Informatik II Skript Sommersemester 2015

Finn Ickler

7. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

Codebeispiele

14.4.2015

Scheme

*A*usdrücke , *A*uswertung und *A*bstraktion

Dr Racket

```
Definitonsfenster

Willkommen bei DrRacket, Version 6.1.1 [3m].
Sprache: Die Macht der Abstraktion; memory limit: 128 MB.
> Interaktionsfenster
```

Die Anwendung von Funktionen wird in Scheme ausschlieSSlich in Präfixnotation durchgeführt

Mathematik	Scheme
$44 - 2$	`(- 44 2)`
$f(x, y)$	`(f x y)`
$\sqrt{81}$	`(sqrt 81)`
9^2	`(! 3)`

Allgemein: `(<funktion><argument1><argument2> ...)`

`(+ 40 2)` und `(odd? 42)` sind Beispiele für *Ausdrücke*, die bei *Auswertung* einen Wert liefern.
(Notation: $\rightsquigarrow$)
`(+ 40 2)` $\underbrace{\rightsquigarrow}_{Reduktion}$ 42

`(odd? 42)` ⇝ `#f`

Interaktionsfenster: $\underbrace{Read \rightarrow Eval \rightarrow Print \rightarrow Loop}_{REPL}$

Literale stehen für einen konstanten Wert (auch: *Konstante*) und sind nicht weiter reduzierbar.

Literal		Sorte,Typ
`#f,#t`	(true, false, Wahrheitswert)	boolean
`"x"`	(Zeichenketten)	String
`0 1904 42 -2`	(ganze Zahl)	Integer
`0.42 3.14159`	(FlieSS kommazahl)	real
`1/2, 3/4, -1/10`	(rationale Zahlen)	rational
	(Bilder)	image

16.4.2015

Auswertung *zusammengesetzter Ausdrücke* in mehreren Schritten (Steps), von "innen nach außen", bis keine Reduktion mehr möglich ist.

`(+ ( (+ 20 20) (+ 1 1))` ⇝ `(+ 40 (+ 1 1))` ⇝ `(+ 40 2)` ⇝ `42`

Codebeispiel 1: **Achtung:** Scheme rundet bei Arithmetik mit Fließkommazahlen (interne Darstellung ist binär)

```
; Achtung: Arithmetik mit Fliesskommazahlen (real)
 unterliegt Rundung!
(+ 0.7
   (- (/ 1/2 0.25)
      (/ 0.6 0.3)))

(- (+ 0.7
      (/ 1/2 0.25))
   (/ 0.6 0.3))

; Arithmetik mit rationalen Zahlen (rational) ist exakt
(- (+ 7/10
```

```
      (/ 1/2 1/4))
   (/ 6/10 3/10))
```

Ein Wert kann an einen *Namen* (auch *Identifier*) gebunden werden, durch

```
(define <id> <e>)
```

⟨id⟩Identifier ⟨e⟩Ausdruck
Erlaubte konsistente Wiederverwendung, dient der Selbstdokumentation von Programmen
Achtung: Dies ist eine sogenannte Spezialform und kein Ausdruck. Insbesondere besitzt diese Spezialform *keinen* Wert, sondern einen Effekt Name ⟨id⟩ wird an den *Wert* von ⟨e⟩ gebunden.
Namen können in Scheme beliebig gewählt werden, solange

(1) die Zeichen ( ) [ ] {} “ , ‘ ‘ ; # | \nicht vorkommen

(2) dieser nicht einem numerischen Literal gleicht.

(3) kein Whitespace (Leerzeichen, Tabulator, Return) enthalten ist.

Beispiel: euro→US$
Achtung: Groß-\Kleinschreibung ist irrelevant.

Codebeispiel 2: Bindung von Werten an Namen

```
(define absoluter-nullpunkt -273.15)
(define pi 3.141592653)
(define Gruendungsjahr-SC-Freiburg 1904)
(define top-level-domain-germany "de")
(define minutes-in-a-day (* 24 60))
(define vorwahl-tuebingen (sqrt 1/2))
```

Eine *lambda-Abstraktion* (auch Funktion, Prozedur) erlaubt die Formatierung von Ausrdrücken, in denen mittels *Parametern* von konkreten Werten abstrahiert wird.

```
(lambda (<p1><p2>...)<e>)
```

⟨e⟩Rumpf: enthält Vorkommen der Parameter $\langle p_n \rangle$
(lambda(...)) ist eine Spezialform. Wert der lambda-Abstraktion ist #⟨procedure⟩
. *Anwendung* (auch Application) des lambda-Aufrufs führt zur Ersetzung aller Vorkommen der Parameter im Rumpf durch die angegebenen *Argumente*.

Codebeispiel 3: Lambda-Abstraktion

```
; Abstraktion: Ausdruck mit "Loch" ⊙
(lambda (⊙) (* ⊙ (* 155 minutes-in-a-day)))
```

```
; Zuwachs der Weltbevoelkerung innerhalb von days Tagen
(define population-growth-in-days
    (lambda (days) (* days (* 155 minutes-in-a-day))))

(population-growth-in-days 7)
```

```
(lambda (days)(* days (* 155 minutes-in-a-day)))365) ⇝
(* 365(* 155 minutes-in-a-day)) ⇝81468000
```

In Scheme leitet ein Semikolon einen Kommentar ein, der bis zum Zeilenende reicht und vom System bei der Auswertung ignoriert wird.
Prozeduren sollten im Programm ein- bis zweizeilige *Kurzbeschreibungen* direkt vorangestellt werden.

21.4.2015

Eine Signatur prüft, ob ein Name an einen Wert einer angegebenen Sorte (Typ) gebunden wird. Signaturverletzungen werden protokolliert.
`(: <id> <signatur>)`
Bereits eingebaute Sinaturen

natural	$\mathbb{N}$	boolean
integer	$\mathbb{Z}$	string
rational	$\mathbb{Q}$	image
real	$\mathbb{R}$	...
number	$\mathbb{C}$	

`(: ...)` ist eine Spezialform und hat keinen Wert, aber einen Effekt: Signaturprüfung
Prozedur Signatur spezifizieren sowohl Signaturen für die Parameter $P_1, P_2, \ldots P_n$ als auch den Ergebniswert der Prozedur,
`(: <Signatur P1> ... <Signatur Pn> -> <Signatur Ergebnis>)`
Prozedur Signaturen werden *bei jeder Anwendung* einer Prozedur auf Verletzung geprüft. *Testfälle* dokumentieren das erwartete Ergebnis einer Prozedur für ausgewählte Argumente:

```
(check-expect <e1> <e2>)
```

Werte Ausdruck $\langle e_1 \rangle$ aus und teste, ob der erhaltene Wert der Erwartung $\langle e_2 \rangle$ entspricht (= der Wert von $\langle e_2 \rangle$) Einer Prozedur sollte Testfälle direkt vorangestellt werden.
Spezialform: kein Wert, sondern Effekt: Testverletzung protokollieren

Konstruktionsanleitung für Prozeduren:

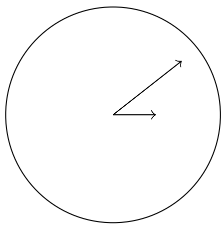
(1) Kurzbeschreibung (ein- bis zweizeiliger Kommentar mit Bezug auf Parametername)

(2) Signaturen

(3) Testfälle

(4) Prozedurrumpf

Top-Down-Entwurf (Programmieren durch “Wunschdenken“)
Beispiel: Zeichne Ziffernblatt (Stunden- und Minutenzeiger) zu Uhrzeit h:m auf einer analogen 24h-Uhr



Minutenzeiger legt $\frac{360^\circ}{60}$ Grad pro Minute zurück (also $\frac{360}{60} \cdot m$)
Studentenzeiger legt $\frac{360}{12}$ pro Stunde zurück ($\frac{360}{12} \cdot h + \frac{360}{12} \cdot \frac{m}{60}$)

Codebeispiel 4: Bauen der Uhr durch Top Down Entwurf

```
; Grad, die Minutenzeiger pro Minute zuruecklegt
(define degrees-per-minute 360/60)

; Grad, die Stundenzeiger pro voller Stunde zuruecklegt
(define degrees-per-hour 360/12)

; Zeichne Ziffernblatt zur Stunde h und Minute m
(: draw-clock (natural natural -> image))
(check-expect (draw-clock 4 15) (draw-clock 16 15))
(define draw-clock
(lambda (h m)
(clock-face (position-hour-hand h m)
(position-minute-hand m))))
```

```
; Winkel (in Grad), den Minutenzeiger zur Minute m einnimmt
(: position-minute-hand (natural -> rational))
(check-expect (position-minute-hand 15) 90)
(check-expect (position-minute-hand 45) 270)
(define position-minute-hand
(lambda (m)
(* m degrees-per-minute)))

; Winkel (in Grad), den Stundenzeiger zur Stunde h einnimmt
(: position-hour-hand (natural natural -> rational))
(check-expect (position-hour-hand 3 0) 90)
(check-expect (position-hour-hand 18 30) 195)
(define position-hour-hand
(lambda (h m)
(+ (* (modulo h 12) degrees-per-hour)
; h mod 12 in {0,1,...,11}
(* (/ m 60) degrees-per-hour))))

; Zeichne Ziffernblatt mit Minutenzeiger um dm und
; Stundenzeiger um dh Grad gedreht
(: clock-face (rational rational -> image))
(define clock-face
(lambda (dh dm)
(clear-pinhole
(overlay/pinhole
(circle 50 "outline" "black")
(rotate (* -1 dh) (put-pinhole 0 35 (line 0 35 "red")))
(rotate (* -1 dm) (put-pinhole 0 45 (line 0 45 "blue")))))))
```

23.4.2015

Substitutionsmodell
Reduktionsregeln für Scheme (Fallunterscheidung je nach Ausdrücken) wiederhole, bis keine Reduktion mehr möglich

- literal `(1, "abc",#t, ...)` l $\rightsquigarrow$ [eval_{lit}]
- Identifier id(pi, clock-face,...) id $\rightsquigarrow$gebundene Wert [eval_{id}]
- lambda Abstraktion `(lambda (...) ...)` $\rightsquigarrow$ `(lambda (...) ...)` [eval_{λ}]
- Applikationen (f e_1 e_2...)

(1) f, e_1, e_2 reduzieren erhalte: $f`, e_1`, e_2`$

(2) $\begin{cases} \text{Operation } f\text{' auf } e_1\text{' und } e_2\text{' [apply}_{prim}] & \text{falls } f\text{' primitiv ist} \\ \text{Argumentenwerte in den Rumpf von } f\text{' einsetzen, dann reduzieren} & \text{falls } f\text{' lambda Abstraktio} \end{cases}$

Beispiel:

`(+ 40 2)` $\underset{evalid}{\leadsto}$ `(#<procedure+> 40 2)` $\leadsto$ 42

`(position-minute-hand 30)` $\underset{\text{eval id}}{\leadsto}$ `((lambda (m)(* degrees-per-minute m))3`

$\underset{\text{eval lambda}}{\leadsto}$ `(* degrees-per-minute 30)`

$\underset{\text{eval id}}{\leadsto}$ `(#<procedure *> 360/60 30)`

$\underset{\text{apply prim}}{\leadsto}$ 180

Bezeichnen `(lambda (x)(* x x))` und `lambda (r)(* r r)` die gleiche Prozedur? ⇒ JA!

Achtung: Das hat Einfluß auf das Korrekte Einsetzen von Argumenten für Prozeduren (siehe apply)

Prinzip der Lexikalischen Bindung

Das *bindene Vorkommen* eines Identifiers id kann im Programmtext systematisch bestimmt werden: Suche strikt von innen nach außen, bis zum ersten

(1) `(lambda (r)<Rumpf>`

(2) `(define <e>)`

Übliche Notation in der Mathematik: *Fallunterscheidung*

$$max(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ x_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Tests (auch Prädikate) sind Funktionen, die einen Wert der Signatur boolean liefern.
Typische primitive Tests.

```
(: = (number number -> boolean))
(: < (real real -> boolean))
```

auch `>`, `<=`, `>=`

```
(: String=? (string string -> boolean))
```

auch `string>?`, `string<=?`

```
(: zero? (number -> boolean))
```

auch `odd?`, `even?`, `positive?`, `negative?`

Binäre Fallunterscheidung *if*

$$\begin{array}{ll} if & \\ \quad < e_1 > & \text{Mathematik:} \\ \quad < e_2 > & \begin{cases} e_1 & \text{falls } t_1 \\ e_2 & \text{sonst} \end{cases} \\ \quad < e_2 >) & \end{array}$$

28.4.2015

Die Signatur *one of* lässt genau einen der ausgewählten Werte zu.

(one of $<e_1>$ $<e_2>$ ... $<e_n>$)

Codebeispiel 5: one-of am Beispiel des Fußballpunktesystems

```
; Punkte der Heimmannschaft bei Ergebnis h:a
(: heim-punkte (natural natural -> (one-of 3 0 1)))
(check-expect (heim-punkte 2 0) 3)
(check-expect (heim-punkte 1 4) 0)
(check-expect (heim-punkte 3 3) 1)
(define heim-punkte
  (lambda (h a)
    (cond ((> h a) 3)
          ((< h a) 0)
          (else    1))))
```

Reduktion von if:

(**if** t_1 $<e_1>$ $<e_2>$)

$$\text{(1) Reduziere } t_1\text{, erhalte } t_1' \overset{}{\underset{(2)}{\rightsquigarrow}} \begin{cases} \langle e_1 \rangle & \text{falls } t_1' = \#t, \langle e_2 \rangle \text{ niemals ausgewertet} \\ \langle e_2 \rangle & \text{falls } t_1' = \#f, \langle e_1 \rangle \text{ niemals ausgewertet} \end{cases}$$

Codebeispiel 6: Koennen wir unser eigenes ‘if’ aus ‘cond’ konstruieren? (Nein!)

```
; Bedingte Auswertung von e1 oder e2 (abhaengig von t1)
(check-expect (my-if (= 42 42) "Yes!" "No!") "Yes!")
(check-expect (my-if (odd? 42) "Yes!" "No!") "No!")
(define my-if
  (lambda (t1 e1 e2)
    (cond (t1 e1)
          (else e2))))

; Sichere Division x/y, auch fuer y = 0
(: safe-/ (real real -> real))
```

```
(define safe-/
  (lambda (x y)
    (my-if (= y 0)      ; <-- Funktion my-if wertet ihre
       Argumente
           x            ;     vor der Applikation aus: (/ x y)
              wird
           (/ x y))))   ;     in *jedem* Fall reduziert. :-(


(safe-/ 42 0)           ; Fuehrt zu Fehlemeldung "division by
   zero"
                        ; (Reduktion mit Stepper durchfuehren)
```

Spezifikation Fallunterscheidung (conditional expression):

(cond Mathematik:

$$\begin{array}{l} \texttt{(<}t_1\texttt{> <}e_1\texttt{>)} \\ \texttt{(<}t_2\texttt{> <}e_2\texttt{>)} \\ \dots \\ \texttt{(<}t_n\texttt{> <}e_n\texttt{>)} \\ \texttt{(\textbf{else} <}e_{n+1}\texttt{>))} \end{array} \quad \begin{cases} e_1 \text{ falls } t_1 \\ e_2 \text{ falls } t_2] \\ \dots \\ e_n \text{ falls } t_n \\ e_{n+1} \text{ sonst} \end{cases}$$

Werte die Tests in den Reihenfolge $t_1, t_2.t_3, \dots, t_n$ aus.
Sobald $t_i \# t$ ergibt, werte Zweig e_i aus. e_i ist Ergebnis der Fallunterscheidung. Wenn $t_n \# t$ liefert, dann liefert

$$\begin{cases} \text{Fehlermeldung „cond: alle Tests ergaben false“} & \text{falls kein else Zweig} \\ \langle \mathrm{e}_{n+1} \rangle & \text{sonst} \end{cases}$$

Codebeispiel 7: Absolutwert von x

```
(: my-abs (real -> real))
(check-within (my-abs -4.2) 4.2 0.001)    ; Wichtig:
(check-within (my-abs 4.2) 4.2 0.001)     ; Tesfaelle decken
   alle Zweige
(check-within (my-abs 0) 0 0.001)         ; der conditional
   expression an
(define my-abs
  (lambda (x)
    (cond ((< x 0) (- x))
          ((> x 0) x     )
          (else    0     ))))
```

Reduktion von cond [eval$_{\text{cond}}$]

(**cond** (<t_1> <e_1>) (<t_2> <e_2>) ... (<t_n> <e_n>))

(1) Reduziere t_1 erhalte $t_1' \rightsquigarrow \begin{cases} \texttt{<e\_1>} & \text{falls } t_1' = \texttt{\#t} \\ (\textbf{cond}\ \texttt{<t\_2> <e\_2>}) & \text{sonst} \end{cases}$ (2)

(**cond**) $\rightsquigarrow$ „Fehlermeldung : alle Test ergaben false “

(**cond** (**else** <e_{n+1}>)) $\rightsquigarrow e_{n+1}$

cond ist syntaktisches Zucker (auch abgeleitete Form) für eine verbundene Anwendung von if

```
(cond    (<t1><e1>)               if (<t1>
         (<t2><e2>)                   <e1>
         ...                              if <t2>
         ...                              if <e2>
         ...                              ...
         (<tn><en>)                         if <tn>
                                               <en>
         (else <en+1>)                            <en+1>))..))
```

Spezialform 'and' und 'or'

(**or** ⟨t_1⟩ ⟨t_2⟩ ... ⟨t_n⟩) $\rightsquigarrow$ (**if** ⟨t_1⟩ (**or** ⟨t_2⟩ ... ⟨t_n⟩) #t)

(**or**) $\rightsquigarrow$ #f

(**and** ⟨t_1⟩ ⟨t_2⟩ ... ⟨t_n⟩) $\rightsquigarrow$ (**if** ⟨t_1⟩ (**and** ⟨t_2⟩ ... ⟨t_n⟩) #f)

(**and**) $\rightsquigarrow$ #t

Codebeispiel 8: Konstruktion komplexer Prädikate mittels 'and' und 'or'

```
(and #t #f)  ; ⇝ #f   (Mathematik: Konjunktion)
(or #t #f)   ; ⇝ #t   (Mathematik: Disjunktion)
; Kennzeichen am/pm fuer Stunde h
(: am/pm (natural -> (one-of "am" "pm" "???")))
(check-expect (am/pm 10) "am")
(check-expect (am/pm 13) "pm")
(check-expect (am/pm 25) "???")
(define am/pm
  (lambda (h)
    (cond ((and (>= h 0) (< h 12))   "am")
          ((and (>= h 12) (< h 24)) "pm")
          (else "???"))))
```

30.4.2015

Zusammengesetze Daten
Ein Charakter *besteht* aus drei *Komponenten*

- Name des Charakters (name)
- Handelt es sich um einen Jedi? (jedi?)
- Stärke der Macht (force)

}Datendefinition für zusammengesetzte Daten

Konkrete Charakter:

name	„Luke Skywalker "
jedi?	#f
force	25

Codebeispiel 9: Starwars Charakter als Racket Records

```
; Ein Charakter (character) besteht aus
; - Name (name)
; - Jedi-Status (jedi?)
; - Stärke der Macht (force)
(: make-character (string boolean real -> character))
(: character? (any -> boolean))
(: character-name (character -> string))
(: character-jedi? (character -> boolean))
(: character-force (character -> real))
(define-record-procedures character
  make-character
  character?
  (character-name
   character-jedi?
   character-force))
```

```
; Definiere verschiedene Charaktere des Star Wars Universums
(define luke
  (make-character "Luke␣Skywalker" #f 25))
(define r2d2
  (make-character "R2D2" #f 0))
(define dooku
  (make-character "Count␣Dooku" #f 80))
(define yoda
  (make-character "Yoda" #t 85))
```

Zusammengesetzte Daten = *Records* in Scheme Record-Definition legt fest:

- Record-Signatur
- *Konstruktor* (baut aus Komponenten einen Record)
- Prädikat (liegt ein Record vor?)
- Liste von *Selektoren* (lesen jeweils eine Komponente des Records)

```
(define-record-procedure <t>
        make-<t>
        <t>?
        (<t>-<comp1> ... <t>-<comp2>))
        ;Liste der n Selektoren
```

Verträge des Konstruktors der Selektoren für Record- Signatur $\langle \mathrm{t} \rangle$ mit Komponenten namens $\langle \mathrm{comp}_1 \rangle \ldots \langle \mathrm{comp}_n \rangle$

```
(: make-<t> (<t1>...<t2>) -> <t>)
(: <t>-<comp1> (<t> -> <t1>))
(: <t>-<compn> (<t> -> <tn>))
```

Es gilt für alle Strings n, Booleans j und Integer f:

```
(character-name (make-character n j f) n)
(character-jedi? (make-character n j f) j)
(character-force (make-character n j f) f )
```

Spezialform check-property:

```
(check-property
        (for-all ((<id1> <sig1>) ...
                  (<idn> <sign>))
        <e>))
        ↓
;Bezieht sich auf <id1> ... <idn>
```

Test erfolgreich, falls ⟨e⟩ für beliebig gewählte Bedeutungen für $\langle \mathrm{id}_1 \rangle \ldots \langle \mathrm{id}_n \rangle$ immer #t ergibt

Codebeispiel 10: Interaktion von Selektoren und Konstruktor:

```
(check-property
 (for-all ((n string)
           (j boolean)
           (f real))
   (expect (character-name (make-character n j f)) n)))

(check-property
 (for-all ((n string)
           (j boolean)
           (f real))
   (expect (character-jedi? (make-character n j f)) j)))

(check-property
 (for-all ((n string)
           (j boolean)
           (f real))
   (expect-within (character-force (make-character n j f)) f 0
     .001)))
```

Beispiel: Die Summe von zwei natürlichen Zahlen ist mindestens so groß wie jeder dieser Zahlen: $\forall x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N} : x_1 + x_2 \geq \max\{x_1, x_2\}$

Codebeispiel 11: Mathematische ∀-Aussage in Racket

```
; Für alle natürlichen Zahlen x1,x2 gilt: x1 + x2 ≥ max(x1,x2)
(check-property
 (for-all ((x1 natural)
           (x2 natural))
   (>= (+ x1 x2) (max x1 x2))))
```

Konstruktion von Funktionen, die bestimmte gesetzte Daten *konsumiert.*

- Welche Record-Componenten sind relevant für Funktionen?

  → Schablone:

```
(: sith? (character -> boolean))
(define sith?
  (lambda (c)
    ... (character-jedi? c))
    ... (character-force c) )...))
```

Konstruktion von Funktionen, die zusammengesetzte Daten *konstruieren*

- Der konstruktor *muss* aufgerufen werden

→ Schablone:

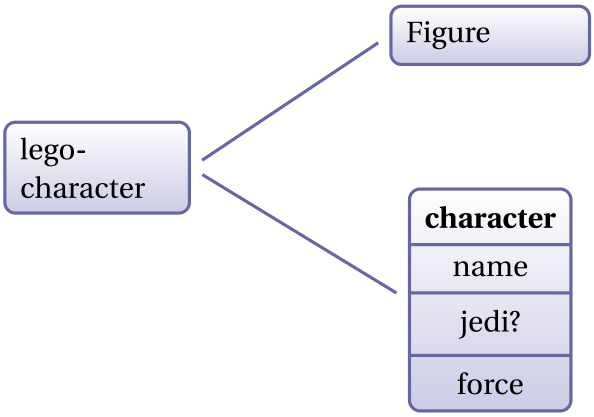
```
(define
        lambda(...)
               ... (make-<t>)...)
```

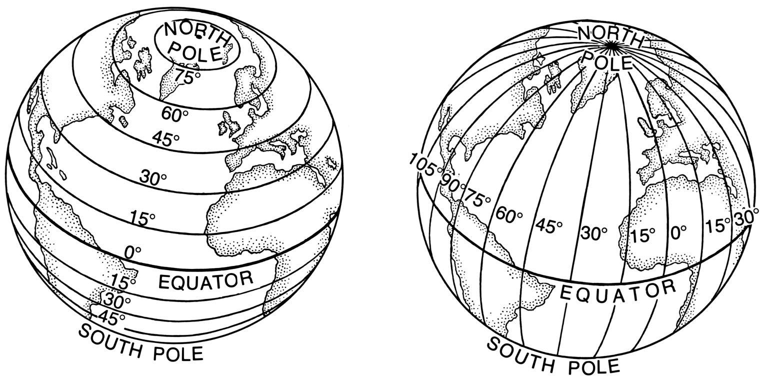
- Konkrete Beispiele:

Codebeispiel 12: Abfragen der Eigenschaften von character Records

```
; Könnte Charakter c ein Sith sein?
(: sith? (character -> boolean))
(check-expect (sith? yoda) #f)
(check-expect (sith? r2d2) #f)
(define sith?
  (lambda (c)
    (and (not (character-jedi? c))
         (> (character-force c) 0))))


; Bilde den Charakter c zum Jedi aus (sofern c überhaupt
   Macht besitzt)
(: train-jedi (character -> character))

(check-expect (train-jedi luke) (make-character "Luke␣
   Skywalker" #t 50))
(check-expect (train-jedi r2d2) r2d2)

(define train-jedi
  (lambda (c)
    (make-character (character-name c)
                    (> (character-force c) 0)
                    (* 2 (character-force c)))))
```

5.5.2015





Position Nord/Südwest vom Äquator Position west/östlich vom Nullmeridian
Sei `<p>`ein Prädikat mit Signatur `(<t> -> boolean)`.
Eine Signatur der Form `(predicate <p>` gilt für jeden Wert der Signatur ⟨t⟩ sofern (⟨p⟩) ⇝`#t`
Signaturen des Typs `predicate <p>)` sind damit *spezifischer* (restriktiver) als die Signatur ⟨t⟩ selbst.
`(define <newt> (signature <t>)`
Beispiele:

```
(define farbe
        (signature (one-of "Blatt" "Herz" "Blatt" "Eichel"
           "Schell")))
```

Codebeispiel 13: Restriktive Signaturen mit predicate

```
; Ist x ein gültiger Breitengrad
; zwischen Südpol (-90°) und Nordpol (90°)?
(: latitude? (real -> boolean))
(check-expect (latitude? 78) #t)
(check-expect (latitude? -92) #f)
(define latitude?
  (lambda (x)
    (within? -90 x 90)))
; Ist x ein gültiger Längengrad westlich (bis -180°)
; bzw. östlich (bis 180°) des Meridians?
(: longitude? (real -> boolean))
(check-expect (longitude? 0) #t)
(check-expect (longitude? 200) #f)
(define longitude?
  (lambda (x)
    (within? -180 x 180)))
; Signaturen für Breiten-/Längengrade basierend auf
; den obigen Prädikaten
(define latitude
  (signature (predicate latitude?)))
(define longitude
  (signature (predicate longitude?)))
```

7.5.2015

Man kann jedes `one-of` durch ein `predicate` ersetzen.

Codebeispiel 14: Das "große One-of Sterben des Jahres 2015"

```
(: f ((one-of 0 1 2 ) -> natural))
(define f
  (lambda (x)
    x))
; And then the "The Great one-of Extinction" of 2015 occurred
```


```
(: g ((predicate
        (lambda (x) (or (= x 0) (= x 1) (= x 2)))) -> natural))
(define g
```

```
  (lambda (x)
    x))
```

Geocoding: Übersetze eine Ortsangabe mittels des Google Maps Geocoding API (Application Programm Interface) in eine Position auf der Erdkugel.

```
(: geocoder (string -> (mixed geocode geocode-error)))
```

Ein geocode besteht aus:

		Signatur
- Adresse	(address)	string
- Ortsangabe	(loc)	location
- Nordostecke	(northeast)	location
- Südwestecke	(southwest)	location
- Typ	(type)	string
- Genauigkeit	(accuracy)	string

Ein geocode-error besteht aus:

```
(: geocode-adress (geocode -> string))
(: geocode-loc (geocode -> location))
(: geocode-... (geocode -> ...))
```

		Signatur
- Fehlerart	(level)	(one-of "TCP" "HTTP" "JSON" "API")
- Fehlermeldung	(message)	string

Gemischte Daten

Die Signatur

$(\texttt{mixed}\ \langle \texttt{t}_1 \rangle\ \dots\ \langle \texttt{t}_n \rangle)$

ist gültig für jeden Wert, der mindestens eine der Signaturen $\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle$ erfüllt.

Beispiel: Data-Definition

Eine Antwort des Geocoders ist *entweder*

- ein Geocode (geocode) *oder*

- eine Fehlermeldung (geocode-error)

Beispiel (eingebaute Funktion string-⟩number)

```
(: string->number (string -> (mixed number (one-of #f))))
(string->number "42") ⇝ 42
(string-> number "foo") ⇝ #f
```

Codebeispiel 15: Die Google Geocode API

```
(define geocoder-response
  (signature (mixed geocode geocode-error)))

(: sand13 geocoder-response)
(define sand13
  (geocoder "Sand␣13,␣Tübingen"))

(geocode-address sand13)
(geocode-type sand13)
(location-lat (geocode-loc sand13))
(location-lng (geocode-loc sand13))
(geocode-accuracy sand13)


(: lady-liberty geocoder-response)
(define lady-liberty
  (geocoder "Statue␣of␣Liberty"))

(: alb geocoder-response)
(define alb
  (geocoder "Schwäbische␣Alb"))

(: A81 geocoder-response)
(define A81
  (geocoder "A81,␣Germany"))
```

Erinnerung:
Das Prädikat ⟨t⟩? einer Signatur ⟨t⟩ unterscheidet Werte der Signatur ⟨t⟩ von allen anderen Werten:

```
(: @\argt{}@? (any -> boolean))
```

Auch: Prädikat für eingebaute Signaturen

```
number?
complex?
real?
rational?
integer?
natural?
string?
boolean?
```

Prozeduren, die gemischte Daten der Signaturen $\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle$ konsumieren:
Konstruktionsanleitung:

```
(: ⟨t⟩ ((mixed ⟨t1⟩ ... ⟨tn⟩) -> ...))
(define ⟨t⟩
        (lambda (x)
                (cond
                   ((⟨t1⟩? x)...)
                   ...
                   ((⟨tn⟩? x) ...))))
```

Mittels *let* lassen sich Werte an *lokale Namen* binden,

```
(let (
        ((⟨id1⟩ ⟨e1⟩)
        (...)
        ((⟨idn⟩ ⟨en⟩))
 ⟨e⟩
)
```

Die Ausdrücke $\langle e_1 \rangle \dots \langle e_n \rangle$ werden *parallel* ausgewertet. $\Rightarrow$ $\langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$ können in $\langle e \rangle$ (und nur hier) verwendet werden. Der Wert des let Ausdruckes ist der Wert von $\langle e \rangle$.

Codebeispiel 16: Liegt der Geocode r auf der südlichen Erdhalbkugel?

```
; (Breitengrad < 0°?)
(: southern-hemisphere? (string -> boolean))

(check-expect (southern-hemisphere? "Cape␣Town") #t)
(check-expect (southern-hemisphere? "Tübingen") #f)
(check-error  (southern-hemisphere? "Mos␣Eisley") "Unknown␣
   location")

(define southern-hemisphere?
  (lambda (r)
    (let ((gc (geocoder r)))
      (cond ((geocode? gc)
             (< (location-lat (geocode-loc gc)) 0))
            ((geocode-error? gc)
             (violation "Unknown␣location"))))))
```

ACHTUNG:
’let’ ist verfügbar auf ab der Sprachebene "Macht der Abstraktion".

’let’ ist syntaktisches Zucker.

```
(let (                        ((lambda (⟨id1⟩ ... ⟨idn⟩)
```

```
                 ((⟨id₁⟩ ⟨e₁⟩)                    ⟨e⟩)
                 (...)                  ≡              ⟨e₁⟩
                 ((⟨idₙ⟩ ⟨eₙ⟩))                 ⟨e₂⟩ ...
 ⟨e⟩                                                ⟨eₙ⟩
)
```

12.5.2015

Abstand zweier geographischer Positionen b_1, b_2 auf der Erdkugel in km (lat, lng jeweils in Radian).

Codebeispiel 17: Abstand zweier geographischer Positionen

```
;Abstand zweier geographischer Positionen l1, l2 auf der
   Erdkugel in km (lat, lng jeweils in Radian):
;dist(l1,l2) =
;   Erdradius in km *
;   acos(cos(l1.lat) * cos(l1.lng) * cos(l2.lat) * cos(l2.lng)
   +
;        cos(l1.lat) * sin(l1.lng) * cos(l2.lat) * sin(l2.lng)
   +
;        sin(l1.lat) * sin(l2.lat))
; π
(define pi 3.141592653589793)

; Konvertiere Grad d in Radian (π = 180°)
(: radians (real -> real))
(check-within (radians 180) pi 0.001)
(check-within (radians -90) (* -1/2 pi) 0.001)
(define radians
  (lambda (d)
    (* d (/ pi 180))))


; Abstand zweier Orte o1, o2 auf Erdkugel (in km)
; [Wrapper]
(: distance (string string -> real))
(check-within (distance "Tübingen" "Freiburg") (distance
   "Freiburg" "Tübingen") 0.001)
(define distance
  (lambda (o1 o2)
```

```
    (let ((dist (lambda (l1 l2)              ; Abstand zweier Positionen l1, l2 (in km)  [Worker]
                  (let ((earth-radius 6378) ; Erdradius (in km)
                        (lat1 (radians (location-lat l1)))
                        (lng1 (radians (location-lng l1)))
                        (lat2 (radians (location-lat l2)))
                        (lng2 (radians (location-lng l2))))
                    (* earth-radius
                       (acos (+ (* (cos lat1) (cos lng1) (cos lat2) (cos lng2))
                                (* (cos lat1) (sin lng1) (cos lat2) (sin lng2))
                                (* (sin lat1) (sin lat2))))))))
          (gc1 (geocoder o1))
          (gc2 (geocoder o2)))
      (if (and (geocode? gc1)
               (geocode? gc2))
          (dist (geocode-loc gc1) (geocode-loc gc2))
          (violation "Unknown␣location(s)")))))

; ... einmal quer durch die schöne Republik
(distance "Konstanz" "Rostock")
```

PARAMETRISCH POLYMORPHE PROZEDUREN

Beobachtung: Manche Prozeduren arbeiten unabhängig von den Signaturen ihrer Argumente : *parametrisch polymorphe Funktion* (griechisch : vielgestaltig).
Nutze *Signaturvariablen* %a , %b,...
Beispiel:

```
; die Identität
(: id (%a -> %a))
(define id
  (lambda (x) x))

; die konstante Funktion
(: const (%a %b -> %a))
(define const
  (lambda (x y) x))

; die Projektion
(: proj ((one-of 1 2) %a %b -> (mixed %a %b)))
(define proj
  (lambda (i x y)
```

```
    (cond ((= i 1) x)
          ((= i 2) y))))
```

Eine polymorphe Signatur steht für alle Signaturen, in denen die Signaturvariablen durch konkrete Signaturen ersetzt werden.
Beispiel: Wenn eine Prozedur `(: number %a %b -> %a)` erfüllt, dann auch:

```
(: number string boolean   ->  string)
(: number boolean natural  ->  boolean)
(: number number number    ->  number)
```

”x”	23		2	#f

```
; Ein polymorphes Paar (pair-of %a %b) besteht aus
; - einer ersten Komponente (first)
; - einer zweiten Komponente (rest)
(: make-pair (%a %b -> (pair-of %a %b)))
(: pair? (any -> boolean))
(: first ((pair-of %a %b) -> %a))
(: rest  ((pair-of %a %b) -> %b))
(define-record-procedures-parametric pair pair-of
  make-pair
  pair?
  (first
   rest))
```

`(pair-of <t1> <t2>)` ist eine Signatur für Paare deren erster bzw. zweiter Komponente die Signaturen ⟨t_1⟩ bzw. ⟨t_2⟩ erfüllen.

```
;→ pair-of Signatur mit (zwei) Parametern
(: make-pair (%a %b -> (pair-of % a %b)))
(: pair? (any -> boolean))
(: first ((pair-of %a %b ) -> %a))
(: rest ((pair-of %a %b ) -> %b))
```

Codebeispiel 18: Paare aus verschiedenen Datentypen

```
; Ein paar aus natürlichen Zahlen
; FIFA WM 2014
(: deutschland-vs-brasilien (pair-of natural natural))
(define deutschland-vs-brasilien
  (make-pair 7 1))
```

```
; Ein Paar aus einer reellen Zahl (Messwert)
; und einer Zeichenkette (Einheit)
(: measurement (pair-of real string))
(define measurement
  (make-pair 36.9 "°C"))


; "Liste" der Zahlen 1,2,3,4
(define nested
  (make-pair 1
             (make-pair 2
                        (make-pair 3
                                   4))))

; Extrahiere das dritte Element der Liste (hier: 3)
(first (rest (rest nested)))
```

Eine *Liste* von Werten der Signatur $\langle t_t \rangle$ ist entweder

- leer (Signatur `empty-list`) oder:
- ein Paar (Signatur `pair-of`) aus einem Wert der Signatur $\langle t \rangle$ und einer Liste von Werten der Signatur $\langle t \rangle$.

```
(define list-of
  (lambda (t)
    (signature (mixed empty-list
                      (pair-of t (list-of t))))))
```

Signatur `empty-list` bereits in Racket vordefiniert.
Ebenfalls vordefiniert:

```
(:empty empty-list)
(: empty? (any -\zu boolean))
```

Operatoren auf Listen

Konstruktoren	`(: empty-list)`	leere liste
	`(: make-pair (% a (list-of % a))`	Konstruiert Liste aus Kopf und Rest
Predikate:	`(: empty (any -> boolean)`	liegt leere Liste vor?
	`(: pair? (any -> boolean))`	Nicht leere Liste?
Selektoren:	`(: first (list-of %a)-> %a)`	Kopf-Element
	`(: rest (list-of %a)-> (list-of %a))`	Rest Liste

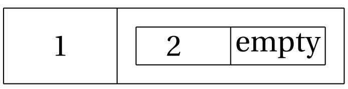
Codebeispiel 19: Listen aus einem oder verschiedenen Datentypen

```
; Noch einmal (jetzt mit Signatur): Liste der natürlichen Zahlen 1,2,3,4
(: one-to-four (list-of natural))
(define one-to-four
  (make-pair 1
             (make-pair 2
                        (make-pair 3
                                   (make-pair 4
                                              empty)))))


; Eine Liste, deren Elemente natürliche Zahlen oder Strings sind
(: abstiegskampf (list-of (mixed number string)))
(define abstiegskampf
  (make-pair "SCF"
             (make-pair 96
                        (make-pair "SCP"
                                   (make-pair "VfB" empty)))))
```

19.5.2015

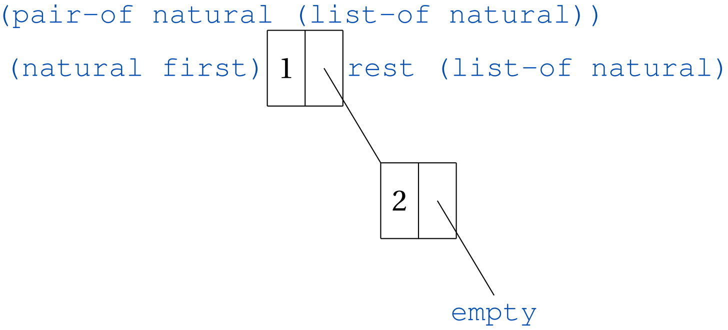
`(make-pair 1 (make-pair 2 empty))`

Visualisierung Listen



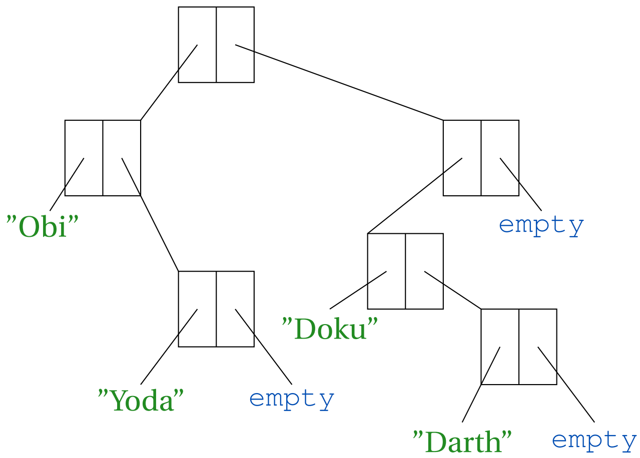
Spine (Rückgrat)

```
(pair-of natural (list-of natural))
```




```
(: one-to-four (list-of natural))
(define one-two
  (make-pair 1
             (make-pair 2
                        empty)))
```

```
(: jedis-and-siths (list-of (list-of string)))
```



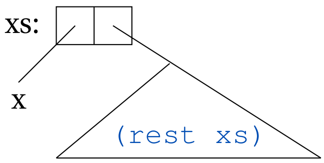
Codebeispiel 20: Jedis und Siths in einer geschachtelten Liste

```
; Geschachtelte Listen
(: jedis-and-siths (list-of (list-of string)))
(define jedis-and-siths
  (MAKE-PAIR (make-pair "Yoda"
                        (make-pair "Obi-Wan" empty))
             (MAKE-PAIR (make-pair "Dooku"
                                   (make-pair "Vader" empty))
                        empty)))

; Navigation in geschachtelten Listen
(check-expect (first (first jedis-and-siths)) "Yoda")
(check-expect (first (rest (first (rest jedis-and-siths))))
   "Vader")
```

Prozeduren, die Liste konsumieren
Konstruktionsanleitung:
Beispiel:

```
(: list-sum ((list-of number) -> number))

(check-expect (list-sum empty) 0)
(check-expect (list-sum (make-pair 40
                                   (make-pair 2
                                              empty))) 42)
(check-expect (list-sum one-to-four) 10)

(define list-sum
  (lambda (xs)
```

```
(cond ((empty? xs) 0)
      ((pair? xs) (+ (first xs)
                     (list-sum (rest xs)))))))
```



`(rest xs)` mit Signatur `(list-of number)` ist selbst wieder eine *kürzere Liste* von Zahlen. `(list sum (rest xs))` erzielt Fortschritt

Konstruktionsanleitung für Prozeduren:

```
(: <f> ((list-of ⟨t1⟩) -> ⟨t2⟩))
(define <f>
        (lambda(xs)
                (cond
                      ((empty? xs) ...)
                                         ⟨t1⟩
                      ((pair? xs) ... (first xs) ...)
                             (<f> (rest xs ))) ...))
                                     ⟨t1⟩
```

Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"

- Signatur `(list-of \% a)` eingebaut

```
(list ⟨e1⟩ ⟨e2⟩ ... ⟨en⟩)
        ≡
(make-pair (⟨e1⟩)
        (make-pair ⟨e2⟩)
                ... (make-pair ⟨en⟩) empty) ...)
```

- Ausgabeformat für nicht leere Listen:
  `{#<list x1x2... xn>`

Codebeispiel 21: Länge einer Liste

```
; Länge der Liste xs
(: list-length ((list-of %a) -> natural))

(check-expect (list-length empty) 0)
(check-expect (list-length (list 1 1 3 8)) 4)
(check-expect (list-length jedis-and-siths) 2)     ; nicht 4!
```

```
(define list-length
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) 0)
          ((pair? xs) (+ 1
                         (list-length (rest xs)))))))
```

Füge Listen xs , ys zusammen (con*cat*ination)
Zwei Fälle (xs leer oder nicht leer)

$$①\ \overbrace{\texttt{empty}}^{\text{xs}}\ \overbrace{y_1\ y_2\ \dots\ y_m}^{ys}\quad \overbrace{y_1\ y_2\ \dots\ y_m}^{\texttt{(cat xs ys)}}$$

$$②\ x_1\ \underbrace{x_2\ \dots\ x_n}_{\texttt{(rest xs)}}\quad y_1\ y_2\ \dots\ y_m\quad x_1\ \underbrace{x_2 \dots\ x_n\ y_1\ y_2\ \dots\ y_m}_{\texttt{(cat rest xs)}}$$

Beobachtung:

- Die Längen von xs bestimmt die Anzahl der rekursiven Aufrufe von cat

- Auf xs werden *Selektoren angewendet*

Codebeispiel 22: Zusammenfügen zweier Listen

```
; Füge Listen xs, ys (in dieser Reihenfolge) zusammen
(: cat ((list-of %a) (list-of %a) -> (list-of %a)))

(check-expect (cat (list 1 2) (list 3 4)) (list 1 2 3 4))
(check-expect (cat one-to-four empty) one-to-four)
(check-expect (cat empty one-to-four) one-to-four)

(define cat
  (lambda (xs ys)
    (cond ((empty? xs)
           ys)
            ((pair? xs)
             (make-pair (first xs) ; <- cat dennoch param.
                polymorph
                        (cat (rest xs) ys))))))

; Hinweis: Verfügbar als eingebaute Funktion `append'
```

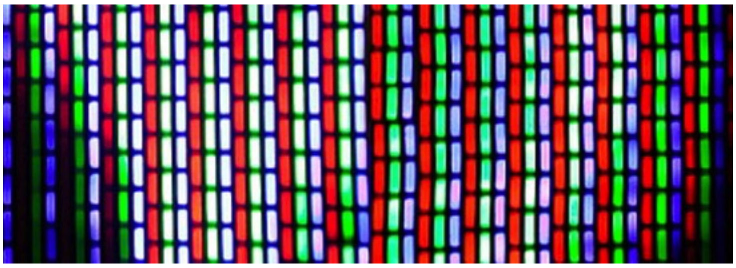
21.5.2015

Codebeispiel 23: Ausflug: Bluescreen Berechnung wie in Starwars mit Listen:

(define yoda )

(define dagobah )

```
;________________________________________________
;Zugriff auf die Liste der Bildpunkte (Pixel) eines Bildes:

;(: image->color-list (image -> (list-of rgb-color)))
;(: color-list->bitmap ((list-of rgb-color) natural natural ->
   image))

;Breite/Höhe eines Bildes in Pixeln:

;(: image-width (image -> natural))
; (: image-height (image -> natural))

; Eine Farbe (rgb-color) besteht aus ihrem
; - Rot-Anteil 0..255 (red)
; - Grün-Anteil 0..255 (green)
; - Blau-Anteil 0..255 (blue)
```



```
; (define-record-procedures rgb-color
;   make-color
;   color?
;   (color-red color-green color-blue))
;____________________________________________

; Signatur für color-Records nicht in image2.rkt eingebaut.
   Roll our own...
(define rgb-color
  (signature (predicate color?)))


; Ist Farbe c bläulich?
(: bluish? (rgb-color -> boolean))
(define bluish?
  (lambda (c)
    (< (/ (+ (color-red c) (color-green c) (color-blue c))
          3)
       (color-blue c))))

; Worker:
; Pixel aus Hintergrund bg scheint durch, wenn der
; entsprechende Pixel im Vordergrund fg bläulich ist.
; Arbeite die Pixellisten von fg und bg synchron ab
; Annahme: fg und bg haben identische Länge!
(: bluescreen ((list-of rgb-color) (list-of rgb-color) ->
    (list-of rgb-color)))
(define bluescreen
  (lambda (fg bg)
    (cond ((empty? fg)
           empty)
          ((pair? fg)
           (make-pair
            (if (bluish? (first fg))
                (first bg)
```

```
                 (first fg))
             (bluescreen (rest fg) (rest bg)))))))

; Wrapper:
; Mische Vordergrund fg und Hintergrund bg nach
   Bluescreen-Verfahren
(: mix (image image -> image))
(define mix
  (lambda (fg bg)
    (let ((fg-h (image-height fg))
          (fg-w (image-width fg))
          (bg-h (image-height bg))
          (bg-w (image-width bg)))
      (if (and (= fg-h bg-h)
               (= fg-w bg-w))
          (color-list->bitmap
           (bluescreen (image->color-list fg)
                       (image->color-list bg))
           fg-w
           fg-h)
          (violation "Dimensionen␣von␣Vorder-/Hintergrund␣
            verschieden")))))

; Yoda vor seine Hüte auf Dagobah setzen
```

```
(mix yoda dagobah) ⇝
```

Generierung aller natürlichen Zahlen (vgl. gemischte Daten)
Eine natürliche Zahl (natural) ist entweder

- die 0 (zero)
- der Nachfolge (succ) einer natürlichen Zahl

$$\mathbb{N} = \{0, (succ(0)), (succ(succ(0))), \ldots\}$$

Konstruktoren

```
(: zero natural)
(define zero 0)
(: succ (natural -> natural))
(define succ (lambda (n)(+ n 1)))
```

Vorgänger (pred), definiert für $n > 0$

```
(: pred (natural -> natural))
(define pred
        (lambda (n) (- n 1)))
```

Bedingte algebraische Eigenschaft (für check-property):

```
(==> <p> <t>)
```

Nur wenn $\langle p \rangle \rightsquigarrow$ #t ist, wird Ausdruck $\langle t \rangle$ ausgwertet und getestet $\langle t \rangle \rightsquigarrow$ #t

Codebeispiel 24: ==> als Einschränkungsoperator

```
; Eigenschaft nur auswerten, wenn n > 0 (==>)
(check-property
 (for-all ((n natural))
   (==> (> n 0)
        (= (succ (pred n)) n))))
```

Beispiel für Rekursion auf natürlichen Zahlen: Fakultät

$$
\begin{aligned}
0! &= 1 \\
n! &= n \cdot (n-1)!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3! &= 3 \cdot 2! \\
&= 3 \cdot 2 \cdot 1! \\
&= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\
&= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

$$10 = 3628800$$

Codebeispiel 25: Fakultät rekursiv

```
; Berechne n!
(: factorial (natural -> natural))
(check-expect (factorial 0) 1)
(check-expect (factorial 3) 6)
(check-expect (factorial 10) 3628800)

(define factorial
  (lambda (n)
```

```
    (cond ((= n 0) 1)
          ((> n 0) (* n (factorial (- n 1)))))))
```

Konstruktionsanleitung für Prozeduren über natürlichen Zahlen:

```
(:<f> (natural -> <t>))
        (define <f>
                (lambda (n)
                        (cond ((= n 0)...)
                              ((> n 0) ... (<f> (- n 1
                                 ))...))))
```

Beobachtung:

- Im letzten Zweig ist $n > 0 \rightarrow$ pred angewandt
- `(<f> (- n 1))` hat die Signatur $\langle$t$\rangle$

Satz:
Eine Prozedur, die nach der Konstruktionsanleitung für Listen oder natürliche Zahlen konstruiert wurde *terminiert immer* (= liefert immer ein Ergebnis).
(Beweis in Kürze)

Codebeispiel 26: Fehlerhafte Rekursionen

```
; Fehlerhaft: kein Fortschritt im rekursiven Aufruf
; => potentiell "unendliche" Reduktion
(define unfactorial
  (lambda (n)
    (cond ((= n 0) 1)
          ((> n 0) (* n (unfactorial n))))))

; Fehlerhaft: kein definierter Abbruch der Rekursion
; => Abbruch der Reduktion bei n = 0 ("cond: alle Tests
   ergaben #f")
(define not-factorial
  (lambda (n)
    (cond ((> n 0) (* n (not-factorial (- n 1)))))))
```

$\overbrace{(3\cdot(2\cdot(1}^{\text{merken}}\cdot 0!)))$
Die Größe eines Ausdrucks ist proportional zum Platzverbrauch des Reduktionsprozesses im Rechner

⇒ Wenn möglich Reduktionsprozesse, die *konstanten* Platzverbrauch - unabhängig von Eingabeparametern - benötigen

9.6.2015

Beobachtung: `(factorial 10).`

`(* 10(* 9(* 8(* 7(* 6(factorial 5))))))` $\underset{\text{Assozivität von}\,\cdot}{=}$ `(*(*(*(*(* 109)8)7)6)(factorial 5))` ⇝ `(* 30240(factorial 5))`

→ Multiplikationen können vorgezogen werden :-)

Idee: Führe Multiplikation sofort aus. Schleife des Zwischenergebnis (*akkumulierendes Argument*) durch die ganze Berechnung. Am Ende erhält der Akkumulatoren das Endergebnis.

Beispiel: Berechne 5!

`(: fac-worker (natural natural -> natural))`

n	acc	
-1 ↶ 5	1 ↷ · 5	neutrales Element
-1 ↶ 4	5 ↷ · 4	
-1 ↶ 3	20 ↷ · 3	
-1 ↶ 2	60 ↷ · 2	
-1 ↶ 1	120 ↷ · 1	
-1 ↶ 0	120	

```
; Berechne n!
; Wrapper
(: fac (natural -> natural))
(check-expect (fac 0) 1)
(check-expect (fac 3) 6)
(define fac
  (lambda (n)
    (fac-worker n 1)))

; Berechne n! (mit Zwischenergebnis/Akkumulator acc),
   endrekursiv
; Worker
(define fac-worker
  (lambda (n acc)
    (cond ((= n 0) acc)
```

```
        ((> n 0) (fac-worker (- n 1) (* n acc))))))
```

Ein Berechnungsprozess ist *iterativ*, falls seine Größe konstant bleibt.
Damit:

`factorial` nicht iterativ
`fac-worker` iterativ

Wieso ist `fac-worker` iterativ?
Der Rekursive Aufruf ersetzt den aktuell reduzierten Aufruf *vollständig*. Es gibt keinen *Kontext* (umgebenden Ausdruck), der auf das Ergebnis des rekursiven Aufrufs "wartet"
Kontext des rekursiven Aufrufs in:

- `factorial`: `(* n □)`
- `fac-worker`: keiner

Eine Prozedur ist *endrekursiv* (tail call), wenn sie keinen Kontext besitzt. Prozeduren, die nur endrekursive Prozeduren beinhalten, heißen selber endrekursiv. Endrekursive Prozeduren generieren *iterative* Berechnungsprozesse
`(: rev ((list-of %a))-> (list-of %a))`

Codebeispiel 27: Liste xs umdrehen

```
; Aufwand: 1/2 × n × (n + 1) Aufrufe von make-pair wenn xs die
   Länge n hat
(: rev ((list-of %a) -> (list-of %a)))

(check-expect (rev empty) empty)
(check-expect (rev (list 1 2 3 4)) (list 4 3 2 1))

(define rev
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) empty)
          ((pair? xs)
           (cat (rev (rest xs)) (list (first xs)))))))
```

Beobachtung: von `(rev (from-to 11000))`

$$\overbrace{\texttt{(cat}\quad\underbrace{\texttt{(list 1000 ... 2)}}_{\texttt{(cat (list 1000 ... 3) (list 2))}}\quad\texttt{(list 1))}}^{1000\cdot\texttt{make-pair}}$$

→ Aufrufe von `make-pair`: 1000+999+998+…+1

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ *Quadratische Aufrufe* :-(

Konstruiere iterative Listenumkehrfunktion `backwards`:

```
(: backwards-worker ((list-of %a)(list-of %a)-> (list-of %a)))
```

```
n
rest (list 123)
rest (list 23)
rest (list 3)
empty
```

Mittels **`letrec`** lassen sich Werte an lokale Namen binden.

```
(letrec
        ((⟨id1⟩ ⟨e1⟩) ...
        (⟨idn⟩ ⟨en⟩))⟨e⟩)
```

Die Ausdrücke $\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_n \rangle$ und $\langle e \rangle$ dürfen sich auf die Namen $\langle id_1 \rangle \ldots \langle id_n \rangle$ beziehen

Codebeispiel 28: Effizientere Variante eine Liste umzudrehen

```
; Wrapper
(: backwards ((list-of %a) -> (list-of %a)))

(check-expect (backwards empty) empty)
(check-expect (backwards (list 1 2 3 4)) (list 4 3 2 1))

(define backwards
  (lambda (xs)

    ; Liste xs umdrehen (mit Akkumulator acc, endrekursiv)
    ; Worker
    ; Aufwand: n Aufrufe von make-pair, wenn xs die Länge n hat
    (letrec ((backwards-worker
               (lambda (xs acc)
                 (cond ((empty? xs) acc)
                       ((pair? xs)
                        (backwards-worker (rest xs) (make-pair
                           (first xs) acc)))))))

      (backwards-worker xs empty))))
```

11.6.2015

Induktive Definition
Konstante Definition der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Definition: (Peamo Axiome)

(P1) $0 \in \mathbb{N}$

(P2) $\forall n \in \mathbb{N} : succ(n) \in \mathbb{N}$

(P3) $\forall n \in \mathbb{N} : succ(n) \neq 0$

(P4) $\forall n, m \in \mathbb{N} : succ(n) = succ(m) \Leftrightarrow n = m$

TODO: "Plot"mit punkten und Pfeilen

(P5) Für jede Menge $M \subset N$ mit $0 \in M$

und $\forall n : (n \in M \Rightarrow succ(n) \in M)$, gilt $M = \mathbb{N}$

”$\mathbb{N}$ enthält nicht mehr als die 0 und die durch $succ()$ generierten Elemente
”Nicht ist sonst in $\mathbb{N}$,
TODO: Plot von zwei kreisen ineinander Beweisschema der *vollständigen Induktion*
Sei $P(n)$ eine Eigenschaft einer Zahl $n \in \mathbb{N}$

```
(: P (natural -> boolean))
```

Ziel : $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$
Definiere $M = \{n \in \mathbb{N} | P(n)\} \subset \mathbb{N}$ M enthält die Zahlen n für die $P(n)$ gilt
Induktionsaxiom
Falls

$0 \in M$

und

$\forall n : (n \in M \Rightarrow succ(n) \in M)$

dann

$M \in \mathbb{N}$

Induktionsstart	Falls $P(0)$ und
Induktionsschritt	$\forall (P(n) \Rightarrow P(succ(n))$ dann $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
&1 && = 1\\
&1+3 && = 4\\
&1+3+5 && = 9\\
&1+3+5+7 && = 16\\
&\ldots\\
&P(n) && = \underbrace{\sum_{i=0}^{n}(2i+1)}_{\text{Summe der ersten n ungeraden Zahlen}} \stackrel{!}{=} (n+1)^2
\end{aligned}$$

Induktionsschluss P(0)

$$\sum_{0}^{0}(2i+1) = 2\cdot 0 + 1 = (0+1)^2 \checkmark$$

Induktionsschritt $\forall n(P(n)) = P(n+1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) &\stackrel{\sum}{=} \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1)\\
&\stackrel{i.v.}{=} (n+1)^2 + 2n + 3\\
&= n^2 + 4n + 4\\
&= ((n+1)+1)^2 \checkmark
\end{aligned}$$

Beispiel:

```
(define factorial
    (lambda (k)
        (if
            (= k 0) 1
            (* k (factorial (- k 1))))))
```

$P(x) \equiv$ `(factorial n)` $= \boxed{n!}$ $\boxed{x}$:(Racket Repräsentation für $x \in \mathbb{N}$)

Zeige : $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Induktionsbasis $P(0)$

`(factorial (`$\boxed{0}$`))`

$\stackrel{\star}{\leadsto}$ `((lambda (k) ...)`$\boxed{0}$`)`

$\leadsto$ `(if (=` $\boxed{0}$ `0)1 ...)`

$\leadsto$ `(if #t 1 ...)`

$\leadsto$ $1 = \boxed{0}! \checkmark$

Induktionsschritt: $\forall n : (P(n) \rightarrow P(n+1))$

`(factorial` $\boxed{n+1}$`)`

$\overset{\star}{\leadsto}$ `((lambda (n)...)` $\boxed{\texttt{n+1}}$ `)`

$\leadsto$ `(if (=` $\boxed{\texttt{n+1}}$ `0)1 ... (...))`

$\leadsto$ `(if #f 1 ... (...))`

$\leadsto$ `(*` $\boxed{\texttt{n+1}}$ `(factorial (-` $\boxed{\texttt{n+1}}$ `1)))`

Unter der Annahme, dass tatsächlich Subtraktion implementiert ist

$\leadsto$ `(*` $\boxed{\texttt{n+1}}$ `(factorial (-` $\boxed{\texttt{n}}$ `)))`

$\overset{iv}{=}$ `(*` $\boxed{\texttt{n + 1}}$ `n!)`

$= (n+1)!$ ✓

Beispiel:
Jede durch die Konstruktionsanleitung für Funktionen über natürliche Zahlen konstruierte Funktion liefert ein Ergebnis (*terminiert immer*)

```
(define f
        (lambda (n)
                (if
                        (= n 0) base
                        (step (f (n-1)) n))))
```

`(: base natural)`
`(: step (natural natural -> natural))` Bsp: step → `(lambda (x y)(* x y))`
Dann gilt $P(n) =$ `(f n)` terminiert (Mit Ergebnis der Signatur `natural`)
Zeige $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$
Induktionsbasis P(0):
`(f` $\boxed{\texttt{0}}$ `)`

$\leadsto$ `(if (=` $\boxed{\texttt{0}}$ `0) base ...)`

$\leadsto$ `(if #tbase`

$\leadsto$ base ✓

Induktionsschritt $\forall n : (P(n) \rightarrow P(n+1))$
`(f` $\boxed{\texttt{n+1}}$ `)`

$\leadsto$ `(if (=` $\boxed{\texttt{n+1}}$ `0) base ... (step ...))`

$\leadsto$ `(if #f base ... (step ...))`

$\rightsquigarrow$ `(step (f (-` $\boxed{\texttt{n+1}}$ `1))` $\boxed{\texttt{n+1}}$`)`

$\rightsquigarrow$ `(step` $\underbrace{(f\,\boxed{\texttt{n}})}_{\texttt{terminiert}}$ $\boxed{\texttt{n+1}}$`)`

$\Rightarrow$ `(step (f` $\boxed{\texttt{n}}$`)` $\boxed{\texttt{n+1}}$`)` terminiert

Definition:(Listen.endliche Folge)
Die Menge M^* (= Listen mit Elementen aus M + `list-of M` ist *induktiv* definiert

(L1)	`empty` $\in M^*$	Nicht leere Liste
(L2)	$\forall x \in M, xs \in M^*$	$\in M^*$
(L3)	Nichts sonst in M^*	

`(make-pair x xs)`

Beweisschema *Listeninduktion*
So $P(xs)$ eine Eigenschaft von Listen über M.
`(: P ((list-of M)-> boolean))`

Falls $P($`empty`$)$ und $\forall x \in M, xs : P(xs) \Rightarrow (P(xs) \Rightarrow (P($`make-pair x xs`$))$ dann $\forall xs \in M^* : P(xs)$	Induktionsanfang Indukstionsschritt

16.6.2015

Beispiel:

```
(define cat
        (lambda (xs ys)
                (cond
                        ((empty? xs ) ys)
                        ((pair? xs) (make-oair (first xs) (cat
                           (rest xs) ys))))))
```

(M^*, `cat`,`empty` ist ein *Monoid*)

$\begin{cases} (1) & \texttt{cat empty ys} = \text{ys} \\ (2) & \texttt{(cat xs empty)} = \text{xs} \\ (3) & \texttt{(cat (cat xs ys)ys)} = \texttt{(cat xs (cat ys zy))} \end{cases}$

Beweise:

(1) `(cat empty ys)` $\overset{*}{\rightsquigarrow}$ ys ✓

(2) $P(xs) =$ `(cat xs empty)` $=$ xs

Induktionsanfang $P($`empty`$)$

`(cat empty empty)` $\overset{(1)}{=}$ `empty` ✓

Induktionsschritt $\forall x \in M : P(xs) \Rightarrow P($`(make-pair x xs)`$)$

`(define make-pair mp)`

`(cat (mp x xs)empty)`

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ `(mp (first (mp x xs))(cat (rest (mp x xs))empty))`

$\rightsquigarrow$ `(mp x (cat xs empty))`

$\overset{i.v.}{=}$ `(mp x xs)` ✓

(3) Listeninduktion über xs (ys,zs $\in M^*$ beliebig)

$P(xs) \equiv$ `(cat (cat xs ys)zs)` = `(cat xs (cat ys zs))`

Induktionsanfang $P($`empty`$)$

`(cat (cat empty ys)zs)`

$\rightsquigarrow \overset{(1)}{=}$ `(cat ys zs)`

$\leftsquigarrow \overset{(1)}{=}$ `(cat empty (cat ys zs))` ✓

Induktionsschritt $\forall x \in M : P(xs) \Rightarrow P($`(make-pair x xs)`$)$

`(cat (cat (mp x xs)ys)zs))`

$\overset{\star}{\leadsto}$ `(cat (mp x (cat xs ys)) zs)`

$\overset{\star}{\leadsto}$ `(mp (cat (cat xs ys)) zs)`

$\overset{i.v.}{=}$ `(mp (cat (cat xs ys) zs))`

$\leftsquigarrow$ `(cat (mp x xs ) (cat ys zs))` ✓

Beispiel: Interaktion von `length` und `cat` (Distributivität)

```
(define length
        (lambda (xs)
                (cond
                        ((empty? xs) 0)
                        ((pair? xs) (+ 1
                                (length (rest xs)))))))
```

$P(xs)$: `(length (cat xs ys))` = `(+ (length xs) (length ys))`,
$ys \in M^*$ beliebig.
Induktionsbasis:
`(length (cat empty ys))`

$\overset{(1)}{=}$ `(length ys)`

$\overset{+}{=}$ `(+ 0 (length ys))`

$\leftsquigarrow$ `(+ (length empty) (length ys))` ✓

Induktionsschritt
`(length (mp x xs) ys)`

cat $\overset{\star}{\leadsto}$ `(length (mp x (cat xs ys)))`

length $\overset{\star}{\leadsto}$ `(+ 1 (length (rest (mp x (cat xs ys)))))`

rest $\overset{\star}{\leadsto}$ `(+ 1 (length (cat xs ys)))`

$\overset{i.v.}{=}$ `(+ 1 (+ (length xs) (length ys)))`

ass. $\overset{(+)}{=}$ `(+ (+ 1 (length xs) (length ys)))`

length $\overset{\star}{\leftsquigarrow}$ `(+ (length (mp x xs) (length ys)))` ✓

Prozeduren höherer Ordnung (higher-order *procedures*)

```
; Filtere Liste xs nach Elementen, die Prädikat p? erfüllen
; (Prozedur höherer Ordnung: Parameter p? ist selbst eine Funktion)
(: filter ((%a -> boolean) (list %a) -> (list %a)))
(define filter
        (lambda (p? xs)
          (cond
           ((empty? xs) empty)
           ((pair? xs)
                   (if (p? (first xs))
                       (make-pair (first xs)
                               (filter p? (rest xs)))
                       (filter p? (rest xs)))))))
```

Wert des Parameters `p?` ist Prozedur ⇒ kann angewendet werden

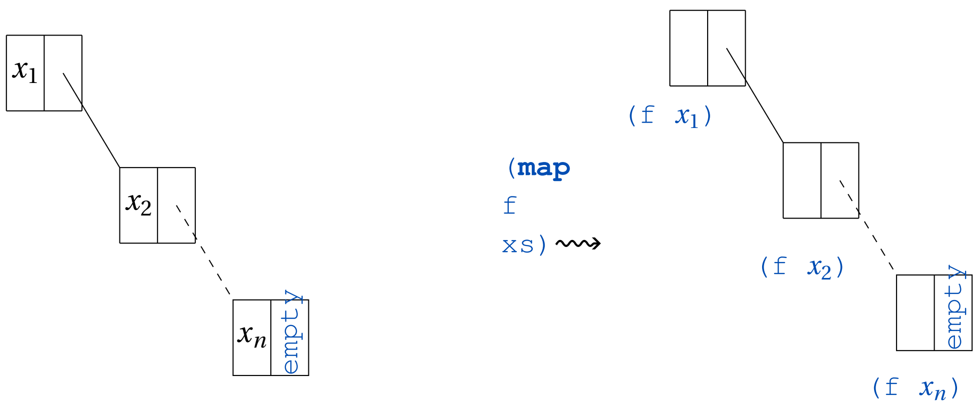
18.6.2015

Zwei Arten von *Higher Order Prozeduren* (H.O.P)

(1) akzeptieren, Prozeduren als Parameter oder/und

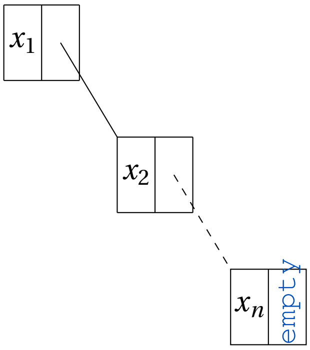
(2) liefern Prozeduren als Ergebnis

`filter` ist vom Typ (1).
H.O.P vermeiden Duplizierung von Code und führen zu kompakteren Programmen, verbesserte Lesbarkeit und verbesserte Wartbarkeit.
Beispiel: `(map f x)`

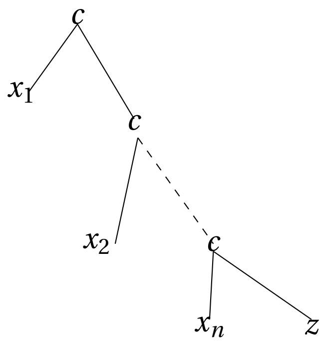


```
;Wende f auf Elemente von Liste xs an
(: map ((%a -> %b) (list-of %a) -> (list-of %a)))
(define map
        (lambda (f xs)
          (cond
            ((empty? xs) empty)
            ((pair? xs) (make-pair (f (first xs)
                                   (map f (rest xs))))))))
```

Allgemeine Transformation von Listen *Listenfaltung* (list folding)
Idee: Ersetze die Listenkonstruktoren `make-pair` und `empty` systematisch.



`(foldr z c xs)` ⇝



`(foldr z c xs)` wirkt als Spinetransformer

- `empty` ⇝z
- `make-pair` ⇝c
- Eingabe : Liste `(list-of %a)`
- Ausgabe : im Allgemeinen *keine* Liste mehr: `%b`

```
;Falte Liste xs bzgl. c und z
(: foldr (%b (%a %b -> %b) (list-of %a) -> %b))
(define foldr
        (lambda (z c xs)
          (cond
            ((empty? xs) z)
            ((pair? xs)
              (c (first xs)
                 (foldr z c (rest xs)))))))
```

Beispiele: Listenreduktion mit `foldr`
TODO: Großes Bild von foldr Funktionen

```
(: sum ((list-of number) -> number))
(define sum(lambda (xs)(foldr 0 + xs)))
```

Beispiel: Länge einer Liste durch Listenreduktion TODO: Bild Plotten

```
; Listenreduktion via foldr: Länge der Liste xs
(: my-length ((list-of %a) -> natural))
(define my-length
        (lambda (xs)
                (foldr 0 (lambda (x l) (+ 1 l)) xs)))
```

Codebeispiel 29: Fold und seine Anwendungen

```
; Listenreduktion via foldr: Summe der Liste xs
(: my-sum ((list-of number) -> number))
(define my-sum
  (lambda (xs)
    (foldr 0 + xs)))

; Listenreduktion via foldr: Produkt der Liste xs
(: my-product ((list-of number) -> number))
(define my-product
  (lambda (xs)
    (foldr 1 * xs)))

; Listenreduktion via foldr: Maximum der Liste xs
(: my-maximum ((list-of number) -> number))
(define my-maximum
  (lambda (xs)
    (foldr -inf.0 max xs)))

; Identität (auf Listen), implementiert via foldr
(: my-id ((list-of %a) -> (list-of %a)))
(define my-id
  (lambda (xs)
    (foldr empty make-pair xs)))

; Reimplementation von append via foldr
(: my-append ((list-of %a) (list-of %a) -> (list-of %a)))
(define my-append
  (lambda (xs ys)
    (foldr ys make-pair xs)))

; Reimplementation von map via foldr
(: my-map ((%a -> %b) (list-of %a) -> (list-of %b)))
(define my-map
  (lambda (f xs)
    (foldr empty
```

```
              (lambda (y ys) (make-pair (f y) ys))
              xs)))

; Reimplementation von reverse via foldr
(: my-reverse ((list-of %a) -> (list-of %a)))
(define my-reverse
  (lambda (xs)
    (foldr empty
           (lambda (y ys) (append ys (list y)))
           xs)))

; Listenreduktion via foldr: Länge der Liste xs
(: my-length ((list-of %a) -> natural))
(define my-length
  (lambda (xs)
    (foldr 0 (lambda (x l) (+ 1 l)) xs)))

; Reimplementation von filter mittels foldr
(: my-filter ((%a -> boolean) (list-of %a) -> (list-of %a)))
(define my-filter
  (lambda (p? xs)
    (foldr empty
           (lambda (y ys) (if (p? y)
                              (make-pair y ys)
                              ys))
           xs)))
```

23.6.2015

Teachpack 'universe' nutzt H.O.P Animationen (Sequenzen von Bildern/Szenen) zu definieren.

```
(big bang
  (⟨init⟩)
  (ontick ⟨tock⟩)
  (todraw ⟨render⟩⟨w⟩⟨h⟩))
```

- `(⟨init⟩ %a)` Startzustand
- `(: ⟨tock⟩ (%a -> %a))` Funktion, die einen neuen Zustand aus alten Zustand berechnet

- `(: ⟨render⟩ (%a -> image))` Funktion, die aus dem aktuellen eine Szene berechnet (wird in Fenster mit Dimension ⟨w⟩ · ⟨h⟩ Pixel angezeigt)

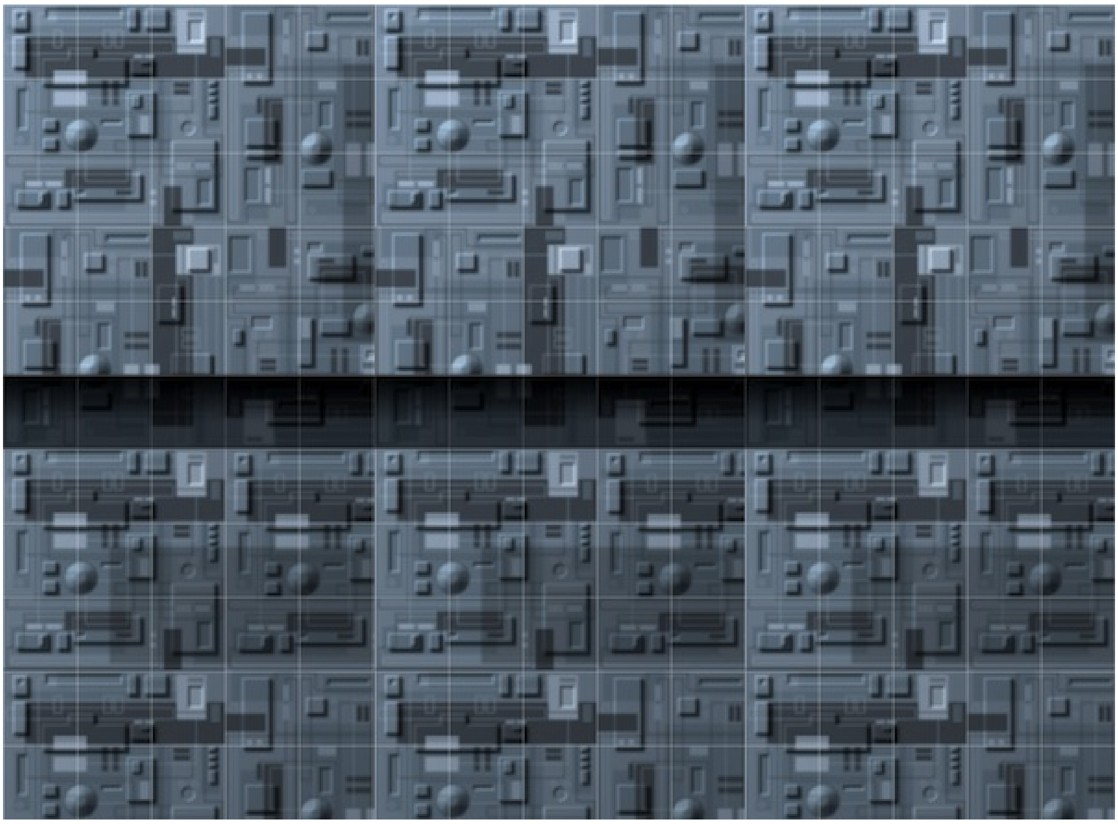
- Beim Schließen der Animation wird der letzte Zustand zurückgegeben

Codebeispiel 30: Ein animierter Zähler

```
; Erstellung von Animationen mit Teachpack "universe"
; (1) Zähler

(: scene (natural -> image))
(define scene
  (lambda (t)
    (text (number->string t) 100 "red")))
(big-bang 0
          (on-tick (lambda (t) (+ t 1)))
          (to-draw scene 200 100))
```

Codebeispiel 31: Ein animiertes Raumschiff

```
; Erstellung von Animationen mit Teachpack "universe"
; (2) X-Wing Fighter + Scrolling Death Star

(define death-star
```



```
)
```

```
(define x-wing )

; Erhalte einfachen Scrolling-Effekt durch Herausschneiden von
    Teilbildern
; aus dem Bild der Todessternoberfläche
; (zu crop und overlay: siehe Dokumentation des Teachpack
    "image2")
(: scroll-death-star (natural -> image))
(define scroll-death-star
  (lambda (t)
```

```
    (overlay x-wing
              (crop (modulo (* 8 t) 200) 0 400 440
                 death-star))))
(big-bang 0
          (on-tick (lambda (t) (+ t 1)))
```

Ausgabe der römischen Episoden nummern für Film f : `(roman (film-episode f))`
Gesuchte Funktion ist *Komposition* von zwei existierenden Funktionen:

(1) Erst `film-episode` anwenden, *dann*

(2) Wende `roman` auf das Ergebnis von (1) an

Komposition von Prozeduren allgemein:

$$(\underbrace{\texttt{(compose f g)}}_{\substack{\texttt{neue Prozedur realisiert} \\ \texttt{Komposition von f und g}}} \texttt{ x)} \equiv \texttt{(f (g x))}$$

[Mathematisch `(compose f g)` $\equiv f \circ g$]

```
(: compose (%b -> %c) ($a -> %b) -> (%a -> %c))
(define compose
  (lambda (f g)
    (lambda (x)
      (f (g x)))))
```

Codebeispiel 32: Zweites und Drittes Element durch Combined

```
; Greife auf das zweite Element der Liste xs zu
(: second ((list-of %a) -> %a))
(check-expect (second (list 1 2 3)) 2)
(check-expect (second (string->strings-list "SCF")) "C")
(define second
  (lambda (xs)
    ((compose first rest) xs)))


; Greife auf das dritte Element der Liste xs zu
(: third ((list-of %a) -> %a))
(check-expect (third  (list 1 2 3)) 3)
(check-expect (third (string->strings-list "SCF")) "F")
(define third
  (lambda (xs)
    ((compose first (compose rest rest)) xs)))
```

`repeat`: n-fache Komposition von f auf sich selbst
(n-fache Anwendung von f, Exponentation)

$$f^0 = \mathtt{id} \qquad (\mathtt{id} \equiv (\mathbf{lambda}\ (x)\ x))$$
$$f^n = f \circ f^{n-1}$$

```
(: repeat (natural (%a -> %a) -> (%a -> %a)))
(define repeat
  (lambda (n f)
    (cond
      ((= n 0)(lambda (x) x)
      ((> n 0)(compose f (repeat (- n 1) f)))))))
;Greife auf das n-te Element der Liste xs zu
(: nth (natural (list-of %a) -> %a))
(define nth
  (lambda (n xs)
    ((compose first (repeat (- n 1) rest))xs)))
```

Codebeispiel 33: Gibt die Funktion + zurück

```
; Funktionen, die ihre Argument schrittweise konsumieren

; Konsumiert Argumente x,y in einem Schritt (eine Reduktion
   von apply_)
(: plus (number number -> number))
(define plus
  (lambda (x y)
    (+ x y)))

; Konsumiert Argumente x,y in zwei Schritten (zwei Reduktionen
   von apply_).
; Nach dem ersten Schritt ist nur Argument x festgelegt,
   Ergebnis ist eine
; Funktion, die das zweite Argument y erwartet.
(: add (number -> (number -> number)))
(define add
  (lambda (x)
    (lambda (y)
      (+ x y))))

(map (add 1)  (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10));⇝ (list 2 3 4 5 6 7
    8 9 10 11)
```

```
(map (add 10) (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10));⇝ (list 11 12 13 14
    15 16 17 18 19 20)
```

Reduction: `((add 1)41)`

$\underset{\text{eval}_{id}}{\leadsto}$ `((lambda (x)(lambda (y)(+ x y))1)41)`

$\underset{\substack{\text{apply}_\lambda \\ [\text{lambda(x)}]}}{\leadsto}$ $\underbrace{\texttt{((lambda (y) (+ 1 y)}}_{\texttt{Funktion die 1 auf ihr Argument anwenden}}$`41)`

$\underset{\substack{\text{apply}_\lambda \\ [\text{lambda(y)}]}}{\leadsto}$ `(+ 1 41)`

25.6.2015

`(%a %b -> %c)` ⟶Applikation auf zwei Argumente (Signaturen `%a`, `%b`) ⟶`%c`

Curry ↓ ↑ uncurry = ↕

`(%a->(%b->%c))`→App. auf Arg. (Sig. `%a`)→`(%b %c)` App. auf Arg. (Sig. `%b`)→`%c`

Currying (Haskell B. Curry, Moses Schönfinkel)
Anwendung einer Prozedur auf ihr erstes Argument liefert Prozedur der restlichen Argumente.
Jede n-stellige Prozedur lässt sich in eine alternative curried Prozedur transformieren, die in n Schritte jeweils ein Argument konsumiert. Uncurry ist die umgekehrte Transformation.

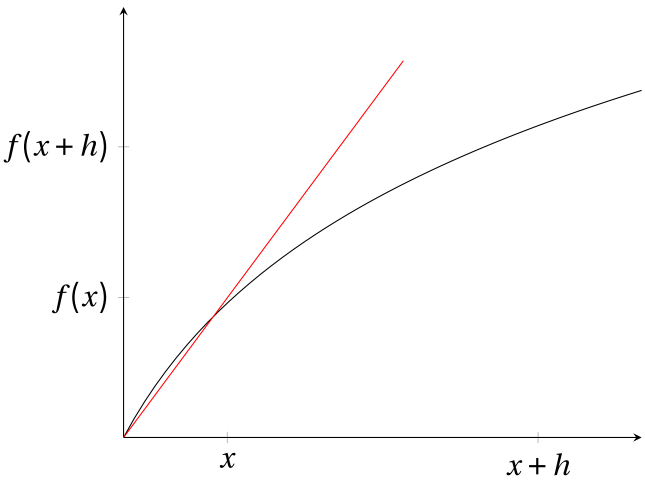
```
(: curry ((%a %b -> %c) -> (%a -> (%b -> %c))))
(define curry
  (lambda (f)
    (lambda (x)
      (lambda (y)
        (f x y)))))
(: uncurry (%a -> (%b -> %c) -> (%a %b -> %c)))
(define uncurry
  (lambda (f)
    (lambda (x y)
      ((f x) y))))
```

Es gilt für jeder Prozedur p:
`(uncurry (curry p))` = p „Schönfinkel Isomorphismus “

Codebeispiel 34: Einfache Anwendung von Curry

```
(map ((curry +) 1)  (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10))
;⇝ (list 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11)
(map ((curry +) 10) (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10))
;⇝ (list 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20)
(filter ((curry =) 2) (list 1 2 3 4 5 4 3 2 1))
;⇝ (list 2 2)
```

Erinnerung: Bestimmung der ersten Ableitung der rellen Funktion durch Bildung des Differentialqoutienten
Bildung des Differentialqoutienten:



$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Differenzenquotient
Steigung(⟋)

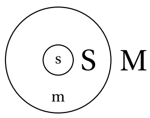
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

Operator ' (Ableitung konsumiert Funktionen und produziert Funktion)→_' ist higher Order

Codebeispiel 35: Ableitungen mit Curry

```
; Differenzenquotienten von f (mit Differenz h)
(: diffquot (real (real -> real) -> (real -> real)))
(define diffquot
  (lambda (h f)
    (lambda (x)
      (/ (- (f (+ x h)) (f x))
         h))))

; Berechne Differenzenquotienten mit Differenz h = 0.00001
; ((derive f) x) ≡ (f' x)
(: derive ((real -> real) -> (real -> real)))
(define derive
  ((curry diffquot) 0.00001))


; Beispielfunktion: f1(x) = xş + 2x
(: f1 (real -> real))
(define f1
  (lambda (x) (+ (* x x x)
                 (* 2 x))))

; Ableitung von f1(x)
; f1'(x) = 3xš + 2
(check-property
 (for-all ((x real))
```

```
    (expect-within ((derive f1) x)
                   (+ (* 3 x x) 2)
                   0.01)))
; Ableitung von f(x) = atan(x)
; f'(x) = 1 / (1 + xš)
(check-property
 (for-all ((x real))
   (expect-within ((derive atan) x)
                  (/ 1
                     (+ 1 (* x x)))
                  0.01)))
```

Charakteristische Funktion einer Menge $S \subset M$ 

Charakteristische Funktion für S: `(:`χ_s `(M -> Boolean))`

$$\chi_s(x) = \begin{cases} \texttt{\#t} & x \in S \\ \texttt{\#f} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\chi_s(m) = \texttt{\#f}$ $\chi_s(s) = \texttt{\#t}$

Idee Repräsentiere $S \subseteq$ durch Prozedur `(M -> boolean)` und Mengenoperation auf Prozeduren (H.O.P)

Codebeispiel 36: Grundlagen Mengenimplementierung

```
; Charakteristische Funktion (M -> boolean) als Repräsentation
; für eine Menge S ⊆ M
(define set-of
  (lambda (t)
    (signature (t -> boolean))))

; S42 = { x ∈ ℤ | x > 42 }
(: S42 (set-of integer))
(define S42
  (lambda (x)
    (> x 42)))

; Leere Menge ∅
(: empty-set (set-of %a))
(define empty-set
  (lambda (x)
    #f))

; Ist Element x in der Menge S (x ∈ S)?
```

```
(: set-member? (%a (set-of %a) -> boolean))
(define set-member?
  (lambda (x S)
    (S x)))
```

:-) Darstellung unendlicher Mengen ($S_42 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 42\}$)

:-) Mengenoperationen ($\cup, \cap, \setminus$) in *Konstanter Zeit*

Element x in Menge S einfügen:

$$\chi_{S\cup\{x\}}(y) = \begin{cases} \#f & x = y \\ \chi_s(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

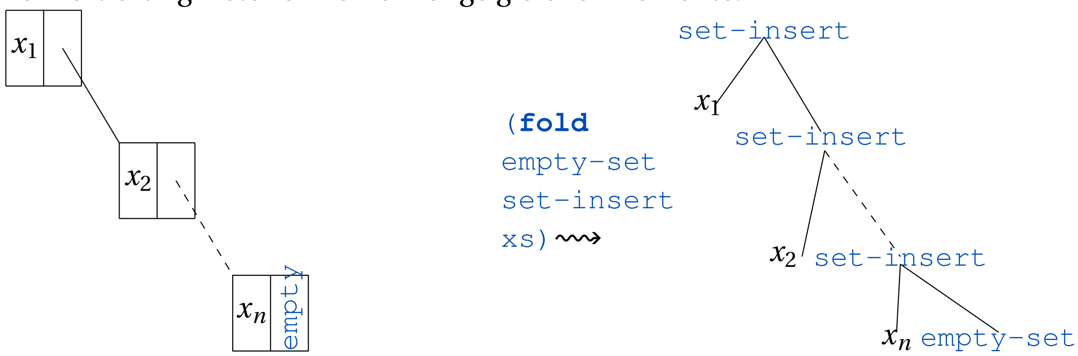
Codebeispiel 37: Erweiterte Mengenoperationen

```
; Element x in Menge S hinzufügen: S ∪ {x}
(: set-insert (number (set-of number) -> (set-of number)))
(define set-insert
  (lambda (x S)
    (lambda (y)
      (or (= y x)
          (S y)))))

; Test: die leere Menge enthält kein Element
(check-property
 (for-all ((x integer))
   (boolean=? (set-member? x empty-set) #f)))

; Test: die Menge ∅ ∪ {x} enthält x
(check-property
 (for-all ((x integer))
   (set-member? x (set-insert x empty-set))))


; Konstruiere {1,2,3,4,5} = ((((∅ ∪ {1}) ∪ {2}) ∪ {3}) ∪ {4})
   ∪ {5})
(: 1-to-5 (set-of integer))
(define 1-to-5
  (set-insert
   5
   (set-insert
    4
    (set-insert
     3
```

```
      (set-insert
       2
       (set-insert
        1 empty-set))))))
```

30.6.2015

Konvertierung Liste xs in eine Menge gleicher Elemente.



Codebeispiel 38: Konvertiert eine Liste zu einer Menge

```
; Konvertiere Liste xs in Menge
(: list->set ((list-of number) -> (set-of number)))
(define list->set
  (lambda (xs)
    (fold empty-set set-insert xs)))

; Beispiel: Konstruiere {1,2,...,10}
(: 1-to-10 (set-of integer))
(define 1-to-10
  (list->set (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)))
```

Vereinigung: $\chi_{S\cup T}(x) = \chi_S(x) \vee \chi_T(x)$.
Weitere Mengenoperationen analog:

Codebeispiel 39: Mengenoperationen $\setminus$, $\cup$, $\cap$, $\triangle$

```
; Element x aus Menge S löschen
(: set-delete (number (set-of number) -> (set-of number)))
(define set-delete
  (lambda (x S)
```

```
    (lambda (y)
      (if (= y x)
          #f
          (S y)))))

; S ∪ T
; x ∈ S ∪ T <=> x ∈ S ∨ x ∈ T
(: set-union ((set-of %a) (set-of %a) -> (set-of %a)))
(define set-union
  (lambda (S T)
    (lambda (x)
      (or (S x) (T x)))))

; S ∩ T
; x ∈ S ∩ T ⇔ x ∈ S ∧ x ∈ T
(: set-intersect ((set-of %a) (set-of %a) -> (set-of %a)))
(define set-intersect
  (lambda (S T)
    (lambda (x)
      (and (S x) (T x)))))

; S \ T
; x ∈ S \ T ⇔ x ∈ S ∧ x ∉ T
(: set-difference ((set-of %a) (set-of %a) -> (set-of %a)))
(define set-difference
  (lambda (S T)
    (lambda (x)
      (and (S x) (not (T x))))))
```

Charakteristische Funktion zur Repräsentation Mengen:

(1) Performance: `set-member` hat lineare Laufzeit bei mit `set-insert` konstruierte Mengen (wie Liste!)

(2) Vorteile:

+ unendliche Mengen darstellbar

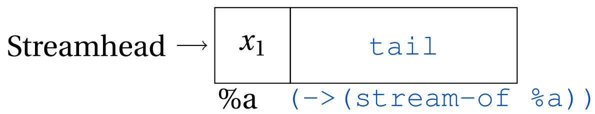
+ Mengenoperationen in konstanter Zeit durchführbar

(3) Nachteile

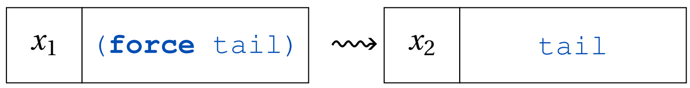
- Elemente sind nicht auf zählbar

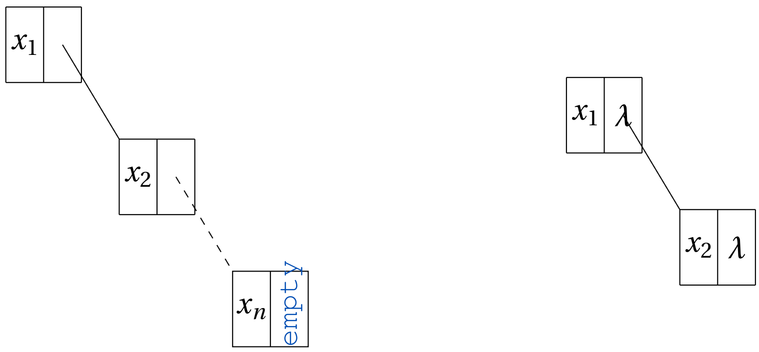
Streams `(stream-of %a)` :unendliche Ströme von Elementen x, mit Signatur %a

Ein Stream ist ein Paar:
-Erst eine Ausführung des Tails (`force`) erzeugt nächstes Stream-Element (faher



auch *lazylist*).
Vergleich:





Verzögerte Auswertung eines Ausdrucks (*delayed Evaluation*):

- `(delay e)`: Verzögere die Auswertung des Ausdruckes e und liefere "Versprechen" (`promise`) e bei Bedarf später auswerten zu können.
  `(delay e)` ≡ `(lambda () e )` — nicht ausgewertet
  `(force p)` Erzwinge Auswertung des `promise`. p liefert Wert zurück

```
(: force ((-> %a)->%a))
(define force
  (lambda (p)
    (p)))
```

Codebeispiel 40: Streams

```
; Promise, ein Wert des Vertrags t zu liefern (0-stellig
  Prozedur)
(define promise
  (lambda (t)
```

```
    (signature (-> t))))

; Verzögerte Auswertung (delay)
;
; Variante 1:
; (delay e)   (lambda () e)
;
; Variante 2 (nutzt selbstdefinierte Scheme-Syntax-Regel,
  verfügbar ab
; Sprachebene "DMdA - fortgeschritten"):
;
; (define-syntax delay
;   (syntax-rules ()
;     ((_ e)
;      (lambda () e))))

; Erzwungene Auswertung
(: force ((promise %a) -> %a))
(define force
  (lambda (p)
    (p)))

; Beispiel:
; Promise (werde 41+1 berechnen, falls gefordert)
(: will-evaluate-to-42 (promise natural))
(define will-evaluate-to-42
  (lambda ()      ; oder äquivalent mit Variante 2: (delay (+ 1
     41))
    (+ 41 1)))

; Verzögerte Ausführung...
will-evaluate-to-42
; ... und erzwungene Ausführung
(force will-evaluate-to-42)

; Polymorphe Paare (isomorph zu `pair')
(: make-cons (%a %b -> (cons-of %a %b)))
(: head ((cons-of %a %b) -> %a))
(: tail ((cons-of %a %b) -> %b))
(define-record-procedures-parametric cons cons-of
  make-cons
  cons?
  (head
```

```
   tail))

; Ein Stream besteht aus
; - einem ersten Element (head)
; - einem Promise, den Rest des Streams generieren zu können
    (tail)
(define stream-of
  (lambda (t)
    (signature (cons-of t (promise (stream-of t))))))

; Beispiel:
; Stream mit Zahlen ab n erzeugen
(: from (number -> (stream-of number)))
(define from
  (lambda (n)
    (make-cons n (lambda () (from (+ n 1))))))

; Beispiel (Stream  Liste):
; Erste n Elemente des Streams str in eine Liste extrahieren
(: stream-take (natural (stream-of %a) -> (list-of %a)))

(check-expect (stream-take 5 (from 1)) (list 1 2 3 4 5))
(check-expect (stream-take 0 (from 1)) empty)

(define stream-take
  (lambda (n str)
    (if (= n 0)
        empty
        (make-pair (head str)
                   (stream-take (- n 1) (force (tail str)))))))

; Beispiel (Stream  Stream):
; Filtere Stream str bzgl. Prädikat p?
(: stream-filter ((%a -> boolean) (stream-of %a) -> (stream-of
   %a)))

(check-expect (stream-take 10
                           (stream-filter (lambda (x) (=
                              (remainder x 2) 0))
                                          (from 1)))
              (list 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20))

(define stream-filter
```

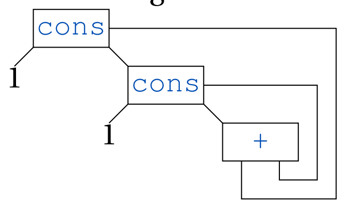
```
(lambda (p? str)
  (if (p? (head str))
      (make-cons (head str)
                 (lambda () (stream-filter p? (force (tail
                     str)))))
      (stream-filter p? (force (tail str))))))
```

2.7.2015

Generiere den unendlichen Strom der Fibonacci Zahlen.
fib(0) = 1
fib(1) = 1
fib(n) = fib(n-1) + fib(n - 2)
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...
↑ ab hier jeweils Summe der beiden Vorgänger
Beobachtung:

	1 1 2 3 5
+	1 2 3 5
	2 3 5 8

Stream-Diagramm zu fibs:



Codebeispiel 41: Stream aller Fibonacci Zahlen

```
; Beispiel (Streams  Stream):
; Erzeuge neuen Stream durch die Anwendung von f
; auf die Heads der Streams str1, str2
(: stream-zipWith ((%a %b -> %c) (stream-of %a) (stream-of %b)
   -> (stream-of %c)))
(define stream-zipWith
  (lambda (f str1 str2)
    (make-cons (f (head str1) (head str2))
               (lambda () (stream-zipWith f
                                          (force (tail str1))
                                          (force (tail
                                              str2)))))))
```

```
; Die unendliche Folge der Fibonacci-Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, ...
(: fibs (stream-of natural))
(check-expect (stream-take 10 fibs) (list 1 1 2 3 5 8 13 21 34
    55))
(define fibs
  (make-cons
   1
   (lambda ()
     (make-cons
      1
      (lambda ()
        (stream-zipWith +
                        fibs
                        (force (tail fibs))))))))
```

Die Menge der Binärbäume $T(m)$ ist induktiv definiert:

(T1) `empty-tree` $\in T(M)$

(T2) $\forall x \in M$ und $l, r \in T(M)$: `(make-node l x r)` $\in T(M)$

(T3) nichts sonst in $T(M)$

Hinweis:

- Jeder Knoten (`make-node`) in einem Binärbaum hat zwei Teilbäume sowie eine Markierung (`(label)`).
- Vegleiche:

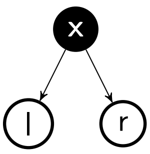
  M^* und $T(M)$

  `empty` und `empty-tree`

  `make-pair` und `make-node`

Visualisierung:

- `empty-tree` □
- `(make-node x l r)`



- Die Knoten mit Markierung x ist *Wurzel* (root) des Baumes

- Ein Knoten, der nur leere Teilbäume beinhaltet heißt *Blatt* (leaf). Alle anderen Knoten heißen *innere Konten* (inner-nodes)

Beispiel für Binärbäume der Menge $T(M)$
(Binär-) Bäume haben zahlreiche Anwendungen:

Abbildung 1: Baum t

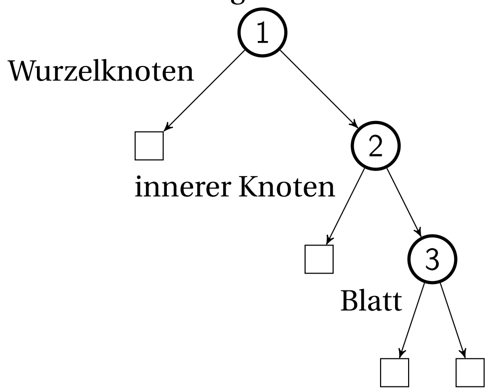
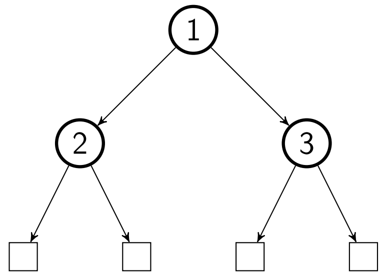


Abbildung 2: Baum t_2 *balanciert*, alle Teilbäume auf einer Tiefe haben die selbe Anzahl an Knoten



- Suchbäume (z.B Datenbanken)
- Datenkompression
- Darstellung von Termen (Ausdrücken)

Bäume sind *die* Induktiv definierte Datenstruktur

Codebeispiel 42: Verschiedene Bäume

```
; Ein Knoten (node) eines Binärbaums besitzt
; - einen linken Zweig (left-branch),
```

```
; - eine Markierung (label) und
; - einen rechten Zweig (right-branch)
(: make-node (%a %b %c -> (node-of %a %b %c)))
(: node-left-branch  ((node-of %a %b %c) -> %a))
(: node-label        ((node-of %a %b %c) -> %b))
(: node-right-branch ((node-of %a %b %c) -> %c))
(define-record-procedures-parametric node node-of
  make-node
  node?
  (node-left-branch
   node-label
   node-right-branch))

; Ein leerer Baum (empty-tree) besitzt
; keine weiteren Eigenschaften
(: make-empty-tree (-> the-empty-tree))
(define-record-procedures the-empty-tree
  make-empty-tree
  empty-tree?
  ())

; Der leere Baum (Abkürzung)
(: empty-tree the-empty-tree)
(define empty-tree (make-empty-tree))

; Signatur für Binärbäume (btree-of t) mit Markierungen des Signatur t
; (im linken/rechten Zweig jedes Knotens findet sich jeweils wieder
; ein Binärbaum)
(define btree-of
  (lambda (t)
    (signature (mixed the-empty-tree
                      (node-of (btree-of t) t (btree-of t))))))
;                              \___________/   \___________/
;
;                                 zweifache Rekursion, s. (list-of t)


; Konstruiere Blatt mit Markierung x
(: make-leaf (%a -> (btree-of %a)))
(define make-leaf
```

```
  (lambda (x)
    (make-node empty-tree x empty-tree)))


; Beispiel: t1 (rechts-tief, listen-artig)
(: t1 (btree-of natural))
(define t1
  (make-node empty-tree
             1
             (make-node empty-tree
                        2
                        (make-node empty-tree
                                   3
                                   empty-tree))))

; Beispiel: t2 (balanciert)
(: t2 (btree-of natural))
(define t2
  (make-node (make-leaf 2)
             1
             (make-leaf 3)))


; Beispiel: Klassifikation von Star Wars Charakteren
; (left branch  "no", right branch  "yes")
(: classifier (btree-of string))
(define classifier
  (make-node (make-node (make-node (make-leaf "Han␣Solo")
                                   "female?"
                                   (make-leaf "Padme␣Amidala"))
                        "droid?"
                        (make-node (make-leaf "C-3PO")
                                   "astromech?"
                                   (make-leaf "R2D2")))
             "force?"
             (make-node (make-node (make-leaf "Luke␣Skywalker")
                                   "prequel?"
                                   (make-leaf "Mace␣Windu"))
                        "dark␣side?"
                        (make-node (make-leaf "Emperor")
                                   "pilot?"
                                   (make-leaf "Darth␣
                                      Vader")))))
```

Die *Tiefe* (depth) eines Baumes ist die maximale Länge eines Weges von der Wurzel von t zu einem leeren Baum. Also:

`(btree-depth empty-tree)` ⇝0

`(btree-depth t1)` ⇝3

`(btree-depth t2)` ⇝2

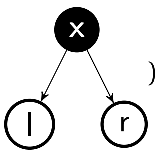
Schablone (gemischte Daten)

```
(: btree-depth ((btree-of %a) -> natural))
(define btree-depth
  (lambda (t)
    (cond ((empty-tree? t) 0)
          ((node? t) (+ 1
              (max (btree-depth (node-left-branch t))
                   (btree-depth (node-right-branch t))))))))
```

7.7.2015

TODO: Grust code Tree-size
Einschub: Pretty-Printing von Bäumen
Prozedur `(pp t)` erzeugt formatierten String für Binärbaum t.

`(pp □) = "□"`

`(pp`  `) =`

Idee : Repräsentiere formatierten String als *Liste von Zeilen* (Strings).

⇒(1) Nutze `(string-append)` um Zeilen-String zu definieren (horizontale Konkatenation).

(2) Nutze `(append)` um die einzelnen Zeilen zu einer Liste von Zeilen zusammenzusetzen (vertikale Konkatenation)

Erst direkt vor der Ausgabe werden die Zeilen-Strings zu einem auszugebenden String zusammengesetzt `(strings-list->string)`
TODO: Grusts Code

Induktion über Binärbäume
Sei $P(t)$ eine Eigenschaft von Binärbäumen $t \in T(M)$, also `(: P ((btree-of M)-> boolean))`.

Induktionsbasis
Induktionsschritt

Falls (empty-tree) und
$\forall x \in M, r, l \in T(M): P(l) \land P(r) \Rightarrow P$ (make-node l x r)
dann
$\forall t \in T(M): P(t)$

Beispiel:
Zusammenhang zwischen Größe (btree-size) und Tiefe (btree-depth) eines Binärbaums t. („Ein Baum der Tiefe n enthält mindestens n und höchstens $2^n - 1$ Konten “).
$P(t) \equiv$ (btree-depth t) $\leq$ (btree-size t) $\leq 2^{\texttt{(btree depth t)}} - 1$
Induktionsbasis P((empty-tree)*)*
(size empty-tree)

$$\overset{*}{\rightsquigarrow} 0$$

$$\underset{[\text{depth}]}{=} 2^0 - 1 \checkmark$$

Induktionsschritt $(P(l) \land P(r) \Rightarrow P(make - nodelxr)$
(size (make-node l x r)))

$$\underset{[size]}{\rightsquigarrow} \texttt{(size l)} + 1 + \texttt{(size r)}$$

$$\underset{[i.v]}{=} 2^{\texttt{(depth l)}} - 1 + 1 + 2^{\texttt{(depth r)}} - 1$$

$$= 2^{\texttt{(depth l)}} + 2^{\texttt{(depth r)}} - 1$$

$$\leq 2 \cdot \max(2^{\texttt{(depth l)}}, 2^{\texttt{(depth r)}}) - 1$$

$$= 2 \cdot 2^{\max(\texttt{(depth rl)}, \texttt{(depth r)})} - 1$$

$$\underset{[depth]}{\leftsquigarrow} 2^{\texttt{(depth (make-node l x r))}} - 1 \checkmark$$

Wie müsste sich btree-fold eine fold-Operation für *Binärbäume* verhalten? Tree Transformer für Baum t: TODO: Bild

```
(: btree-fold (%a (%a %b %a -> %a) (tree-of %b )-> %b))
(define btreefold
  (lambda (z f t)
    (cond ((empty? t)z)
          ((node? t)(f (btree-fold z f(node-left-branch t)))
                     (node-label t)
                     (btree-fold z f (node-right-branch t))))))
```