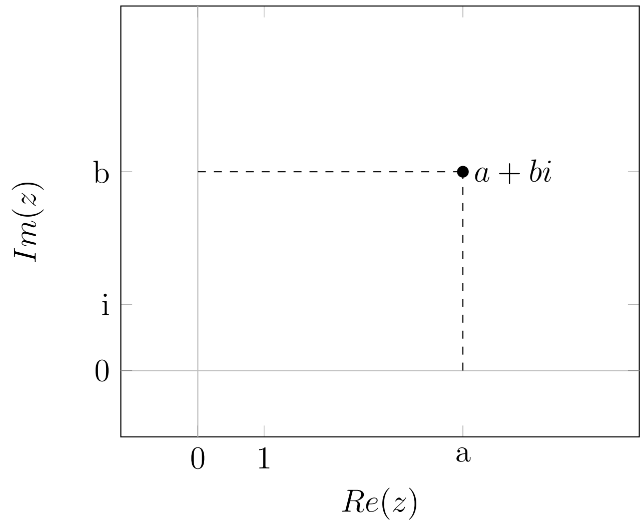
Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

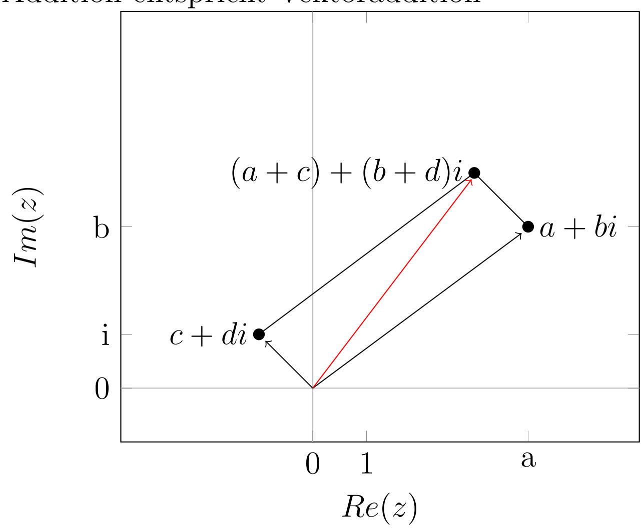
1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Addition:$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Multiplikation:$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
(Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ beachten)
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$
Rein imaginäre Zahlen : $bi, b \in \mathbb{R}, (0 + bi)$
i imaginäre Einheit
$z = a + bi \in \mathbb{C}$
$a = \Re(z)$ Realteil von $z(Re(z))$
$b = \Im(z)$ Imaginärteil von $z(Im(z))$
$\bar{z} = a - bi (= a + (-b)i)$
Die zu z konjugiert komplexe Zahl

1.2 Veranschaulichung



Addition entspricht Vektoraddition



1.3 Rechenregeln in $\mathbb{C}$

a) Es gelten alle Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$. (z.B Kommutativität bzgl. $+,\cdot$: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
<u>Inversenbildung bzgl. $\cdot$:</u>
$z = a + bi \neq 0$, d.h $a \neq 0$ oder $b \neq 0$
$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$
$z \cdot z^{-1} = 1$

<u>Beispiel:</u>
$$\begin{aligned} \frac{5-7i}{3+2i} &= (5-7i)\cdot(3+2i)^{-1} \\ &= (5-7i)\cdot\left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right) \\ &= \left(\frac{15}{13} - \frac{14}{13}\right) + \left(-\frac{10}{13} - \frac{21}{13}\right)i \\ &= \frac{1}{13} - \frac{31}{13}i \end{aligned}$$

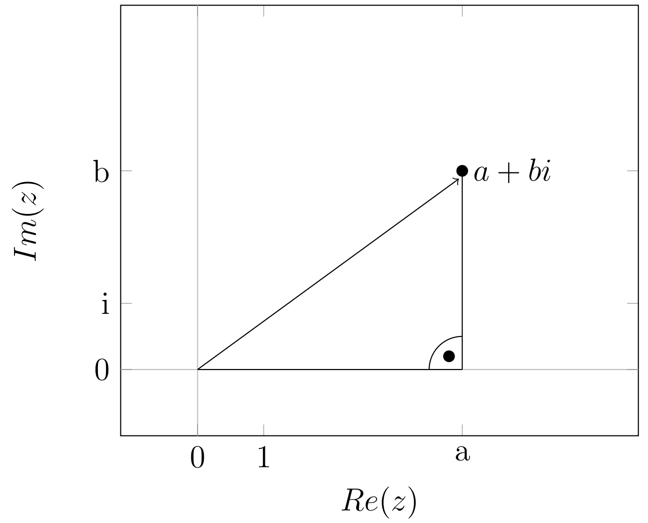
Speziell: $(bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i$; insbesondere: $\frac{1}{i} = -i$

b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}} &= z \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

1.4 Definition Absolutbetrag

a) Absolutbetrag von $z = a + bi\mathbb{C}$:
$| z |= +\underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{\in\mathbb{R},\geq 0}$
$\boxed{a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}}$ $| z |= +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$
$(a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2$
$$\begin{aligned} |z| &= \text{Abstand von } z \text{ zu } 0 \\ &= \text{Länge des Vektors, der } z \text{ entspricht} \end{aligned}$$



b) Abstand von $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
$d(z_1, z_2) :=| z_1 - z_2 |$

1.5 Rechenreglen für den Absolutbetrag

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

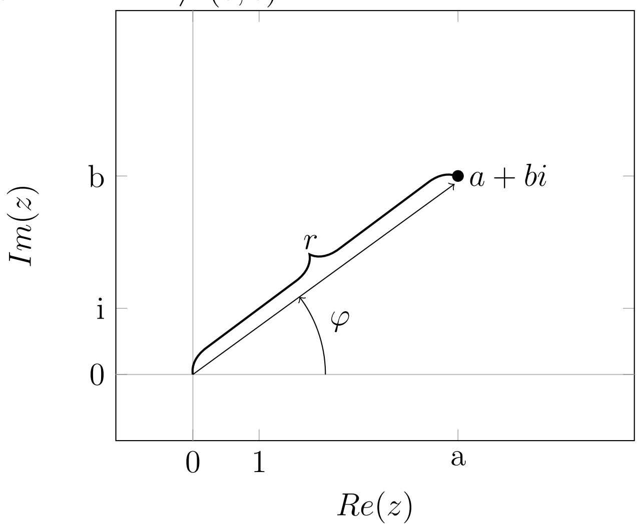
a) $| z |= 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $| z_1 \cdot z_2 |= |z_1| \cdot |z_2|$

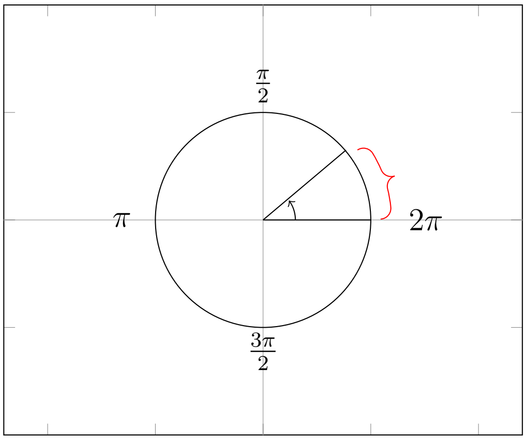
c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$|-z| = |z|$

1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

a) Jeder Punkt $\neq (0,0)$ lässt sich durch seine Polarkoordinaten (r, φ) beschreiben:



$-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes



Umfang:2π
φ in Grad $\widehat{=} \frac{2\pi \cdot \varphi}{360}$ im Bogenmaß
Für Punkte mit kartesischen Koordinaten (0,0) werden als Polarkoordinate (r, φ) verwendet.

b) komplexe Zahl $z = a + ib$

$$\begin{aligned}
r &= |z| = +\sqrt{a^2 + b^2} \\
a &= |z| \cdot \cos(\varphi) \\
b &= |z| \cdot \sin(\varphi) \\
z &= |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi) \\
z &= |z|(\cdot \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))
\end{aligned}$$

Darstellung von z durch Polarkoordinate

Beispiel:

a) $z_1 = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
$= 2 \cdot (0,5\sqrt{2} + i \cdot 0.5\sqrt{2})$

b) $z_2 = 2 + i$
$|z_2| = \sqrt{5}$
$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\frac{2}{\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}} i)$ Suche φ mit $0 \leq 2\pi$ mit $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}} z_2 \approx \sqrt{5} \cdot (\cos(0,46) + i \cdot \sin(0,46))$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis:¡ $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

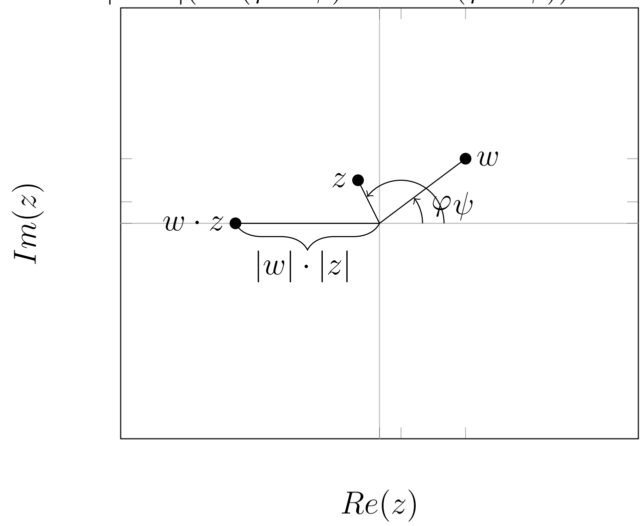
1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

a) $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

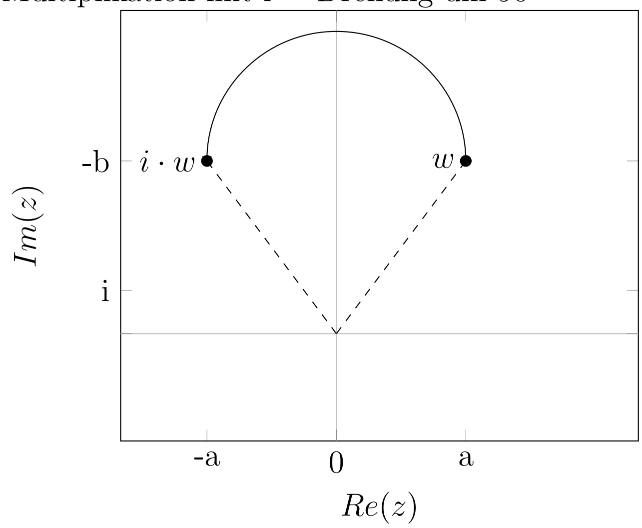
b) $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a) $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
$z = |z| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$
$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + i(\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi))$
$w \cdot z = |w \cdot z|(\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$



b) $z = i, w = a + ib$
$i \cdot w = -b \cdot ia$
Multiplikation mit i $\widehat{=}$ Drehung um 90°



1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexen Exponentialfunktion einführen.
e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ e = Euler'sche Zahl $\approx 2,718718\ldots$
$e^{z_1} = cde^{z_2} = e^{z_1+z_2}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
Es gilt: $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$
Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}, r = |z|, \varphi$ Winkel
$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ ist Polarform von z.

$z = a + bi$ ist kartesische Form von z. $\bullet(r, \varphi)$ Polarkoordinaten
$|e^{i\varphi}| = +\sqrt{cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$
$e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Punkte auf dem Einheitskreis.
$e^{i\pi} = -1$
$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ Eulersche Gleichung

1.10 Satz

Sei $w =| w | \cdot(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

a) Ist $m \in \mathbb{Z}$, so ist $w^m =| w |^m \cdot(\cos(m \cdot \varphi) + i \cdot \sin(m \cdot \varphi))$
$(m < 0 : w^m = \frac{1}{w^{|m|}}), w \neq 0$

b) Quadratwurzeln

c) Ist $n \in \mathbb{N}, w \neq 0$, so gibt es genau n n-te Wurzeln von w :
$\sqrt[n]{w} = +\sqrt[n]{| w |} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n})), n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

Beweis. a) richtig, wenn $m = 0, 1$
$m \geq 2$. Folgt aus $(\star)$
$m = -a$:
$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot | w | \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$
$= \frac{1}{w} = \frac{1}{midw| \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))}_{=1}} \cdot | w | \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$
$= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi + i \cdot \sin(-\varphi)) =| w |^{-1} \cdot(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi))$

□

1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus i :
$|i| = 1$
Nach 1.10 b): $\sqrt{i} = \pm(\cos(\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
$= \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)$

1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom
$x^n - w$ $(w \in \mathbb{C})$
eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ (sogar n verschiedene wenn $w \neq 0$)
Es gilt sogar : Fundamentalsatz der Algebra
(C. F. Gauß1777-1855)
Jedes Polynom $a_n x^n + \ldots + a_0$
mit irgendwelchen Koeffizienten: $a_n \ldots a_0 \in \mathbb{C}$ hat Nullstelle in $\mathbb{C}$

2 Folgen und Reihen

2.1 Definition

Sei k $\in \mathbb{Z}$, $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$
$(k = 0 A_0 \in \mathbb{N}_0, k = 1, A_n \in \mathbb{N})$
$Abbildung a : A \Rightarrow \mathbb{R}(oder \mathbb{C})$

$$m \Rightarrow a_n$$

heißt Folge reeller Zahlen

$$(a_k, a_{k-1} \dots)$$

Schreibweise:
$(a_m)_{m>k}$ oder einfach (a_m)
a_m heißt m-tes Glied der Folge, m Index

2.2 Beispiel

a) $a_n = 5$ für alle $n > 1$
$(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \dots)$

b) $a_n = n$ für alle $n > 1$
(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...)

c) $a_n = \frac{1}{n}$
$(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

d) $a_n \frac{(n+1)^2}{2^n}$
$(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \dots)$

e) $a_n = (-1)^n$
$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

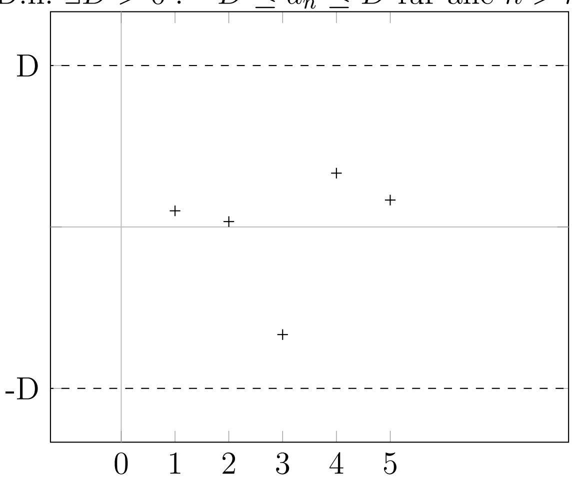
f) $a_n = \frac{1}{2} a_{n_1} = \frac{1}{a_{n-1}}$für $n \geq 2, a_1 = 1$
$(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots)$

g) $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
$(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \dots)$

h) $a_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$
$(-1, \frac{-1}{2}, -\frac{-5}{6}, \dots)$

2.3 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n>k}$ heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.
D.h. $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$ für alle $n > k$.



2.4 Definiton

Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt konvergent gegen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (konvergent gegen ε), falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) :\mid a_n - c \mid < \varepsilon$
$c = \lim_{n\Rightarrow\infty} a_n$ (oder einfach $c = \lim a_n$)
c heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge (a_n)
(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))
Eine Folge die gegen 0 konvertiert, heißt Nullfolge

2.5 Beispiele

a) $r \in \mathbb{R} : a_n = r$ für alle $n \geq 1$
$(r, r, \ldots)$
$\lim_{n\Rightarrow\infty} = r$
$\mid a_n - r \mid = 0$ für alle n
Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man $n(\varepsilon) = 1$ wählen

b) $a_n = n$ für alle $n \ \geq 1$
Folgte ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

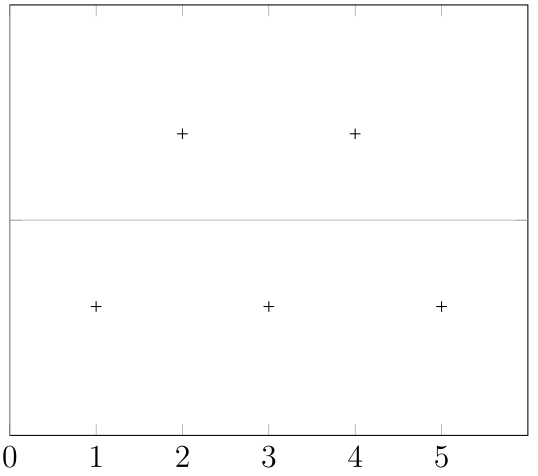
c) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$
(a_n) ist Nullfolge.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Suche Index $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - o| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$
D.s. es muss gelten.
$\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$
Ich brauche : $\frac{1}{n(\varepsilon)} < 3$
Ich brauche $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$
Aus Mathe I folgt, dass solch ein $n(\varepsilon)$ existiert.
z.B $n(\varepsilon) - \lceil\frac{1}{2}\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$
Dann:
$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$

d) $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$ für lle $n \geq 1$
Behauptung: $\lim_{n\Rightarrow\infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a - 3| &= |\tfrac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3| &&= |\tfrac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1}| \\ &= |\tfrac{-3n-2}{n^2+n+1}| &&= \tfrac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Benötigt wird $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ für alle $n > n(\varepsilon)$.
$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$
Wähle $n(\varepsilon)$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$
Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$.
$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$
Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

e) $a_n = (-1)^n$ beschränkte Folge $-1 \leq a_{\leq} 1$ konvergiert nicht.
Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$



$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{1}$ WIDERSPRUCHSYMBOL EINSETZEN

2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: $2.5_{e)}$)

Beweis. Sei $c = \lim a_n$, wähle $\varepsilon = 1$,
Es existiert $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - c| < 1$ für alle $n \geq n(1)$
Dann ist
$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c|$ für alle $n \geq n(1)$
$M = max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \ldots, |a_{n(1)-1)}, 1 + |c|\}$
Dann: $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq k$
$-M \leq a_n \leq M$ □

2.7 Bemerkung

a) $(a_n)_{n\geq 1}$ Nullfolge $\Leftrightarrow$ $(|a_n|)_{n\geq 1}$ Nullfolge $(|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0||$

b) $\lim_{n\Rightarrow\infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n\geq k}$ ist Nullfolge $\Leftrightarrow (|a_n - c|)_{n\geq k}$ ist Nullfolge

2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien $(a_n)_{n\geq k}$ und $(b_n)_{n\geq k}$ konvergente Folgen, $\lim a_n = c, \lim b_n = d$.

a) $\lim |a_n| = |c|$

b) $\lim(a_n \pm b_n) = c \pm d$

c) $\lim(a_n \cdot b_n) = c \cdot d$
insbesondere $\lim(r \cdot b_N) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.

d) Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$ und ist $d \neq 0$, so $\lim(\frac{a_n}{k_n}) = \frac{c}{d}$

e) Ist (b_n) Nullfolge, $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$, so konvergiert $(\frac{1}{b_n}$ <u>nicht</u>!.

f) Existiert $m \geq k$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$, so ist $c \leq d$.

g) Ist $(c_n)_{n\geq k}$ Folge und existiert $m \geq k$ mit $0 \leq c_n \leq a_n$ für alle $n \geq m$ und ist (a_n) eine Nullfolge, so ist auch (c_n) eine Nullfolge.

h) Ist $(c_n)_{n\geq l}$ beschränkte Folge und ist $(a_n)_{n\geq k}$ Nullfolge, so ist auch $(c_n \cdot a_n)_{n\geq k}$ Nullfolge.
$\boxed{c_n \text{ muss nicht konvergieren!}}$

Beweis. Exemplarisch:

b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$ und $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$ und $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$
$|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$
Suche $n(\varepsilon) = max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}, n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$
Dann gilt für alle $n > n(\varepsilon)$:
$|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

f) Angenommen $c > d$. Setze $\delta = c - d > 0$
Es existiert $\tilde{m} \geq m$ mit $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$
und $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq \tilde{m}$.
Für diese n gilt:
$0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$ nach Voraussetzung
$= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$
$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ WIDERSPRUCHSZEICHEN EINFUGEN

□

2.9 Satz

a) $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge

b) Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $((\frac{1}{n^m})_{n\geq 1}$ Nullfolge.

c) Sei $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$
Dann ist $(n^m \cdot q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge

d) Ist $r > 1, m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{n^m}{r^n}{}_{r\geq 1}$ eine Nullfolge

e) $P(x) = a_m \cdot x^m + \ldots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$
$Q(x) = b_e \cdot x^e + \ldots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$
Sei $Q(n) \neq 0$ für alle $n \geq k$.

- Ist $m > e$, so ist $\frac{P(n)}{Q(n)}$ nicht konvergent
- Ist $m = e$, so ist $\lim_{n\Rightarrow\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$
- Ist $m < l$, so ist$(\frac{P(n)}{Q(n)})$ ein Nullfolge

a) Sei $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n\geq}$ eine Nullfolge

Beweis. a) Richtig für $q > 0$. Sei jetzt $q > 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Mathe I: Es gibt ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $q^{n(\varepsilon} < \varepsilon$.
Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt: $|q^n - o| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

□

b) 2.5.c): $\frac{1}{n}{}_{n\geq 1}$ Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

c) Richtig für $q = 0$. Sei jetzt $q > 0$.
<u>1.Fall</u>: m= 1
$\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0$.

$(t+1)^n \underbrace{=}_{Binomialsatz} 1+nt+\frac{n(n+1)}{2}t^2 > \frac{n(n-1)}{2}t^2$ für alle $n \geq 2$
$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$
$0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftarrow$ Nullfolge 2.5e),2.8e)
Nach 2.9g) ist $(n \cdot q^n)_{n\geq q}$ Nullfolge, also auch $(n \cdot q^n)_{n\geq 1}$.
2.Fall: $m > 1$.
Setze $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} n^m \cdot q^n &= n^m \cdot (q')^n)^m)^n \\ &= (n \cdot (q')^n)^m)^n)m = 1 \text{anwenden} \end{aligned}$$

$0 < q' < 1$
$(n^m + q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge noch Fall $m = 1$ und 2.8e)

d) Folgt aus c) und $q = \frac{1}{r}$

e) Ist $m \leq l$, so ist $\frac{P(n(}{Q(n)} = \frac{n^m(a_m+a_{m-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots+a_1\cdot\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\cdot\frac{1}{n^m})}{n^l(b_l+b_{l-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots+b_1\cdot\frac{1}{n^{l-1}}+b_0\cdot\frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$
$(I) \longrightarrow a_m, (II) \longrightarrow b_l \; \frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{a_m}{b_l}$
$n < l, \frac{1}{n^{l-m}}$ Nullfolge
$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$
$m > l:$
Beh. folgt aus Fall $m < l$ und 2.8e).

2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, der Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.
$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$
$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$
$a_n \leq x \leq b_n$
$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$
$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_n}{2} \Leftarrow$ Nullfolge (2.9b)
$2.8e)(|x - a_n|)$ Nullfolge.
2.7e): $\lim_{n\to\infty} a_n = x$
Analog: $\lim_{n\to\infty} b_n = x$
2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

2.11 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt strikt positiv, falls $a_n > 0$ für alle $n \geq k$.
Sei im Folgenden $(a_n)_{n\geq k}$ eine strikt positive Folge.

b) $$\begin{aligned} \mathbb{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n\geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n\geq k} \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

c) $\rtimes(a_n) = \{b_n) - n \geq k : (\frac{b_n}{a_n}\text{ist Nullfolge}\}$
$(b_n) \in \precapprox$