Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

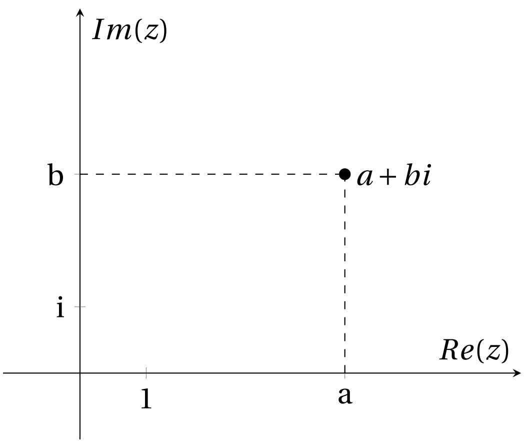
1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} \textit{Addition:} \quad & (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i \\ \textit{Multiplikation:} \quad & (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i^{1} \end{aligned}$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C},\ a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$. Rein imaginäre Zahlen: $b \cdot i, b \in \mathbb{R},\ (0 + bi)$
i *imaginäre Einheit.* $z = a + bi \in \mathbb{C}$.
$a = \Re(z)$ Realteil von z ($Re(z)$).
$b = \Im(z)$ Imaginärteil von z ($Im(z)$).
$\bar{z} = a - bi$ $(= a + (-b)i)$ Die zu z *konjugiert komplexe Zahl.*

1.2 Veranschaulichung



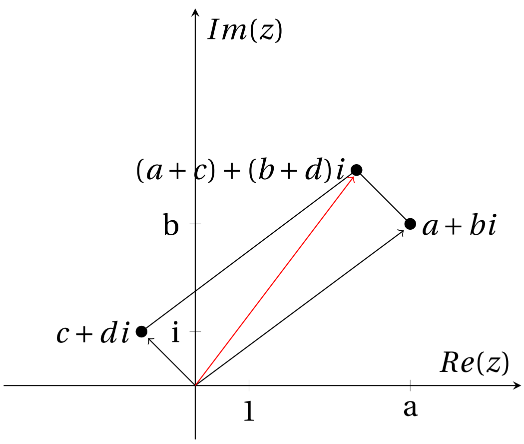


Abbildung 1: Addition entspricht Vektoraddition

1.3 Rechenregeln in $\mathbb{C}$

a) Es gelten alle Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$.
(z.B Kommutativität bzgl. $+, \cdot$: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$)
Inversenbildung bzgl. $\cdot$:
$z = a + bi \neq 0$, d.h $a \neq 0$ oder $b \neq 0$:

[1] Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ beachten

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$
$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Beispiel: $\frac{5-7i}{3+2i} = (5-7i)\cdot(3+2i)^{-1}$
$= (5-7i)\cdot(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i)$
$= (\frac{15}{13} - \frac{14}{13}) + (-\frac{10}{13} - \frac{21}{13})i$
$= \frac{1}{13} - \frac{31}{13}i$

Speziell: $(bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i$
insbesondere: $\frac{1}{i} = -i$

b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}:$
$$\bar{\bar{z}} = z$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

1.4 Definition Absolutbetrag

a) *Absolutbetrag* von $z = a + bi \in \mathbb{C} : |z| = +\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R},\geq 0}$

$$\boxed{a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}}$$

$|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = (a^2+b^2) + 0i = a^2 + b^2$$

$|z|$ = Abstand von z zu 0
= Länge des Vektors, der z entspricht

b) Abstand von $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

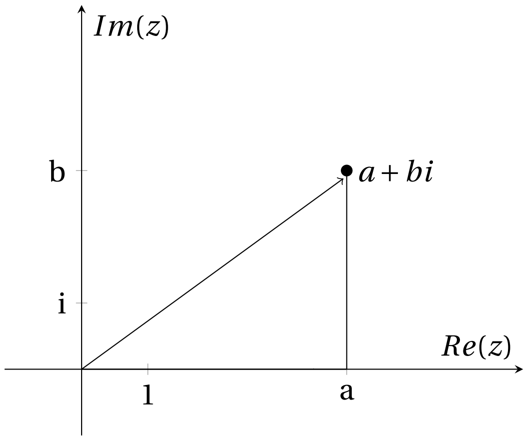


Abbildung 2: Graphische Definition des Absolutbetrages

1.5 Rechenreglen für den Absolutbetrag

(a)
$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

(b)
$$|\, z_1 \cdot z_2 \,| = |z_1| \cdot |z_2|$$

(c)
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$|-z| = |z|$$

1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

a) Jeder Punkt $\neq (0,0)$ lässt sich durch seine Polarkoordinaten (r,φ) beschreiben:
   $-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$

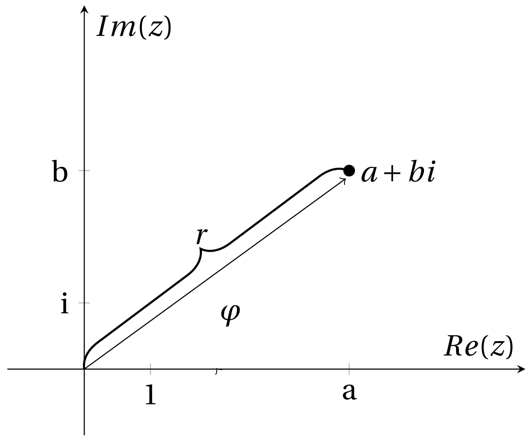
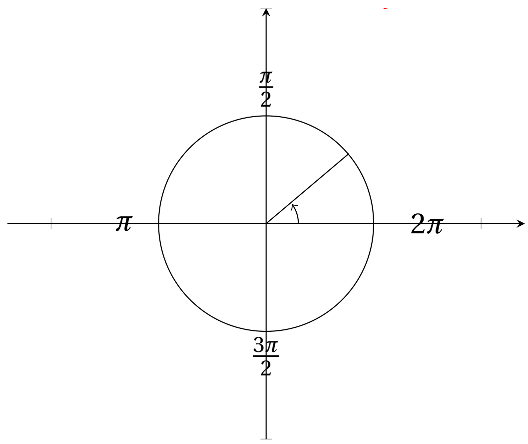


Abbildung 3: Polarkoordinaten

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes

Abbildung 4: Umrechnung Grad zu Bogenmaß



Umfang:2π
φ in Grad $\widehat{=} \frac{2\pi\cdot\varphi}{360}$ im Bogenmaß
Für Punkte mit kartesischen Koordinaten $\neq$ (0,0) werden als Polarkoordinate (r,φ) verwendet.

b) komplexe Zahl $z = a + ib$

$$\begin{aligned} r &= |z| = +\sqrt{a^2+b^2} \\ a &= |z| \cdot \cos(\varphi) \\ b &= |z| \cdot \sin(\varphi) \\ z &= |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi) \\ z &= |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

Darstellung von z durch Polarkoordinate

Beispiel: a) $z_1 = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
$= 2 \cdot (0,5\sqrt{2} + i \cdot 0.5\sqrt{2})$

b) $z_2 = 2 + i$
$|z_2| = \sqrt{5}$
$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}} i)$ Suche φ mit $0 \leq 2\pi$ mit $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}} z_2 \approx \sqrt{5} \cdot$
$(\cos(0,46) + i \cdot \sin(0,46))$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis:
$\cos(\varphi) + i\sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

(a) $$\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$$

(b) $$\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot sin(\varphi) \cdot \sin(\psi$$

1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a) $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
$z = |z| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$
$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + i(\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi))$
$w \cdot z = |w \cdot z|(\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$

b) $z = i, w = a + ib$
$i \cdot w = -b \cdot ia$
Multiplikation mit i $\hat{=}$ Drehung um 90°

1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexe Exponentialfunktion einführen.
e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ e = Euler'sche Zahl $\approx 2,718718\ldots$

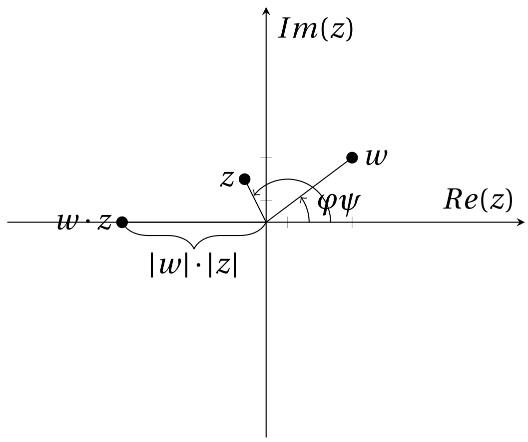


Abbildung 5: Multiplizieren komplexer Zahlen

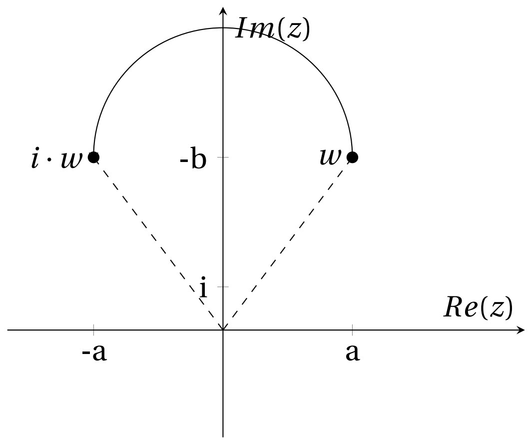


Abbildung 6: Multiplikation mit i

$e^{z_1} = cde^{z_2} = e^{z_1+z_2}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
Es gilt: $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$
Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}, r = |z|, \varphi$ Winkel
$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ ist Polarform von z.
$z = a + bi$ ist kartesische Form von z. $\bullet(r, \varphi)$ Polarkoordinaten
$|e^{i\varphi}| = +\sqrt{cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$
$e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Punkte auf dem Einheitskreis.
$e^{i\pi} = -1$
$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ Euler'sche Gleichung

1.10 Satz

Sei $w = \mid w \mid \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

a) Ist $m \in \mathbb{Z}$, so ist $w^m = \mid w \mid^m \cdot (\cos(m \cdot \varphi) + i \cdot \sin(m \cdot \varphi))$
$(m < 0 : w^m = \frac{1}{w^{|m|}})$, $w \neq 0$

b) Quadratwurzeln

c) Ist $n \in \mathbb{N}$, $w \neq 0$, so gibt es genau n n-te Wurzeln von w :
$\sqrt[n]{w} = + \sqrt[n]{\mid w \mid} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}))$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Beweis. a) richtig, wenn $m = 0, 1$
$m \geq 2$. Folgt aus ($\star$)
$m = -a$:
$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot \mid w \mid \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$
$= \frac{1}{w} = \frac{1}{mid w| \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))}_{=1}} \cdot \mid w \mid \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$
$= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi + i \cdot \sin(-\varphi)) = \mid w \mid^{-1} \cdot (\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi))$

□

1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus i :
$|i| = 1$
Nach 1.10 b): $\sqrt{i} = \pm(\cos(\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
$= \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)$

1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom
$x^n - w$ $(w \in \mathbb{C})$
eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ (sogar n verschiedene wenn $w \neq 0$)
Es gilt sogar : *Fundamentalsatz der Algebra*
(C. F. Gauß 1777-1855)
Jedes Polynom $a_n x^n + \ldots + a_0$
mit irgendwelchen Koeffizienten: $a_n \ldots a_0 \in \mathbb{C}$ hat Nullstelle in $\mathbb{C}$

2 Folgen und Reihen

2.1 Definition

Sei k $\in \mathbb{Z}$, $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$
$(k = 0 A_0 \in \mathbb{N}_0, k = 1, A_n \in \mathbb{N})$
Abbildung a : $A \Rightarrow \mathbb{R}$(oder $\mathbb{C}$)

$$m \Rightarrow a_n$$

heißt *Folge* reeller Zahlen

$$(a_k, a_{k-1} \ldots)$$

Schreibweise:
$(a_m)_{m>k}$ oder einfach (a_m)
a_m heißt *m-tes Glied* der Folge, m *Index*

2.2 Beispiel

a) $a_n = 5$ für alle $n > 1$
$(5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,\ldots)$

b) $a_n = n$ für alle $n > 1$
(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...)

c) $a_n = \frac{1}{n}$
$(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

d) $a_n \frac{(n+1)^2}{2^n}$
$(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \ldots)$

e) $a_n = (-1)^n$
$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$

f) $a_n = \frac{1}{2} a_{n_1} = \frac{1}{a_{n-1}}$ für $n \geq 2, a_1 = 1$
$(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \ldots)$

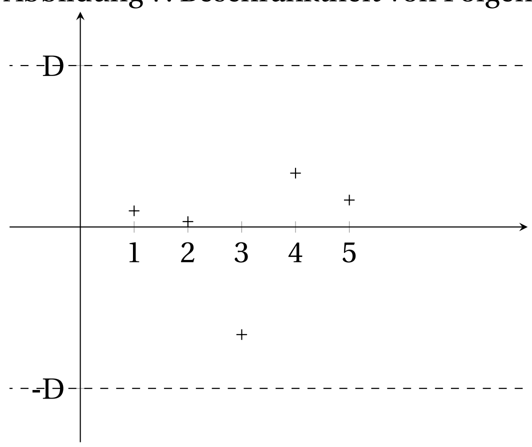
g) $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
$(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \ldots)$

h) $a_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \cdot \frac{1}{i}$
$(-1, \frac{-1}{2}, -\frac{-5}{6}, \dots)$

2.3 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n>k}$ heißt *beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.
D.h. $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$ für alle $n > k$.

Abbildung 7: Beschränktheit von Folgen



2.4 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt *konvergent* gegen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (konvergent gegen ε), falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) :| a_n - c |< \varepsilon$
$c = \lim_{n\Rightarrow\infty} a_n$ (oder einfach $c = \lim a_n$)
c heißt *Grenzwert* (oder Limes) der Folge (a_n)
(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))
Eine Folge die gegen 0 konvertiert, heißt *Nullfolge*

2.5 Beispiele

a) $r \in \mathbb{R} : a_n = r$ für alle $n \geq 1$
$(r, r, \dots)$
$\lim_{n\Rightarrow\infty} = r$
$| a_n - r |= 0$ für alle n
Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man $n(\varepsilon) = 1$ wählen

b) $a_n = n$ für alle $n \geq 1$
Folge ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

c) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$
(a_n) ist Nullfolge.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Suche Index $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - o| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$
D.s. es muss gelten.
$\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$
Ich brauche : $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$
Ich brauche $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$
Aus Mathe I folgt, dass solch ein $n(\varepsilon)$ existiert.
z.B $n(\varepsilon) - \lceil \frac{1}{2} \rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$
Dann:
$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$

d) $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$ für lle $n \geq 1$
Behauptung: $\lim_{n \Rightarrow \infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a-3| &= |\frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3| &&= |\frac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1}| \\ &= |\frac{-3n-2}{n^2+n+1}| &&= \frac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Benötigt wird $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ für alle $n > n(\varepsilon)$.
$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$
Wähle $n(\varepsilon)$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$
Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$.
$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$
Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

e) $a_n = (-1)^n$ beschränkte Folge $-1 \leq a_{\leq} 1$ konvergiert nicht.
Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ↯

2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: 2.5e))

Beweis. Sei $c = \lim a_n$, wähle $\varepsilon = 1$,
Es existiert $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - c| < 1$ für alle $n \geq n(1)$
Dann ist
$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c|$ für alle $n \geq n(1)$
$M = max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \ldots, |a_{n(1)-1)}, 1 + |c|\}$

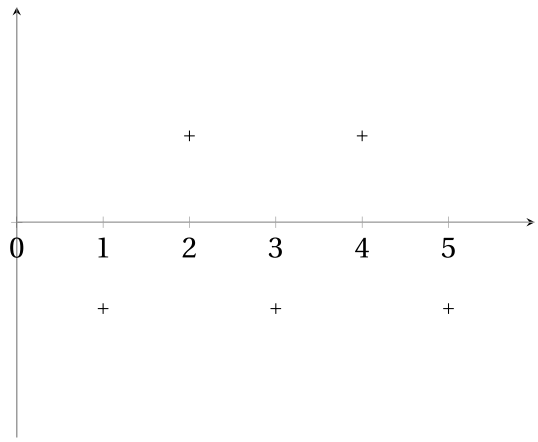


Abbildung 8: $(-1)^n$ ist beschränkt aber konvergiert nicht

Dann: $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq k$
$-M \leq a_n \leq M$ □

2.7 Bemerkung

a) $(a_n)_{n\geq 1}$ Nullfolge $\Leftrightarrow$ $(|a_n|)_{n\geq 1}$ Nullfolge $(|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0||$

b) $\lim_{n\Rightarrow\infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n\geq k}$ ist Nullfolge $\Leftrightarrow$ $(|a_n - c|)_{n\geq k}$ ist Nullfolge

2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien $(a_n)_{n\geq k}$ und $(b_n)_{n\geq k}$ konvergente Folgen, $\lim a_n = c, \lim b_n = d$.

a) $\lim|a_n| = |c|$

b) $\lim(a_n \pm b_n) = c \pm d$

c) $\lim(a_n \cdot b_n) = c \cdot d$
insbesondere $\lim(r \cdot b_N) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.

d) Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$ und ist $d \neq 0$, so $\lim(\frac{a_n}{k_n}) = \frac{c}{d}$

e) Ist (b_n) Nullfolge, $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$, so konvergiert $(\frac{1}{b_n}$ *nicht*!).

f) Existiert $m \geq k$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$, so ist $c \leq d$.

g) Ist $(c_n)_{n\geq k}$ Folge und existiert $m \geq k$ mit $0 \leq c_n \leq a_n$ für alle $n \geq m$ und ist (a_n) eine Nullfolge, so ist auch (c_n) eine Nullfolge.

h) Ist $(c_n)_{n\geq l}$ beschränkte Folge und ist $(a_n)_{n\geq k}$ Nullfolge, so ist auch $(c_n \cdot a_n)_{n\geq k}$ Nullfolge.
$\boxed{c_n \text{ muss nicht konvergieren!}}$

Beweis. Exemplarisch:

b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$ und $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$ und $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$
$|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$
Suche $n(\varepsilon) = max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}, n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$
Dann gilt für alle $n > n(\varepsilon)$:
$|a_n + b_n - (c+d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

f) Angenommen $c > d$. Setze $\delta = c - d > 0$
Es existiert $\tilde{m} \geq m$ mit $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$
und $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq \tilde{m}$.
Für diese n gilt:
$0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$ nach Voraussetzung
$= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$
$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ ↯

□

2.9 Satz

a) $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge

b) Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $((\frac{1}{n^m})_{n\geq 1}$ Nullfolge.

c) Sei $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$
Dann ist $(n^m \cdot q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge

d) Ist $r > 1, m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{n^m}{r^n}{}_{r\geq 1}$ eine Nullfolge)

e) $P(x) = a_m \cdot x^m + \ldots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$
$Q(x) = b_e \cdot x^e + \ldots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$
Sei $Q(n) \neq 0$ für alle $n \geq k$.

- Ist $m > e$, so ist $\frac{P(n)}{Q(n)}$ nicht konvergent
- Ist $m = e$, so ist $\lim_{n\Rightarrow\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$
- Ist $m < l$, so ist$(\frac{P(n)}{Q(n)})$ ein Nullfolge

a) Sei $0 \le q \le 1$ Dann ist $(q^n)_{n\ge}$ eine Nullfolge

Beweis. a) Richtig für $q > 0$. Sei jetzt $q > 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Mathe I: Es gibt ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $q^{n(\varepsilon} < \varepsilon$.
Für alle $n \ge n(\varepsilon)$ gilt: $|q^n - o| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

□

b) 2.5c): $\frac{1}{n}_{n\ge1}$ Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

c) Richtig für $q = 0$. Sei jetzt $q > 0$.
1.Fall: m= 1
$\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0.$
$(t+1)^n \underbrace{=}_{Binomialsatz} 1 + nt + \frac{n(n+1)}{2} t^2 > \frac{n(n-1)}{2} t^2$ für alle $n \ge 2$
$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$
$0 \le n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftarrow$ Nullfolge 2.5e),2.8e)
Nach 2.8g) ist $(n \cdot q^n)_{n\ge q}$ Nullfolge, also auch $(n \cdot q^n)_{n\ge1}$.
2.Fall: $m > 1$.
Setze $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} n^m \cdot q^n &= n^m \cdot (q')^n)^m)^n \\ &= (n \cdot (q')^n)^m)^n) m = 1 \text{anwenden} \end{aligned}$$

$0 < q' < 1$
$(n^m + q^n)_{n\ge1}$ Nullfolge noch Fall $m = 1$ und 2.8e)

d) Folgt aus c) und $q = \frac{1}{r}$

e) Ist $m \le l$, so ist $\frac{P(n(}{Q(n)} = \frac{n^m(a_m + a_{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^m})}{n^l(b_l + b_{l-1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$
$(I) \longrightarrow a_m, (II) \longrightarrow b_l \; \frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{a_m}{b_l}$
$n < l, \frac{1}{n^{l-m}}$ Nullfolge
$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$
$m > l:$
Beh. folgt aus Fall $m < l$ und 2.8e).

2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, die Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.
$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots$
$b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \ldots$

$a_n \leq x \leq b_n$
$0 < b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$
$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0-a_n}{2} \Leftarrow$ Nullfolge (2.9b)
2.8e)$(|x - a_n|)$ Nullfolge.
2.7e): $\lim_{n\to\infty} a_n = x$
Analog: $\lim_{n\to\infty} b_n = x$
2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

2.11 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt *strikt positiv*, falls $a_n > 0$ für alle $n \geq k$.
Sei im Folgenden $(a_n)_{n\geq k}$ eine strikt positive Folge.

b)
$$\begin{aligned} \mathbb{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n\geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n\geq k} \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

c) $O(a_n) = \{(b_n)_{n\geq k} : (\frac{b_n}{a_n}$ ist Nullfolge$\}$
$(b_n) \in o(a_n)$ heißt Folge (a_n) wächst wesentlich schneller als die Folge (b_n). Klar: $o(a_n) \subset O(a_n)$
O, o(„groß Oh“, „klein Oh“)
Landau-Symbole

$$\begin{array}{llll} \text{z.B} \quad (n^2) & \in & o(n^3) & \\ (n^2+n+1) & \in & O(n^2) & n^2+n+1 \leq 3n^2 \\ (n^2) & \in & O(n^2+n+1) & n^2 \leq n^2+n+1 \end{array}$$

$O(1)$ = Menge der beschränkten Folgen
$o(1)$ = Menge aller Nullfolgen
Häufig gewählte Schreibweise:
$n^2 \underbrace{=}_{\text{eig. falsch!}} o(n^2)$ statt $(n^2) \in o(n^3)$
$n^2 + n + 1 = O(n^2)$ statt $(n^2 + n + 1)$

2.12 Satz

Sei $P(x) = a_m \cdot x^m + \ldots + a_1 \cdot x + a_o, m \geq 0, a_m \neq 0$.

a) $(P(n)) \in o(n!)$ für alle $l > m$ und
$(P(n)) \in O(n')$ für alle $l \geq m$.

b) ist $r > 1$, so ist $(P(n)) \in o(r^n)$.
$[(r^n)$ wächst deutlich schneller als $(P(n))]$

Beweis. a) folgt aus 2.9e).
$m = l$ (2.6)
b) folgt aus 2.9d) und 2.8 b)c) □

2.13 Bemerkung

Algorithmus:
Sei t_n = maximale Anzahl von Reihenschritten des Algorithmus' bei Input der Länge n (binär codiert).
Worst-Case-Komplexität:
Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $(t_n) \in O(n^l)$. (*gutartig*)
Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mindestens exponentielle Zeitkomplexität, falls $r > 1$ exestiert mit $(r^n) \in O(b_n)$ (*bösartig)*

2.14 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt *monoton wachsend (steigend)*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$. Sie heißt *steng monoton wachsend (steigend)*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq k$

b) $(a_n)_{n\geq k}$ heißt *monoton fallend*, falls $a \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$

2.15 Beispiel

a) $a_n = 1$ für alle $n > 1 (a_n)$ ist monoton steigend und monoton fallend.

b) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$.
(a_n) streng monoton fallend.

c) $a_n = \sqrt{n}$ (positive Wuzel)
$(a_n) n \geq 1$ streng monoton steigend.

d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$
$(a_n)_{n\geq 1}$ streng monoton steigend.

e) $a_n = (-1)^n, n \geq 1$
(a_n) ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

2.16 Satz

a) Ist $(a_n)_{n\geq k}$ monoton steigend und nach oben beschränkt (d.h es existiert $D \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq D$ für alle $n \geq k$), so konvergiert $(a_n)'$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$

b) $(a_n)_{n\geq k}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n\geq k}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$.

Beweis. a)
$c\sup\{a_n : n \geq k\}$. existiert (Mathe I). Zeige: $\lim\limits_{a_n} = c$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n(\varepsilon)$ mit $c - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq c$
Denn sonst $a_n \leq c - \varepsilon$ für alle $n \geq k$ und $c - \varepsilon$ wäre obere Schranke für $\{a_n : n \geq k\}$
Widerspruch dazu, dass c kleinste obere Schranke. Für alle $n \geq n(\varepsilon)$
$c - \varepsilon \leq a_{n(\varepsilon)} \leq a_n \leq c$
$|a_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$.
b) analog □

2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

(Cauchy, 1789 - 1859)

Sei $(a_n)_{n\geq k}$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

(1) $(a_n)_{n\geq k}$ konvergent

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N - M(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$ (Cauchyfolge)
Grenzwert muss nicht bekannt sein!

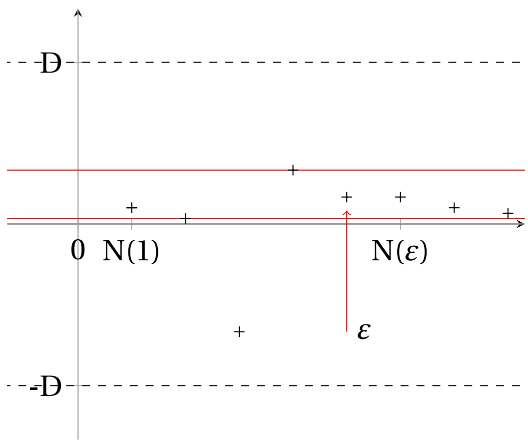


Abbildung 9: Cauchy'sches Konvergenzkriterium

2.18 Definition

a) Sei $(a_i)_{i\geq k}$ eine Folge, $s_n \sum\limits_{i=k}^{n} a_i, n \geq k$ (Partialsummen der Folge)
Dann heißt $(s_n)_{n\geq k}$ eine *unendliche Reihe*
$(k-1: a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_2, \ldots)$
Schreibweise : $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$

b) Ist die Folge $(s_n)_{n\geq k}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = c$,
so schreibt man $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = c$. Reihe *konvergiert.*
Wenn (s_n) nicht konvergiert, so heißt die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ *divergent.*
(Zwei Bedeutungen von $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$:

- Folge der Partialsummen

- Grenzwert von (s_n), falls dieser existiert

$\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n = (s_m)_{m\geq k}$

2.19 Satz

a) Ist die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_1$ konvergent, so ist $(a_1)_{i\geq k}$ eine Nullfolge.

b) Ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ beschränkt und ist $a_i \geq 0$ für alle i, so ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis. a)
Sei $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = c$.
Sei $\varepsilon > 0$ Dann existiert $n(\frac{\varepsilon}{2}) \geq k$ mit $|\sum\limits_{i=k}^{\infty} 2a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n(\frac{\varepsilon}{2})$
Dann gilt $|a_{n+1} - o| = |an+1| = |\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i + \sum\limits_{i=k}^{n} a_i| =$
$|\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i + c - \sum\limits_{i=k}^{n} a_i + c| \leq |\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i + c| + |\sum\limits_{i=k}^{n} a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

(a_n) ist Nullfolge
b) folgt aus 2.16 a), denn (s_n) ist monoton steigend □

2.20 Beispiele

a) Sei $q \in \mathbb{R}$.
Ist $q \neq 1$, so ist $\sum\limits_{i=k}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
$\left[(\sum\limits_{i=k}^{n} q^i) \cdot (q-1)\right]$
Sei $|q| < 1$, d.h $-1 < q < 1$.
Dann ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ (konvergiert)
$s_n = \sum\limits_{i=k}^{n} q^1 = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to} \frac{q^{n+1}=1}{q-1}$
(q^n) Nullfolge $(2.9_{a)}$ für $q \geq 0, 2.8_{e)}) + 2.9_{a)}$ für $q < 0, q = -|q|)$
Geometrische Reihe
Sei $|q| \geq 1$. Dann ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} q^i$ divergent, da dann (q^i) keine Nullfolge $(2.18_{a)})$

b) $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert
harmonische Reihe
$\sum\limits_{i=k}^{n} \frac{1}{n}$
$n = 2^0 = 1 \quad : s_1 = 1$
$n = 2^1 = 2 \quad : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$
...
$n = 2^3 = 8 \quad : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_7 > s_6 \ldots$
Per Induktion zu beweisen!

c) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.
Folge der Partialsummen ist monoton steigend.
2.16a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen nach aber beschränkt ist.

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^n-1} &= 1 + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{7^2}) + \ldots + (\tfrac{1}{(2^{n-1})^2} + \ldots \tfrac{1}{(2^n-1)^2}) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \tfrac{2}{2^2} + 4 \cdot \tfrac{1}{4^4} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \tfrac{1}{(2^{n-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^i} = \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

2.16a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ Kgt., Grenzwert≤ 2. (später: Grenzwert ist $\frac{\pi^2}{6}$)
Es gilt allgemeiner:

$s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert.

Allgemeiner: $s \in \mathbb{R}, s > 1 \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{i}{i^2}$ konvergiert

d) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ konvergiert:

$$s_{2n} = \underbrace{(-1+\frac{1}{2})}_{<0} + \underbrace{(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4})}_{<0} + \ldots \underbrace{(-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})}_{<0}$$

$s_{2n} \leq s2(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(s_{2n}) ist monoton fallend. $s_{2n-1} = -1 + \underbrace{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})}_{>0} + \ldots + \underbrace{(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1})}_{>0}$

(s_{2n-1}) ist monoton wachsend

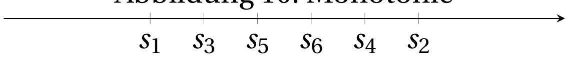
Ist k ungerade, so ist $s_k < s_l$: Wähle n so, dass $2n - a \geq k, 2n \geq l$

$s_k \underset{(2)}{\leq} s_{2n-1} \underset{\uparrow}{<} s_{2n} \underset{(1)}{\leq} s_l$

$s_{2n} = s_{2n-1} + \frac{1}{2n}$

Abstand $s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n}$ geht gegen 0.

Abbildung 10: Monotonie



$\sup\{s_{2n-1} : n \geq 1\}$

$\inf\{s_{2n} : n \geq 1\}$

$= \lim\limits_{i \leftarrow \infty} (-1^i) \frac{1}{i} \in]-1, -\frac{1}{2}[$ (Es gilt $limes = -\ln 2$)

Bemerkung

Was bedeutet $0.\bar{8} = 0.88888888\ldots$? (Dezimalsystem)

$0.\bar{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \ldots = 8 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = 8 \cdot (\frac{10}{9} - 1) = \frac{8}{9}$

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^i = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$

2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere $a_i \geq 0$ falls $i \geq k$), so ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent.

2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_i)_{i\geq k}$, $(b_i)_{i\geq k}$ Folgen, wobei $b_i \geq 0$ für alle $i \geq k$ und $|a_i| \leq b_i$ für alle $i \geq k$. Dann gilt
Ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent, so auch $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ und $\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$. Für die Grenzwerte gilt:
$|\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i| \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$

Beweis. Konvergenz
von $\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ folgt aus 2.16 a).
$\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$ folgt aus 2.8 f).
Sei $m > n$:
$|\sum\limits_{i=k}^{m} a_i - \sum\limits_{i=k}^{n} b_i| = \sum\limits_{i=n+1}^{m} a_i \leq \sum\limits_{i=n+1}^{m} |a_i| = |\sum\limits_{i=k}^{m} |a_i| - \sum\limits_{i=k}^{n} |a_i||$
Mit Cauchy-Kriterium 2.17 folgt daher aus der Konvergenz von $\sum\limits_{i=k}^{m} |a_i|$ auch die von $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$.

□

2.23 Beispiel

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$
$\sqrt{i} \leq i$ für alle $i \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
Ang. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$ konvergiert. $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ konvergiert. $\lightning$
Widerspruch zu 2.20 b)

$a_i = (-1)^i \frac{1}{i}$
2.20d): $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, aber $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert nicht. $(\star)$

2.24 Definition

$\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.
(Falls alle $a_i \geq 0$: Konvergent = absolut Konvergent)

2.25 Korollar

Ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, sp ist auch konvergiert. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.
Beweis: 1.Behauptung 2.22 mit $b_i = |a_i|$
Umkehrung siehe $(\star)$

Bermerkung

Was bedeutet $0, a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$
$a_i \in \{0 \ldots 9\}$ (Dezimalsystem)
$a_1 \cdot \frac{1}{10} a_2 \cdot \frac{1}{100} \ldots a_n \cdot \frac{1}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10} 9 \cdot \frac{1}{100} \ldots 9 \cdot \cdot \frac{1}{10^n}$
$a_i \frac{1}{10} \leq 9 \frac{1}{10}$
$\sum\limits_{i=k}^{\infty} 9 \frac{1}{10} = 9 \cdot (\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1) = 1 \Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i \frac{1}{10}$ konvergiert

2.26 Satz

Sei $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ eine Reihe.

a) *Wurzelkriterium*
Existiert $q < 1$ und ein Index i_0, so dass $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ für alle $i \geq i_0$.
so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.
Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i so divergiert $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$.

b) *Quotientenkriterium*
Existiert $q > 1$ und ein Index i_0, so dass $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \leq$ für alle $i \geq i_0$,
so konvergiert $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Beweis.

a) $|a_i| \leq q^i$ für alle $i \geq i_0$

$\sum\limits_{i=i_0}^{\infty} q^i$ konvergiert (2.20 a))

$\underset{2.22}{\Rightarrow} \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert

$\Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i

$\Rightarrow |a_i| \geq 1$ für unendlich viele i

$\Rightarrow (a_i)$ sind keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ divergiert.

b) Sei $i \geq i_0$.

$|\frac{a_i}{a_{i0}}| = |\frac{a_i}{a_{i-1}}| \cdot |\frac{a_i}{a_{i-2}}| \cdot \ldots \cdot |\frac{a_{io+1}}{a_{i0}}| \leq q \cdot q \cdot \ldots \leq = q^{i-i0} = \frac{q^i}{q^{i0}}$

$\uparrow$ Voraussetzung:
jeder dieser Quotienten ist $\leq q$

$|a_i| \leq \underbrace{\frac{|a_i 0|}{q^{i0}}}_{=:c} \cdot q^i$ $\sum\limits_{i=i_0}^{\infty} c \cdot q^i$ konvergent

$\underset{2.22}{\Rightarrow} \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

$\Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert

□

2.27 Bemerkung

a) Es reicht *nicht* in 2.26 nur vorauszusetzen, dass $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für alle $i \geq i_o$ bzw. $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$ für alle $i \geq i_0$.

z.B. harmonische Reihen : $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert.

Aber: $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} > 1$ für alle i.

$\frac{i}{i+1} < 1$ für alle i

b) Es gibt Beispiele von absolut konvergenten Reihen mit $|\frac{a_{i+1}}{a_i}|$ für unendlich viele i.

2.28 Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ absolut $(0^0 = 1, 0! = 1)$:
Quotientenkriterium:
$|\frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i}| = |fracxi + 1| = \frac{|x|}{i+1}$ Wähle i_o, so dass $i_0 + 1 > 2 \cdot |x|$
Für alle $i \geq i_0$:
$\frac{|x|}{(i+1)} \leq \frac{|x|}{(i_0+1)} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q.$

2.29 Bemerkung

Gegeben seien zwei endliche Summen
$\sum\limits_{a_n}^{k} n = 0, \sum\limits_{b_n}^{l} n = 0.$
$(\sum\limits_{a_n}^{k} n = 0)(\sum\limits_{b_n}^{l} n = 0) \quad (\star)$
Distributivgesetz: Multipliziere a_i mit jedem b_i und addiere diese Produkte.

$$(\star) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Indexsumme 0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Indexsumme 2}} + \ldots + \underbrace{a_k b_l}_{\text{Indexsumme k+l}}$$

2.30 Definition

Seien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n$ unendliche Reihen.
Das *Cauchy-Produkt*(*Faltungsprodukt*) der beiden Reihen ist die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_n$, wobei
$c_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_{n-1} = a_0 b_n + a b_{n-1} + \ldots a_n b_0$

2.31 Satz

Sind $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent Reihen mit Grenzwert c, d, so ist das Cauchy Produkt auch absolut konvergent mit Grenzwert $c \cdot d$.

Beweis: [1]

3 Potenzreihen

3.1 Definition

Sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge, $a \in \Re$
Dann heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$ eine *Potenzreihe* (mit *Entwicklungspunkt* a)) Speziell: $a = 0$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
(Potenzreihe im engeren Sinne)
Hauptfolge: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konv. die Potenzreihe (absolut)?
Suche für $x = a$
Dann Grenzwert b_0 (da $0^0 = 1$)
Ob Potenzreihe für andere x konvergiert, hängt von b_n ab!

3.2 Beispiel

a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^n (b_n = 1 \text{ für alle } n)$
geometrische Reihe, konvergiert für alle $x \in \,]-1,1[$

b) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n (b_n = 2^n) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$ konvergiert genau dann nach a), wenn $|2x| < 1$, d.h $|x| < \frac{1}{2}$ d.h. $x \in]-0.5, 0.5[$

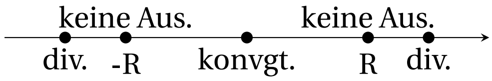
c) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n})$
konvergiert für alle x, $x \in]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

3.3 Satz

Sei $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ eine Potenzreihe (um 0). Dann gibt es $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, R \geq 0$, so dass gilt.

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < R$ konvergiert Potenzreihe absolut (d.h. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert, dann auch $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$)
   Falls $R = \infty$, so heißt das, dass Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

Abbildung 11: Konvergenzradien und ihre Aussagen



2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ divergiert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
   $(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty)$ (Für $|x| = R$ lassen sich keine allgemeine Aussagen treffen).
   R heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
   Konvergenzintervall $< -R, R >$
   besteht aus allen x für die $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert.
   $<$ kann [oder] bedeuten.
   $>$ kann] oder [bedeuten.

Beweis. $|x_1, x_2|\mathbb{R}, |x_1| \leq |x_2|$
Dann: Falls $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ konvergiert, so auch $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ (2.22) $(\bigstar)$
Falls $\sum b_n \cdot x_n$ für alle x absolut konvergiert, so setze $R = \infty$
Wenn nicht, so setze $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n| \text{ konvergiert}\} < \infty$ Nach $(\star)$ gilt:
$|x| < R \Rightarrow \sum b_n x^n$ konvergiert absolut.
Für $|x| > R$ konvergiert $\sum b_n x^n$ nicht absolut.
Sie konvergiert sogar selbst nicht. ([**?**])

$$\sqrt[n]{|b_n| \cdot |x|^n} \leq q < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \quad |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x_n| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

$$\uparrow \quad (\text{setze } \varepsilon = 1 - \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : s - \tfrac{\varepsilon}{2} < |x| \cdot \sqrt[n]{b_n} \leq s + \tfrac{\varepsilon}{2} =: q < 1$$

□

3.4 Bemerkung

Konvergenz von Potenzreihen der Form $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$:

gleichen Konvergenzradius R wie $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

konvergiert absolut für $|x-a| < R$, d.h $x \in \,]a-R, a+R[$ Divergiert für $|x-a| > R$.
Keine Aussage für $|x-a| = R$, d.h $x = a-R$ oder $x = a+R$
Konvergenzintervall $< a-R, a+R >$

3.5 Die Exponentialreihe

a) Exponentialreihe

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n!})$

2.28 Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setze für $x \in \mathbb{R} : \exp(x) := \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
Exponentialfunktion $\exp(0) = \frac{0^n}{0!} = 1$

b) Serien $x, y \in \mathbb{R}$
$\exp(x) \cdot \exp(y) \underset{2.31}{=}$ Limes des Cauchy Produkts der beiden Reihen.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot x^i \cdot y^{n-i})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \cdot x \cdot y^{n-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n}! \cdot (x+y)^n = \text{exp(x+y)}$$

$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \text{ für alle x,y} \in \mathbb{R}}$
Daraus folgt: $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$
$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \text{ für alle x} \in \mathbb{R}}(\star)$
Für alle x $\geq 0 : \exp(x) > 0$. Dann auch wegen $(\star)$
$\boxed{\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}}$

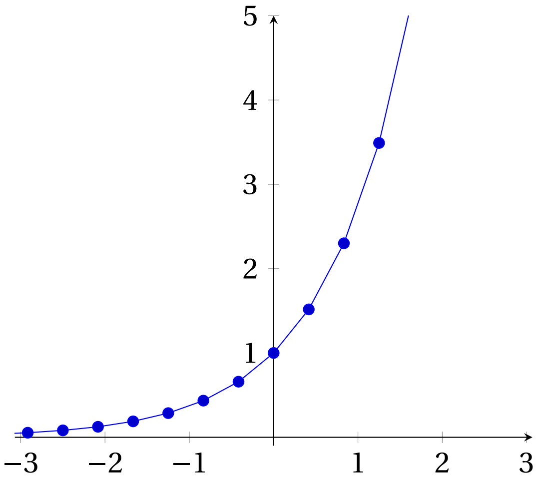


Abbildung 12: Die Exponentialreihe

c) $\exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Euler'sche Zahl

Approximation e durch $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
$m=2 \quad 1+1+\frac{1}{2} \quad = 2,5$
$m=3 \quad 2,5+\frac{1}{6} \quad = 2,\bar{6}$
$...m=6 \quad \frac{326}{126}+\frac{1}{720} \quad = 2,7180\bar{5}$

Es ist: $e \approx 2,71828\ldots$ (irrationale Zahl)

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert schnell

$m \in \mathbb{N}$

$\exp(m) = \exp(\underbrace{1+\ldots+1}_{\leftarrow m \rightarrow})$

$\exp(1)^m = e^m$

$e^0 = 1 \exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = e^{-m}$

$n \neq 0, n \in \mathbb{N}:$

$e = \exp(1) = \exp(\frac{n}{n}) = \exp(\frac{1}{n}^n)$

$\exp(\frac{1}{n}) = +\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$

$\exp(\frac{m}{n}) = e^{\frac{m}{n}}.$

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ stimmt $\exp(x)$ mit der 'normalen' Potenz e^x überein.

Dann definiert man für beliebige $x \in R$:

$$\boxed{e^x := \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

In kürze: Definition a^x für $a > 0, x \in \mathbb{R}$

d) Bei komplexen Zahlen kam e^{it} $(i^2 = -1, t \in \mathbb{R})$ vor als Abkürzung für $\cos(t) +$

$i\sin(t)$
Tatsächlich kann auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ definieren $e^z = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
Dabei: Konvergenz von Folgen/Reihen in $\mathbb{C}$ wie in $\mathbb{R}$ mit komplexem Absolutbetrag.
Man kann dann zeigen:
$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
Dass tatsächlich dann gilt:
$e^{it} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + \sin(t)$. zeigen wir später

2.718...) Man kann zeigen.
$e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + (\frac{1}{n})^n)$
Bedeutung:

- Angelegtes Guthaben G wird in einem Jahr mit 100% verzinst. Guthaben am Ende eines Jahres $2G(= G(1+1)$
- Angelegtes Geld wird jedes halbe Jahr mit 50% verzinst. Am Ende eines Jahres (mit Zinsenzinsen)
  $G(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2}) = 2,25G$
  n- mal pro Jahr mit $\frac{100}{n}$% verzinsen. Am Ende desx Jahres $G(1+\frac{1}{n})^n$.
  $\lim\limits_{n\to\infty} G(1+\frac{1}{n})^n = e \cdot G \approx 2.718\ldots \cdot G$ (stetige Verzinsung)
  a% statt 100% $\cdot Ge^{\frac{a}{100}}$

4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

4.1 Definition

Reelle Funktionen f in einer Variable ist Abbildung
$f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ (D = Definitionsbereich).
Typisch: $D = \mathbb{R}$, Intervall, Verschachtelung von Intervallen

4.2 Beispiel

a) *Polynomfunktionen* (ganzrationale Funktion, Polynome)
$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to a_n \cdot x^n + \ldots a_1 x + a_0 \end{cases}$
$f(x) = a_n \cdot x^n + \ldots a_1 \cdot x + q$
$a_n \neq 0 : n = \text{Grad }(f)$ f = 0 (Nullfunktion), $\text{Grad}(f) = \infty$

Grad 0: konstante Funktionen $\neq 0$
Graph von f:

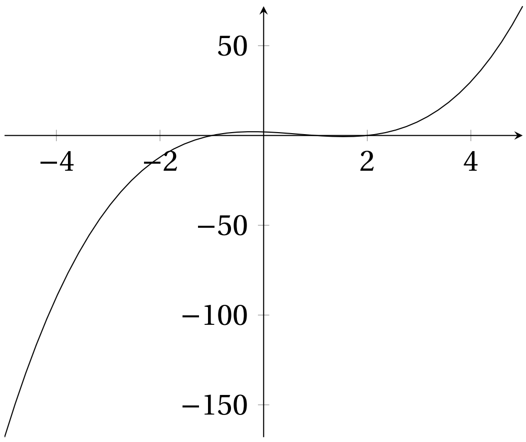


Abbildung 13: $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f, g : D \to R$ $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ für alle $x \in D$
Summe: Differenz, Produkt von f und g.
Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so *Quotient*. $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$,
Quotient von Polynomen = (gebrochen-)rationalen Funktionen
$|f|(x) := |f(x)|$ Betrag von f.

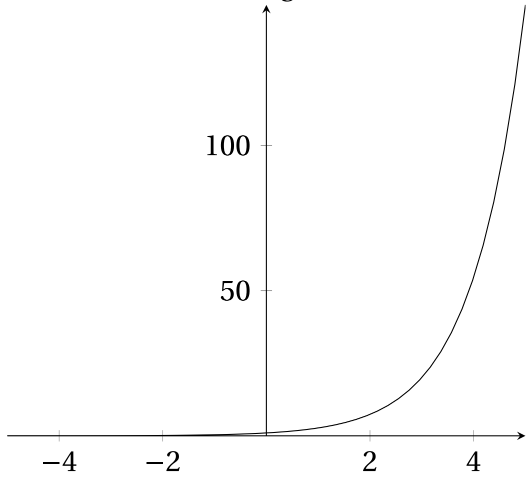
c) Potenzreihe definiert Funktion auf ihrem Konvergenzintervall.
z.B : $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
Fkt. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

d) Hintereinanderausführung von Funktionen:
$f : D_1 \to \mathbb{R}, g : D_2 \to \mathbb{R} f(D_1) \subset f(D_2)$, dann $g \circ f$:
$$\begin{cases} D_1 \Rightarrow & \mathbb{R} \\ x \to & g(f(x)) \end{cases}$$

e) $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^2 x + 1$
$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = e^{x^2+1}$

f) *Trigonometrische Funktionen: Sinus- und Cosinusfunktion (vgl.* $\mathbb{C}$*)*

Abbildung 14: e^x



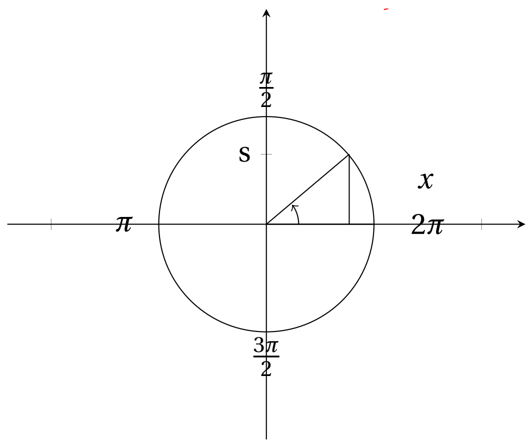


Abbildung 15: Bogenmaß

$0 \geq x \geq 2\pi$ x = Bogenmaß von φ in Grad, so $x = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi$
$\sin(x) = s, \cos(x) = c$ Für beliebig $x \in \mathbb{R}$:
Periodische Fortsetzung, d.h. $x \in \mathbb{R}. x = x' + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}, x' \in [0, 2\pi[$
$\sin(x) := \sin(x')$
$\cos(x) := \cos(x')$
$|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Tangens und Cotangensfunktion

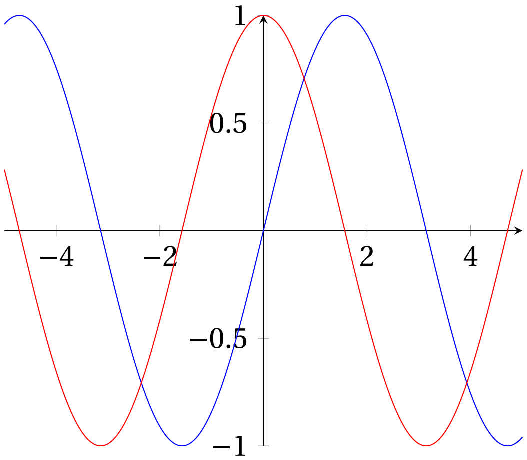


Abbildung 16: sin(x) und cos(x)

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) \neq 0$

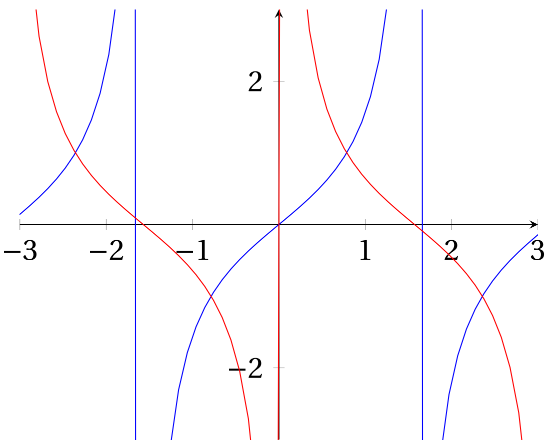


Abbildung 17: tan(x) and cot(x)

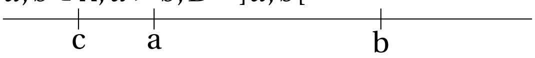
4.3 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ heißt *Adharenzpunkt* von D, falls es eine Folge $(a_n)_n, a_n \in D$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ gibt.
$\bar{D}$ = Menge der Adharenzpunkte von D
= *Abschluss* von D

klar: $D \subset \bar{D}$.
$d \in D$. konstante Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = d$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} d = d$.
Also: $d \in \bar{D}$.

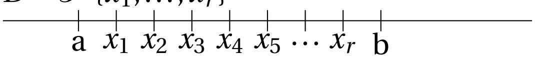
4.4 Beispiel:

a) $a, b \in \mathbb{R}, a > b, D =]a, b[$



$\bar{D} = [a, b] D \in \bar{D}$
$a \in \bar{D}$
$a_n = a + \frac{b-a}{n} \in D, n \geq 2$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Also $[a, b] \subset \bar{D}$.
Ist $c \notin [a, b]$,etwa $c < a$, dann ist $|a_n - c| \geq a - c > 0$ für alle $a_n \in]a, b[$ Also: $\lim\limits_{a_n} \neq c$

b) $\mathscr{I}$ Intervall in $\mathbb{R}, x_1, \ldots, x_r \in \mathscr{I}$,
$D = \mathscr{I}\ \{x_1, \ldots, x_r\}$



$\bar{D} = \bar{\mathscr{I}} = [a, b]$,
falls $\mathscr{I} =< a, b >$.

c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

4.5 Definition

$f : D \to, c \in \bar{D}$.
$d \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert von f(x) für x gegen c,d* $= \lim\limits_{x\to c}$, wenn für *jede* Folge $(a_n) \in D$, die gegen c konvergiert, die Bildfolge $(f(a_n))_n$ gegen d konvergiert.

4.6 Beispiel:

a) Sei $f(x) = b_k x^k + \ldots + b_1 x + b_0$, eine Polynomfunktion, $c \in \mathbb{R}$. Sei (a_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} b_k x^k + \ldots + b_1 x + b_0 \\ &= b_k(\lim_{n\to\infty} a_n)^k + b_{k-1}\cdot(\lim_{n\to\infty} a_n)^{k-1} + \ldots + b_0 \quad \text{Rechenregeln für Folgen, 2.8} \\ &= b_k \cdot c^k + b_{k-1}\cdot c^{k-1} + \ldots + b_1 \cdot c + b_0 = f(c).\end{aligned}$$

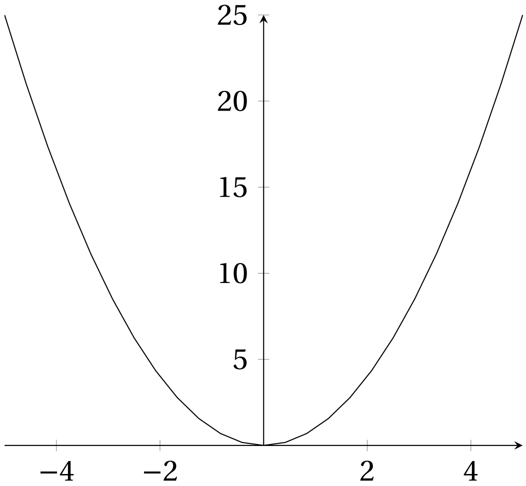


Abbildung 18: x^2

b) Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,
$D = R\setminus\{1\}$
Auf D ist $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1)$ $\bar{D} = \mathbb{R}$

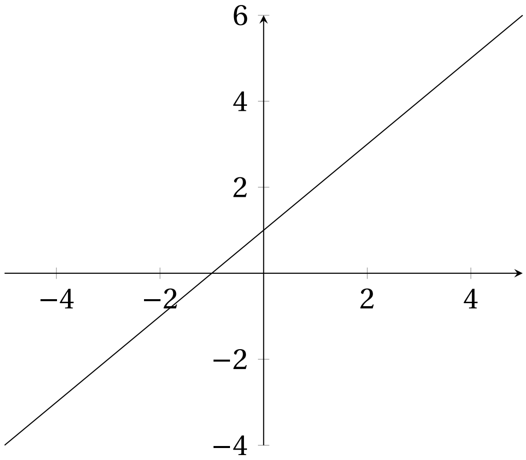


Abbildung 19: x+1

$\lim_{x\to 1} f(x) = ?$

Sei (a_n) Folge mit $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
$f(a_n) = a_n + 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + 1) = 1 + 1 + 2. \lim\limits_{x\to 1} = 2.$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} D = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

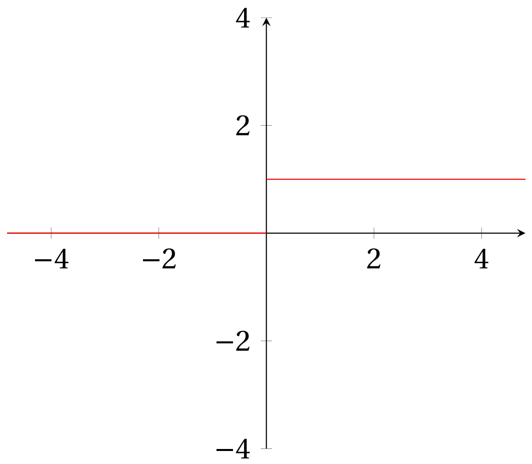


Abbildung 20: Abschnittsweise definierte Funktion

$a_n = \frac{1}{n}. \lim a_n = 0.$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = \mathit{1}$
$a_n = -\frac{1}{n}, \lim a_n = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = \mathit{0}.$
$\lim\limits_{x\to 0}$ existiert nicht.

d) $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $a_n = \frac{1}{n\pi}, f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$
$a'_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2}\pi)} \to 0, f(a'n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$
$\lim(a_n) = 0$
$\lim(f(a_n)) = \lim 0 = 0 \lim(f(a'_n)) = \lim 1 = 1$
$\lim(f(x))_{x\to 0}$ existiert nicht

e) $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ dann:
$(a_n) \to 0, a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \sin(\frac{1}{a_n}) \underset{2.8g)}{=} 0$

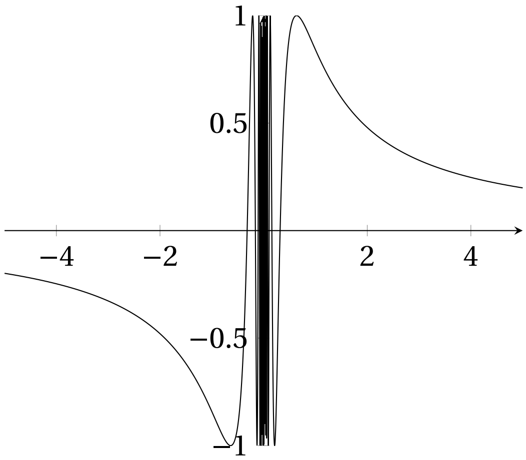


Abbildung 21: $\sin(\frac{1}{x})$

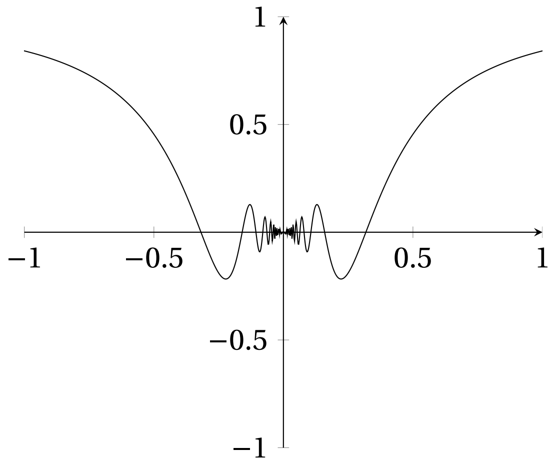


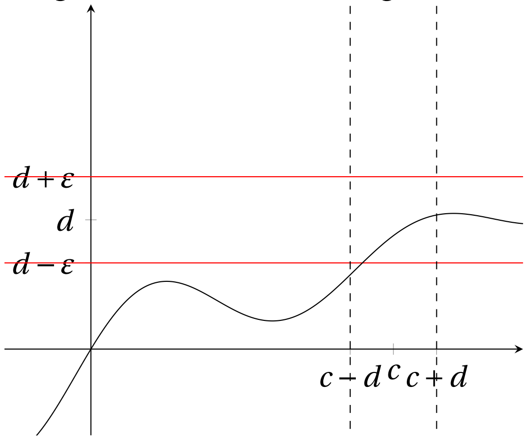
Abbildung 22: $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

4.7 Satz ($\varepsilon - \delta$)-Kriterium

$f : D \to \mathbb{R}, c \in \bar{D}$. Dann gilt: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \to |f(x) - d| \leq \varepsilon$

Beweis. $\to$: Angenommen falsch.
Dass heißt $\exists \varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ (z.B $\delta = \frac{1}{n}$) ein $x_n \in D$ existiert mit $|x_n - c| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - d| > \varepsilon$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Aber:
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq d$ ↯
$\Leftarrow$: Sei (a_n) Folge, $a_n \in D$

Abbildung 23: geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums



$\lim_{n\to\infty} a_n = c$.
Zu zeigen : $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = d$, d.h $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall n \geq n(\varepsilon) : |f(a_n) - d| < \varepsilon$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, ex. $d > 0$:

$$ \tag{$\star$} $$

Für alle $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$ gilt $|f(x) - d| < \varepsilon$.
Da $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, existiert n_0 mit $|a_n - c| \geq \delta$ für alle $n \geq n_0$
Nach $(\star)$ gilt: $|f(a_n) - d| < \varepsilon \forall n \geq n_0$.✓ □

Bemerkung

$\lim_{x\to c} f(x) = d \Leftrightarrow$ Für alle Folgen $(a_n), a_n \in D$, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = e$ Wenn man zeigen will, dass $\lim_{x\to c} f(x)$ nicht existiert, gibt es 2 Möglichkeiten:

- Suche *eine bestimmte* Folge (a_n), $\lim_{n\Rightarrow\infty} a_n = c$, so dass $\lim_{x\to\infty} f(a_n)$ nicht existiert.

- Suche zwei Folgen $(a_n), (b_n)$, $\lim_{x\to\infty} a_n = c$, $\lim_{x\to\infty} b_n = c$ und $\lim_{x\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{x\to\infty} f(b_n)$

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
$f(a_n) = (101010\ldots)$
$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ existiert nicht.
Oder:
$a_n = \frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
$b_n = -\frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} b_n = 0$
Aber: $\lim_{x\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{x\to\infty} f(b_n)$

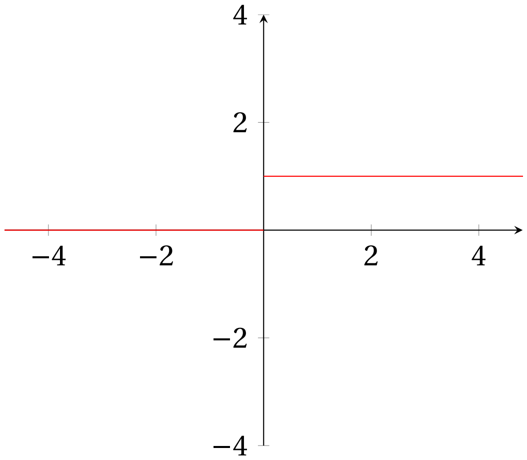


Abbildung 24: Abschnittsweise definierte Funktion

4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

$f, g, D \to \mathbb{R}, c \in \bar{D}$, Existieren die Grenzwerte auf der rechten Seite der folgenden Gleichungen, so auch die auf der linken (und es gilt Gleichheit)

a) $\lim\limits_{x\to c}(f \pm / \cdot g) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm / \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x)$.

b) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$, so

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$$

c) $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = |\lim\limits_{x\to c} f(x)|$

Beweis. Folgt aus den entsprechenden Regeln für Folgen. □

4.9 Beispiel:

$f(x) = \frac{x^3+3x+1}{2x^2+1}, D = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 2} \underset{4.2b)}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+3x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+1)}$

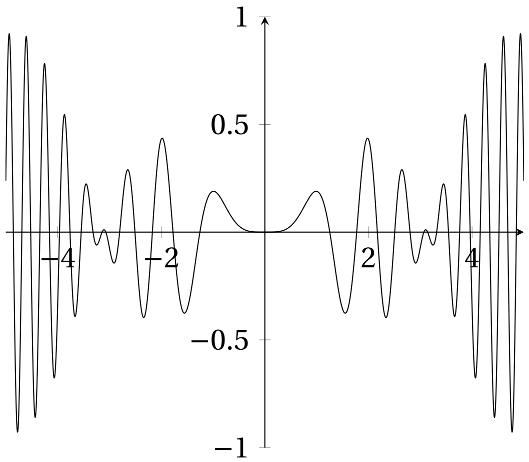
$\underset{4.6a)}{=} \frac{4+6+1}{8+1} = \frac{11}{9}$

4.10 Bemerkung

Rechts- und linksseitige Grenzwerte:
Rechtsseitiger Grenzwert:
$\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = d \Rightarrow \forall (a_n)_n, a_n \in D, a_n \geq c$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = d$. Analog:
linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = d$
$(a_n \leq c)$.

4.11 Beispiel:

$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, c = 0 \in \bar{D}$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.
Falls $\lim\limits_{x\to c^+}$ und $\lim\limits_{x\to c^-}$ existieren
und $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} = d$
so exisitiert $\lim\limits_{x\to c} f(x) = d$. Grenzwert: $d \in \mathbb{R}$



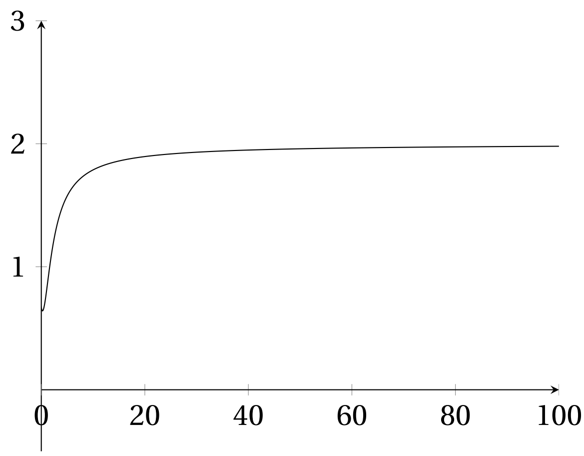


Abbildung 25: Grenzwerte gegen einen Festen Wert

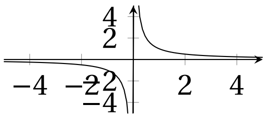
4.12 Definition

$D =< b, \infty[, f : D \to \mathbb{R}$ (z.B $D = \mathbb{R}$)
f konvergiert gegen $d \in \mathbb{R}$ für x gegen unendlich,

$\lim\limits_{f(x)} = d$,falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x \geq M : |f(x) - d| < \varepsilon.$
(Analog : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = d$)

4.13 Beispiel

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$



Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $x \geq M$:
$|f(x) - 0| = |\frac{1}{x}| \leq \frac{1}{m} = \varepsilon.$

b) Allgemein gilt:
P, Q Polynome vom Grad k bzw. l $l \geq k$
$P(x) = a_k \cdot x^k + \ldots, Q(x) = b_i \cdot x^i + \ldots, a_k \neq 0, b_i \neq 0 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l \geq k \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{für } l = k \end{cases}$
(Beweis wie für Folgen $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$)
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^5 + 205x^3 + x^2 + 17}{14x^5 + 0{,}5} = \frac{1}{2}$

4.14 Bemerkung

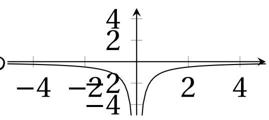
Die Rechenregeln aus 4.8 gelten auch für $x \to \infty / -\infty$

4.15 Definition

a) $f : D \to \mathbb{R}, c \in \bar{D}$
f geht gegen ∞ für x gegen c,
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, falls gilt:
$\forall L > 0 \exists \underset{=\delta(L)}{\delta >} 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq L.$

b) $< b, \infty[\supset D, f : D \to \mathbb{R}$, *f geht gegen ∞, für x gegen ∞*: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$,
falls gilt:
$\forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D, x \geq M, f(x) \geq L.$

(Entsprechend: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$



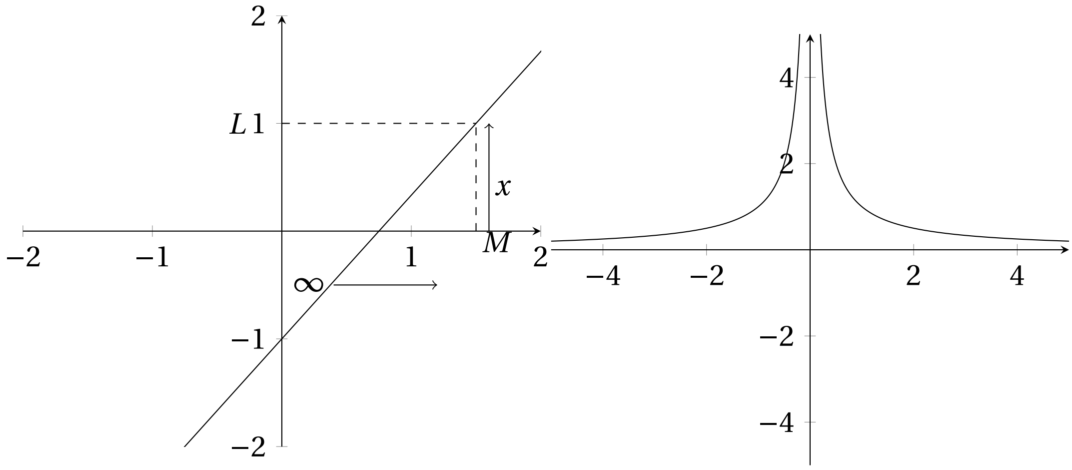
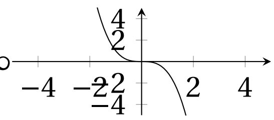
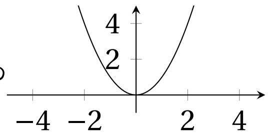


Abbildung 26: Funktionen $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty$

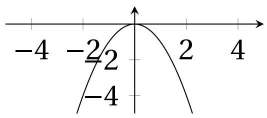
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



4.16 Satz

$f : D \to \mathbb{R}$.

a) Sei $c \in \bar{D}$, oder c = $\infty, -\infty$
falls $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ oder $-\infty$, so ist $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0$.

b) $c \in \bar{D} \supset \mathbb{R}$.
Falls $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ und falls $s > 0$
existiert mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [c - s, c + s], (f(x) < 0)$
dann ist $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$

c) Falls $\lim\limits_{x\to\infty} = 0$ und falls $T > 0$ existiert mit $f(x) > 0 f.ax \geq T$, so $(f(x) < 0)$

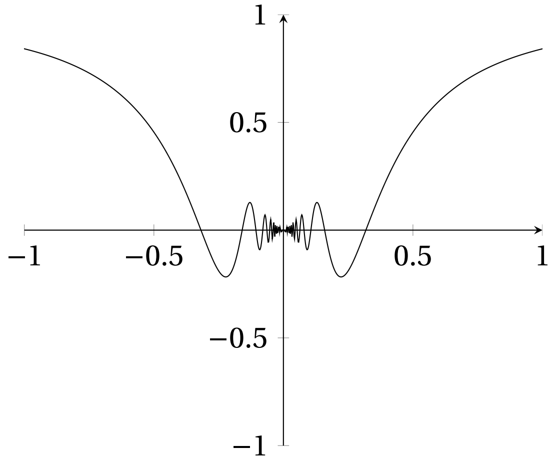


Abbildung 27: $sin(\frac{1}{x})$

ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$
(Entsprechend für $\lim\limits_{x\to-\infty}$)

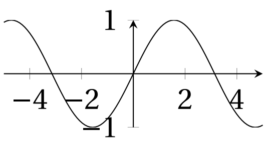
4.17 Beispiel

a)

- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0,\infty[$
  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$

- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]-\infty,0[$
  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0,\infty[$
  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} sin(x)$ existiert nicht 

c) $P(x) = ak_x^k + \ldots + a_0$.

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, \text{falls} & a_k > 0 \\ -\infty, \text{falls} & a_k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, \text{falls} & a_k > 0 \text{k gerade oder} a_k < 0 \text{ k ungerade} \\ -\infty, \text{falls} & a_k < 0 \text{k gerade oder} a_k > 0 \text{ k ungerade} \end{cases}$$

d) $P(x)$ wie in c)
$Q(x) = b_l^l + \ldots + b_0$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ gleiche Vorzeichen} \\ -\infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ verschiedene Vorzeichen} \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \; \forall L > 0 \exists\; M \forall\; x \gg M : f(x) \gg L$

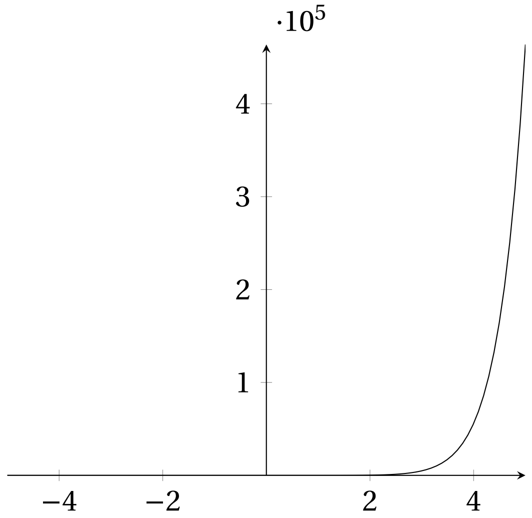


Abbildung 28: $\frac{e^x}{x^n}$

Sei L $\geq 0, x > 0$.
$e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$
Ist $x \geq (n+1)!L =: M$, so ist $\frac{e^x}{x^n} > L$.

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$. Folgt aus e) und 4.16a)

5 Stetigkeit

5.1 Definition

$f : D \to \mathbb{R}$.

a) f ist *stetig* an $c \in D$, fallse $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

b) f heißt (absolut) stetig, falls f an allen $c \in D$ stetig ist.

5.2 Satz

$f : D \to \mathbb{R}, c \in D$.
Existiert Konstante $\mathbf{K} > 0$ mit $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c|$ für alle $x \in D$, dann ist f stetig in c.

Beweis.
Sei $\varepsilon > 0$.
Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbf{K}}$. Ist $|x - c| \leq \delta$, so ist $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c| \leq \mathbf{K} \cdot \delta - \varepsilon$.
4.7 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. □

5.3 Beispiel

a) Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

b) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{falls} & , x \neq 0 \\ 1, \text{falls} & , x = 0 \end{cases}$ f ist nicht steig in 0.

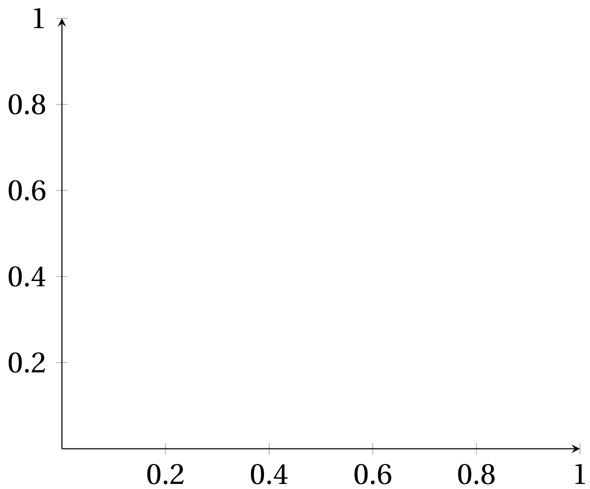
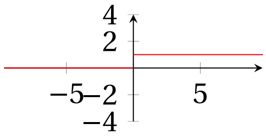


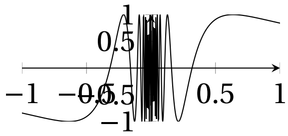
Abbildung 29: Abschnittsweise definierte Funktion

$a_n = \frac{1}{n}, a_n \to 0$
$f(a_n) = 0$
$(f(f(a_n)) \to 0 \neq f(0)$

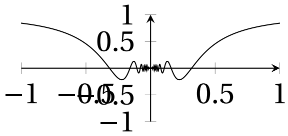
c) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{falls} & , x > 0 \\ 1, \text{falls} & , x < 0 \end{cases}$

f ist nicht stetig in 0. 

d) $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), \text{falls} & , x \neq 0 \\ 0, \text{falls} & , x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x} \to 0 \sin(\frac{1}{x})$ ex. nicht.

f ist nicht stetig in 0. 

e) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), \text{falls} & , x \neq 0 \\ 0, \text{falls} & , x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$

f ist stetig in 0. 

f) $f(x) = \sin(x)$
$g(x) = \sin(x)$ Sind stetig auf $\mathbb{R}$: TODO: Halbkreis plotten.
Fúr alle $x, c \in \mathbb{R}$ gilt:
$|\sin(x) - \sin(c)| \leq |x - c|$.
$\sin(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ (5.2, $\mathbf{K}$ =1)

5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit)

$f, g : D \to \mathbb{R}, c \in D$,
sind f und g stetig in c, dann auch $f \pm / \cdot$ und $|f|$. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in c.

Beweis. Folgt aus 4.8 □

5.5 Satz

$D, D' \subseteq \mathbb{R}, F : D \to \mathbb{R}$,
$g : D' \to \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'$.. Ist f stetig in $c \in D$ und ist g stetig in $f(c) \in D'$, so ist $g \circ f$ stetig in c,

Beweis. $(a_n) \to c, a_n \in D$.
f stetig: $f(a_n) \to f(c)$
g stetig in f(c): $(g \circ f)(a_n)(a_n)$ $(g \circ f)(c)$ □

5.6 Beispiel

a) $f(x) = \sin(\frac{1}{|x^2-1|}), D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}. f$ ist stetig auf D. Folgt aus $5.3_{\text{a),f und 5.4,5.5}}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ stetig auf $\mathbb{R}$, 5.3e) für $c = 0$ für $c \neq 0$. 5.3,5.4,5.5

c) $f(x) = \tan(x)(= \frac{sin(x)}{cos(x)})$
$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} f$ stetig auf D

5.7 Satz

Sei $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$
eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist f stetig $m]a-R[=: D$
$c \in D \lim\limits_{x \to c} f(x)$

$= \lim\limits_{x\to c} f(x) \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$

$\stackrel{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to c} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ [3]

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i = f(c)$

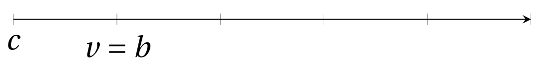
5.8 Korollar

$f(x = \exp(x) = e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen)

$f : D \to$ stetig, $[u, v] \subset D, u < v$
Es gelte $f(v) \cdot f(v) < 0$
(d.h $f(u) > 0, f(v) > 0$, oder $f(u) > 0, f(v) < 0$) Dann existiert $w \in]u, v[$ mit $f(v) = 0$

Beweis. O.B.d.A., $f(n) < 0 < f(v)$.
Bijektionsverfahren:



Falls $f(c) < 0$, so $a = c$, sonst $b = c$. Liefert Folgen $(a_n), (b_n)$ und eindeutig bestimmte

$w \in [u, v]$ mit $a_n \le a_{n+1} w \le b_{n+1} \le b_n$ für alle n
$f(a_n) < 0$
$f(b_n) \ge 0$
für alle n. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = w f$ ist stetig in w $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(b_n) = f(w)$.
$f(a_n) < 0 \forall n \to \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$.
$f(b_n) \ge 0 \forall n \to \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$.
$\Rightarrow 0 = \lim(a_n) = \lim(b_n) = f(w)$. □

5.10 Korollar (Zwischenwertsatz)

$f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $[u, v] \subseteq D$
Dann nimmt f in $[u, v]$ jeden Wert zwischen $f(u)$ und $f(v)$ an (und evtl. weitere)

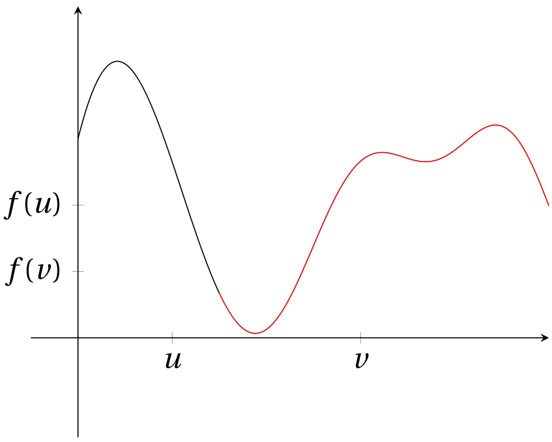


Abbildung 30: Zwischenwerte

Beweis. O.B.d.A $f(u) < f(v)$
Sei $f(u) < b < f(w)$ b beliebig, aber dann fest.
Definiere $g(x) = f(x) - b$ stetig
$g(u) = f(u) - b g(v) = f(v) - b$
5.9 (angewandt auf g): Ex. $w \in]u, v[$ mit $g(w) = 0$,d.h $f(w) = b$. □

5.11 Satz (Min-Max-Theorem)

$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$
(Wichtig: *abgeschlossenes* Intervall)
Dann hat f ein Maximum und ein Minimum auf $[a, b]$, d.h es existieren

x_{min}, $x_{max} \in [a,b]$ mit $f(x_{max}) \leq f(x) \leq f(x_m ax)$ für alle $x \in [a,b]$ (Beweis mit Bisektionsverfahren, [4])

Zur Erinnerung

$f: D \to D'$ bijektiv, dann existiert Umkehrfunktion $f^{-1} D' \to D$ mit
$f \circ f^{-1} = id_{D'}$ und
$f^{-1} \circ f = id_D$
zum Beispiel $f(x) = x^2$
$f: [0, \infty[\to [0, \infty[$
bijektiv
$f^{-1}: [0, \infty[\to [0, \infty[$
$f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$

5.12 Definition

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt *(streng) monoton wachsend (oder steigend)*, falls gilt:
Sind $x, y \in D, x < y$, so ist $f(x) \leq f(y) (f(x) < f(y))$
Entsprechend: *streng monoton fallend*. f heißt *(streng) monoton*, dalls sie entweder (streng) monoton wachsend oder (steng) monoton fallend ist.

5.13 Satz

D Intervall (rechte
linke Grenze) $\infty, -\infty$ möglich), $f D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: f ist injektiv auf D $\Leftrightarrow$ f ist streng monoton auf D.

Beweis. $\Leftarrow \checkmark$
$\Rightarrow$: Angenommen f ist nicht streng monoton auf D.
Dann existieren $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D$. mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) < f(x_2)$ und $x_3 < x_4$ und $f(x_3) > f(x_4)$
$(f(x_1) = f(x_2)$ bzw. $f(x_3) = f(x_4)$ nicht möglich, da f injektiv) Jetzt muss man Fallunterscheidungen machen.
z.B
$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, \ f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ □

5.14 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

D Intervall, $f: D \to f(D) =: D'$
eine stetige, streng monotone (also bijektive) Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion

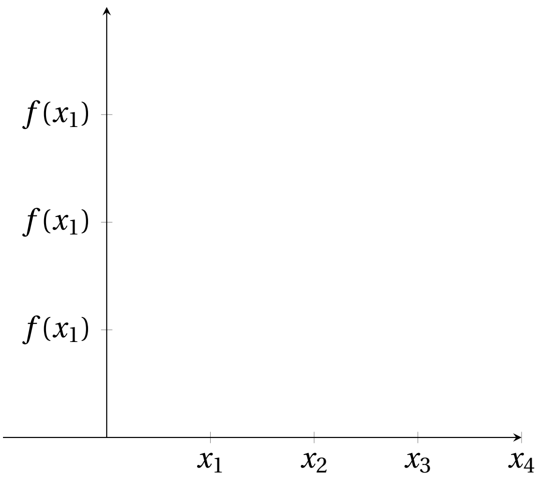


Abbildung 31: Eine Fallunterscheidugn für 5.13

$f^{-1}D' \to D$ stetig.
Beweis: [5] f streng monoton wachsend (fallend) $\Rightarrow$ $f-1$ streng monoton wachsend

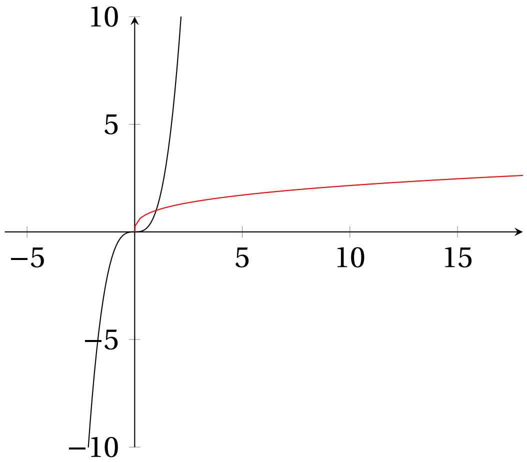


Abbildung 32: Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion

(fallend)

5.15 Korollar

Ist $n \in \mathbb{N} \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$, so

ist $f(x) = x^n$ stetig und bijektiv $\begin{cases} [0,\infty[\to [0,\infty[\\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$

Die Umkehrfunktion $f^{-1} = \sqrt[n]{x}$ ist stetig und bijektiv $\begin{cases} [0,\infty[\to [0,\infty[\\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$ Nach 5.8 ist $\exp(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$. Nach 3.5b) ist $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$, so ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3!} + \ldots \geq 1$, Ist $x > y$ so ist $\exp(y) = \exp(x + (y - x)) \underset{3.5b)}{=} \exp(x) \cdot \underbrace{\exp(\underbrace{y - x}_{<0})}_{>1} >$

$\exp(x)$

5.16 Satz

$\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt $\ln(x) :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend und bijektiv.
Es gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$, $\ln(1) = 0$

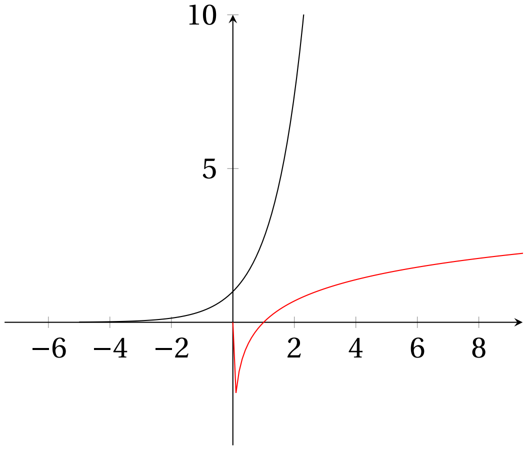


Abbildung 33: $\exp(x)$ und $\ln(x)$

Beweis. exp streng monoton steigen s.V,
$\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ (4.17e))
$\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x)} \underset{4.16}{=} 0$ Also: $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ bijektiv
$\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, streng monoton wachsend, stetig, bijektiv (5.14).

$x, y > 0. \exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $x \in \exp(a), y = \exp(b)$.

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(\exp(a) \cdot \exp(b) \\ &= \ln(\exp(a+b)) = a+b \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

□

5.17 Satz

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ (für jedes $k \in \mathbb{N}$)
(D.h. ($\ln(n) \in o(n)$))

Beweis. $x = \exp(y), x \leq 1$, d.h $y \leq 0$.
$\frac{\ln(x)}{x^k} = \frac{y}{(\exp(y)^k)} \leq \frac{y}{\exp(y)} \to 04.17\text{e})$ □

5.18 Definition

Für $a > 0$ setze $a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$ $\underbrace{(\exp(\ln(a)))}_{0}$ $a \leq e : e^x = \exp(x), a^x$, falls $a > 0$ TODO: komischer plott mit exponentialfunktionen

5.19 Satz

Sei $a > 0$

a) $a^x : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend für alle $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

b) $a^x, a^y = a^{x+y}$
($a^{x^y} = a^{xy}$) für alle $x, y \in \mathbb{R}$

c) Für $x = \frac{p}{q} \in Q(p \in \mathbb{Z}, q > 0)$ stimmt Def. von a^x entsprechend. 5.18 mit der der üblichen Definition $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ überein.

Beweis. Folgt aus Definition mit 3.5 □

5.20 Bemerkung

Ist $x \in \mathbb{R}$ und (x_n) Folge mit $x_n \in \mathbb{Q}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,
so $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$ (Stetigkeit)
D.h a^x lässt sich durch $a^{x_n}, x_n \in \mathbb{Q}$, beliebig gut approximieren

5.21 Definition

Für $a > 0, a \neq 1$, heißt die Umkehrfunktion von a^x *Logarithmus zur Basis a*
$\log_a(x)$ ($a = 2, a = e, a = 10$ wichtig)
$\log_e(x) = \ln(x)$

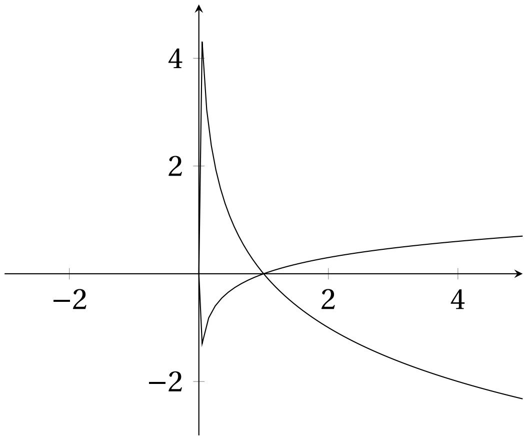


Abbildung 34: Logithmen mit Basen > 1 und < 1

5.22 Satz

Seien $a, b > 0, a \neq 1 \neq b, x, y > 0$

(a) $$\log_a(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

(b) $$\log_a(x^y) = y \cdot \log(x)$$

(c) $$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$$

(d) Sind a,b > 1 , so $O(\log_a(n)) = O(\log_b(n))$

Beweis. *a*) wie 5.10
b) $a^{y \cdot \log_a(a^y)} \underset{5.19b)}{=} (a^{\log_a(x)})^y = x^y$
$$\Rightarrow \log_a(x^y) = \log_a(a^{y \cdot \log_a(x)}) = y \cdot \log_a(x)$$
c) $\log_a(x) = \log_a(b^{\log_a(x)}) \overset{b)}{=} \log_b(x) \cdot \log_a(b)$
d) Folgt aus c), da $\log_a(b) > 0$ □

6 Differenzierbare Funktionen

TODO PLOT mit steigungsdreieck
Sekante durch (c,f(c)), (x,f(x))

Steigung der Sekante:
$x \neq c: \underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{\text{Differenzenquotient}} = s(x)$ definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{c\}$

Falls $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ existiert: Steigung der Tangente an Graph von f in $(c, f(c)))$
(Änderungsrate von f in $(c, f(c))$

6.1 Definition

$\mathscr{I}$ Intervall, $f : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathscr{I}$

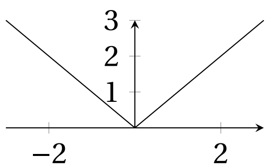
a) f heßt *differenzierbar* (diffbar) an der Stelle c, falls $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ existiert.
Grenzwert heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f an der Stelle c.
$f'(c) = \left(\frac{df}{dx}(\text{c})\right) \qquad \left[f'(c) = \lim\limits_{n \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, h := x - c\right]$

b) f heißt *differenzierbar* auf $\mathscr{I}$, falls f in jedem Punkt von $\mathscr{I}$ differenzierbar ist.
$f' : \begin{cases} \mathscr{I} \to R \\ x \to f(x) \end{cases}$

6.2 Beispiel

a) $f(x) = a \cdot x^n, n \in \mathbb{N} a \in \mathbb{R}$.
$x \neq c : \frac{ax^n - ac^n}{x-c} = \frac{a(x-c)(x^{n-1}\ldots)}{x-c}$
$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{ax^n - ac^n}{x-c} = \lim\limits_{x \to c} = \dfrac{a(x-c)(x^{n-1}\ldots)}{x-c} = a \cdot n \cdot c^{n-1} = f(x)$.
$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ Gilt auch für $n = 0$. (f konstant auf $f' = 0$)

b) $f(x) = |x|$



f ist diffbar in 0?
Zu zeigen $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - 0}{x - 0}$ existiert nicht.
Sei (a_n) Folge, $a_n < 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ (z.B $a_n = -\frac{1}{n}$)
$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{|a_n|}{a_n} = -1$
$b_n > 0, \lim b_n = 0$(z.B $b_n = \frac{1}{n}$)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_n} = 1$
$f'(0)$ *existiert nicht!*

6.3 Satz

$f : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ in $c \in \mathscr{I}$ diffbar. Dann gilt für alle $x \in \mathscr{I}$:
$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x-c) + \mathscr{R}(x) \cdot (x-c)$,
wobei $\mathscr{R}, \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ stetig in c, $\lim\limits_{x\to c} \mathscr{R}(c) = 0$
D.h. : f lässt sich in der Nähe von c sehr gut durch eine lineare Funktion (d.h Graph

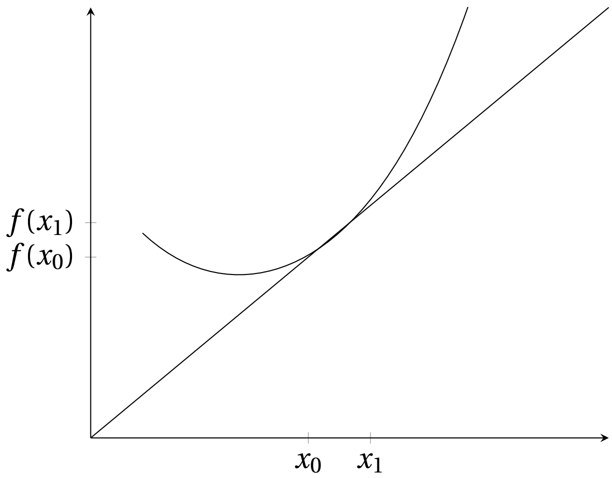


Abbildung 35: Sekante an Funktion

ist Gerade) approximieren.

6.4 Korollar

$f : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ diffbar in $c \Rightarrow f$ ist steig in c. Beweis folgt aus 6.3
Beachte: Umkehrung von 6.4 gilt im Allgemeinen nicht. 6.2b).
Diffbare Funktionen sind stetig, aber sie haben keine Knicke im Graphen.

6.5 Satz (Ableitungsregeln)

$\mathscr{I}$ Intervall, $c \in \mathscr{I}$. Für a)-c)
seien $f, g : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ diffbar in c

a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so $\alpha f + \beta g$ diffbar in c,

$$(\alpha f + \beta g)'(c) = \alpha \cdot f'(c) + \beta \cdot g'(c)$$

b) (Produktregel) $f \cdot g$ diffbar in c,

$$(f \cdot g)'(c) = f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c)$$

c) (Quotientenregel) Ist $g(x) \neq 0$ auf $\mathscr{I}$, so

$$\frac{f}{g}'(c) = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g(c)^2}$$

d) (Kettenregel) $\mathscr{I}_1$ Intervall, $f : \mathscr{I} \to \mathscr{I}_1$, diffbar in $c, g : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ diffbar in $f(c)$, so $g \circ f$ diffbar in c, und

$$(g \circ f)' = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

Beweis. Nur b):
$\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)(g(x) - g(c)) + g(c)(f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + g(c) \cdot \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \underset{6.4}{=} f(c)g'(c) + g(c)f'(c).$

□

6.6 Beispiel

a) $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0$
$f'(x) \underset{\substack{6.5a) \\ 6.2a)}}{=} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$
$\mathscr{I} =]0, \infty[$
$f'(x) \underset{\substack{6.2a) \\ 6.5c)}}{=} \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = (-n) \cdot x^{-n-1}$ gilt auch auf $]-\infty, 0[$

c) $h(x) = (x^2 + x + 1)^2$
(6.5d): $f(x) = x^2 + x + 1)$
$g(x) = x^2$
$h'(x) = 2 \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1)$

6.7 Satz

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin(x)}{1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

Beweis.

a) Elementargeometrisch + Additionstheoreme 1.7 (Man zeig: $\cos(x) < \frac{sin(x)}{x} < 1$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{(1-\cos(x))}{x(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos(x)}{x(1+\cos(x))} = \frac{sin^2(x)}{x} \cdot \frac{x}{1+\cos(x)} \to 0$

□

6.8 Satz

a) $f(x) = \sin(x)$, so $f'(x) = \cos(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$, so $f'(x) = -\sin(x)$

c) $f(x) = \tan(x)$, so $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Beweis. a), $c \in \mathbb{R}$
$\sin'(c) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h+c)+\sin(c)}{h}$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(c)\cdot\cos(h)+\cos(c)\cdot\sin(h)-\sin(c)}{h}$
$= \frac{\sin(c)\cdot\cos(h)-1}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(c)\sin(h)}{h} = \sin(c)\cdot 0 + \cos(c)\cdot 1 = \cos(c)$ b) analog
c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ Quotientenregel + a)b) + $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

□

6.9 Beispiel

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$
f ist diffbar für alle $x \neq 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x} \underset{6.7b)}{=} 0$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-1}{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 = f'(0)$

b) $f(x) = \sin^2(x^3) = (\sin(x^3))^2$
$f'(x) = 2\cdot\sin(x^3)\cdot(\sin(x^3))' = 6\cdot\sin(x^3)\cdot\cos(x^3)\cdot x^2$

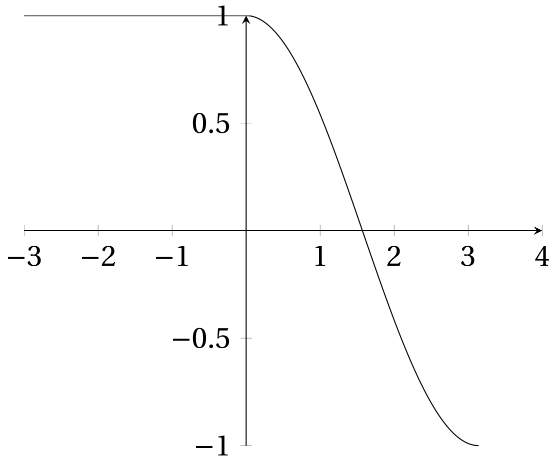


Abbildung 36: Abschnittsweise definierte cosinus Funktion

6.10 Satz

Im Inneren ihres Konvergenzintervalls definieren Potenzreihen eine Funktion
Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$
eine Potenzreihe um a mit Konvergenzradius $\mathbf{R} > 0$.
Dann ist f in $]a-R, a+R[$ diffbar und es gilt : $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1} = f'(x)$.
(gliedweise Ableitung)
(Beweis [7])

6.11 Korollar

$(\exp(x))' = \exp(x)$

Beweis. $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
$(\frac{x^k}{k!}) = \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$
$k = 1, \ldots$
Beweis folgt. □

6.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

$f : \mathscr{I} \to \mathscr{I}_1$ bijektiv, $\mathscr{I}, \mathscr{I}_1$ Intervall (linke und rechte Grenze darf nicht $-\infty/\infty$ sein)
Sei f in $c \in \mathscr{I}$ diffbar und $f'(c) \neq 0$.
Dann ist $f' : \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}$ in $f(c) \in \mathscr{I}_1$ diffbar, und es gilt: $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f(c)}$
Ist f überall auf $\mathscr{I}$ diffbar und $f'(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathscr{I}$, so ist f^{-1} auf $\mathscr{I}_1$ diffbar und es

gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

für alle $x \in \mathscr{I}$.
Beweisidee: f^{-1} diffbar an Stelle $f(c)$, falls $f'(c) \neq 0$. Grund: Graph von f' = Graph von f gespiegelt an Winkelhalbierende $s(x) = x$.
$(f^{-1} \circ f)(x) = x$

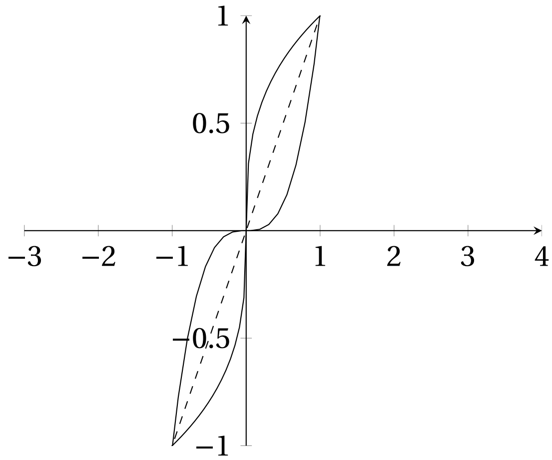
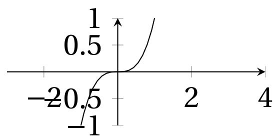


Abbildung 37: Zwei Funktionen an der Winkelhalbierenden

Ableiten mit Kettenregel.
$f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = 1$. Beweis folgt.

6.13 Bemerkung

Bedingung $f'(c) \neq 0$ in 6.12 ist notwendig.



$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to R \\ x \to x^3 \end{cases}$ bijektiv

$f'(0) = 0$. $(f'(x) = 3x^2)$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty$

$(f^{-1})'(0)$ existiert nicht. (jedenfalls nicht als reelle Zahl!)

6.14 Satz

	$f(x)$		$f'(x)$
a)	a^x	$(a \in \mathbb{R}, a > 0), x \in \mathbb{R}$	$\ln(a) \cdot a^x$
b)	$\ln(x)$	auf $]0,\infty[$	$\frac{1}{x}$
c)	$\log_{10}(x)$	(konst. $a > 0$, $a \neq 1$) auf $]0,\infty[$	$\frac{1}{\ln(a)\cdot x}$
d)	$x \cdot (\ln(x) - 1)$	auf $]0,\infty[$	$\ln(x)$
e)	$x^b \cdot (b \in \mathbb{R})$	auf $]0,\infty[$	$b \cdot x^{b-1}$

Beweis. a)
$f(x) = \exp(x \cdot \ln(a))$
$f'(x) \underset{\substack{6.12 \\ \text{Kettenregel}}}{=} \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$
b) $\ln(x)' \underset{6.12}{=} \frac{1}{\exp'(\ln(x))} \underset{6.11}{=} \frac{1}{x}$
c)$\log'_a(x) \underset{6.12}{=} \frac{1}{\ln(a) \cdot a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{\ln(a)\cdot x}$ □

6.15 Satz (logarithmische Abbildung)

$f : \mathscr{I} \to]0,\infty[$ diffbar.
$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
Beweis : Kettenregel und 6.14b)

6.16 Beispiel

$f(x) = e^x \cdot (sin(x) + 2) \cdot x^6$ für $x \neq 0$
$\ln(f(x)) = x + \ln(\sin(x) + 2) + 6 \cdot \ln(x)$
$\ln(f(x))' = 1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{6}{x}$
$f'(x) = (1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2} + \frac{6}{x}) \cdot e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^6$

6.17 Definition

$f : D \to \mathbb{R}$ hat *lokales Maximum*

6.18 Satz

$f : D \to \mathbb{R}$ diffbar.
Hat f in $c \in D$ lokales Minimum/Maximum, so $f'(c) = 0$

Beweis.
c lokale Max.stelle.
$f'(c)$ existiert nach Voraussetzung.
$f'(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$
$f'(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$
$\Rightarrow f'(c) = 0.$ □

Vorsicht: $f'(c) = 0$ ist nicht hinreichend für lokale Maxima/Minima.
z.B $f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$
f hat kein Maximum oder Minimum in 0
Globale Max/Min von f auf $[a, b]$:

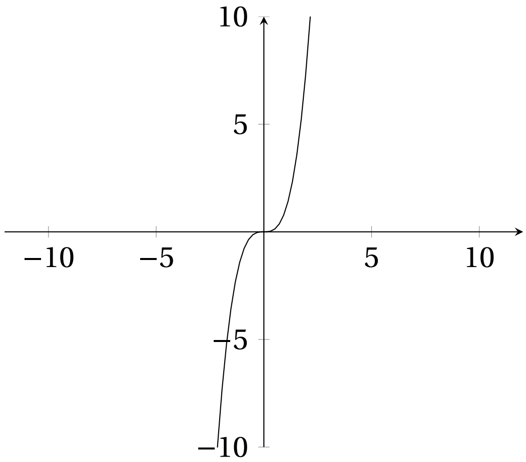


Abbildung 38: Ableitung keine Hinreichende Bedingung für Minima/Maxima

- Bestimme $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$ Teste, ob lokale Max/Min.

- Teste Intervallgrenzen a und b.

6.19 Satz (Mittelwertsatz)

$\mathscr{I} = [a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$
$f : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf $]a, b[$.
Dann existiert $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Speziell: $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$ Satz von Rolle

Beweis. Setze $s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$
(Sekante durch $(a, f(a)), (b, f(b))$)
Def. $h(x) = f(x) - s(x)$. $h(a) = h(b) = 0$.

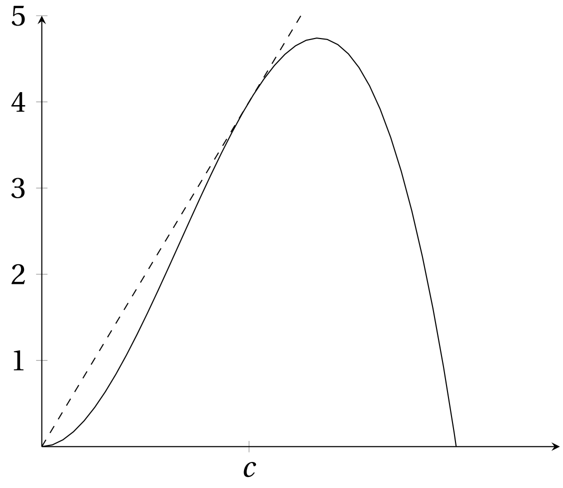


Abbildung 39: Eine Funktion und ihrer Steigung an der Stelle c

Zeige: $\exists c \in]a,b[$ mit $h'(c) = 0$.
Fertig, denn

$$h'(x) = f'(x) - s'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ist h konstant, so kann man jedes $c \in]a,b[$ wählen. Also sei h nicht konstant. h ist stetig auf $[a.b]$. 5.11. h nimmt auf $[a,b]]$ globales Max. und Min. an: $x_{max}, x_{min}, x_{max} \neq x_{min}$, da h nicht konstant $h(a) = h(b)$ O.B.d.A
$x_{max} \in]a,b[$. $6.18: h'(x_{max}) = 0$ $\square$

6.20 Korollar

$\mathscr{I} = [a,b].a < b, f: I \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar in $]a,b[$. (auch $\mathscr{I} = \mathbb{R}$ oder $[a,\infty],]-\infty,b]$ erlaubt)

a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,b[$, so ist f konstant auf $[a,b]$,

b) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a,b[$, so ist f (streng) monoton wachsend auf $\mathscr{I}$

c) Ist $f(x) \leq 0$ für alle $x \in]a,b[$ so ist f (streng) monoton fallend auf $\mathscr{I}$.

Beweis.
Wähle $u < v$, $u, v \in [a, b]$ beliebig.
Wende 6.19 auf $[u, v]$ an. $\exists c \in]u, v[$ mit
$f'(c) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$
Daraus folgt im Fall
a) $f(v) = f(u)$
b) $f(v) \geq f(u)$
c) $f(v) \leq f(u)$ □

Bedingung für strenge Montonie nur hinreichend, nicht notwendig $f(x) = x^3$ streng monoton steigend $f'(0) = 0$

6.21 Korollar

$\mathscr{I} = [a, b], a < b$ wie in 6.20.
$c \in]a, b[. f : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ sei stetig in $\mathscr{I}$.
f auf $\mathscr{I}_0 =]a, b[\setminus \{c\}$ diffbar
Existiert $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$ auf $\mathscr{I}_0$, so existiert $f'(c)$ und $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} f'(x)$.

6.22 Satz (Regeln von L'Hôpital)

a) $\mathscr{I}$ Intervall, c $\in \mathscr{I}$, $f, g : \mathscr{I} \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ diffbar.
Es gelte $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathscr{I} \setminus \{c\}$
Oder : $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathscr{I} \setminus \{c\}$
Es gelte $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ oder ∞
Existiert $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

b) $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ diffbar.
Es gelte $g'(x) > 0$ für alle $x \in [a, \infty[$
oder $g'(x) < 0$ für alle $x \in [a, \infty[$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ oder ∞
Existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist
a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

6.23 Beispiel

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+ax)}{x}$ =?($a \in \mathbb{R}$) Zähler definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $1 + ax > 0$ 6.22a):
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{a}{1+ax}}{1} = a$

b) $\lim\limits_{x \cdot \ln(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{-ln(x)}{\frac{1}{x}} \underset{6.22}{=} \lim\limits_{x\to 0^0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$
$\lim\limits_{x\to 0} -\frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} \exp(x\cdot \ln(x))$
$\underset{\text{exp stetig}}{=} \exp(\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \ln(x)) \underset{\text{b)}}{=} \exp(0) = 1.$
(Deshalb definiert man $0^0 = 1$)

d) $\lim\limits_{x\to\infty} = \frac{\ln(x)}{x} \underset{6.22}{=}$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} = \frac{1}{x} = 0$ (schon in 5.17)

7 Das bestimmte Integral

Ziel: Bestimmung des Flächeninhalts zwischen Graph einer Funktion und x-Achse zwischen zwei Grenzen a und b (sofern möglich).

7.1 Definition

a) $a, b \in \mathbb{R}, a < b. f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ gibt, so dass f auf jedem offenem Intervall $]a_i, a_{i+1}[/,, i = 0\ldots, n-1$, konstant ist. (Wert an den a_i beliebig.)

b) f wie in a).

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f(x)dx := \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i)$$

wobei $f(x) = c_i$ auf $]a_i, a_{i+1}[$.
Integral von f über $[a, b]$ (Integral kann negativ sein)

7.2 Definition

$a, b \in \mathbb{R}. a < b.$
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion* (oder integrierbare Funktion) $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (abh. von ε): $|f(x) - g(x)| \geq \epsilon$ für alle $x \in [a, b]$.
Bedeutung:
Gleichmäßige Approximierbarkeit durch Treppenfunktion.

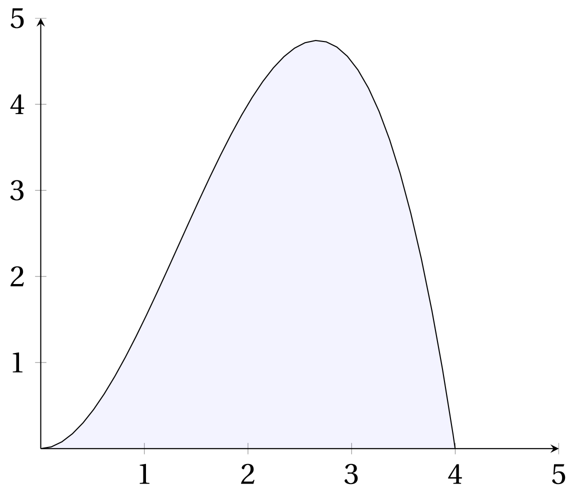


Abbildung 40: Flächeninhalt unter einer Funktion f

7.3 Satz

$\mathscr{I} = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

a) Jede Regelfunktion f auf $\mathscr{I}$ ist beschränkt d.h. $\exists m, M \in \mathbb{R}: \; m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

b) Summe, Produkt und Betrag von Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion

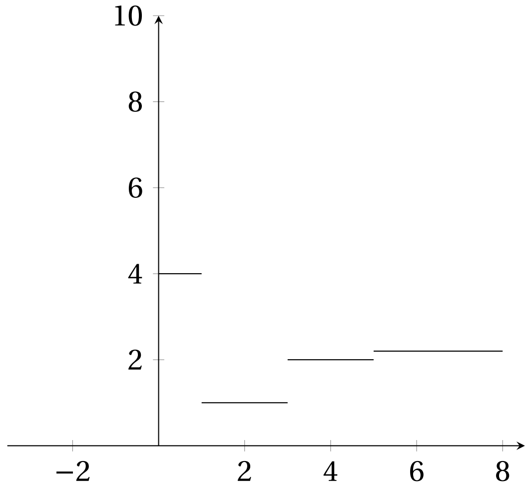


Abbildung 41: Treppenfunktion

Beweisidee für a),b):
Man beweist 7.3 zunächst für Treppenfunktionen. Für b): Bestimme gemeinsame Verfeinerung der Intervallunterteilung der beiden Treppenfunktionen Dann auf Regelfunktionen übertragen.

7.4 Satz

Jede stetige Funktion auf $[a,b]$ ist Regelfunktion *Beweis*: [8] 7.4 gilt auch für soge-

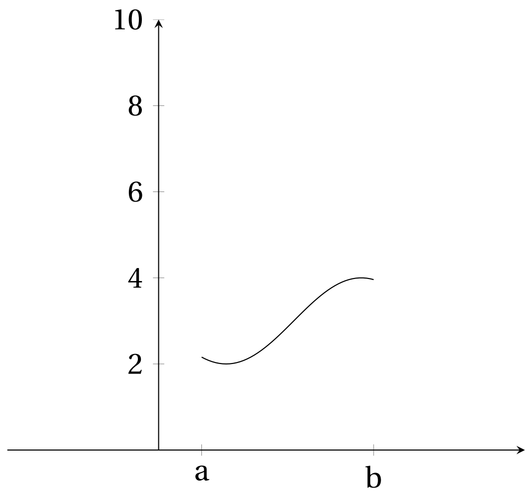


Abbildung 42: Treppenfunktion

nannte *stückweise stetige* Funktionen auf $[a, b]$ $[a, b]$ ist Vereinigung *endlicher* Teilin-

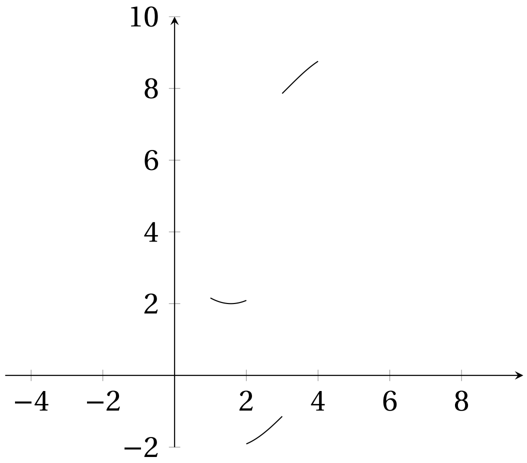


Abbildung 43: Abschnittsweise stetige Funktion

tervalle, auf denen Funktion stetig ist.

7.5 Beispiel

a) $f(x) = x^2, \mathscr{I} = [0, t]$
Definition für $x \in \mathbb{N}$ Treppenfunktion.

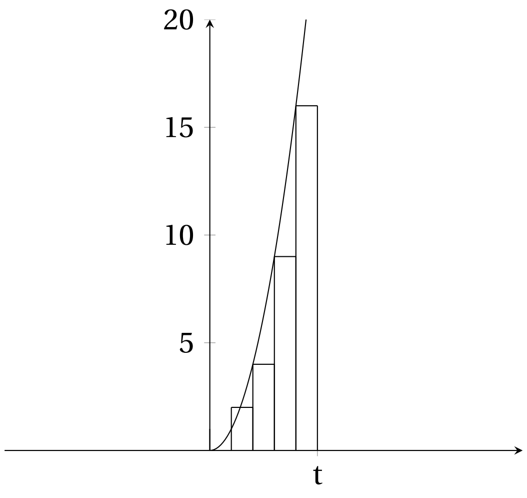


Abbildung 44: Treppenfunktion (Untersumme) von x^2

$f_n : [0, t] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} (\frac{it^2}{n}) & \text{falls } x \in [\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}] \text{für ein } i \in \{0, \ldots, n-1\} \\ t^2 & \text{falls } x = t \end{cases}$$
$x \in [0, t] : |f(x) - f_n(x)| = ?$
$x = t : |f(t) - f_n(x)| = 0.$
$0 \leq x < t :$ Dann $x \in [\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}]$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.
$|f(x) - f_n(x)| = |x^2 - (\frac{it}{n})^2| \leq (\frac{(i+1)t}{n})^2 - (\frac{it}{n})^2 = \frac{2it+t^2}{n^2} \leq \frac{2t}{n} + \frac{t^2}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

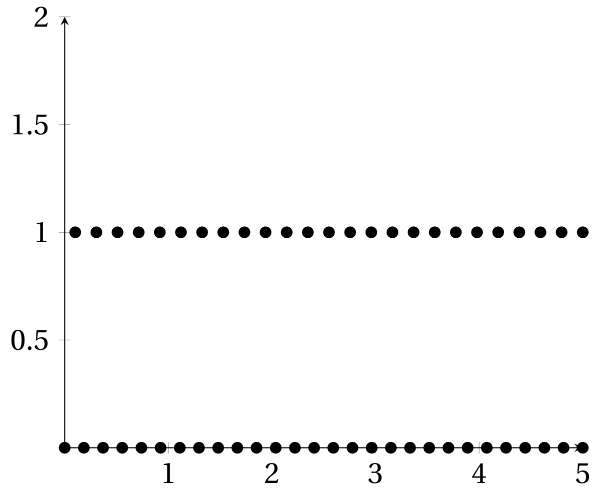


Abbildung 45: Nicht integrierbare Funktion

7.6 Lemma

f Regelfunktion auf $[a, b]$

a) $(f_n)_n$ Folge von Treppenfunktion, die *gleichmäßig* gegen f konvergiert, dass heißt es existiert Nullfolge $(a_n)_n$, $a \geq 0$, und $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ für alle $x \in [a, b]$.
Dann konvergiert die Folge

$$\underbrace{\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n}_{\in\mathbb{R}}$$

b) Sind $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ zwei Folgen von Treppenfunktionen die gegen f gleichmäßig konvergieren, so :

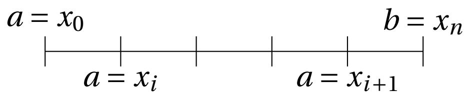
(WHK, 7.20) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx$$

7.7 Definition

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, $(f_n)_n$ Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßif gegen f konvergiert (wie in 7.6 a).
Definition *(bestimmtes) Integral*:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Treppenfunktion:
$\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i(x_m - x_i)$



7.8 Beispiel

$f(x) = x^2$ auf $[0,t]$
f_n wie in 7.5.

$$\int\limits_a^b f_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}(\frac{it}{n})^2\cdot\frac{t}{n} = \sum_{i=0}^{n+1} i^2\cdot\frac{t^2}{n^3} = \frac{t^3}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Per Induktion nach n kann man zeigen : $\sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$
Also : $\int_0^t f_n(x)dx = \frac{t^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$
$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^t f_n(x)dx = \frac{t^3}{6}\cdot 2 = \frac{t^3}{3}$ Falls $t > 0 - \frac{t^3}{3}$

7.9 Satz (Rechenregeln für Integrale)

f, g Regelfunktionen auf $[a, b]$.

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(a) $$\int_a^b a \cdot f(x)dx = a \cdot \int_a^b f(x)dx$$

(b) $$f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(c) $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Sei m $\leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$:

(d) $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

(e) $$a < c < b, \text{ so } \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$$

7.10 Beispiel

$a < b. \int\limits_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

$(o < a < b :)$ 7.9e $\int\limits_a^b x^2 dx = \int\limits_0^b x^2 dx - \int\limits_0^a x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3})$

Analog für die Fälle $a \leq 0 < b$ und $a < b \leq 0$

7.11 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann existiert $c \in [a, b]$ mit $\int_b^a f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$

Beweis. f ist stetig nimmt also das Maximum von m an Stelle x_{min} und Maximum M an der Stelle x_{max} an. (5.11)

7.9d) : $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx$

$f(x_{min}) = m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M = f(x_{max})$

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen 5.10: $\exists c$ zwischen x_{min} und x_{max} (d.h $c \in [a, b]$) mit $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

□

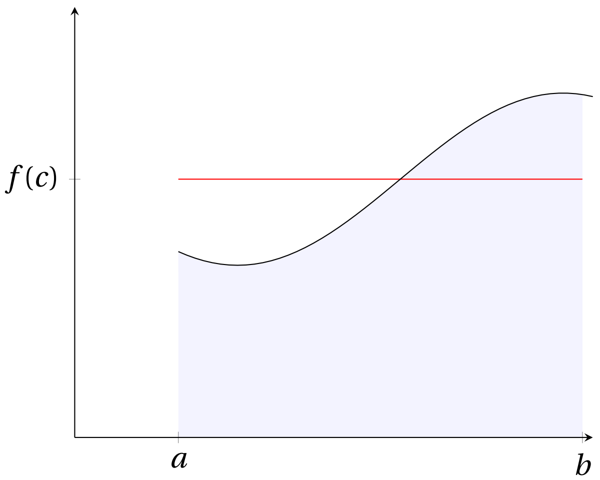


Abbildung 46: Mittelwertsatz der Integralrechnung

8 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

8.1 Definition

a) Sei $[a, b]$ abgeschlossenes, beschränktes (d.h $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) Intervall.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar,

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

b)

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

7.8 $x > 0$
$x > 0 \int_0^x t^2 dt = \boxed{\frac{x^3}{3}}$
$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$
Kein Zufall
$x \leq 0$
$\int\limits_0^x t^2 dt = -\int\limits_x^0 = -(-\frac{x^3}{3}) = \frac{x^3}{3}$
$\int\limits_a^b t^2 = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$

8.2 Definition

Sei $\mathscr{I}$ beliebiges Intervall ($-\infty$ bzw. ∞ als linke/rechte Grenze erlaubt).

a) $f : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar,* wenn f auf jedem ageschlossenem beschränktem Teilintervall $[u, v]$ von $\mathscr{I}$ integrierbar ist.
TODO: Sehr wellige Funktion
(Ist $\mathscr{I}$ selbst abgeschlossen und beschränkt, so „lokal integrierbar „= „integrierbar „)

b) $F : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* der lokal Integrierbaren Funktion $f : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\int_a^V f(t)dt = F(v) - F(u)$$

für alle $u, v \in \mathscr{I}$.
Eine Stammfunktion von f wird auch als *unbestimmtes Integral* von f bezeichnet
$F = \int f(t)dt$

8.3 Bemerkung

Ist f lokal integrierbar auf $\mathscr{I}$, so gilt

Folgt aus 7.9 + 8.1

$$\int_u^v f(t)dt + \int_v^w f(t)dt = \int_u^w f(t)dt$$

für alle $u, v, w \in \mathscr{I}$ (nicht notwendig $u < v < w$)

8.4 Beispiel

a) $f(x) = x^2$ lokal integrierbar auf $\mathbb{R}$.
Stammfunktion von f.
$F(x) = \frac{x^3}{3}$

$$\int_a^b F(b) - F(a)$$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$
Heaviside - Funktion
f ist lokal integrierbar auf $\mathbb{R}$
TODO: PLOT abschnittsweisedefinierte Funktion
Stammfunktion von f:

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$
TODO: PLOT
Zeige: $\forall u, v \in \mathbb{R}$:

$$\int_u^v f(t)dt = F(v) - F(u)$$

$$\begin{aligned}
&(\text{u} < \text{v} < 0) && \int_u^v f(t)dt = 0F(v) - F(u) \\
&(\text{u} < 0 < \text{v}) && \int_u^v f(t)dt = 0 = \int_0^v f(t)dt = 1 \cdot v = F(v) - F(u) \\
&(0 < \text{u} < \text{v}) && \int_u^v f(t)dt = 1 \cdot (v - u)F(v) - F(u) \\
&(\text{u} \geq 0) && \int_u^v f(t)dt = -(F(u) - F(v)) = F(v) - F(u)
\end{aligned}$$

8.5 Satz

Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ Intervall, $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ lokal „Integrierbar "

a) Ist F Stammfunktion von f, so auch $G(x) = F(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.

b) Sind F und G Stammfunktionen von f, so ist $F(x) = G(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$

c) Sei $x_0 \in \mathcal{I}$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist F(x) = $\int_{x_0}^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f.
(Beachte

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{x_0'}^x f(t)dt + \int_{x_0'}^x f(t)dt$$

)

Beweis. a),b)
F Stammfunktion, $c \in \mathbb{R} G(x) = F(x) + c$ ist Stammfunktion von f:
$G(v) - G(u) = F(v) = F(u) = \int_u^v f(t)dt$
Umgekehrt: Seien F, G zwei Stammfunktionen von f. Sei $x_0 \in \mathcal{J}$ halte es fest.
$G(x) - G(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = F(x) - F(x_0)$ für alle $x \in \mathcal{J}$
$G(x) = F(x) + \underbrace{G(x_0) - F(x_0)}_{=:c}$ für alle $x \in \mathcal{J}$ c) $u, v \in \mathcal{J}$
$F(v) - F(u) = \int\limits_{x_0}^{v} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{u} f(t)dt = +\int\limits_{u}^{x_0} f(t)dt + \int\limits_{x_0}^{v} f(t)dt = \int\limits_{u}^{x_0} f(t)dt$ □

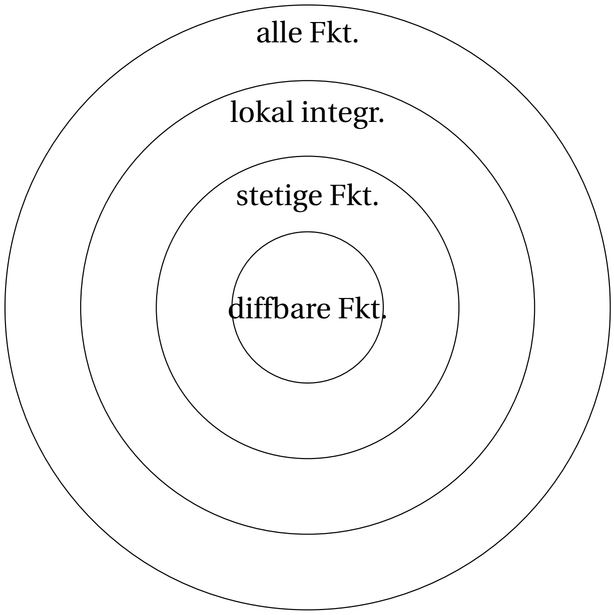


Abbildung 47: Die Welt der Funktionen

8.6 Satz

Jede Stammfunktion einer lokal integrierbaren Funktion ist stetig.

Beweis. $f : \mathscr{J} \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar
$x_0 \in \mathscr{J}$. Zeige: F ist stetig in x_0 (Stammfunktion von f).
Betrachte f auf $[x_0 - 1, x_0 + 1] \cap \mathscr{J}$
Sei $|f(x)| \leq M$ für alle $\in \mathscr{J}_0$.(7.3a)
$|F(x) - F(x_0)| = |\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt| \underset{7.9c)}{\geq} \int\limits_{x_0}^{x} |f(t)dt| \underset{7.9d)}{\geq} M \cdot |x - x_0|$ für alle $x \in \mathscr{J}_0$.
F stetig in x_0 nach 5.2 □

8.7 Definiton

$f : \mathscr{J} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar*, falls f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.
[Beachte : Nicht jede differenzierbare Funktion ist stetig diffbar
Bsp: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$
f' nicht stetig in 0

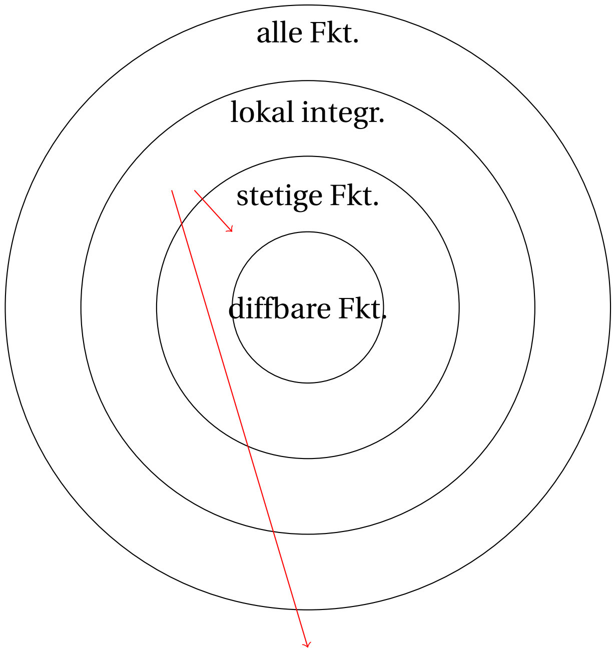


Abbildung 48: Stammfunktionbildung

8.8 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$\mathscr{J}$ beliebiges Intervall, $f : \mathscr{J} \to \mathbb{R}$.

a) Ist f stetig, so ist jede Stammfunktion F von f differejzierbar auf $\mathscr{J}$ und es gilt $F' = f$.

(a)
$$\left(\int f(t)dt\right)' = f$$

Dass heißt $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

b) Ist f stetig diffbar auf $\mathscr{J}$, so ist f Stammfunktion von f', dass heißt.

(b)
$$\int_{x_0}^{x} f'(dt) = f + c$$

$\forall u, v \in \mathscr{J}$:

$$\int_{u}^{v} f'(t)dt = f(v) - f(u) = f(x)\Big|_{u}^{v}$$

$$\begin{array}{ccc} f & \longrightarrow & F = \int f(t)dt \\ F' = f & \longleftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f' & \longleftarrow & f \text{ stetig diffbar} \\ & \longrightarrow & F = \int f'(t)dt = f + c \end{array}$$

Beweis. a) Sei $c \in \mathcal{J}$.
Zu zeigen: $\lim\limits_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c), x \neq c, x \in \mathcal{J}$:
$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} \underset{\text{F. St.fkt. von f}}{=} \frac{1}{x-c} \int_c^x f(t)dt$
Mittelwertsatz der Integralrechnung (**??**). Es existiert $\Theta(x)$ zwischen x und c mit

$$\int_x^c f(t)dt = f(\Theta(x)) \cdot (x-c)$$

$$\begin{aligned} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} &= \frac{1}{x-c} \cdot f(\Theta(x)) \cdot (x-c) \\ &= f(\Theta(x)) \xrightarrow[\substack{x\to c, \text{so} \\ \Theta(x)\to c}]{} f(c), \text{ da } f \text{ stetig} \end{aligned}$$

b) f' ist stetig.
Sei F eine Stammfunktion von f'. Nach a): $F' = f'$.
$(F - f)' = 0$.
6.20a) $F - f = c$ konstant, dass heißt $F = f + c$ □

8.9 Beispiele

Zu. 8.8a):

a) $g(x) = \int_1^x \underbrace{e^{t^2} \cdot (\sin(t) + \cos(\frac{t}{2})}_{\text{stetig}} dt$ 8.8a) : $g'(x) = e^{x^2} \cdot (\sin(x) + \cos(\frac{x}{2})$

b) $g(x) = \int_0^{x^2} e^t \cdot \sin(t)dt$
$F(x) = \int\limits_0^x e^t \cdot \sin(t)dt$
$h(x) = x^2$
$g = F(h(x)) = (F \circ h)(x)$
$g'(x) = F'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x^2) \cdot 2x$

8.10 Beispiel

zu 8.8b)

a) $n \in \mathbb{N}_0$:
$\int ax^n dx = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ denn $\left(a\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = ax^n$
d.h : $\int\limits_u^v a \cdot x^n dx = \frac{a}{n+1}(v^{n+1} - u^{n+1})$
Damit : $\int \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \frac{xi+1}{(i+1)}$

b) $n \geq -2$,so

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{x^{1-n}} + c$$

c) Für $x > 0$ ist $\ln(x)' \frac{1}{x}$ (6.14b)
Also $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$ auf $]0,\infty[$
Auf $]-\infty, 0[$ gilt $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$

d) $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$ auf $]0,\infty[$ (6.14d)

e) $\int e^x dx = e^x + c$

f) $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

8.11 Satz (Partielle Integration)

Seien f und g stetig diffbare Funktionen auf Intervall $\mathscr{J}$. Dann:

$$fg' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$$

Für bestimmte Integrale heißt das:

$$\int\limits_u^v f(x) \cdot g'(x) dx = \underbrace{f \cdot g}_{f(v) \cdot g(v) - f(u) \cdot g(u)} \Big| - \int\limits_y^u f'(x) g(x) dx$$

Für alle $u, v \in \mathscr{J}$

Beweis. 8.8b)
$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$
$\int (f \cdot g' + f' \cdot g) dx = f \cdot g + c$
$\int f \cdot g' + \int f' g \cdot g = f \cdot g$ □

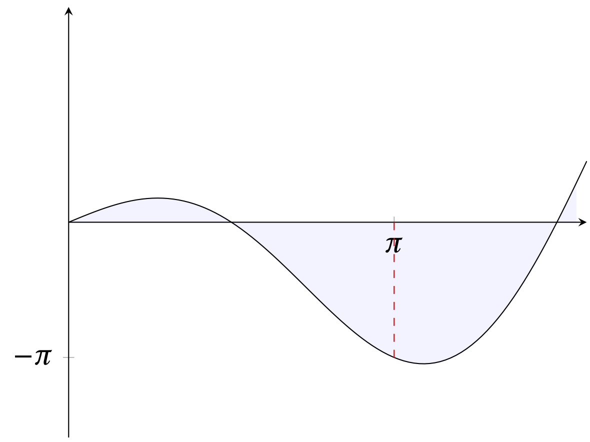


Abbildung 49: $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x)\,dx = 2$

8.12 Beispiele

a) $\displaystyle\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx \underset{8.11}{=} x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c$

b) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx = \int \underset{f'}{\underset{\uparrow}{1}} \cdot \underset{g}{\underset{\uparrow}{\ln(x)}}\,dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \tfrac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - x + c$ (vgl. **??**d)

c) $\displaystyle\int \cos^2(x)\,dx \underset{8.11}{=} \underset{f'}{\underset{\uparrow}{\cos(x)}} \cdot \underset{g}{\underset{\uparrow}{\sin(x)}} + \int \sin(x)\,dx$ $(\star)$

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(x)\,dx &= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1 - \cos^2(x)\,dx \\
&= \cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \cos^x(x)\,dx \\
&\Rightarrow 2 \cdot \int \cos^2(x)\,dx = \cos^2(x)\,dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + x + c
\end{aligned}$$

8.13 Satz (Integration durch Substitution)

$\mathscr{I}, \mathscr{J}$ Intervalle $f : \mathscr{I} \to \mathscr{J}$ stetig diffbar, $g : \mathscr{J} \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion G. Dann ist:

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = G(f(x)) + c$$

Für das bestimmte Integral heißt das:

$$\int_u^v g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = G(f(v)) - G(f(u)) = \int_{f(u)}^{f(v)} g(t)\,dt$$

für alle $u, v \in \mathscr{I}$

Beweis. $G \circ f$ diffbar: 8.8a)
Kettenregel:

$$\begin{aligned}(G \circ f)'(x) &= G'(f(x)) - f'(x) \\ &\underset{8.8a}{=} \underbrace{g(f(x)) \cdot f'(x)}_{\text{stetig}}\end{aligned}$$

Hauptsatz $G \circ f$ ist Stammfunktion von $g(f(x)) \cdot f'(x)$ □

Bemerkung: 8.13 kann in 2 Arten angewandt werden:
1.Art: Mann hat ein Integral der Form

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$$

Berechne

$$\int g(t) dt = \int_{x_0}^{x} g(t) dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{und ersetze} \\ \text{x durch f(x)}}}{G(x)}$$

2.Art:
Man will $\int g(t) dt$ berechnen
Ersetze t durch $f(x)$ (Substitution)
$\left[\frac{dt}{dx} = f'(x) \to dt = f'(x) dx\right]$
und dt durch $f'(x) dx$ ersetzen.
$\to \int g(f(x)) \cdot f'(x) dy$
Hoffnung: ↑ ist einfacher zu berechnen.

8.14 Satz

f ist stetig diffbar auf $\mathscr{I}$, f stetig auf $\mathscr{I}$.

a) Ist $f(x) \neq 0$ auf $\mathscr{I}$,
so $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c$
dass heißt $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|)$
für alle $a, b \in \mathscr{I}$

b) $\displaystyle\int_a^b g(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x) dx$
für alle c mit $a + c, b + c \in \mathscr{I}$.

c) $\displaystyle\int_a^b g(c \cdot x) dx = \frac{1}{c} \int_{a \cdot c}^{b \cdot c} g(x) dx$ für alle $c \neq 0$ mit $a \cdot c, b \cdot c \in \mathscr{I}$

Beweis. a) Setze $g(x) = \frac{1}{x}$.
Also : $G(x) = \ln(|x|) + c$ für alle x $\neq 0$.
8.13 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c$ b) Setze $f(x) = x + c$, 8.13
c) Setze $f(x) = x \cdot c$, 8.13[2]

□

8.15 Beispiel

a) $\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\int \frac{-(\cos(x))'}{\cos(x)} dx \underset{\textbf{??}a)}{=} -\ln(|cos(x)|) + c$[3]

b) $x \cdot \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) dx \underset{8.13}{=} -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$

c) $\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx \underset{\textbf{??}a)}{=} \ln(x^2 + a^2) + c$auf $\mathbb{R}$ $(a \neq 0)$

d) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2} dt$
Fläche des Halbkreises vom Radius 1.
Substitution $t = \sin(x)$
$\frac{dt}{dx} = \cos(x), dt = \cos(x) dx$
$\int_{-1=\sin(-\frac{\pi}{2})}^{1=\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1 - t^2} \overset{8.13}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin(x)^2} \cdot \cos(x) dx = \int \cos^2(x) dx \overset{8.11c}{=} \frac{\cos(x) \cdot \sin(x)}{2} =$
$\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - (\frac{\frac{\pi}{2}}{2}) - (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2})$

Literatur

[1] Kreußler, Phister Satz 33.16

[2] WHK 5.37

[3] WHK 6.21

[4] WHK 6.24

[5] WHK 6.25

[6] WHK 6.25

[2]Beachte $f'(x) = c$
[3]Gilt auf jedem Intervall $]k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}[$

[7] WHK 7.32

[8] WHK 7.19