sei (a_n) Folge mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$$f(a_n) = a_n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = 1 + 1 = 2, \lim_{x \rightarrow 1} = 2.$$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) ?$

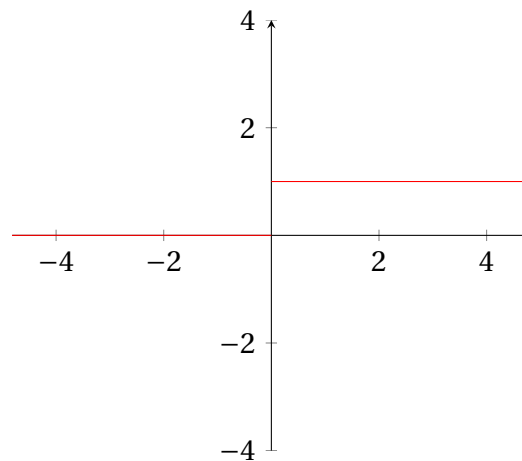


Abbildung 20: Abschnittsweise definierte Funktion

$$a_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$a_n = -\frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow 0}$ existiert nicht.

d) $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad a_n = \frac{1}{n\pi}, f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$

$$a'_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2}\pi)} \rightarrow 0, f(a'_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim(a_n) = 0$$

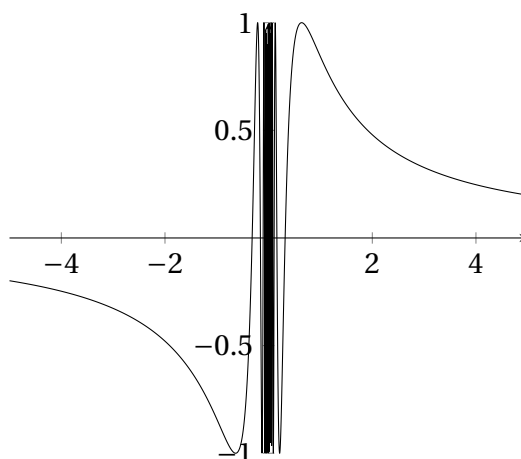
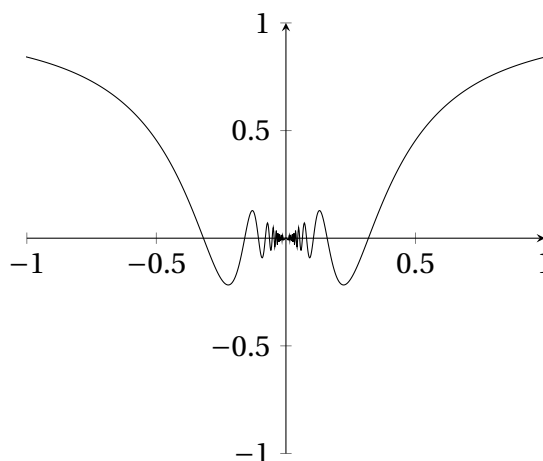
$$\lim(f(a_n)) = \lim 0 = 0 \quad \lim(f(a'_n)) = \lim 1 = 1$$

$\lim(f(x))_{x \rightarrow 0}$ existiert nicht

e) $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ dann:

$$(a_n) \rightarrow 0, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin(\frac{1}{a_n}) = 0 \quad \text{2.8g)$$

Abbildung 21: $\sin(\frac{1}{x})$ Abbildung 22: $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

4.7 Satz ($\varepsilon - \delta$)-Kriterium

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$. Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \rightarrow |f(x) - d| \leq \varepsilon$

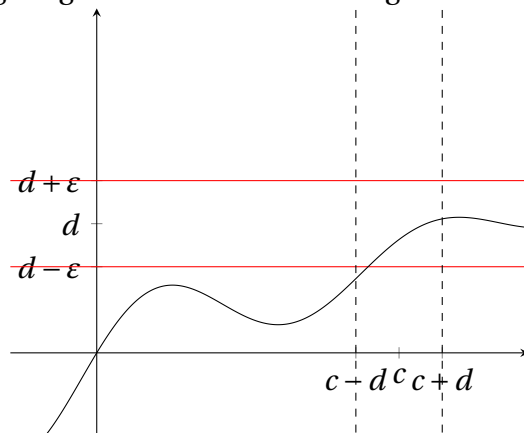
Beweis. \rightarrow : Angenommen falsch.

Dass heißt $\exists \varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ (z.B. $\delta = \frac{1}{n}$) ein $x_n \in D$ existiert mit $|x_n - c| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - d| > \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Aber:

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq d$

\Leftarrow : Sei (a_n) Folge, $a_n \in D$

Abbildung 23: geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

Zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall n \geq n(\varepsilon) : |f(a_n) - d| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, ex. $\delta > 0$:

(★)

Für alle $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$ gilt $|f(x) - d| < \varepsilon$.

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, existiert n_0 mit $|a_n - c| \leq \delta$ für alle $n \geq n_0$

Nach (★) gilt: $|f(a_n) - d| < \varepsilon \forall n \geq n_0$. ✓

□

Bemerkung

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow$ Für alle Folgen $(a_n), a_n \in D$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$. Wenn man zeigen will, dass $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ nicht existiert, gibt es 2 Möglichkeiten:

- Suche eine bestimmte Folge (a_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ nicht existiert.
- Suche zwei Folgen $(a_n), (b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$f(a_n) = (101010\dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \text{ existiert nicht.}$$

Oder:

$$a_n = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\text{Aber: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

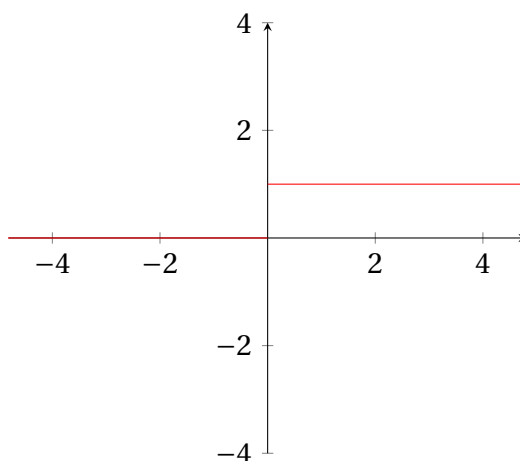


Abbildung 24: Abschnittsweise definierte Funktion

4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

$f, g, D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$, Existieren die Grenzwerte auf der rechten Seite der folgenden Gleichungen, so auch die auf der linken (und es gilt Gleichheit)

a) $\lim_{x \rightarrow c} (f \pm / \cdot g) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm / \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x).$

b) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$, so

$$\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

c) $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow c} f(x)|$

Beweis. Folgt aus den entsprechenden Regeln für Folgen. □

4.9 Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + 1}, D = \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1)} \\ &= \frac{4 + 6 + 1}{8 + 1} = \frac{11}{9} \end{aligned}$$

4.6a)

4.10 Bemerkung

Rechts- und linksseitige Grenzwerte:

Rechtsseitiger Grenzwert:

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = d \Rightarrow \forall (a_n)_n, a_n \in D, a_n \geq c \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d.$ Analog:

linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$

$(a_n \leq c).$

4.11 Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, c = 0 \in \bar{D}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht.

Falls $\lim_{x \rightarrow c^+}$ und $\lim_{x \rightarrow c^-}$ existieren

$$\text{und } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$$

so existiert $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$. Grenzwert: $d \in \mathbb{R}$

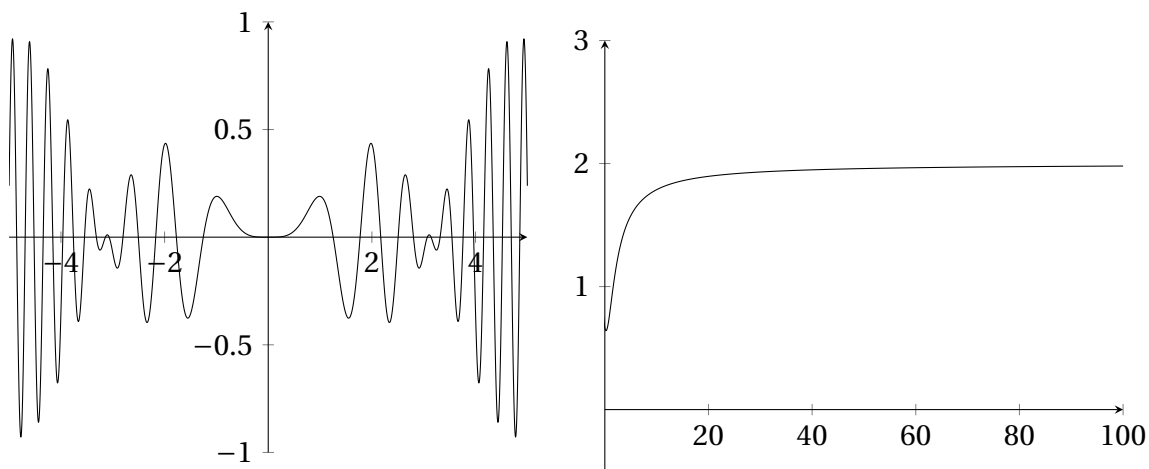


Abbildung 25: Grenzwerte gegen einen Festen Wert

4.12 Definition

$D =]b, \infty[, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (z.B. $D = \mathbb{R}$)

f konvergiert gegen $d \in \mathbb{R}$ für x gegen unendlich,

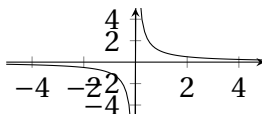
$\lim_{f(x)} = d$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x \geq M : |f(x) - d| < \varepsilon.$$

(Analog: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d$)

4.13 Beispiel

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$



Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $x \geq M$:
 $|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{M} = \varepsilon.$

b) Allgemein gilt:

P, Q Polynome vom Grad k bzw. $l \geq k$

$$P(x) = a_k \cdot x^k + \dots, Q(x) = b_l \cdot x^l + \dots, a_k \neq 0, b_l \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l > k \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{für } l = k \end{cases}$$

(Beweis wie für Folgen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 205x^3 + x^2 + 17}{14x^5 + 0,5} = \frac{1}{2}$$

4.14 Bemerkung

Die Rechenregeln aus 4.8 gelten auch für $x \rightarrow \infty / -\infty$

4.15 Definition

a) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$

f geht gegen ∞ für x gegen c ,

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, falls gilt:

$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq L.$$

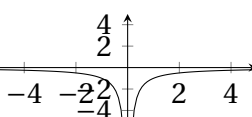
$= \delta(L)$

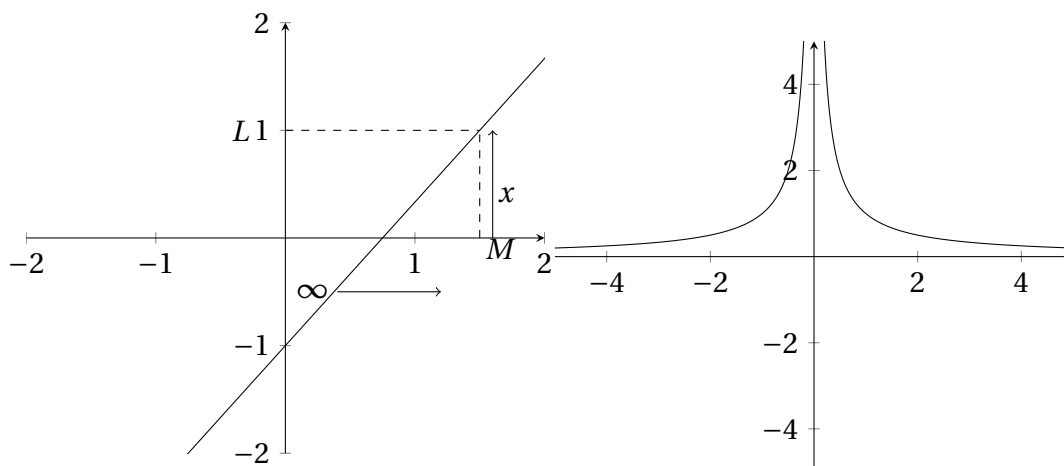
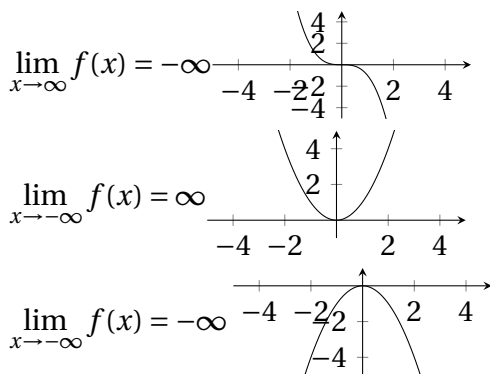
b) $< b, \infty [\sup D, f : D \rightarrow \mathbb{R}, f$ geht gegen ∞ , für x gegen ∞ : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$,

falls gilt:

$$\forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D, x \geq M, f(x) \geq L.$$

(Entsprechend: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$



Abbildung 26: Funktionen $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$ **4.16 Satz**

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}.$$

- a) Sei $c \in \bar{D}$, oder $c = \infty, -\infty$

falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ oder $-\infty$, so ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = 0$.

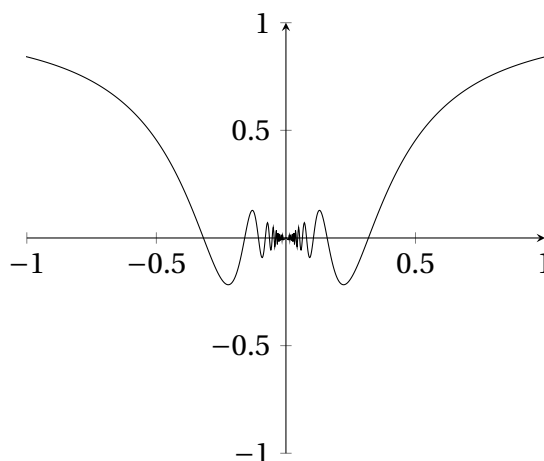
- b) $c \in \bar{D} \supset \mathbb{R}$.

Falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ und falls $s > 0$

existiert mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [c-s, c+s]$, ($f(x) < 0$)

dann ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$

- c) Falls $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ und falls $T > 0$ existiert mit $f(x) > 0$ für $x \geq T$, so ($f(x) < 0$)

Abbildung 27: $\sin(\frac{1}{x})$

ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$
 (Entsprechend für $\lim_{x \rightarrow -\infty}$)

4.17 Beispiel

- a) • $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]-\infty, 0[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ existiert nicht
-

- c) $P(x) = ak_x^k + \dots + a_0.$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \text{ k gerade oder } a_k < 0 \text{ k ungerade} \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \text{ k gerade oder } a_k > 0 \text{ k ungerade} \end{cases}$$

d) $P(x)$ wie in c)

$$Q(x) = b_l^l + \dots + b_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ gleiche Vorzeichen} \\ -\infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ verschiedene Vorzeichen} \end{cases}$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \forall L > 0 \exists M \forall x \gg M : f(x) \gg L$

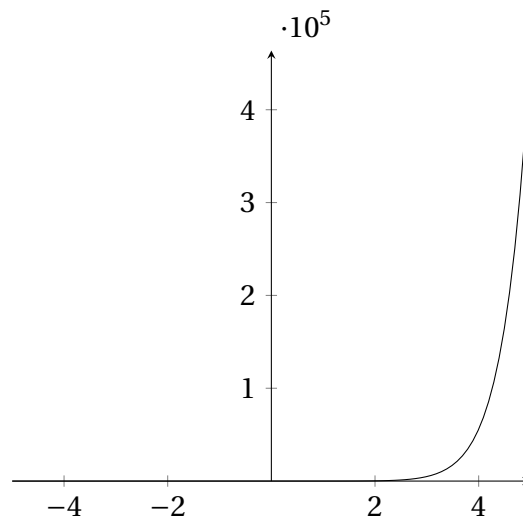


Abbildung 28: $\frac{e^x}{x^n}$

Sei $L \geq 0, x > 0$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$$

Ist $x \geq (n+1)!L =: M$, so ist $\frac{e^x}{x^n} > L$.

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$. Folgt aus e) und 4.16a)

5 Stetigkeit

5.1 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

a) f ist *stetig* an $c \in D$, falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

b) f heißt (absolut) stetig, falls f an allen $c \in D$ stetig ist.

5.2 Satz

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D.$

Existiert Konstante $K > 0$ mit $|f(x) - f(c)| \leq K \cdot |x - c|$ für alle $x \in D$, dann ist f stetig in c .

Beweis.

Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Ist $|x - c| \leq \delta$, so ist $|f(x) - f(c)| \leq K \cdot |x - c| \leq K \cdot \delta = \varepsilon$.

4.7 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. □

5.3 Beispiel

a) Polynome sind auf ganz \mathbb{R} stetig

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ f ist nicht stetig in 0.

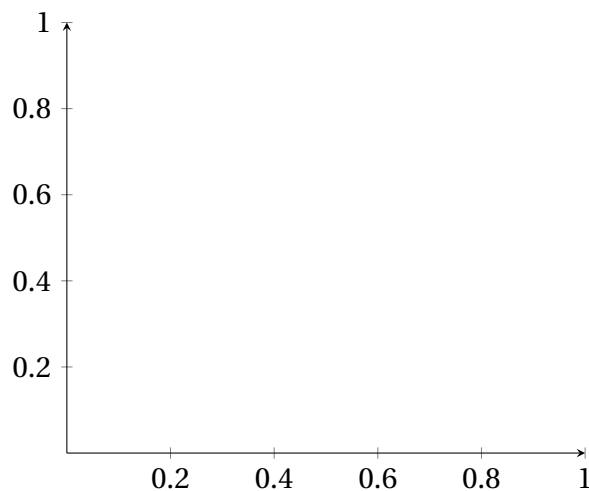


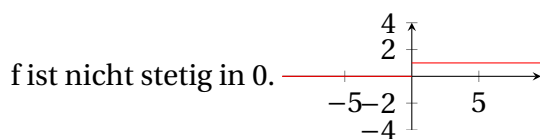
Abbildung 29: Abschnittsweise definierte Funktion

$$a_n = \frac{1}{n}, a_n \rightarrow 0$$

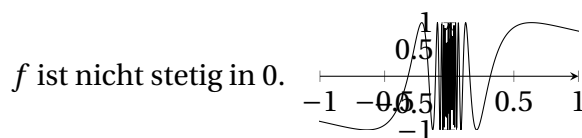
$$f(a_n) = 0$$

$$(f(a_n)) \rightarrow 0 \neq f(0)$$

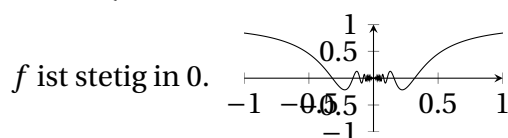
c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$



$$d) f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x}) \text{ ex. nicht.}$$



$$e) f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$$



f) $f(x) = \sin(x)$

$g(x) = \sin(x)$ Sind stetig auf \mathbb{R} : TODO: Halbkreis plotten.

Für alle $x, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin(x) - \sin(c)| \leq |x - c|.$$

$\sin(x)$ ist stetig auf \mathbb{R} (5.2, $\mathbf{K}=1$)

5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit)

$$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D,$$

sind f und g stetig in c , dann auch $f \pm / \cdot$ und $|f|$. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in c .

Beweis. Folgt aus 4.8

□

5.5 Satz

$$D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R},$$

$g : D' \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'$. Ist f stetig in $c \in D$ und ist g stetig in $f(c) \in D'$, so ist $g \circ f$ stetig in c ,

Beweis. $(a_n) \rightarrow c, a_n \in D$.

f stetig: $f(a_n) \rightarrow f(c)$

g stetig in $f(c)$: $(g \circ f)(a_n) \rightarrow (g \circ f)(c)$

□

5.6 Beispiel

a) $f(x) = \sin(\frac{1}{|x^2-1|})$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. f ist stetig auf D . Folgt aus 5.3a), f und 5.4, 5.5.

b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ stetig auf \mathbb{R} , 5.3e) für $c = 0$ für $c \neq 0$. 5.3, 5.4, 5.5

c) $f(x) = \tan(x) (= \frac{\sin(x)}{\cos(x)})$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ f stetig auf D

5.7 Satz

Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann ist f stetig $m]a-R[=: D$

$c \in D \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i = f(c)$$

5.8 Korollar

$f(x) = \exp(x) = e^x$ ist stetig auf \mathbb{R}

5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen)

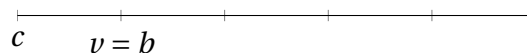
$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $[u, v] \subset D$, $u < v$

Es gelte $f(u) \cdot f(v) < 0$

(d.h. $f(u) > 0, f(v) < 0$, oder $f(u) < 0, f(v) > 0$) Dann existiert $w \in]u, v[$ mit $f(w) = 0$

Beweis. O.B.d.A., $f(u) < 0 < f(v)$.

Bijektionsverfahren:



Falls $f(c) < 0$, so $a = c$, sonst $b = c$. Liefert Folgen $(a_n), (b_n)$ und eindeutig bestimmte

$w \in [u, v]$ mit $a_n \leq a_{n+1} \leq w \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle n

$$f(a_n) < 0$$

$$f(b_n) \geq 0$$

für alle n . $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = w$ f ist stetig in $w \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(b_n) = f(w)$.

$$f(a_n) < 0 \forall n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0.$$

$$f(b_n) \geq 0 \forall n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0.$$

$$\Rightarrow 0 = \lim(a_n) = \lim(b_n) = f(w).$$

□

5.10 Korollar (Zwischenwertsatz)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $[u, v] \subseteq D$

Dann nimmt f in $[u, v]$ jeden Wert zwischen $f(u)$ und $f(v)$ an (und evtl. weitere)

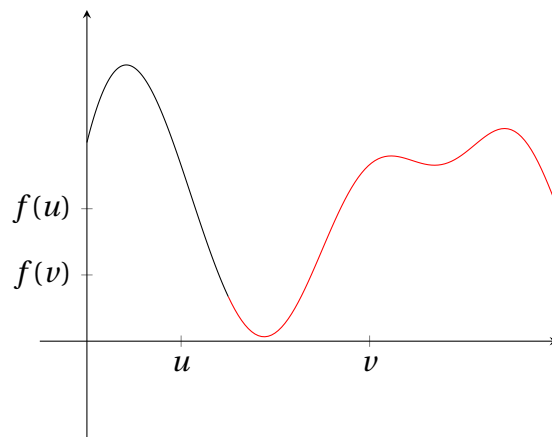


Abbildung 30: Zwischenwerte

Beweis. O.B.d.A $f(u) < f(v)$

Sei $f(u) < b < f(v)$ b beliebig, aber dann fest.

Definiere $g(x) = f(x) - b$ stetig

$$g(u) = f(u) - b \quad g(v) = f(v) - b$$

5.9 (angewandt auf g): Ex. $w \in]u, v[$ mit $g(w) = 0$, d.h. $f(w) = b$.

□

5.11 Satz (Min-Max-Theorem)

$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

(Wichtig: *abgeschlossenes* Intervall)

Dann hat f ein Maximum und ein Minimum auf $[a, b]$, d.h. es existieren

$x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit $f(x_{\max}) \leq f(x) \leq f(x_{\min})$ für alle $x \in [a, b]$ (Beweis mit Bisektionsverfahren, [4])

Zur Erinnerung

$f: D \rightarrow D'$ bijektiv, dann existiert Umkehrfunktion $f^{-1}: D' \rightarrow D$ mit

$$f \circ f^{-1} = id_{D'}$$
 und

$$f^{-1} \circ f = id_D$$

zum Beispiel $f(x) = x^2$

$$f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

bijektiv

$$f^{-1}: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

$$f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$$

5.12 Definition

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton wachsend (oder steigend), falls gilt:

Sind $x, y \in D, x < y$, so ist $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$)

Entsprechend: streng monoton fallend. f heißt (streng) monoton, falls sie entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

5.13 Satz

D Intervall (rechte

linke Grenze) $\infty, -\infty$ möglich), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: f ist injektiv auf $D \Leftrightarrow f$ ist streng monoton auf D .

Beweis. $\Leftarrow \checkmark$

\Rightarrow : Angenommen f ist nicht streng monoton auf D .

Dann existieren $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) < f(x_2)$ und $x_3 < x_4$ und $f(x_3) > f(x_4)$

($f(x_1) = f(x_2)$ bzw. $f(x_3) = f(x_4)$ nicht möglich, da f injektiv) Jetzt muss man Fallunterscheidungen machen.

z.B

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

□

5.14 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

D Intervall, $f: D \rightarrow f(D) =: D'$

eine stetige, streng monotone (also bijektive) Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion

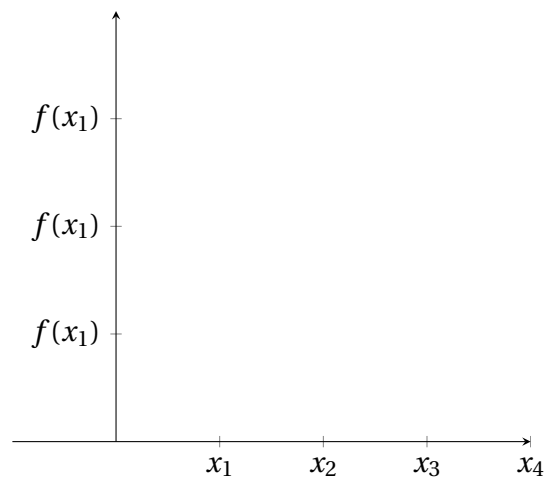


Abbildung 31: Eine Fallunterscheidung für 5.13

$f^{-1}D' \rightarrow D$ stetig.

Beweis: [5] f streng monoton wachsend (fallend) $\Rightarrow f^{-1}$ streng monoton wachsend

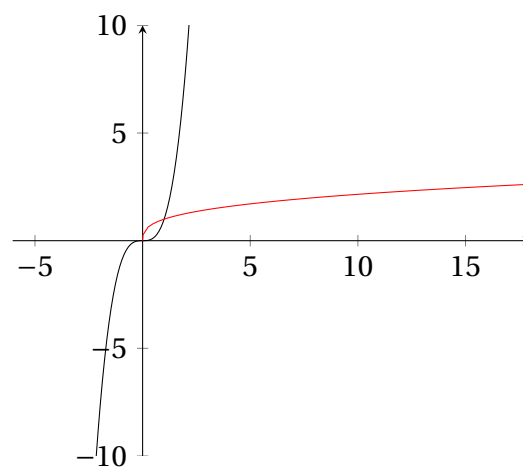


Abbildung 32: Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion

(fallend)

5.15 Korollar

Ist $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$, so

ist $f(x) = x^n$ stetig und bijektiv $\begin{cases} [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[\\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

Die Umkehrfunktion $f^{-1} = \sqrt[n]{x}$ ist stetig und bijektiv $\begin{cases} [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[\\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ Nach 5.8 ist

$\exp(x)$ stetig auf \mathbb{R} . Nach 3.5b) ist $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$, so ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3!} + \dots \geq 1$, Ist $x > y$ so ist $\exp(y) = \exp(x + (y - x)) \underset{3.5b)}{=} \exp(x) \cdot \underbrace{\exp(y - x)}_{<0} > \exp(x)$

$\exp(x)$

5.16 Satz

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt $\ln(x) :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend und bijektiv.

Es gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$, $\ln(1) = 0$

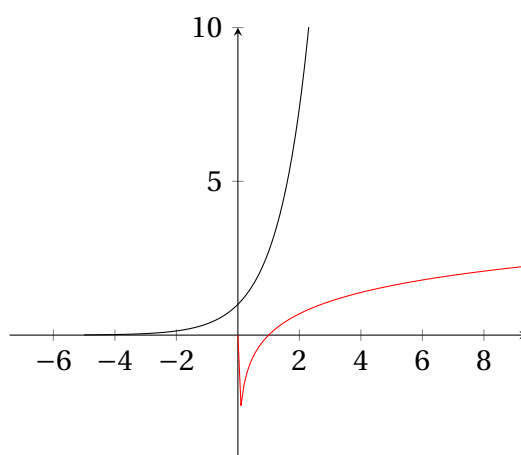


Abbildung 33: $\exp(x)$ und $\ln(x)$

Beweis. \exp streng monoton steigen s.V,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty \quad (4.17e))$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \quad \text{Also: } \exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[\text{ bijektiv}$$

$\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, streng monoton wachsend, stetig, bijektiv (5.14).

$x, y > 0, \exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $x = \exp(a), y = \exp(b)$.

$$\begin{aligned}\ln(xy) &= \ln(\exp(a) \cdot \exp(b)) \\ &= \ln(\exp(a+b)) = a+b \\ &= \ln(x) + \ln(y)\end{aligned}$$

□

5.17 Satz

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0$ (für jedes $k \in \mathbb{N}$)
(D.h. $\ln(n) \in o(n)$)

Beweis. $x = \exp(y), x \leq 1$, d.h. $y \leq 0$.

$$\frac{\ln(x)}{x^k} = \frac{y}{(\exp(y))^k} \leq \frac{y}{\exp(y)} \rightarrow 0 \text{ (17e)}$$

□

5.18 Definition

Für $a > 0$ setze $a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$ ($\underbrace{\exp(\ln(a))}_0 = a$) $a \leq e : e^x = \exp(x), a^x$, falls $a > 0$ TODO:

komischer plott mit exponentialfunktionen

5.19 Satz

Sei $a > 0$

- a) $a^x : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend für alle $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.
- b) $a^x, a^y = a^{x+y}$
($a^{xy} = a^{x^y}$) für alle $x, y \in \mathbb{R}$
- c) Für $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} (p \in \mathbb{Z}, q > 0)$ stimmt Def. von a^x entsprechend. 5.18 mit der üblichen Definition $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ überein.

Beweis. Folgt aus Definition mit 3.5

□

5.20 Bemerkung

Ist $x \in \mathbb{R}$ und (x_n) Folge mit $x_n \in \mathbb{Q}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$,

so $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x$

(Stetigkeit)

D.h. a^x lässt sich durch $a^{x_n}, x_n \in \mathbb{Q}$, beliebig gut approximieren

5.21 Definition

Für $a > 0, a \neq 1$, heißt die Umkehrfunktion von a^x *Logarithmus zur Basis a*

$$\log_a(x)$$

($a = 2, a = e, a = 10$ wichtig)

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

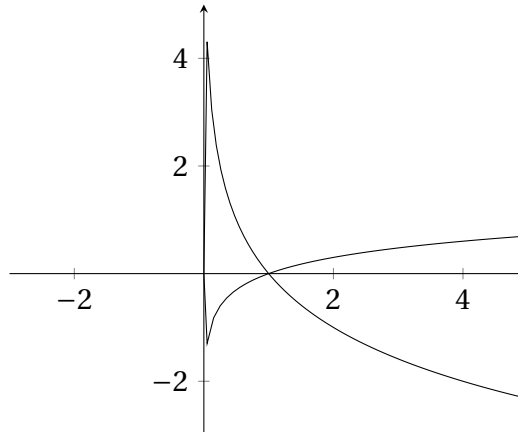


Abbildung 34: Logarithmen mit Basen > 1 und < 1

5.22 Satz

Seien $a, b > 0, a \neq 1 \neq b, x, y > 0$

- (a) $\log_a(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$
- (b) $\log_a(x^y) = y \cdot \log(x)$
- (c) $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$
- (d) Sind $a, b > 1$, so $O(\log_a(n)) = O(\log_b(n))$

Beweis. a) wie ??

$$\text{b) } a^{y \cdot \log_a(a^y)} \stackrel{5.19b)}{=} (a^{\log_a(x)})^y = x^y$$

$$\Rightarrow \log_a(x^y) = \log_a(a^{y \cdot \log_a(x)}) = y \cdot \log_a(x)$$

$$\text{c) } \log_a(x) = \log_a(b^{\log_b(x)}) \stackrel{b)}{=} \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

d) Folgt aus c), da $\log_a(b) > 0$

□

6 Differenzierbare Funktionen

TODO PLOT mit steigungsdreieck

Sekante durch $(c, f(c)), (x, f(x))$

Steigung der Sekante:

$$x \neq c: \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = s(x) \text{ definiert auf } \mathbb{R} \setminus \{c\}$$

Differenzenquotient

Falls $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ existiert: Steigung der Tangente an Graph von f in $(c, f(c))$
(Änderungsrate von f in $(c, f(c))$)

6.1 Definition

\mathcal{I} Intervall, $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathcal{I}$

- a) f heißt *differenzierbar* (diffbar) an der Stelle c , falls $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ existiert.
Grenzwert heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f an der Stelle c .

$$f'(c) = \left(\frac{df}{dx}(c) \right) \quad \left[f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, h := x-c \right]$$

- b) f heißt *differenzierbar* auf \mathcal{I} , falls f in jedem Punkt von \mathcal{I} differenzierbar ist.

$$f': \begin{cases} \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

6.2 Beispiel

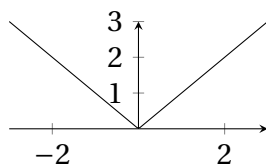
- a) $f(x) = a \cdot x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$x \neq c: \frac{ax^n - ac^n}{x-c} = \frac{a(x-c)(x^{n-1} + \dots + x + c^{n-1})}{x-c}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{ax^n - ac^n}{x-c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{a(x-c)(x^{n-1} + \dots + x + c^{n-1})}{x-c} = a \cdot n \cdot c^{n-1} = f'(x).$$

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \text{ Gilt auch für } n=0. (f \text{ konstant auf } f'=0)$$

- b) $f(x) = |x|$



f ist diffbar in 0?

Zu zeigen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$ existiert nicht.

Sei (a_n) Folge, $a_n < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (z.B. $a_n = -\frac{1}{n}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{a_n} = -1$$

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ (z.B. } b_n = \frac{1}{n} \text{)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_n} = 1$$

$f'(0)$ existiert nicht!

6.3 Satz

$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ in $c \in \mathcal{I}$ diffbar. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{I}$:

$$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + \mathcal{R}(x) \cdot (x - c),$$

wobei $\mathcal{R}: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in c , $\lim_{x \rightarrow c} \mathcal{R}(x) = 0$

D.h.: f lässt sich in der Nähe von c sehr gut durch eine lineare Funktion (d.h. Graph

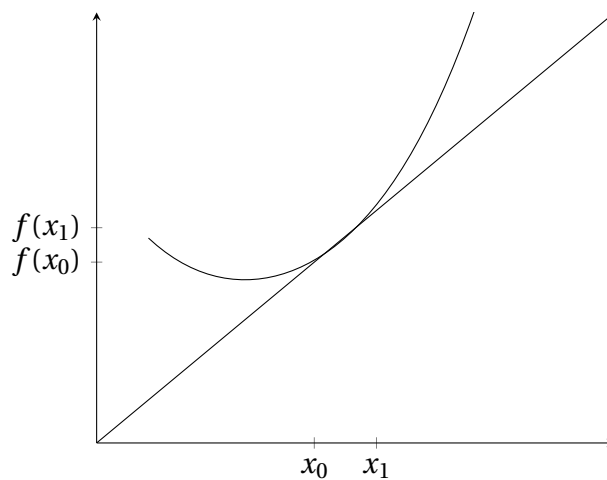


Abbildung 35: Sekante an Funktion

ist Gerade) approximieren.

6.4 Korollar

$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $c \Rightarrow f$ ist steig in c . Beweis folgt aus 6.3

Beachte: Umkehrung von 6.4 gilt im Allgemeinen nicht. 6.2b).

Diffbare Funktionen sind stetig, aber sie haben keine Knicke im Graphen.

6.5 Satz (Ableitungsregeln)

\mathcal{I} Intervall, $c \in \mathcal{I}$. Für a)-c)

seien $f, g: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in c

a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so $\alpha f + \beta g$ diffbar in c ,

$$(\alpha f + \beta g)'(c) = \alpha \cdot f'(c) + \beta \cdot g'(c)$$

b) (Produktregel) $f \cdot g$ diffbar in c ,

$$(f \cdot g)'(c) = f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c)$$

c) (Quotientenregel) Ist $g(x) \neq 0$ auf \mathcal{I} , so

$$\frac{f'}{g}(c) = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g(c)^2}$$

d) (Kettenregel) \mathcal{I}_1 Intervall, $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}_1$, diffbar in c , $g: \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $f(c)$, so $g \circ f$ diffbar in c , und

$$(g \circ f)' = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

Beweis. Nur b):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)(g(x) - g(c)) + g(c)(f(x) - f(c))}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \\ &g(c) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \stackrel{6.4}{=} f(c)g'(c) + g(c)f'(c). \end{aligned}$$

□

6.6 Beispiel

a) $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$
 $f'(x) \stackrel{6.5a)}{=} \stackrel{6.2a)}{=} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} (n \in \mathbb{N})$
 $\mathcal{I} =]0, \infty[$
 $f'(x) \stackrel{6.2a)}{=} \stackrel{6.5c)}{=} \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = (-n) \cdot x^{-n-1}$ gilt auch auf $] -\infty, 0[$

c) $h(x) = (x^2 + x + 1)^2$
 (6.5d): $f(x) = x^2 + x + 1$
 $g(x) = x^2$
 $h'(x) = 2 \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1)$

6.7 Satz

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

*Beweis.*a) Elementargeometrisch + Additionstheoreme ?? (Man zeig: $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

b) $\frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{(1 - \cos(x))}{x(1 + \cos(x))} = \frac{1 - \cos(x)}{x(1 + \cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \rightarrow 0$

□

6.8 Satz

a) $f(x) = \sin(x)$, so $f'(x) = \cos(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$, so $f'(x) = -\sin(x)$

c) $f(x) = \tan(x)$, so $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Beweis. a), $c \in \mathbb{R}$

$$\sin'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h+c) - \sin(c)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(c) \cdot \cos(h) + \cos(c) \cdot \sin(h) - \sin(c)}{h}$$

$$= \frac{\sin(c) \cdot \cos(h) - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(c) \sin(h)}{h} = \sin(c) \cdot 0 + \cos(c) \cdot 1 = \cos(c)$$
 b) analog

c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ Quotientenregel + a)b) $+ \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

□

6.9 Beispiel

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$

 f ist diffbar für alle $x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0 \quad ??$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 = f'(0)$$

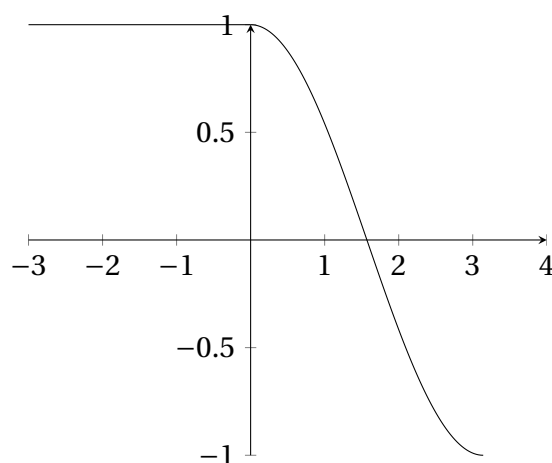


Abbildung 36: Abschnittsweise definierte cosinus Funktion

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= \sin^2(x^3) = (\sin(x^3))^2 \\ f'(x) &= 2 \cdot \sin(x^3) \cdot (\sin(x^3))' = 6 \cdot \sin(x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot x^2 \end{aligned}$$

6.10 Satz

Im Inneren ihres Konvergenzintervalls definieren Potenzreihen eine Funktion

$$\text{Sei } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

eine Potenzreihe um a mit Konvergenzradius $R > 0$.

Dann ist f in $]a-R, a+R[$ diffbar und es gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1} = f'(x)$.

(gliedweise Ableitung)

(Beweis [7])

6.11 Korollar

$$(\exp(x))' = \exp(x)$$

$$\text{Beweis. } \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$k = 1, \dots$$

Beweis folgt. □

6.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}_1$ bijektiv, $\mathcal{I}, \mathcal{J}_1$ Intervall (linke und rechte Grenze darf nicht $-\infty/\infty$ sein)

Sei f in $c \in \mathcal{I}$ diffbar und $f'(c) \neq 0$.

Dann ist $f': \mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{I}$ in $f(c) \in \mathcal{J}_1$ diffbar, und es gilt: $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$

Ist f überall auf \mathcal{I} diffbar und $f'(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathcal{I}$, so ist f^{-1} auf \mathcal{J}_1 diffbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

für alle $x \in \mathcal{J}_1$.

Beweisidee: f^{-1} diffbar an Stelle $f(c)$, falls $f'(c) \neq 0$. Grund: Graph von f^{-1} = Graph von f gespiegelt an Winkelhalbierende $s(x) = x$.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

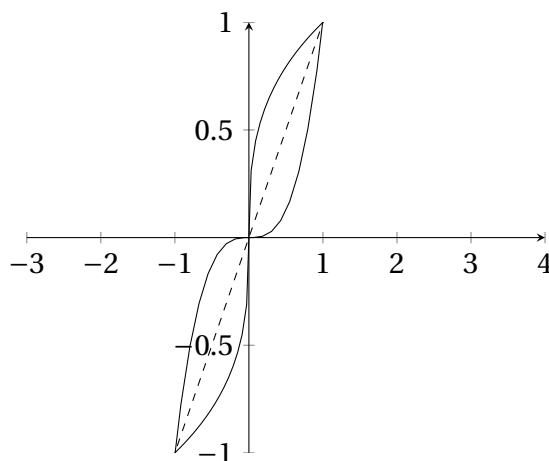


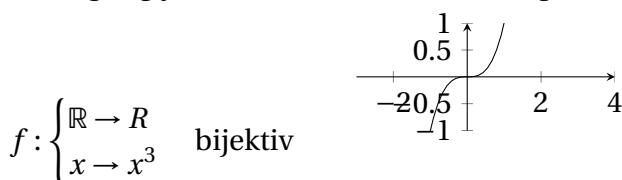
Abbildung 37: Zwei Funktionen an der Winkelhalbierenden

Ableiten mit Kettenregel.

$$f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = 1. \text{ Beweis folgt.}$$

6.13 Bemerkung

Bedingung $f'(c) \neq 0$ in 6.12 ist notwendig.



$$f'(0) = 0.$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

$(f^{-1})'(0)$ existiert nicht. (jedenfalls nicht als reelle Zahl!)

$$(f'(x) = 3x^2)$$

6.14 Satz

$f(x)$	$f'(x)$
a) a^x ($a \in \mathbb{R}, a > 0$), $x \in \mathbb{R}$	$\ln(a) \cdot a^x$
b) $\ln(x)$ auf $]0, \infty[$	$\frac{1}{x}$
c) $\log_{10}(x)$ (konst. $a > 0, a \neq 1$) auf $]0, \infty[$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
d) $x \cdot (\ln(x) - 1)$ auf $]0, \infty[$	$\ln(x)$
e) $x^b \cdot (b \in \mathbb{R})$ auf $]0, \infty[$	$b \cdot x^{b-1}$

Beweis. a)

$$f(x) = \exp(x \cdot \ln(a))$$

$$f'(x) \stackrel{6.12}{=} \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

Kettenregel

$$b) \ln(x)' \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{\exp'(\ln(x))} \stackrel{??}{=} \frac{1}{x}$$

$$c) \log_a'(x) \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{\ln(a) \cdot a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

□

6.15 Satz (logarithmische Abbildung)

$f: \mathcal{I} \rightarrow]0, \infty[$ diffbar.

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Beweis : Kettenregel und ??b)

6.16 Beispiel

$$f(x) = e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^6 \text{ für } x \neq 0$$

$$\ln(f(x)) = x + \ln(\sin(x) + 2) + 6 \cdot \ln(x)$$

$$\ln(f(x))' = 1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2} + \frac{6}{x}$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2} + \frac{6}{x}\right) \cdot e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^6$$

6.17 Definition

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ hat *lokales Maximum*

6.18 Satz

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Hat f in $c \in D$ lokales Minimum/Maximum, so $f'(c) = 0$

Beweis.

c lokale Max.stelle.

$f'(c)$ existiert nach Voraussetzung.

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0.$$

□

Vorsicht: $f'(c) = 0$ ist nicht hinreichend für lokale Maxima/Minima.

z.B $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$ $f'(0) = 0$

f hat kein Maximum oder Minimum in 0

Globale Max/Min von f auf $[a, b]$:

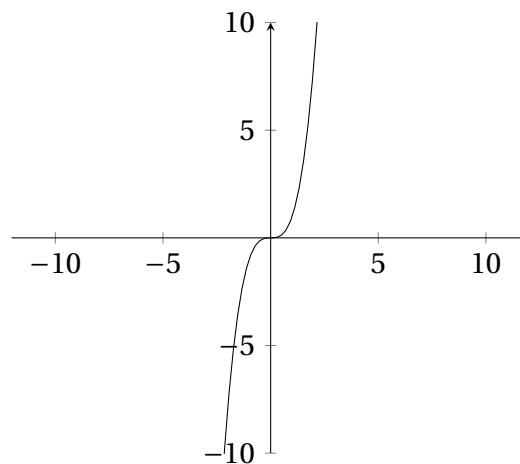


Abbildung 38: Ableitung keine Hinreichende Bedingung für Minima/Maxima

- Bestimme $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$ Teste, ob lokale Max/Min.
- Teste Intervallgrenzen a und b .

6.19 Satz (Mittelwertsatz)

Speziell: $f(a) = \mathcal{J} = [a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$

$f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[$ $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf $]a, b[$.

mit $f'(c) = 0$ Satz Dann existiert $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

von Rolle

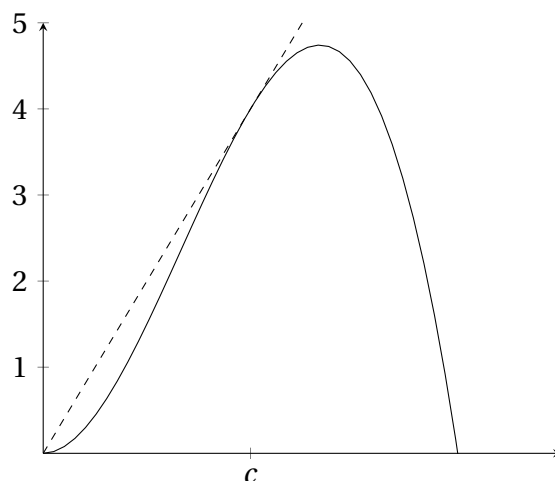


Abbildung 39: Eine Funktion und ihrer Steigung an der Stelle c

Beweis. Setze $s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

(Sekante durch $(a, f(a)), (b, f(b))$)

Def. $h(x) = f(x) - s(x)$. $h(a) = h(b) = 0$.

Zeige: $\exists c \in]a, b[$ mit $h'(c) = 0$.

Fertig, denn

$$h'(x) = f'(x) - s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ist h konstant, so kann man jedes $c \in]a, b[$ wählen. Also sei h nicht konstant. h ist stetig auf $[a, b]$. **??**. h nimmt auf $[a, b]$ globales Max. und Min. an: $x_{\max}, x_{\min}, x_{\max} \neq x_{\min}$, da h nicht konstant $h(a) = h(b)$ O.B.d.A

$x_{\max} \in]a, b[$. 6.18 : $h'(x_{\max}) = 0$

□

6.20 Korollar

$\mathcal{I} = [a, b], a < b, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, diffbar in $]a, b[$. (auch $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ oder $[a, \infty[,]-\infty, b]$ erlaubt)

- a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f konstant auf $[a, b]$,
- b) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f (streng) monoton wachsend auf \mathcal{I}
- c) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[$ so ist f (streng) monoton fallend auf \mathcal{I} .

Beweis.

Wähle $u < v$, $u, v \in [a, b]$ beliebig.

Wende 6.19 auf $[u, v]$ an. $\exists c \in]u, v[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

Daraus folgt im Fall

a) $f(v) = f(u)$

b) $f(v) \geq f(u)$

c) $f(v) \leq f(u)$

Bedingung für strenge Monotonie nur hinreichend, nicht notwendig $f(x) = x^3$
streng monoton steigend $f'(0) = 0$

□

6.21 Korollar

$\mathcal{I} = [a, b]$, $a < b$ wie in 6.20.

$c \in]a, b[$. $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in \mathcal{I} .

f auf $\mathcal{I}_0 =]a, b[\setminus \{c\}$ diffbar

Existiert $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ auf \mathcal{I}_0 , so existiert $f'(c)$ und $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$.

6.22 Satz (Regeln von L'Hôpital)

a) \mathcal{I} Intervall, $c \in \mathcal{I}$, $f, g : \mathcal{I} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Es gelte $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{I} \setminus \{c\}$

Oder $g'(x) < 0$ für alle $x \in \mathcal{I} \setminus \{c\}$

Es gelte $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ oder ∞

Existiert $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

b) $f, g : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Es gelte $g'(x) > 0$ für alle $x \in [a, \infty[$

oder $g'(x) < 0$ für alle $x \in [a, \infty[$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ oder ∞

Existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

6.23 Beispiel

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+ax)}{x} = ? (a \in \mathbb{R})$ Zähler definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $1+ax > 0$ 6.22a):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+ax}}{1} = a$$

b) $\lim_{x \cdot \ln(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{6.22}{=} \lim_{x \rightarrow 0^0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x \cdot \ln(x))$
 $\stackrel{\text{exp stetig}}{=} \exp(\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x)) \stackrel{b)}{=} \exp(0) = 1.$
(Deshalb definiert man $0^0 = 1$)

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{6.22}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} =$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ (schon in 5.17)

7 Das bestimmte Integral

Ziel: Bestimmung des Flächeninhalts zwischen Graph einer Funktion und x-Achse zwischen zwei Grenzen a und b (sofern möglich).

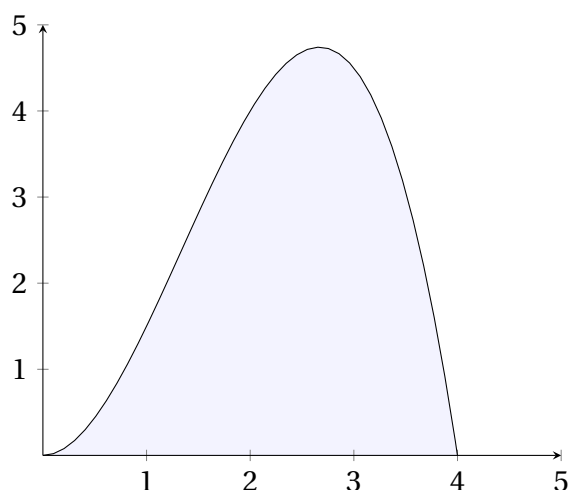


Abbildung 40: Flächeninhalt unter einer Funktion f

7.1 Definition

- a) $a, b \in \mathbb{R}, a < b. f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ gibt, so dass f auf jedem offenem Intervall $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 0 \dots, n-1$, konstant ist. (Wert an den a_i beliebig.)

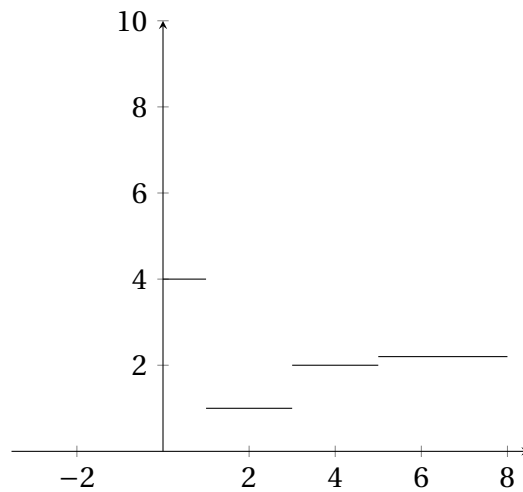


Abbildung 41: Treppenfunktion

b) f wie in a).

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f(x) dx := \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)$$

wobei $f(x) = c_i$ auf $]a_i, a_{i+1}[$.

Integral von f über $[a, b]$ (Integral kann negativ sein)

7.2 Definition

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion* (oder integrierbare Funktion) \Leftrightarrow

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (abh. von ε): $|f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$.

Bedeutung:

Gleichmäßige Approximierbarkeit durch Treppenfunktion.

7.3 Satz

$\mathcal{J} = [a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

a) Jede Regelfunktion f auf \mathcal{J} ist beschränkt d.h. $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

b) Summe, Produkt und Betrag von Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion

Beweisidee für a),b):

Man beweist 7.3 zunächst für Treppenfunktionen. Für b): Bestimme gemeinsame Verfeinerung der Intervallunterteilung der beiden Treppenfunktionen Dann auf Regelfunktionen übertragen.

7.4 Satz

Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist Regelfunktion *Beweis:* [8] 7.4 gilt auch für soge-

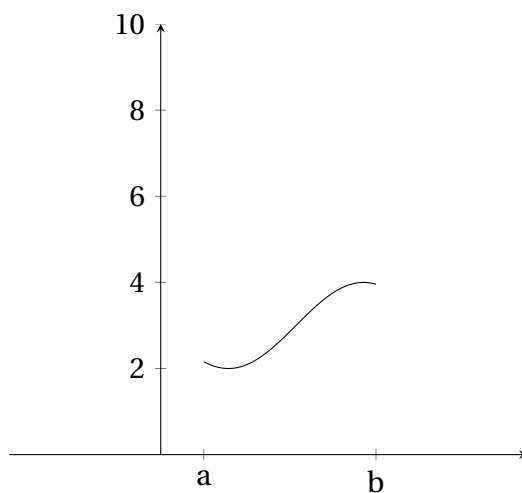


Abbildung 42: Treppenfunktion

nannte *stückweise stetige* Funktionen auf $[a, b]$ $[a, b]$ ist Vereinigung *endlicher* Teilin-

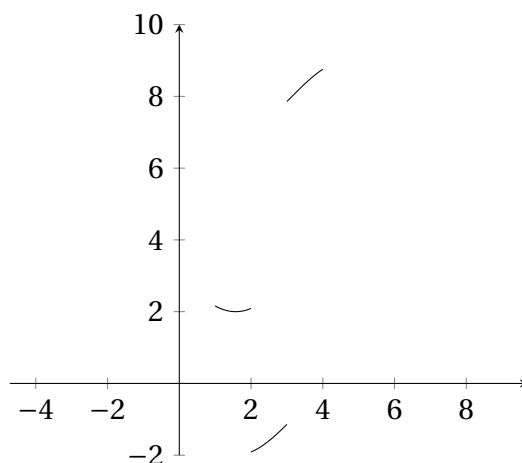


Abbildung 43: Abschnittsweise stetige Funktion

tervallen, auf denen Funktion stetig ist.

7.5 Beispiel

a) $f(x) = x^2$, $\mathcal{J} = [0, t]$

Definition für $x \in \mathbb{N}$ Treppenfunktion.

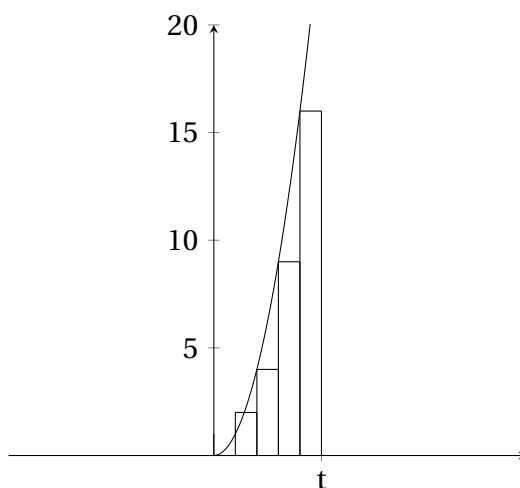


Abbildung 44: Treppenfunktion (Untersumme) von x^2

$$f_n : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{it^2}{n}\right) & \text{falls } x \in \left[\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}\right] \text{ für ein } i \in \{0, \dots, n-1\} \\ t^2 & \text{falls } x = t \end{cases}$$

$$x \in [0, t] : |f(x) - f_n(x)| = ?$$

$$x = t : |f(t) - f_n(x)| = 0.$$

$$0 \leq x < t : \text{Dann } x \in \left[\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}\right] \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|x^2 - \left(\frac{it}{n}\right)^2\right| \leq \left(\frac{(i+1)t}{n}\right)^2 - \left(\frac{it}{n}\right)^2 = \frac{2it + t^2}{n^2} \leq \frac{2t}{n} + \frac{t^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

7.6 Lemma

f Regelfunktion auf $[a, b]$

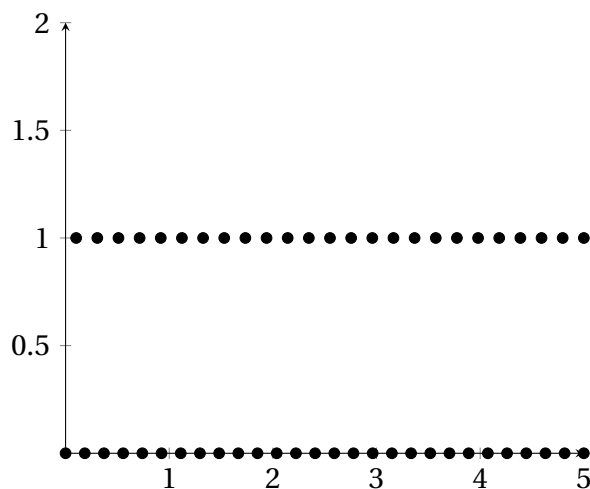


Abbildung 45: Nicht integrierbare Funktion

- a) $(f_n)_n$ Folge von Treppenfunktion, die *gleichmäßig* gegen f konvergiert, dass heißt es existiert Nullfolge $(a_n)_n$, $a \geq 0$, und $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ für alle $x \in [a, b]$. Dann konvergiert die Folge

$$\underbrace{\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_n}_{\in \mathbb{R}}$$

- b) Sind $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ zwei Folgen von Treppenfunktionen die gegen f gleichmäßig konvergieren, so :

$$(WHK, 7.20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx$$

7.7 Definition

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktion, $(f_n)_n$ Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert (wie in 7.6 a).

Definition (*bestimmtes*) *Integral*:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Treppenfunktion:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_m - x_i)$$

7.8 Beispiel

$f(x) = x^2$ auf $[0, t]$

f_n wie in 7.5.

$$\int_a^b f_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{it}{n}\right)^2 \cdot \frac{t}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \cdot \frac{t^2}{n^3} = \frac{t^3}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Per Induktion nach n kann man zeigen: $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$$\text{Also: } \int_0^t f_n(x) dx = \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(x) dx = \frac{t^3}{6} \cdot 2 = \frac{t^3}{3} \text{ Falls } t > 0 - \frac{t^3}{3}$$

7.9 Satz (Rechenregeln für Integrale)

f, g Regelfunktionen auf $[a, b]$.

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(a) \quad \int_a^b a \cdot f(x) dx = a \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$(b) \quad f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(c) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Sei $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$:

$$(d) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$(e) \quad a < c < b, \text{ so } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

7.10 Beispiel

$$a < b: \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$(0 < a < b:) \int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Analog für die Fälle $a \leq 0 < b$ und $a < b \leq 0$

7.11 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert $c \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$

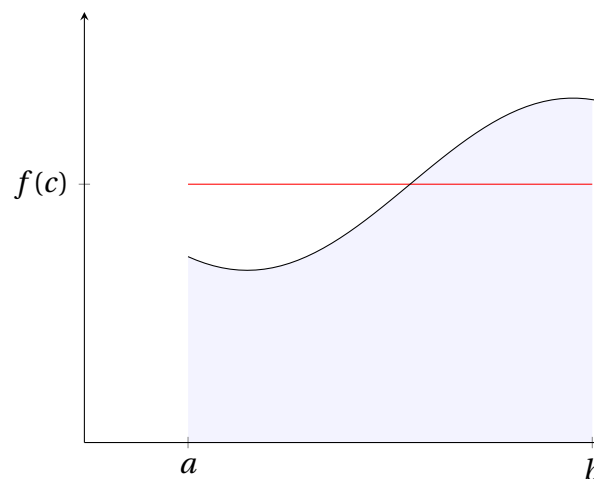


Abbildung 46: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Beweis. f ist stetig nimmt also das Maximum von m an Stelle x_{min} und Maximum M an der Stelle x_{max} an. (??)

$$7.9d) : m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x_{min}) = m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M = f(x_{max})$$

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen ?? : $\exists c$ zwischen x_{min} und x_{max} (d.h. $c \in [a, b]$) mit $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

□

8 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

8.1 Definition

- a) Sei $[a, b]$ abgeschlossenes, beschränktes (d.h. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) Intervall.
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar,

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

- b)

$$\int_a^a f(t) dt = 0$$

?? $x > 0$

$$x > 0 \int_0^x t^2 dt = \boxed{\frac{x^3}{3}}$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

Kein Zufall

$x \leq 0$

$$\int_0^x t^2 dt = - \int_x^0 t^2 dt = - \left(-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_a^b t^2 dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \text{ gilt für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

8.2 Definition

Sei \mathcal{I} beliebiges Intervall ($-\infty$ bzw. ∞ als linke/rechte Grenze erlaubt).

- a) $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn f auf jedem abgeschlossenen beschränkten Teilintervall $[u, v]$ von \mathcal{I} integrierbar ist.

TODO: Sehr wellige Funktion

(Ist \mathcal{I} selbst abgeschlossen und beschränkt, so „lokal integrierbar“ = „integrierbar“.)

- b) $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* der lokal integrierbaren Funktion $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\int_a^v f(t) dt = F(v) - F(u)$$

für alle $u, v \in \mathcal{I}$.

Eine Stammfunktion von f wird auch als *unbestimmtes Integral* von f bezeichnet
 $F = \int f(t) dt$

8.3 Bemerkung

Ist f lokal integrierbar auf \mathcal{I} , so gilt

$$\int_u^v f(t) dt + \int_v^w f(t) dt = \int_u^w f(t) dt$$

Folgt aus 7.9 + 8.1

für alle $u, v, w \in \mathcal{I}$ (nicht notwendig $u < v < w$)

8.4 Beispiel

a) $f(x) = x^2$ lokal integrierbar auf \mathbb{R} .

Stammfunktion von f .

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_a^b F(b) - F(a)$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Heaviside - Funktion

f ist lokal integrierbar auf \mathbb{R}

TODO: PLOT abschnittsweise definierte Funktion

Stammfunktion von f :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

TODO: PLOT

Zeige: $\forall u, v \in \mathbb{R}$:

$$\int_u^v f(t) dt = F(v) - F(u)$$

$$(u < v < 0) \quad \int_u^v f(t) dt = 0F(v) - F(u)$$

$$(u < 0 < v) \quad \int_u^v f(t) dt = 0 = \int_0^v f(t) dt = 1 \cdot v = F(v) - F(u)$$

$$(0 < u < v) \quad \int_u^v f(t) dt = 1 \cdot (v - u) = F(v) - F(u)$$

$$(u \geq 0) \quad \int_u^v f(t) dt = -(F(u) - F(v)) = F(v) - F(u)$$

8.5 Satz

Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ Intervall, $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal „Integrierbar“

- a) Ist F Stammfunktion von f , so auch $G(x) = F(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- b) Sind F und G Stammfunktionen von f , so ist $F(x) = G(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$
- c) Sei $x_0 \in \mathcal{I}$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f .
(Beachte

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x'_0}^x f(t) dt + \int_{x'_0}^{x_0} f(t) dt$$

)

Literatur

- [1] Kreußler, Phister Satz 33.16
- [2] WHK 5.37
- [3] WHK 6.21
- [4] WHK 6.24
- [5] WHK 6.25
- [6] WHK 6.25
- [7] WHK 7.32
- [8] WHK 7.19