

Informatik II Skript Sommersemester 2015

Finn Ickler

26. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

14.4.2015	4
16.4.2015	5
21.4.2015	7
23.4.2015	9
28.4.2015	11
30.4.2015	14
5.5.2015	18
7.5.2015	19
12.5.2015	23
19.5.2015	27
21.5.2015	32
9.6.2015	37
11.6.2015	40
16.6.2015	44
18.6.2015	46
23.6.2015	49

25.6.2015

53

Codebeispiele

1	Arithmetik mit Fließkommazahlen	5
2	Schlüsselwort define	6
3	Lambda Abstraktion	6
4	Bilderzusammenstellung am Beispiel einer Uhr	8
5	Die one-of Signatur	11
6	Konstruktion eines eigenen Ifs?	11
7	Absolutbetrag durch cond	13
8	Boolsche Ausdrücke mit and und or	14
9	Record Definitionen	14
10	Check-property	16
11	Übersetzung mathematischer Aussagen in check-property	16
12	Konstruktoren und Selektoren	17
13	predicate Signaturen am Beispiel von Längen- und Breitengrade	19
14	Ersetzung one-of durch predicate Signaturen	19
15	Geocoding	21
16	cond mit gemischten Daten	22
17	Wrapper und Worker	23
18	make-pair, ein polymorpher Datentyp	25
19	Listen mit Signatur list-of	27
20	Geschachtelte Listen	29
21	Rekursion auf Listen: Länge einer Liste	30
22	Rekursion: Zusammenfügen zweier Listen	31
23	Bildmanipulation mit Listen aus Pixeln	32
24	Check-property mit Einschränkungen	35
25	Rekursion auf natürlichen Zahlen: Fakultät	35
26	Fehlerhafte Rekursionen	36
	Endrekursion.rkt	37
27	Umdrehen einer Liste durch lambda Rekursion	38
28	Letrec und endrekursives Umdrehen einer Liste	39
	HigherOrderProcedures.rkt	46
29	Anwendungsbeispiele foldr	48
	Animationen-und-HOP-Typ2.rkt	49
30	Animation 1: Ein Zähler	50
31	Animation 2: Ein Raumschiff	50
32	Anwendungen von Combined	52
33	+ als Higher Order Funktion	52

CurryUndMengen.rkt	53
34 Einfache Curry Beispiele	54
35 Ableitungen berechnen mit Curry	55
36 Mengenoperationen Teil 1	56
37 Mengenoperationen Teil 2	57

14.4.2015**Scheme**

Ausdrücke , Auswertung und Abstraktion

Dr Racket

Definitonsfenster

Willkommen bei [DrRacket](#), Version 6.1.1 [3m].Sprache: **Die Macht der Abstraktion**; memory limit: 128 MB.> **Interaktionsfenster**

Die Anwendung von Funktionen wird in Scheme ausschlieSSlich in Präfixnotation durchgeführt

Mathematik	Scheme
$44 - 2$	<code>(- 44 2)</code>
$f(x, y)$	<code>(f x y)</code>
$\sqrt{81}$	<code>(sqrt 81)</code>
9^2	<code>(! 3)</code>

Allgemein: `(<funktion><argument1><argument2> ...)`

`(+ 40 2)` und `(odd? 42)` sind Beispiele für *Ausdrücke*, die bei *Auswertung* einen Wert liefern.

(Notation: \rightsquigarrow)


`(+ 40 2)` \rightsquigarrow 42
Reduktion

`(odd? 42) ~> #f`

Interaktionsfenster:

$\underbrace{Read \rightarrow Eval \rightarrow Print \rightarrow Loop}_{REPL}$

Literale stehen für einen konstanten Wert (auch: *Konstante*) und sind nicht weiter reduzierbar.

Literal		Sorte, Typ
<code>#f, #t</code>	(true, false, Wahrheitswert)	boolean
<code>"x"</code>	(Zeichenketten)	String
<code>0 1904 42 -2</code>	(ganze Zahl)	Integer
<code>0.42 3.14159</code>	(FlieSS kommazahl)	real
<code>1/2, 3/4, -1/10</code>	(rationale Zahlen)	rational
	(Bilder)	image

16.4.2015

Auswertung *zusammengesetzter Ausdrücke* in mehreren Schritten (Steps), von “innen nach außen“, bis keine Reduktion mehr möglich ist.

`(+ ((+ 20 20) (+ 1 1)) ~> (+ 40 (+ 1 1)) ~> (+ 40 2) ~> 42`

Codebeispiel 1: **Achtung:** Scheme rundet bei Arithmetik mit Fließkommazahlen (interne Darstellung ist binär)

```
; Achtung: Arithmetik mit Fließkommazahlen (real)
unterliegt Rundung!
(+ 0.7
  (- (/ 1/2 0.25)
      (/ 0.6 0.3)))

(- (+ 0.7
      (/ 1/2 0.25))
  (/ 0.6 0.3))

; Arithmetik mit rationalen Zahlen (rational) ist exakt
```

```
(- (+ 7/10
      (/ 1/2 1/4))
  (/ 6/10 3/10))
```

Ein Wert kann an einen *Namen* (auch *Identifizier*) gebunden werden, durch

```
(define <id> <e>)      <id>Identifizier <e>Ausdruck
```

Erlaubte konsistente Wiederverwendung, dient der Selbstdokumentation von Programmen

Achtung: Dies ist eine sogenannte Spezialform und kein Ausdruck. Insbesondere besitzt diese Spezialform *keinen* Wert, sondern einen Effekt Name $\langle id \rangle$ wird an den Wert von $\langle e \rangle$ gebunden.

Namen können in Scheme beliebig gewählt werden, solange

- (1) die Zeichen `()[]{}“‘‘;#|` nicht vorkommen
- (2) dieser nicht einem numerischen Literal gleicht.
- (3) kein Whitespace (Leerzeichen, Tabulator, Return) enthalten ist.

Beispiel: euro→US\$

Achtung: Groß-\\Kleinschreibung ist irrelevant.

Codebeispiel 2: Bindung von Werten an Namen

```
(define absoluter-nullpunkt -273.15)
(define pi 3.141592653)
(define Gruendungsjahr-SC-Freiburg 1904)
(define top-level-domain-germany "de")
5 (define minutes-in-a-day (* 24 60))
  (define vorwahl-tuebingen (sqrt 1/2))
```

Eine *lambda-Abstraktion* (auch Funktion, Prozedur) erlaubt die Formatierung von Ausdrücken, in denen mittels *Parametern* von konkreten Werten abstrahiert wird.

```
(lambda (<p1><p2>...) <e>)
```

$\langle e \rangle$ Rumpf: enthält Vorkommen der Parameter $\langle p_n \rangle$

(lambda(...)) ist eine Spezialform. Wert der lambda-Abstraktion ist #<procedure>

. *Anwendung* (auch Application) des lambda-Aufrufs führt zur Ersetzung aller Vorkommen der Parameter im Rumpf durch die angegebenen *Argumente*.

Codebeispiel 3: Lambda-Abstraktion

```
; Abstraktion: Ausdruck mit "Loch" ☹
```

```

(lambda (⊙) (* ⊙ (* 155 minutes-in-a-day)))

5 ; Zuwachs der Weltbevoelkerung innerhalb von days Tagen
(define population-growth-in-days
  (lambda (days) (* days (* 155 minutes-in-a-day))))

(population-growth-in-days 7)

(lambda (days) (* days (* 155 minutes-in-a-day))) 365) ~~~>
(* 365 (* 155 minutes-in-a-day)) ~~~> 81468000

```

In Scheme leitet ein Semikolon einen Kommentar ein, der bis zum Zeilenende reicht und vom System bei der Auswertung ignoriert wird. Prozeduren sollten im Programm ein- bis zweizeilige *Kurzbeschreibungen* direkt vorangestellt werden.

21.4.2015

Eine Signatur prüft, ob ein Name an einen Wert einer angegebenen Sorte (Typ) gebunden wird. Signaturverletzungen werden protokolliert.

```
(: <id> <signatur>)
```

Bereits eingebaute Sinaturen

natural	\mathbb{N}	boolean
integer	\mathbb{Z}	string
rational	\mathbb{Q}	image
real	\mathbb{R}	...
number	\mathbb{C}	

(: ...) ist eine Spezialform und hat keinen Wert, aber einen Effekt: Signaturprüfung

Prozedur Signatur spezifizieren sowohl Signaturen für die Parameter P_1, P_2, \dots, P_n als auch den Ergebniswert der Prozedur,

```
(: <Signatur P1> ... <Signatur Pn> -> <Signatur Ergebnis>)
```

Prozedur Signaturen werden *bei jeder Anwendung* einer Prozedur auf Verletzung geprüft. *Testfälle* dokumentieren das erwartete Ergebnis einer Prozedur für ausgewählte Argumente:

```
(check-expect <e1> <e2>)
```

Werte Ausdruck $\langle e_1 \rangle$ aus und teste, ob der erhaltene Wert der Erwartung $\langle e_2 \rangle$ entspricht (= der Wert von $\langle e_2 \rangle$) Einer Prozedur sollte Testfälle direkt vorangestellt werden.

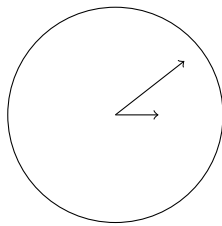
Spezialform: kein Wert, sondern Effekt: Testverletzung protokollieren

Konstruktionsanleitung für Prozeduren:

- (1) Kurzbeschreibung (ein- bis zweizeiliger Kommentar mit Bezug auf Parametername)
- (2) Signaturen
- (3) Testfälle
- (4) Prozedurrumpf

Top-Down-Entwurf (Programmieren durch “Wunschdenken”)

Beispiel: Zeichne Ziffernblatt (Stunden- und Minutenzeiger) zu Uhrzeit h:m auf einer analogen 24h-Uhr



Minutenzeiger legt $\frac{360^\circ}{60}$ Grad pro Minute zurück (also $\frac{360}{60} \cdot m$)

Stundenzeiger legt $\frac{360}{12}$ pro Stunde zurück ($\frac{360}{12} \cdot h + \frac{360}{12} \cdot \frac{m}{60}$)

Codebeispiel 4: Bauen der Uhr durch Top Down Entwurf

```

; Grad, die Minutenzeiger pro Minute zuruecklegt
(define degrees-per-minute 360/60)

; Grad, die Stundenzeiger pro voller Stunde zuruecklegt
5 (define degrees-per-hour 360/12)

; Zeichne Ziffernblatt zur Stunde h und Minute m
(: draw-clock (natural natural -> image))
(check-expect (draw-clock 4 15) (draw-clock 16 15))
10 (define draw-clock
    (lambda (h m)
      (clock-face (position-hour-hand h m)

```



```

(position-minute-hand m)))

15 ; Winkel (in Grad), den Minutenzeiger zur Minute m einnimmt
(: position-minute-hand (natural -> rational))
(check-expect (position-minute-hand 15) 90)
(check-expect (position-minute-hand 45) 270)
(define position-minute-hand
20 (lambda (m)
  (* m degrees-per-minute)))

; Winkel (in Grad), den Stundenzeiger zur Stunde h einnimmt
(: position-hour-hand (natural natural -> rational))
25 (check-expect (position-hour-hand 3 0) 90)
(check-expect (position-hour-hand 18 30) 195)
(define position-hour-hand
(lambda (h m)
  (+ (* (modulo h 12) degrees-per-hour)
30 ; h mod 12 in {0,1,...,11}
    (* (/ m 60) degrees-per-hour))))

; Zeichne Ziffernblatt mit Minutenzeiger um dm und
; Stundenzeiger um dh Grad gedreht
35 (: clock-face (rational rational -> image))
(define clock-face
(lambda (dh dm)
  (clear-pinhole
  (overlay/pinhole
40 (circle 50 "outline" "black")
    (rotate (* -1 dh) (put-pinhole 0 35 (line 0 35 "red")))
    (rotate (* -1 dm) (put-pinhole 0 45 (line 0 45
      "blue"))))))))

```

23.4.2015

Substitutionsmodell

Reduktionsregeln für Scheme (Fallunterscheidung je nach Ausdrücken) wiederhole, bis keine Reduktion mehr möglich

- literal (1, "abc", #t, ...) \rightsquigarrow [eval_{lit}]
- Identifier id(pi, clock-face,...) \rightsquigarrow gebundene Wert [eval_{id}]
- lambda Abstraktion $(\text{lambda } (...) ...) \rightsquigarrow (\text{lambda } (...) ...) \text{ [eval}_\lambda$
- Applikationen (f e₁ e₂...)

(1) f, e_1, e_2 reduzieren erhalte: f', e_1', e_2'

(2) $\begin{cases} \text{Operation } f' \text{ auf } e_1' \text{ und } e_2' [\text{apply}_{\text{prim}}] & \text{falls } f' \text{ primitiv ist} \\ \text{Argumentenwerte in den Rumpf von } f' \text{ einsetzen, dann reduzieren} & \text{falls } f' \text{ lambda Abstraktion} \end{cases}$

Beispiel:

`(+ 40 2)` $\xrightarrow{\text{eval id}}$ `(#<procedure+> 40 2)` $\xrightarrow{\text{eval id}}$ 42

`(position-minute-hand 30)` $\xrightarrow{\text{eval id}}$ `((lambda (m) (* degrees-per-minute m)`
 $\xrightarrow{\text{eval lambda}}$ `(* degrees-per-minute 30)`
 $\xrightarrow{\text{eval id}}$ `(#<procedure *> 360/60 30)`
 $\xrightarrow{\text{apply prim}}$ 180

Bezeichnen `(lambda (x) (* x x))` und `lambda (r) (* r r)` die gleiche Prozedur? \Rightarrow JA!

Achtung: Das hat Einfluß auf das Korrekte Einsetzen von Argumenten für Prozeduren (siehe apply)

Prinzip der Lexikalischen Bindung

Das *bindene Vorkommen* eines Identifiers id kann im Programmtext systematisch bestimmt werden: Suche strikt von innen nach außen, bis zum ersten

(1) `(lambda (r) <Rumpf>)`

(2) `(define <e>)`

Übliche Notation in der Mathematik: *Fallunterscheidung*

$$\max(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ x_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Tests (auch Prädikate) sind Funktionen, die einen Wert der Signatur boolean liefern. Typische primitive Tests.

`(: = (number number -> boolean))`

`(: < (real real -> boolean))`

auch `>`, `<=`, `>=`

```
(: String=? (string string -> boolean))
auch string>?, string<=?
(: zero? (number -> boolean))
auch odd?, even?, positive?, negative?
Binäre Fallunterscheidung if
if
```

$\langle e_1 \rangle$ Mathematik:
 $\langle e_2 \rangle \begin{cases} e_1 & \text{falls } t_1 \\ e_2 & \text{sonst} \end{cases}$
 $\langle e_2 \rangle$)

28.4.2015

Die Signatur *one of* lässt genau einen der ausgewählten Werte zu.

```
(one of <e1> <e2> ... <en>)
```

Codebeispiel 5: one-of am Beispiel des Fußballpunktesystems

```
; Punkte der Heimmannschaft bei Ergebnis h:a
(: heim-punkte (natural natural -> (one-of 3 0 1)))
(check-expect (heim-punkte 2 0) 3)
(check-expect (heim-punkte 1 4) 0)
5 (check-expect (heim-punkte 3 3) 1)
(define heim-punkte
  (lambda (h a)
    (cond ((> h a) 3)
          ((< h a) 0)
10          (else 1))))
```

Reduktion von *if*:

```
(if t1 <e1> <e2>)
```

① Reduziere t_1 , erhalte $t'_1 \rightsquigarrow$ ② $\begin{cases} \langle e_1 \rangle & \text{falls } t'_1 = \#t, \langle e_2 \rangle \text{ niemals ausgewertet} \\ \langle e_2 \rangle & \text{falls } t'_1 = \#f, \langle e_1 \rangle \text{ niemals ausgewertet} \end{cases}$

Codebeispiel 6: Koennen wir unser eigenes 'if' aus 'cond' konstruieren? (Nein!)

```
; Bedingte Auswertung von e1 oder e2 (abhaengig von t1)
(check-expect (my-if (= 42 42) "Yes!" "No!") "Yes!")
(check-expect (my-if (odd? 42) "Yes!" "No!") "No!")
(define my-if
5 (lambda (t1 e1 e2)
  (cond (t1 e1)
```

```

        (else e2)))

; Sichere Division x/y, auch fuer y = 0
10 (: safe-/ (real real -> real))
(define safe-/
  (lambda (x y)
    (my-if (= y 0) ; <-- Funktion my-if wertet ihre
      Argumente
      x ; vor der Applikation aus: (/ x
        y) wird
15      (/ x y)))) ; in *jedem* Fall reduziert. :-(

(safe-/ 42 0) ; Fuehrt zu Fehlermeldung "division
  by zero"
; (Reduktion mit Stepper
  durchfuehren)

```

Spezifikation Fallunterscheidung (conditional expression):

$(\text{cond}$ $(\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle)$ $(\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle)$ \dots $(\langle t_n \rangle \langle e_n \rangle)$ $(\text{else } \langle e_{n+1} \rangle)$	$\left\{ \begin{array}{l} e_1 \text{ falls } t_1 \\ e_2 \text{ falls } t_2 \\ \dots \\ e_n \text{ falls } t_n \\ e_{n+1} \text{ sonst} \end{array} \right.$
--	---

Werte die Tests in den Reihenfolge $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ aus.

Sobald $t_i \# t$ ergibt, werte Zweig e_i aus. e_i ist Ergebnis der Fallunterscheidung.

Wenn $t_n \# t$ liefert, dann liefert

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fehlermeldung „cond: alle Tests ergaben false“} \\ \langle e_{n+1} \rangle \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{falls kein else Zweig} \\ \text{sonst} \end{array} \right.$
---	---

Codebeispiel 7: Absolutwert von x

```

5 (: my-abs (real -> real))
  (check-within (my-abs -4.2) 4.2 0.001) ; Wichtig:
  (check-within (my-abs 4.2) 4.2 0.001)  ; Tesfaelle
    decken alle Zweige
  (check-within (my-abs 0) 0 0.001)      ; der conditional
    expression an
  (define my-abs
    (lambda (x)
      (cond ((< x 0) (- x))
            ((> x 0) x)
            (else 0))))

```

Reduktion von cond [eval_{cond}]

(cond (<t₁> <e₁>) (<t₂> <e₂>) ... (<t_n> <e_n>))

① Reduziere t₁ erhalte t'₁ \rightsquigarrow $\begin{cases} \langle e_1 \rangle & \text{falls } t'_1 = \#t \\ (\text{cond } \langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle) & \text{sonst} \end{cases}$

(cond) \rightsquigarrow „Fehlermeldung: alle Test ergaben false“

(cond (else <e_{n+1}>)) \rightsquigarrow e_{n+1}

cond ist syntaktisches Zucker (auch abgeleitete Form) für eine verbundene Anwendung von if

```

5 (cond (<t1><e1>)
      (<t2><e2>)
      ...
      (<tn><en>)
      (else <en+1>)
      <en+1>))

  (if (<t1>
      <e1>
      (if <t2>
          <e2>
          ...
          (if <tn>
              <en>
              <en+1>)))
      <en+1>))

```

Spezialform 'and' und 'or'

(or <t₁> <t₂> ... <t_n>) \rightsquigarrow (if <t₁> (or <t₂> ... <t_n>) #t)

(or) \rightsquigarrow #f

(and <t₁> <t₂> ... <t_n>) \rightsquigarrow (if <t₁> (and <t₂> ... <t_n>) #f)

(and) \rightsquigarrow #t

Codebeispiel 8: Konstruktion komplexer Prädikate mittels 'and' und 'or'

```

(and #t #f) ; ~> #f (Mathematik: Konjunktion)
(or #t #f) ; ~> #t (Mathematik: Disjunktion)
; Kennzeichen am/pm fuer Stunde h
(: am/pm (natural -> (one-of "am" "pm" "???")))
5 (check-expect (am/pm 10) "am")
  (check-expect (am/pm 13) "pm")
  (check-expect (am/pm 25) "???" )
(define am/pm
10  (lambda (h)
      (cond ((and (>= h 0) (< h 12)) "am")
            ((and (>= h 12) (< h 24)) "pm")
            (else "???" )))

```

30.4.2015

*Zusammengesetzte Daten*Ein Charakter *besteht* aus drei *Komponenten*

- Name des Charakters (name)
 - Handelt es sich um einen Jedi? (jedi?)
 - Stärke der Macht (force)
- } Datendefinition für zusammengesetzte Daten

Konkrete Charakter:

name	„Luke Skywalker“
jedi?	#f
force	25

Codebeispiel 9: Starwars Charakter als Racket Records

```

; Ein Charakter (character) besteht aus
; - Name (name)
; - Jedi-Status (jedi?)
; - Stärke der Macht (force)
5 (: make-character (string boolean real -> character))
  (: character? (any -> boolean))
  (: character-name (character -> string))
  (: character-jedi? (character -> boolean))
  (: character-force (character -> real))
10 (define-record-procedures character
    make-character
    character?
    (character-name
     character-jedi?
15     character-force))

```

```

; Definiere verschiedene Charaktere des Star Wars
Universums
(define luke
  (make-character "Luke_Skywalker" #f 25))
(define r2d2
  (make-character "R2D2" #f 0))
(define dooku
  (make-character "Count_Dooku" #f 80))
(define yoda
  (make-character "Yoda" #t 85))

```

Zusammengesetzte Daten = *Records* in Scheme Record-Definition legt fest:

- Record-Signatur
- *Konstruktor* (baut aus Komponenten einen Record)
- Prädikat (liegt ein Record vor?)
- Liste von *Selektoren* (lesen jeweils eine Komponente des Records)

```

(define-record-procedure <t>
  make-<t>
  <t>?
  (<t>-<comp1> ... <t>-<comp2>))
;Liste der n Selektoren

```

Verträge des Konstruktors der Selektoren für Record- Signatur
 $\langle t \rangle$ mit Komponenten namens $\langle \text{comp}_1 \rangle \dots \langle \text{comp}_n \rangle$

```

(: make-<t> (<t1>...<t2>) -> <t>)
(: <t>-<comp1> (<t> -> <t1>))
(: <t>-<compn> (<t> -> <tn>))

```

Es gilt für alle Strings n , Booleans j und Integer f :

```

(character-name (make-character n j f) n)
(character-jedi? (make-character n j f) j)
(character-force (make-character n j f) f )

```

Spezialform check-property:

```

(check-property
  (for-all ((<id1> <sig1>) ...
            (<idn> <sign>))
    <e>))
↓

```

;Bezieht sich auf <id1> ... <idn>

Test erfolgreich, falls $\langle e \rangle$ für beliebig gewählte Bedeutungen für $\langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$ immer #t ergibt

Codebeispiel 10: Interaktion von Selektoren und Konstruktor:

```
(check-property
  (for-all ((n string)
            (j boolean)
            (f real))
    5   (expect (character-name (make-character n j f)) n)))

(check-property
  (for-all ((n string)
            (j boolean)
            (f real))
    10   (expect (character-jedi? (make-character n j f)) j)))

(check-property
  (for-all ((n string)
            (j boolean)
            (f real))
    15   (expect-within (character-force (make-character n j f))
                        f 0.001)))
```

Beispiel: Die Summe von zwei natürlichen Zahlen ist mindestens so groß wie jeder dieser Zahlen: $\forall x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N} : x_1 + x_2 \geq \max\{x_1, x_2\}$

Codebeispiel 11: Mathematische \forall -Aussage in Racket

```
; Für alle natürlichen Zahlen x1,x2 gilt: x1 + x2 ≥
  max(x1,x2)
(check-property
  (for-all ((x1 natural)
            (x2 natural))
    5   (>= (+ x1 x2) (max x1 x2))))
```

Konstruktion von Funktionen, die bestimmte gesetzte Daten *konsumiert*.

- Welche Record-Componenten sind relevant für Funktionen?

→ Schablone:

```
(: sith? (character -> boolean))
```



```

(define sith?
  (lambda (c)
    ... (character-jedi? c)
5    ... (character-force c) )...))

```

Konstruktion von Funktionen, die zusammengesetzte Daten *konstruieren*

- Der konstruktor *muss* aufgerufen werden

→ Schablone:

```

(define
  lambda (...)
    ... (make-<t>) ...)

```

- Konkrete Beispiele:

Codebeispiel 12: Abfragen der Eigenschaften von character Records

```

; Könnte Charakter c ein Sith sein?
(: sith? (character -> boolean))
(check-expect (sith? yoda) #f)
(check-expect (sith? r2d2) #f)
5 (define sith?
  (lambda (c)
    (and (not (character-jedi? c))
        (> (character-force c) 0))))

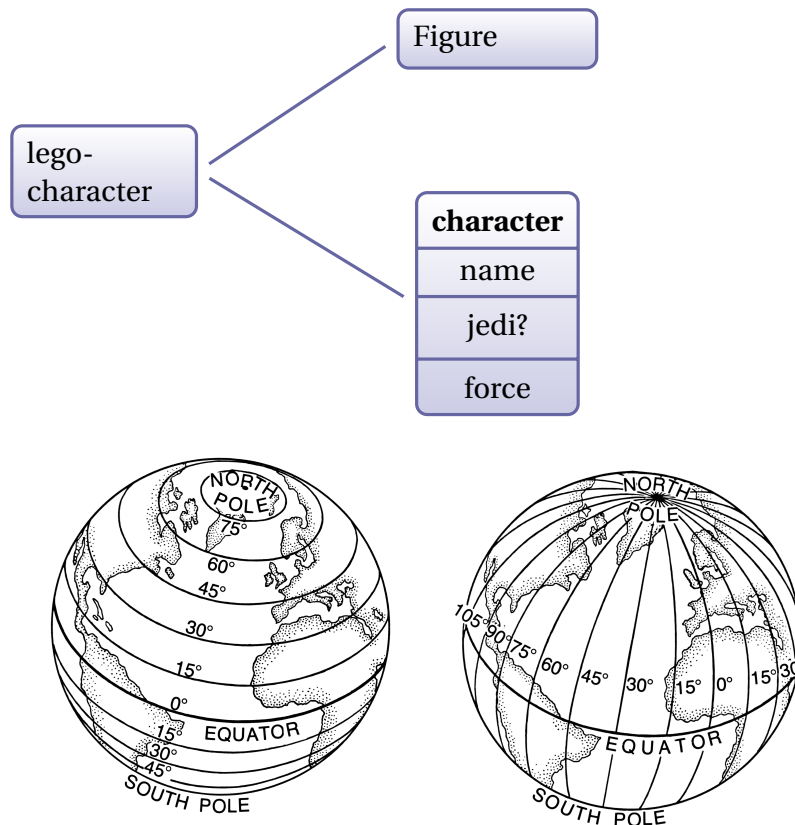
10 ; Bilde den Charakter c zum Jedi aus (sofern c überhaupt
    Macht besitzt)
    (: train-jedi (character -> character))

    (check-expect (train-jedi luke) (make-character "Luke_
        Skywalker" #t 50))
15 (check-expect (train-jedi r2d2) r2d2)

    (define train-jedi
      (lambda (c)
        (make-character (character-name c)
          (> (character-force c) 0)
          (* 2 (character-force c)))))
20

```

5.5.2015



Position Nord/Südwest vom Äquator Position west/östlich vom Nullmeridian
 Sei $\langle p \rangle$ ein Prädikat mit Signatur $\langle t \rangle \rightarrow \text{boolean}$.

Eine Signatur der Form $\langle \text{predicate } \langle p \rangle \rangle$ gilt für jeden Wert der Signatur $\langle t \rangle$ sofern $\langle p \rangle \rightsquigarrow \#t$

Signaturen des Typs $\langle \text{predicate } \langle p \rangle \rangle$ sind damit *spezifischer* (restriktiver) als die Signatur $\langle t \rangle$ selbst.

`(define <newt> (signature <t>)`

Beispiele:

```

(define farbe
  (signature (one-of "Blatt" "Herz" "Blatt" "Eichel"
    "Schell"))))
  
```

Codebeispiel 13: Restriktive Signaturen mit predicate

```

; Ist x ein gültiger Breitengrad
; zwischen Südpol (-90°) und Nordpol (90°)?
(: latitude? (real -> boolean))
(check-expect (latitude? 78) #t)
5 (check-expect (latitude? -92) #f)
(define latitude?
  (lambda (x)
    (within? -90 x 90)))
; Ist x ein gültiger Längengrad westlich (bis -180°)
10 ; bzw. östlich (bis 180°) des Meridians?
(: longitude? (real -> boolean))
(check-expect (longitude? 0) #t)
(check-expect (longitude? 200) #f)
(define longitude?
15 (lambda (x)
    (within? -180 x 180)))
; Signaturen für Breiten-/Längengrade basierend auf
; den obigen Prädikaten
20 (define latitude
  (signature (predicate latitude?)))
(define longitude
  (signature (predicate longitude?)))

```

7.5.2015

Man kann jedes `one-of` durch ein `predicate` ersetzen.

Codebeispiel 14: Das "große One-of Sterben des Jahres 2015"

```

(: f ((one-of 0 1 2) -> natural))
(define f
  (lambda (x)
    x))
5 ; And then the "The Great one-of Extinction" of 2015

```



```

occurred
(: g ((predicate
  (lambda (x) (or (= x 0) (= x 1) (= x 2)))) ->
  natural))

```

```

10 (define g
    (lambda (x)
      x))

```

Geocoding: Übersetze eine Ortsangabe mittels des Google Maps Geocoding API (Application Programm Interface) in eine Position auf der Erdkugel.

```
(: geocoder (string -> (mixed geocode geocode-error)))
```

Ein geocode besteht aus:

Signatur

- Adresse (address) string
- Ortsangabe (loc) location
- Nordostecke (northeast) location Ein geocode-error besteht aus:
- Südwestecke (southwest) location
- Typ (type) string
- Genauigkeit (accuracy) string

```

(: geocode-address (geocode -> string))
(: geocode-loc (geocode -> location))
(: geocode-... (geocode -> ...))

```

Signatur

- Fehlerart (level) (one-of "TCP" "HTTP" "JSON" "API")
- Fehlermeldung (message) string

Gemischte Daten

Die Signatur

```
(mixed <t1> ... <tn>)
```

ist gültig für jeden Wert, der mindestens eine der Signaturen $\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle$ erfüllt.

Beispiel: Data-Definition

Eine Antwort des Geocoders ist *entweder*

- ein Geocode (geocode) *oder*
- eine Fehlermeldung (geocode-error)

Beispiel (eingebaute Funktion string->number)

```

(: string->number (string -> (mixed number (one-of #f))))
(string->number "42") ~> 42
(string-> number "foo") ~> #f

```

Codebeispiel 15: Die Google Geocode API

```

(define geocoder-response
  (signature (mixed geocode geocode-error)))

(: sand13 geocoder-response)
5 (define sand13
   (geocoder "Sand_13,_Tübingen"))

(geocode-address sand13)
(geocode-type sand13)
10 (location-lat (geocode-loc sand13))
(location-lng (geocode-loc sand13))
(geocode-accuracy sand13)

15 (: lady-liberty geocoder-response)
(define lady-liberty
  (geocoder "Statue_of_Liberty"))

(: alb geocoder-response)
20 (define alb
   (geocoder "Schwäbische_Alb"))

(: A81 geocoder-response)
25 (define A81
   (geocoder "A81,_Germany"))

```

Erinnerung:

Das Prädikat $\langle t \rangle?$ einer Signatur $\langle t \rangle$ unterscheidet Werte der Signatur $\langle t \rangle$ von allen anderen Werten:

```
(: @\argt{}@? (any -> boolean))
```

Auch: Prädikat für eingebaute Signaturen

```

number?
complex?
real?
rational?
5 integer?
natural?
string?
boolean?

```

Prozeduren, die gemischte Daten der Signaturen $\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle$ konsumieren:

Konstruktionsanleitung:

```

(: <t> ((mixed <t1> ... <tn>) -> ...))
(define <t>
  (lambda (x)
    (cond
      5      ((<t1>? x) ...)
              ...
              ((<tn>? x) ...))))

```

Mittels *let* lassen sich Werte an *lokale Namen* binden,

```

(let (
  (<id1> <e1>)
  (...)
  (<idn> <en>))
5  <e>
)

```

Die Ausdrücke $\langle e_1 \rangle \dots \langle e_n \rangle$ werden *parallel* ausgewertet. $\Rightarrow \langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$ können in $\langle e \rangle$ (und nur hier) verwendet werden. Der Wert des let Ausdrucks ist der Wert von $\langle e \rangle$.

Codebeispiel 16: Liegt der Geocode r auf der südlichen Erdhalbkugel?

```

; (Breitengrad < 0°?)
(: southern-hemisphere? (string -> boolean))

(check-expect (southern-hemisphere? "Cape_Town") #t)
5 (check-expect (southern-hemisphere? "Tübingen") #f)
(check-error (southern-hemisphere? "Mos_Eisley") "Unknown_
  location")

(define southern-hemisphere?
  (lambda (r)
10    (let ((gc (geocoder r)))
        (cond ((geocode? gc)
                 (< (location-lat (geocode-loc gc)) 0))
              ((geocode-error? gc)
                 (violation "Unknown_location"))))))

```

ACHTUNG:

'let' ist verfügbar auf ab der Sprachebene "Macht der Abstraktion".

'let' ist syntaktisches Zucker.

```

(let (
  ((lambda (<id1> ... <idn>))

```

$$\begin{array}{ccc}
 \langle \langle id_1 \rangle \langle e_1 \rangle \rangle & & \langle e \rangle \\
 \langle \dots \rangle & \equiv & \langle e_1 \rangle \\
 \langle \langle id_n \rangle \langle e_n \rangle \rangle & & \langle e_2 \rangle \dots \\
 5 \quad \langle e \rangle & & \langle e_n \rangle \\
) & &
 \end{array}$$

12.5.2015

Abstand zweier geographischer Positionen b_1, b_2 auf der Erdkugel in km (lat, lng jeweils in Radian).

Codebeispiel 17: Abstand zweier geographischer Positionen

```

; Abstand zweier geographischer Positionen l1, l2 auf der
; Erdkugel in km (lat, lng jeweils in Radian):
; dist(l1,l2) =
;   Erdradius in km *
;   acos(cos(l1.lat) * cos(l1.lng) * cos(l2.lat) *
;       cos(l2.lng) +
5   ;   cos(l1.lat) * sin(l1.lng) * cos(l2.lat) *
;       sin(l2.lng) +
;       sin(l1.lat) * sin(l2.lat))
;   pi
(define pi 3.141592653589793)

10 ; Konvertiere Grad d in Radian (pi = 180°)
(: radians (real -> real))
(check-within (radians 180) pi 0.001)
(check-within (radians -90) (* -1/2 pi) 0.001)
(define radians
15   (lambda (d)
     (* d (/ pi 180))))

; Abstand zweier Orte o1, o2 auf Erdkugel (in km)
20 ; [Wrapper]
(: distance (string string -> real))
(check-within (distance "Tübingen" "Freiburg") (distance
    "Freiburg" "Tübingen") 0.001)
(define distance
  (lambda (o1 o2)

```

```

25  (let ((dist (lambda (l1 l2)                ; Abstand
              zweier Positionen l1, l2 (in km) [Worker]
              (let ((earth-radius 6378) ; Erdradius
                    (in km)
                    (lat1 (radians (location-lat l1)))
                    (lng1 (radians (location-lng l1)))
                    (lat2 (radians (location-lat l2)))
                    (lng2 (radians (location-lng l2))))
                (* earth-radius
                   (acos (+ (* (cos lat1) (cos lng1)
                               (cos lat2) (cos lng2))
                           (* (cos lat1) (sin lng1)
                               (cos lat2) (sin lng2))
                           (* (sin lat1) (sin
                               lat2))))))))))
30
35  (gc1 (geocoder o1))
    (gc2 (geocoder o2))
    (if (and (geocode? gc1)
              (geocode? gc2))
        (dist (geocode-loc gc1) (geocode-loc gc2))
        (violation "Unknown_location(s)"))))
40

; ... einmal quer durch die schöne Republik
(distance "Konstanz" "Rostock")

```

PARAMETRISCH POLYMORPHE PROZEDUREN

Beobachtung: Manche Prozeduren arbeiten unabhängig von den Signaturen ihrer Argumente : *parametrisch polymorphe Funktion* (griechisch : vielgestaltig).

Nutze *Signaturvariablen* %a , %b,...

Beispiel:

```

; die Identität
(: id (%a -> %a))
(define id
  (lambda (x) x))
5
; die konstante Funktion
(: const (%a %b -> %a))
(define const
  (lambda (x y) x))
10
; die Projektion

```



```

(: proj ((one-of 1 2) %a %b -> (mixed %a %b)))
(define proj
  (lambda (i x y)
    (cond ((= i 1) x)
          ((= i 2) y))))

```

Eine polymorphe Signatur steht für alle Signaturen, in denen die Signaturvariablen durch konkrete Signaturen ersetzt werden.

Beispiel: Wenn eine Prozedur `(: number %a %b -> %a)` erfüllt, dann auch:

```

(: number string boolean -> string)
(: number boolean natural -> boolean)
(: number number number -> number)

```

"x"	23
-----	----

2	#f
---	----

```

; Ein polymorphes Paar (pair-of %a %b) besteht aus
; - einer ersten Komponente (first)
; - einer zweiten Komponente (rest)
(: make-pair (%a %b -> (pair-of %a %b)))
5 (: pair? (any -> boolean))
  (: first ((pair-of %a %b) -> %a))
  (: rest  ((pair-of %a %b) -> %b))
(define-record-procedures-parametric pair pair-of
  make-pair
10 pair?
  (first
   rest))

```

`(pair-of <t1> <t2>)` ist eine Signatur für Paare deren erster bzw. zweiter Komponente die Signaturen $\langle t_1 \rangle$ bzw. $\langle t_2 \rangle$ erfüllen.

```

;→ pair-of Signatur mit (zwei) Parametern
(: make-pair (%a %b -> (pair-of % a %b)))
(: pair? (any -> boolean))
(: first ((pair-of %a %b ) -> %a))
5 (: rest ((pair-of %a %b ) -> %b))

```

Codebeispiel 18: Paare aus verschiedenen Datentypen

```

; Ein paar aus natürlichen Zahlen
; FIFA WM 2014
(: deutschland-vs-brasilien (pair-of natural natural))
(define deutschland-vs-brasilien

```

```

5   (make-pair 7 1))

; Ein Paar aus einer reellen Zahl (Messwert)
; und einer Zeichenkette (Einheit)
(: measurement (pair-of real string))
10 (define measurement
    (make-pair 36.9 "°C"))

; "Liste" der Zahlen 1,2,3,4
15 (define nested
    (make-pair 1
               (make-pair 2
                           (make-pair 3
                                       4))))
20 ; Extrahiere das dritte Element der Liste (hier: 3)
    (first (rest (rest nested)))

```

Eine *Liste* von Werten der Signatur $\langle t \rangle$ ist entweder

- leer (Signatur `empty-list`) oder:
- ein Paar (Signatur `pair-of`) aus einem Wert der Signatur $\langle t \rangle$ und einer Liste von Werten der Signatur $\langle t \rangle$.

```

(define list-of
  (lambda (t)
    (signature (mixed empty-list
                      (pair-of t (list-of t))))))

```

Signatur `empty-list` bereits in Racket vordefiniert.

Ebenfalls vordefiniert:

```

(:empty empty-list)
(: empty? (any -\zu boolean))

```

Operatoren auf Listen

Konstruktoren	<code>(: empty-list)</code>	leere liste
	<code>(: make-pair (% a (list-of % a))</code>	Konstruiert Liste aus Kopf und Rest
Predikate:	<code>(: empty (any -> boolean))</code>	liegt leere Liste vor?
	<code>(: pair? (any -> boolean))</code>	Nicht leere Liste?

Selektoren: `(: first (list-of %a)-> %a)` Kopf-Element
 `(: rest (list-of %a)-> (list-of %a))` Rest Liste

Codebeispiel 19: Listen aus einem oder verschiedenen Datentypen

```

; Noch einmal (jetzt mit Signatur): Liste der natürlichen
  Zahlen 1,2,3,4
(: one-to-four (list-of natural))
(define one-to-four
  (make-pair 1
    (make-pair 2
      (make-pair 3
        (make-pair 4
          empty))))))

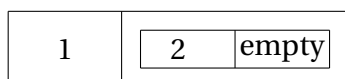
; Eine Liste, deren Elemente natürliche Zahlen oder
  Strings sind
(: abstiegskampf (list-of (mixed number string)))
(define abstiegskampf
  (make-pair "SCF"
    (make-pair 96
      (make-pair "SCP"
        (make-pair "VfB"
          empty))))))

```

19.5.2015

`(make-pair 1 (make-pair 2 empty))`

Visualisierung Listen





Spine (Rückgrat)

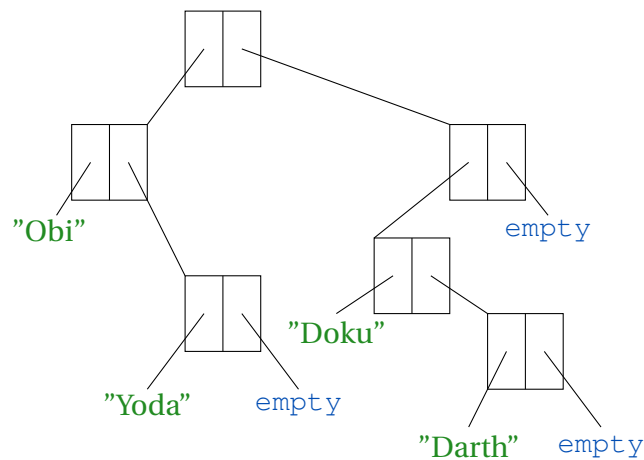
```
(pair-of natural (list-of natural))
(natural first) 1 rest (list-of natural)
```

```
graph TD
    P1["1 | rest (list-of natural)"] --> P2["2 | empty"]
    P2 --> empty["empty"]
```

5

```
(: one-to-four (list-of natural))
(define one-two
  (make-pair 1
    (make-pair 2
      empty)))
```

```
(: jedis-and-siths (list-of (list-of string)))
```



Codebeispiel 20: Jedi und Siths in einer geschachtelten Liste

```

; Geschachtelte Listen
(: jedis-and-siths (list-of (list-of string)))
(define jedis-and-siths
  (MAKE-PAIR (make-pair "Yoda"
                        (make-pair "Obi-Wan" empty))
             (MAKE-PAIR (make-pair "Dooku"
                                    (make-pair "Vader"
                                                empty))
                        empty)))

; Navigation in geschachtelten Listen
(check-expect (first (first jedis-and-siths)) "Yoda")
(check-expect (first (rest (first (rest
  jedis-and-siths)))) "Vader")

```

Prozeduren, die Liste konsumieren

Konstruktionsanleitung:

Beispiel:

```

(: list-sum ((list-of number) -> number))

(check-expect (list-sum empty) 0)
(check-expect (list-sum (make-pair 40
  (make-pair 2
    empty)))) 42)

(check-expect (list-sum one-to-four) 10)

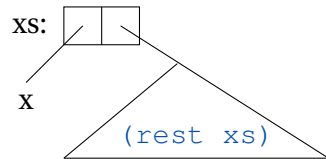
(define list-sum

```

```

10 (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) 0)
          ((pair? xs) (+ (first xs)
                         (list-sum (rest xs))))))

```



(rest xs) mit Signatur (list-of number) ist selbst wieder eine *kürzere Liste* von Zahlen. (list-sum (rest xs)) erzielt Fortschritt

Konstruktionsanleitung für Prozeduren:

```

(: <f> ((list-of <t1>) -> <t2>))
(define <f>
  (lambda (xs)
    (cond
      5      ((empty? xs) ...)
              ((pair? xs) ... (first xs) ...)
              (<f> (rest xs) ...)))

```

Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"

- Signatur (list-of % a) eingebaut

```

(list <e1> <e2> ... <en>)
≡
(make-pair (<e1>)
  (make-pair <e2>
    ... (make-pair <en> empty) ...))
5

```

- Ausgabeformat für nicht leere Listen:

```
{#<list x1x2... xn>
```

Codebeispiel 21: Länge einer Liste

```

; Länge der Liste xs
(: list-length ((list-of %a) -> natural))

(check-expect (list-length empty) 0)
5 (check-expect (list-length (list 1 1 3 8)) 4)

```

```

(check-expect (list-length jedis-and-siths) 2) ; nicht 4
!

(define list-length
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) 0)
          ((pair? xs) (+ 1
                        (list-length (rest xs)))))))

```

Füge Listen xs , ys zusammen (concatination)

Zwei Fälle (xs leer oder nicht leer)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} & \quad \overbrace{\text{empty}}^{xs} \quad \overbrace{y_1 y_2 \dots y_m}^{ys} \quad \overbrace{(cat \ xs \ ys)}^{(cat \ xs \ ys)} \\
 \textcircled{2} & \quad x_1 \quad \overbrace{x_2 \dots x_n}^{(rest \ xs)} \quad y_1 y_2 \dots y_m \quad x_1 \quad \overbrace{x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m}^{(cat \ rest \ xs)}
 \end{aligned}$$

Beobachtung:

- Die Längen von xs bestimmt die Anzahl der rekursiven Aufrufe von cat
- Auf xs werden *Selektoren angewendet*

Codebeispiel 22: Zusammenfügen zweier Listen

```

; Füge Listen xs, ys (in dieser Reihenfolge) zusammen
(: cat ((list-of %a) (list-of %a) -> (list-of %a)))

(check-expect (cat (list 1 2) (list 3 4)) (list 1 2 3 4))
5 (check-expect (cat one-to-four empty) one-to-four)
  (check-expect (cat empty one-to-four) one-to-four)

(define cat
  (lambda (xs ys)
10   (cond ((empty? xs)
          ys)
          ((pair? xs)
           (make-pair (first xs) ; <- cat dennoch param.
                       polymorph
                       (cat (rest xs) ys))))))

15 ; Hinweis: Verfügbar als eingebaute Funktion `append'

```

21.5.2015

Codebeispiel 23: Ausflug: Bluescreen Berechnung wie in Starwars mit Listen:



```
(define yoda
```



```
(define dagobah
```

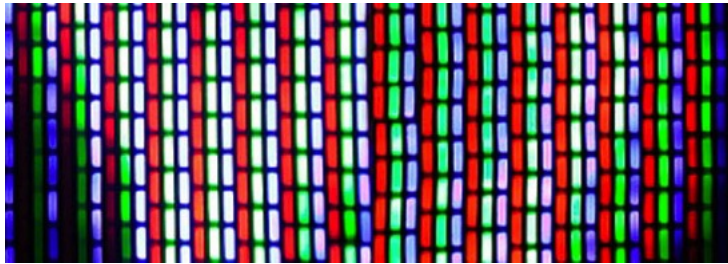
```

; -----
; Zugriff auf die Liste der Bildpunkte (Pixel) eines Bildes:
5  ; (: image->color-list (image -> (list-of rgb-color)))
; (: color-list->bitmap ((list-of rgb-color) natural
   natural -> image))

; Breite/Höhe eines Bildes in Pixeln:
10 ; (: image-width (image -> natural))
   ; (: image-height (image -> natural))

; Eine Farbe (rgb-color) besteht aus ihrem
15 ; - Rot-Anteil 0..255 (red)
   ; - Grün-Anteil 0..255 (green)
   ; - Blau-Anteil 0..255 (blue)

```

```

20 ; (define-record-procedures rgb-color
    ;   make-color
    ;   color?
    ;   (color-red color-green color-blue))
25 ; _____

; Signatur für color-Records nicht in image2.rkt
; eingebaut. Roll our own...
(define rgb-color
  (signature (predicate color?)))
30

; Ist Farbe c bläulich?
(: bluish? (rgb-color -> boolean))
(define bluish?
35   (lambda (c)
     (< (/ (+ (color-red c) (color-green c) (color-blue c))
            3)
         (color-blue c))))

40 ; Worker:
; Pixel aus Hintergrund bg scheint durch, wenn der
; entsprechende Pixel im Vordergrund fg bläulich ist.
; Arbeite die Pixellisten von fg und bg synchron ab
; Annahme: fg und bg haben identische Länge!
45 (: bluescreen ((list-of rgb-color) (list-of rgb-color) ->
  (list-of rgb-color)))
(define bluescreen
  (lambda (fg bg)
    (cond ((empty? fg)
           empty)
50      ((pair? fg)
       (make-pair
        (if (bluish? (first fg))
            (first bg)

```

```

                    (first fg))
                    (bluescreen (rest fg) (rest bg))))))

55
; Wrapper:
; Mische Vordergrund fg und Hintergrund bg nach
  Bluescreen-Verfahren
(: mix (image image -> image))
60 (define mix
    (lambda (fg bg)
      (let ((fg-h (image-height fg))
            (fg-w (image-width fg))
            (bg-h (image-height bg))
            (bg-w (image-width bg))
65
            (if (and (= fg-h bg-h)
                     (= fg-w bg-w))
                (color-list->bitmap
                 (bluescreen (image->color-list fg)
                             (image->color-list bg))
70
                 fg-w
                 fg-h)
                (violation "Dimensionen_von_Vorder-/Hintergrund_
                           verschieden")))))

75 ; Yoda vor seine Hütte auf Dagobah setzen

```



```
(mix yoda dagobah) ~>
```

Generierung aller natürlichen Zahlen (vgl. gemischte Daten)

Eine natürliche Zahl (natural) ist entweder

- die 0 (zero)
- der Nachfolge (succ) einer natürlichen Zahl

$$\mathbb{N} = \{0, (\text{succ}(0)), (\text{succ}(\text{succ}(0))), \dots\}$$

Konstruktoren

```
(: zero natural)
(define zero 0)
(: succ (natural -> natural))
(define succ (lambda (n) (+ n 1)))
```

Vorgänger (pred), definiert für $n > 0$

```
(: pred (natural -> natural))
(define pred
  (lambda (n) (- n 1)))
```

Bedingte algebraische Eigenschaft (für check-property):

```
(==> <p> <t>)
```

Nur wenn $\langle p \rangle \rightsquigarrow\# t$ ist, wird Ausdruck $\langle t \rangle$ ausgewertet und getestet $\langle t \rangle \rightsquigarrow\# t$

Codebeispiel 24: ==> als Einschränkungsoperator

```
; Eigenschaft nur auswerten, wenn n > 0 (==>)
(check-property
  (for-all ((n natural))
    (==> (> n 0)
      (= (succ (pred n)) n))))
```

Beispiel für Rekursion auf natürlichen Zahlen: Fakultät

$0! = 1$
 $n! = n \cdot (n-1)!$

$3! = 3 \cdot 2!$
 $= 3 \cdot 2 \cdot 1!$
 $= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0!$
 $= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$
 $= 6$

$10 = 3628800$

Codebeispiel 25: Fakultät rekursiv

```
; Berechne n!
(: factorial (natural -> natural))
(check-expect (factorial 0) 1)
(check-expect (factorial 3) 6)
5 (check-expect (factorial 10) 3628800)

(define factorial
  (lambda (n)
```

```

10 (cond ((= n 0) 1)
      ((> n 0) (* n (factorial (- n 1))))))

```

Konstruktionsanleitung für Prozeduren über natürlichen Zahlen:

```

(<f> (natural -> <t>))
  (define <f>
    (lambda (n)
      (cond ((= n 0) ...)
            ((> n 0) ... (<f> (- n 1)) ...))))
5

```

Beobachtung:

- Im letzten Zweig ist $n > 0 \rightarrow$ pred angewandt
- (`<f> (- n 1)`) hat die Signatur $\langle t \rangle$

Satz:

Eine Prozedur, die nach der Konstruktionsanleitung für Listen oder natürliche Zahlen konstruiert wurde *terminiert immer* (= liefert immer ein Ergebnis).
(Beweis in Kürze)

Codebeispiel 26: Fehlerhafte Rekursionen

```

; Fehlerhaft: kein Fortschritt im rekursiven Aufruf
; => potentiell "unendliche" Reduktion
(define unfactorial
  (lambda (n)
    (cond ((= n 0) 1)
          ((> n 0) (* n (unfactorial n))))))
5

; Fehlerhaft: kein definierter Abbruch der Rekursion
; => Abbruch der Reduktion bei n = 0 ("cond: alle Tests
    ergaben #f")
10 (define not-factorial
    (lambda (n)
      (cond ((> n 0) (* n (not-factorial (- n 1))))))

```

merken
 $(3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 0!)))$

Die Größe eines Ausdrucks ist proportional zum Platzverbrauch des Reduktionsprozesses im Rechner

⇒ Wenn möglich Reduktionsprozesse, die *konstanten* Platzverbrauch - unabhängig von Eingabeparametern - benötigen

9.6.2015

Beobachtung: `(factorial 10)`.

```
(* 10 (* 9 (* 8 (* 7 (* 6 (factorial 5)))))
= (* (* (* (* (* 109) 8) 7) 6) (factorial 5)) ~> (* 30240 (factorial
Assoziativität von ·
5))
```

→ Multiplikationen können vorgezogen werden :-)

Idee: Führe Multiplikation sofort aus. Schleife des Zwischenergebnis (*akkumulierendes Argument*) durch die ganze Berechnung. Am Ende erhält der Akkumulator das Endergebnis.

Beispiel: Berechne 5!

```
(: fac-worker (natural natural -> natural))
```

n	acc	
-1 ↙ 5	1 ↘ · 5	neutrales Element
-1 ↙ 4	5 ↘ · 4	
-1 ↙ 3	20 ↘ · 3	
-1 ↙ 2	60 ↘ · 2	
-1 ↙ 1	120 ↘ · 1	
-1 ↙ 0	120	

```
; Berechne n!
; Wrapper
5 (: fac (natural -> natural))
  (check-expect (fac 0) 1)
  (check-expect (fac 3) 6)
  (define fac
    (lambda (n)
10      (fac-worker n 1)))

; Berechne n! (mit Zwischenergebnis/Akkumulator acc),
  endrekursiv
; Worker
(define fac-worker
15  (lambda (n acc)
    (cond ((= n 0) acc)
```

```
((> n 0) (fac-worker (- n 1) (* n acc))))))
```

Ein Berechnungsprozess ist *iterativ*, falls seine Größe konstant bleibt.

Damit:

`factorial` nicht iterativ

`fac-worker` iterativ

Wieso ist `fac-worker` iterativ?

Der Rekursive Aufruf ersetzt den aktuell reduzierten Aufruf *vollständig*. Es gibt keinen *Kontext* (umgebenden Ausdruck), der auf das Ergebnis des rekursiven Aufrufs "wartet"

Kontext des rekursiven Aufrufs in:

- `factorial:` (`*` `n` `□`)

- `fac-worker:` keiner

Eine Prozedur ist *endrekursiv* (tail call), wenn sie keinen Kontext besitzt. Prozeduren, die nur endrekursive Prozeduren beinhalten, heißen selber endrekursiv. Endrekursive Prozeduren generieren *iterative* Berechnungsprozesse

```
(: rev ((list-of %a) -> (list-of %a)))
```

Codebeispiel 27: Liste xs umdrehen

```
; Aufwand: 1/2 × n × (n + 1) Aufrufe von make-pair wenn xs
; die Länge n hat
(: rev ((list-of %a) -> (list-of %a)))

5 (check-expect (rev empty) empty)
  (check-expect (rev (list 1 2 3 4)) (list 4 3 2 1))

(define rev
10  (lambda (xs)
      (cond ((empty? xs) empty)
            ((pair? xs)
             (cat (rev (rest xs)) (list (first xs)))))))
```

Beobachtung: von `(rev (from-to 11000))`

$1000 \cdot \text{make-pair}$

$$\overbrace{(\text{cat } (\text{list } 1000 \dots 2) (\text{list } 1))}^{1000 \cdot \text{make-pair}}$$

$(\text{cat } (\text{list } 1000 \dots 3) (\text{list } 2))$

→ Aufrufe von `make-pair`: $1000+999+998+\dots+1$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ Quadratische Aufrufe } :- ($$

Konstruiere iterative Listenumkehrfunktion `backwards`:

n	acc
rest ✓ (list 123)	(list) ↘ make-pair
rest ✓ (list 23)	(list 1) ↘ make-pair
rest ✓ (list 3)	(list 21) ↘ make-pair
empty	(list 321)

Mittels `letrec` lassen sich Werte an lokale Namen binden.

```
(letrec
  ((⟨id1⟩ ⟨e1⟩) ...
   (⟨idn⟩ ⟨en⟩)) (e))
```

Die Ausdrücke $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$ und $\langle e \rangle$ dürfen sich auf die Namen $\langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$ beziehen

Codebeispiel 28: Effizientere Variante eine Liste umzudrehen

```
; Wrapper
(: backwards ((list-of %a) -> (list-of %a)))

5 (check-expect (backwards empty) empty)
  (check-expect (backwards (list 1 2 3 4)) (list 4 3 2 1))

(define backwards
  (lambda (xs)
10
    ; Liste xs umdrehen (mit Akkumulator acc, endrekursiv)
    ; Worker
    ; Aufwand: n Aufrufe von make-pair, wenn xs die Länge
    ;           n hat
    (letrec ((backwards-worker
15
              (lambda (xs acc)
                (cond ((empty? xs) acc)
                      ((pair? xs)
                       (backwards-worker (rest xs)
                                           (make-pair (first xs) acc))))))
      (backwards-worker xs empty))))

20
```

11.6.2015

Induktive Definition

Konstante Definition der natürlichen Zahlen \mathbb{N} .

Definition: (Peano Axiome)

- (P1) $0 \in \mathbb{N}$
 (P2) $\forall n \in \mathbb{N} : \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$
 (P3) $\forall n \in \mathbb{N} : \text{succ}(n) \neq 0$
 (P4) $\forall n, m \in \mathbb{N} : \text{succ}(n) = \text{succ}(m) \Leftrightarrow n = m$

TODO: "Plot" mit punkten und Pfeilen

- (P5) Für jede Menge $M \subset \mathbb{N}$ mit $0 \in M$
 und $\forall n : (n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M)$, gilt $M = \mathbb{N}$

" \mathbb{N} enthält nicht mehr als die 0 und die durch $\text{succ}()$ generierten Elemente

"Nicht ist sonst in \mathbb{N} ,

TODO: Plot von zwei kreisen ineinander Beweisschema der *vollständigen Induktion*

Sei $P(n)$ eine Eigenschaft einer Zahl $n \in \mathbb{N}$

(: P (natural -> boolean))

Ziel : $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Definiere $M = \{n \in \mathbb{N} | P(n)\} \subset \mathbb{N}$ M enthält die Zahlen n für die $P(n)$ gilt

Induktionsaxiom

Falls

$0 \in M$

und

$\forall n : (n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M)$

dann

$M \in \mathbb{N}$

Induktionsstart

Induktionsschritt

Falls
 $P(0)$
 und
 $\forall (P(n) \Rightarrow P(\text{succ}(n)))$
 dann
 $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 1 + 3 &= 4 \\
 1 + 3 + 5 &= 9 \\
 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$P(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^n (2i+1)}_{\substack{\text{Summe der} \\ \text{ersten } n \\ \text{ungeraden Zahlen}}} \stackrel{!}{=} (n+1)^2$$

Induktionsschluss $P(0)$

$$\sum_{i=0}^0 (2i+1) = 2 \cdot 0 + 1 = (0+1)^2 \checkmark$$

Induktionsschritt $\forall n (P(n)) = P(n+1)$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) &\stackrel{\Sigma}{=} \sum_{i=0}^n (2i+1) + (2(n+1)+1) \\
 &\stackrel{i.v.}{=} (n+1)^2 + 2n+3 \\
 &= n^2 + 4n + 4 \\
 &= ((n+1)+1)^2 \checkmark
 \end{aligned}$$

Beispiel:

```

5  (define factorial
    (lambda (k)
      (if
        (= k 0) 1
        (* k (factorial (- k 1)))))

```

$$P(x) \equiv (\text{factorial } n) = \boxed{n!}$$

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Induktionsbasis $P(0)$

`(factorial (0))`

\rightsquigarrow^* `((lambda (k) ...) 0)`

\rightsquigarrow `(if (= 0 0) 1 ...)`

\rightsquigarrow `(if #t 1 ...)`

\rightsquigarrow `1 = 0!` \checkmark

Induktionsschritt: $\forall n : (P(n) \rightarrow P(n+1))$

`(factorial n+1)`

\boxed{x} : (Racket Repräsentation für $x \in \mathbb{N}$)

Unter der
Annahme, dass
tatsächlich
Subtraktion
implementiert
ist

```

~> ((lambda (n) ...) [n+1])

~> (if (= [n+1] 0) 1 ... (...))

~> (if #f 1 ... (...))

~> (* [n+1] (factorial (- [n+1] 1)))

~> (* [n+1] (factorial (- [n])))

 $\stackrel{iv}{=}$  (* [n + 1] n!)

= (n + 1)! ✓

```

Beispiel:

Jede durch die Konstruktionsanleitung für Funktionen über natürliche Zahlen konstruierte Funktion liefert ein Ergebnis (*terminiert immer*)

```

(define f
  (lambda (n)
    (if
      (= n 0) base
      (step (f (n-1)) n))))
5

```

```

(: base natural)
(: step (natural natural -> natural)) Bsp: step → (lambda (x y) (*
x y))

```

Dann gilt $P(n) = (f\ n)$ terminiert (Mit Ergebnis der Signatur `natural`)

Zeige $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Induktionsbasis $P(0)$:

```

(f [0])

~> (if (= [0] 0) base ...)

~> (if #t base

~> base ✓

```

Induktionsschritt $\forall n : (P(n) \rightarrow P(n+1))$

```

(f [n+1])

~> (if (= [n+1] 0) base ... (step ...))

~> (if #f base ... (step ...))

```

\rightsquigarrow (step (f (- n+1 1)) n+1)

\rightsquigarrow (step $\underbrace{(f\ n)}_{\text{terminiert}}$ n+1)

\Rightarrow (step (f n) n+1) terminiert

Definition: (Listen.endliche Folge)

Die Menge M^* (= Listen mit Elementen aus M + list-of M ist *induktiv* definiert

(L1) $\text{empty} \in M^*$

Nicht leere Liste

(L2) $\forall x \in M, xs \in M^*$

$\in M^*$

(L3) Nichts sonst in M^*

Beweisschema *Listeninduktion*

So $P(xs)$ eine Eigenschaft von Listen über M .

(: P ((list-of M) \rightarrow boolean))

(make-pair
x xs)

Falls $P(\text{empty})$

und

$\forall x \in M, xs : P(xs) \Rightarrow (P(xs) \Rightarrow (P(\text{make-pair } x \ xs)))$

dann

$\forall xs \in M^* : P(xs)$

Induktionsanfang

Induktionsschritt

16.6.2015

Beispiel:

```
(define cat
  (lambda (xs ys)
    (cond
      ((empty? xs) ys)
      ((pair? xs) (make-pair (first xs)
                              (cat (rest xs) ys))))))
```

$(M^*, \text{cat}, \text{empty})$
 ist ein Monoid

$$\begin{cases} (1) & \text{cat empty ys} = \text{ys} \\ (2) & (\text{cat xs empty}) = \text{xs} \\ (3) & (\text{cat (cat xs ys) zs}) = (\text{cat xs (cat ys zs)}) \end{cases}$$

Beweise:

(1) $(\text{cat empty ys}) \xrightarrow{*} \text{ys} \checkmark$

(2) $P(\text{xs}) = (\text{cat xs empty}) = \text{xs}$

Induktionsanfang $P(\text{empty})$

$(\text{cat empty empty}) \stackrel{(1)}{=} \text{empty} \checkmark$

Induktionsschritt $\forall x \in M : P(\text{xs}) \Rightarrow P(\text{make-pair x xs})$

(define make-pair mp)

$(\text{cat (mp x xs) empty})$

$\xrightarrow{*} (\text{mp (first (mp x xs)) (cat (rest (mp x xs)) empty)})$

$\rightsquigarrow (\text{mp x (cat xs empty)})$

$\stackrel{iv.}{=} (\text{mp x xs}) \checkmark$

(3) Listeninduktion über xs (ys, zs $\in M^*$ beliebig)

$P(\text{xs}) \equiv (\text{cat (cat xs ys) zs}) = (\text{cat xs (cat ys zs)})$

Induktionsanfang $P(\text{empty})$

$(\text{cat (cat empty ys) zs})$

$\rightsquigarrow \stackrel{(1)}{=} (\text{cat ys zs})$

$\rightsquigarrow \stackrel{(1)}{=} (\text{cat empty (cat ys zs)}) \checkmark$

Induktionsschritt $\forall x \in M : P(\text{xs}) \Rightarrow P(\text{make-pair x xs})$

$(\text{cat (cat (mp x xs) ys) zs})$

$$\begin{aligned}
 & \overset{\star}{\rightsquigarrow} (\text{cat } (\text{mp } x \text{ (cat } xs \text{ } ys)) \text{ } zs) \\
 & \overset{\star}{\rightsquigarrow} (\text{mp } (\text{cat } (\text{cat } xs \text{ } ys)) \text{ } zs) \\
 & \overset{iv.}{=} (\text{mp } (\text{cat } (\text{cat } xs \text{ } ys) \text{ } zs)) \\
 & \rightsquigarrow (\text{cat } (\text{mp } x \text{ } xs) \text{ } (\text{cat } ys \text{ } zs)) \checkmark
 \end{aligned}$$

Beispiel: Interaktion von `length` und `cat` (Distributivität)

```

(define length
  (lambda (xs)
    (cond
      ((empty? xs) 0)
      ((pair? xs) (+ 1
                     (length (rest xs)))))))

```

$P(xs): (\text{length } (\text{cat } xs \text{ } ys)) = (+ (\text{length } xs) (\text{length } ys))$,
 $ys \in M^*$ beliebig.

Induktionsbasis:

```

(length (cat empty ys))
  (1)
  = (length ys)
  +
  = (+ 0 (length ys))
  \rightsquigarrow (+ (length empty) (length ys)) \checkmark

```

Induktionsschritt

```

(length (mp x xs) ys)
  cat \overset{\star}{\rightsquigarrow} (length (mp x (cat xs ys)))
length \overset{\star}{\rightsquigarrow} (+ 1 (length (rest (mp x (cat xs ys)))))
rest \overset{\star}{\rightsquigarrow} (+ 1 (length (cat xs ys)))
      \overset{iv.}{=} (+ 1 (+ (length xs) (length ys)))
      \overset{(+)}{=} (+ (+ 1 (length xs) (length ys)))
length \rightsquigarrow (+ (length (mp x xs) (length ys))) \checkmark

```

Prozeduren höherer Ordnung

(higher-order procedures)

```

; Filtere Liste xs nach Elementen, die Prädikat p? erfüllen
; (Prozedur höherer Ordnung: Parameter p? ist selbst eine
  Funktion)
(: filter ((%a -> boolean) (list %a) -> (list %a)))
(define filter
  5   (lambda (p? xs)
      (cond
        ((empty? xs) empty)
        ((pair? xs)
         10   (if (p? (first xs))
                   (make-pair (first xs)
                              (filter p? (rest xs)))
                   (filter p? (rest xs)))))))

```

Wert des Parameters `p?` ist Prozedur \Rightarrow kann angewendet werden

18.6.2015

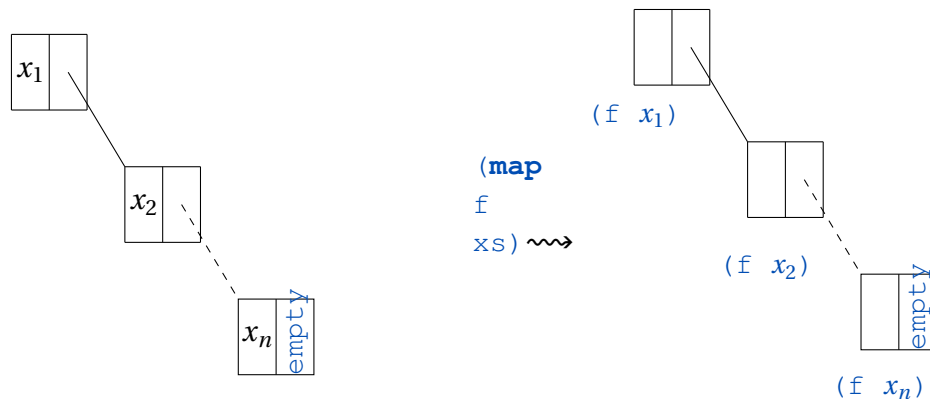
Zwei Arten von *Higher Order Prozeduren* (H.O.P)

- (1) akzeptieren, Prozeduren als Parameter oder/und
- (2) liefern Prozeduren als Ergebnis

`filter` ist vom Typ (1).

H.O.P vermeiden Duplizierung von Code und führen zu kompakteren Programmen, verbesserte Lesbarkeit und verbesserte Wartbarkeit.

Beispiel: `(map f xs)`



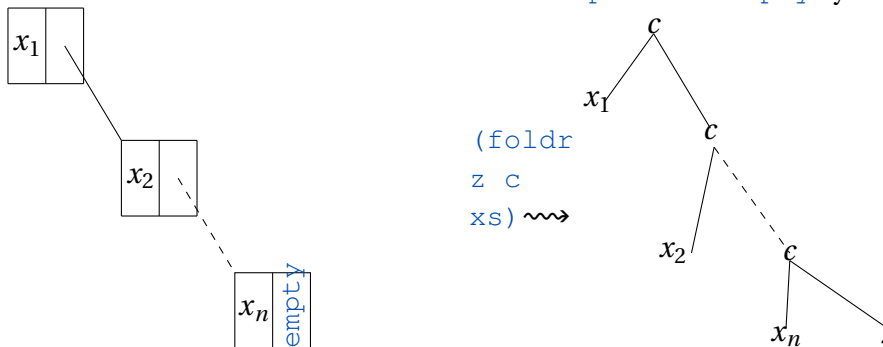
```

;Wende f auf Elemente von Liste xs an
(: map ((%a -> %b) (list-of %a) -> (list-of %a)))
(define map
  (lambda (f xs)
    (cond
      ((empty? xs) empty)
      ((pair? xs) (make-pair (f (first xs))
                              (map f (rest xs)))))))

```

Allgemeine Transformation von Listen *Listenfaltung* (list folding)

Idee: Ersetze die Listenkonstruktoren `make-pair` und `empty` systematisch.



`(foldr z c xs)` wirkt als Spinetransformer

- `empty` \rightsquigarrow `z`
- `make-pair` \rightsquigarrow `c`
- Eingabe : Liste `(list-of %a)`
- Ausgabe : im Allgemeinen *keine* Liste mehr: `%b`

```

;Falte Liste xs bzgl. c und z
(: foldr (%b (%a (list-of %a) -> %b) -> %b))
(define foldr
  (lambda (z c xs)
    (cond
      ((empty? xs) z)
      ((pair? xs)
       (c (first xs)
           (foldr z c (rest xs)))))))

```

Beispiele: Listenreduktion mit `foldr`

TODO: Großes Bild von `foldr` Funktionen

```

(: sum ((list-of number) -> number))
(define sum (lambda (xs) (foldr 0 + xs)))

```

Beispiel: Länge einer Liste durch Listenreduktion TODO: Bild Plotten

```

; Listenreduktion via foldr: Länge der Liste xs
(: my-length ((list-of %a) -> natural))
(define my-length
  (lambda (xs)
    (foldr 0 (lambda (x l) (+ 1 l)) xs)))

```

Codebeispiel 29: Fold und seine Anwendungen

```

; Listenreduktion via foldr: Summe der Liste xs
(: my-sum ((list-of number) -> number))
(define my-sum
  (lambda (xs)
    (foldr 0 + xs)))

; Listenreduktion via foldr: Produkt der Liste xs
(: my-product ((list-of number) -> number))
(define my-product
  (lambda (xs)
    (foldr 1 * xs)))

; Listenreduktion via foldr: Maximum der Liste xs
(: my-maximum ((list-of number) -> number))
(define my-maximum
  (lambda (xs)
    (foldr -inf.0 max xs)))

; Identität (auf Listen), implementiert via foldr
(: my-id ((list-of %a) -> (list-of %a)))
(define my-id
  (lambda (xs)
    (foldr empty make-pair xs)))

; Reimplementation von append via foldr
(: my-append ((list-of %a) (list-of %a) -> (list-of %a)))
(define my-append
  (lambda (xs ys)
    (foldr ys make-pair xs)))

; Reimplementation von map via foldr
(: my-map ((%a -> %b) (list-of %a) -> (list-of %b)))
(define my-map
  (lambda (f xs)
    (foldr empty

```



```

        (lambda (y ys) (make-pair (f y) ys))
        xs)))

; Reimplementation von reverse via foldr
40 (: my-reverse ((list-of %a) -> (list-of %a)))
(define my-reverse
  (lambda (xs)
    (foldr empty
            (lambda (y ys) (append ys (list y)))
            xs)))

45

; Listenreduktion via foldr: Länge der Liste xs
(: my-length ((list-of %a) -> natural))
(define my-length
50 (lambda (xs)
    (foldr 0 (lambda (x l) (+ 1 l)) xs)))

; Reimplementation von filter mittels foldr
(: my-filter ((%a -> boolean) (list-of %a) -> (list-of
55 %a)))
(define my-filter
  (lambda (p? xs)
    (foldr empty
            (lambda (y ys) (if (p? y)
                              (make-pair y ys)
60 ys))
            xs)))

```

23.6.2015

Teachpack 'universe' nutzt H.O.P Animationen (Sequenzen von Bildern/Szenen) zu definieren.

```

(big bang
  (<init>))
  (ontick <tock>))
  (todraw <render><w><h>))

```

- (<init> %a) Startzustand
- (: <tock> (%a -> %a)) Funktion, die einen neuen Zustand aus alten Zustand berechnet

- `(: <render> (%a -> image))` Funktio, die aus dem aktuellen eine Szene berechnet (wird in Fenster mit Dimension $\langle w \rangle \cdot \langle h \rangle$ Pixel angezeigt)
- Beim Schließen der Animation wird der letzte Zustand zurückgegeben

Codebeispiel 30: Ein animierter Zähler

```

; Erstellung von Animationen mit Teachpack "universe"
; (1) Zähler

(: scene (natural -> image))
5 (define scene
  (lambda (t)
    (text (number->string t) 100 "red")))
(big-bang 0
10   (on-tick (lambda (t) (+ t 1)))
      (to-draw scene 200 100))

```

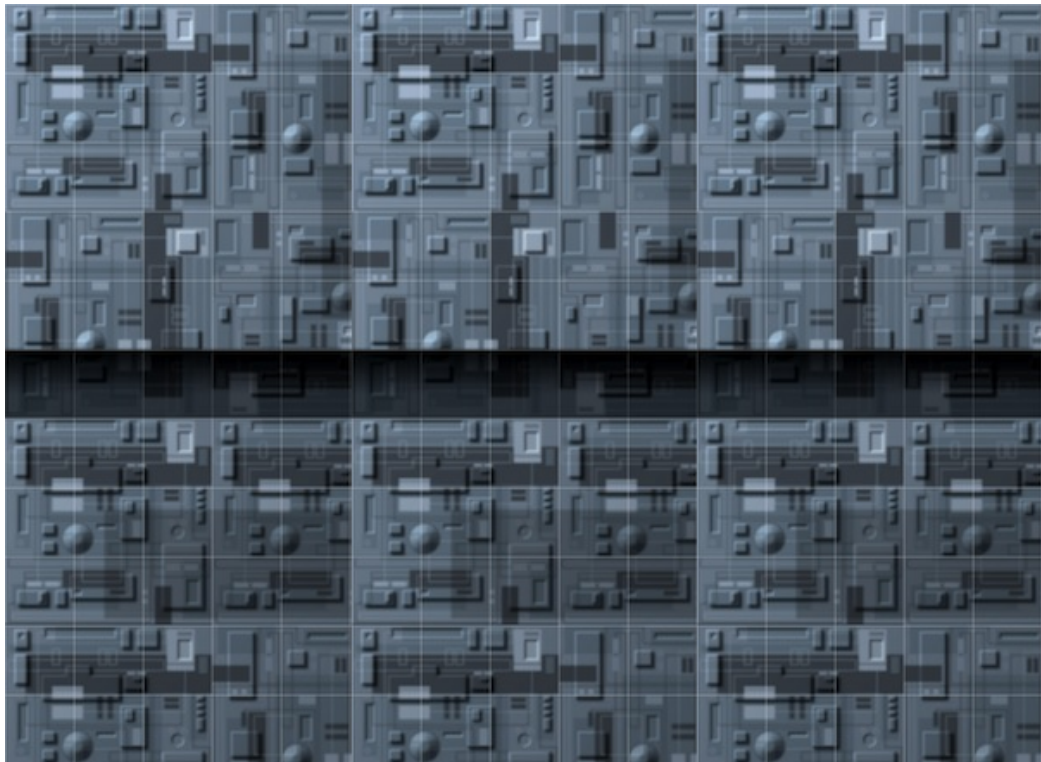
Codebeispiel 31: Ein animiertes Raumschiff

```

; Erstellung von Animationen mit Teachpack "universe"
; (2) X-Wing Fighter + Scrolling Death Star

(define death-star

```





```

(define x-wing )

; Erhalte einfachen Scrolling-Effekt durch Herausschneiden
; von Teilbildern
10 ; aus dem Bild der Todessternoberfläche
; (zu crop und overlay: siehe Dokumentation des Teachpack
; "image2")
(: scroll-death-star (natural -> image))
(define scroll-death-star
  (lambda (t)
    (overlay x-wing
              (crop (modulo (* 8 t) 200) 0 400 440
                    death-star))))
15 (big-bang 0
          (on-tick (lambda (t) (+ t 1))))

```

Ausgabe der römischen Episoden nummern für Film `f`: `(roman (film-episode f))`

Gesuchte Funktion ist *Komposition* von zwei existierenden Funktionen:

- (1) Erst `film-episode` anwenden, *dann*
- (2) Wende `roman` auf das Ergebnis von (1) an

Komposition von Prozeduren allgemein:

$(\underbrace{(\text{compose } f \text{ } g)}_{\text{neue Prozedur realisiert Komposition von } f \text{ und } g}) \ x) \equiv (f \ (g \ x))$

neue Prozedur realisiert
Komposition von `f` und `g`

[Mathematisch $(\text{compose } f \text{ } g) \equiv f \circ g$]

```

(: compose (%b -> %c) ($a -> %b) -> (%a -> %c))
(define compose
  (lambda (f g)
    (lambda (x)
      (f (g x)))))
5

```

Codebeispiel 32: Zweites und Drittes Element durch Combined

```

; Greife auf das zweite Element der Liste xs zu
(: second ((list-of %a) -> %a))
(check-expect (second (list 1 2 3)) 2)
5 (check-expect (second (string->strings-list "SCF")) "C")
(define second
  (lambda (xs)
    ((compose first rest) xs)))

10 ; Greife auf das dritte Element der Liste xs zu
(: third ((list-of %a) -> %a))
(check-expect (third (list 1 2 3)) 3)
(check-expect (third (string->strings-list "SCF")) "F")
15 (define third
  (lambda (xs)
    ((compose first (compose rest rest)) xs)))

```

repeat: n-fache Komposition von f auf sich selbst
(n-fache Anwendung von f, Exponentiation)

$$f^0 = \text{id} \qquad (\text{id} \equiv (\text{lambda } (x) x))$$

$$f^n = f \circ f^{n-1}$$

```

(: repeat (natural (%a -> %a) -> (%a -> %a)))
(define repeat
  (lambda (n f)
    (cond
      5 ((= n 0) (lambda (x) x))
        ((> n 0) (compose f (repeat (- n 1) f))))))
; Greife auf das n-te Element der Liste xs zu
(: nth (natural (list-of %a) -> %a))
(define nth
10 (lambda (n xs)
    ((compose first (repeat (- n 1) rest)) xs)))

```

Codebeispiel 33: Gibt die Funktion + zurück

```

; Funktionen, die ihre Argument schrittweise konsumieren

```

```

; Konsumiert Argumente x,y in einem Schritt (eine
  Reduktion von apply_)
5 (: plus (number number -> number))
(define plus
  (lambda (x y)
    (+ x y)))

10 ; Konsumiert Argumente x,y in zwei Schritten (zwei
    Reduktionen von apply_).
; Nach dem ersten Schritt ist nur Argument x festgelegt,
    Ergebnis ist eine
; Funktion, die das zweite Argument y erwartet.
(: add (number -> (number -> number)))
(define add
15   (lambda (x)
      (lambda (y)
        (+ x y))))

(map (add 1) (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)); ~> (list 2 3 4
5 6 7 8 9 10 11)
20 (map (add 10) (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)); ~> (list 11 12
13 14 15 16 17 18 19 20)

```

Reduktion: $((\text{add } 1) 41)$

\rightsquigarrow
 $\text{eval}_{id} \quad ((\text{lambda } (x) (\text{lambda } (y) (+ x y)) 1) 41)$

\rightsquigarrow
 $\text{apply}_\lambda \quad \underbrace{((\text{lambda } (y) (+ 1 y)) 41)}_{\text{Funktion die 1 auf ihr Argument anwenden}}$
 $[\text{lambda}(x)]$

\rightsquigarrow
 $\text{apply}_\lambda \quad (+ 1 41)$
 $[\text{lambda}(y)]$

25.6.2015

```
(set-insert
  2
  (%a %b -> %c) → Applikation auf zwei Argumente (Signaturen %a, %b) → %c
```

Curry \downarrow \uparrow uncurry = \updownarrow

```
(%a -> (%b -> %c)) → App. auf Arg. (Sig. %a) → (%b %c) App. auf Arg. (Sig. %b) → %c
Currying (Haskell B. Curry, Moses Schönfinkel)
```

Anwendung einer Prozedur auf ihr erstes Argument liefert Prozedur der restlichen Argumente.

Jede n-stellige Prozedur lässt sich in eine alternative curried Prozedur transformieren, die in n Schritte jeweils ein Argument konsumiert. Uncurry ist die umgekehrte Transformation.

```
(: curry ((%a %b -> %c) -> (%a -> (%b -> %c))))
(define curry
  (lambda (f)
    (lambda (x)
      5      (lambda (y)
                (f x y)))))
(: uncurry (%a -> (%b -> %c) -> (%a %b -> %c)))
(define uncurry
  10  (lambda (f)
        (lambda (x y)
          ((f x) y))))
```

Es gilt für jeder Prozedur p:

```
(uncurry (curry p)) = p
```

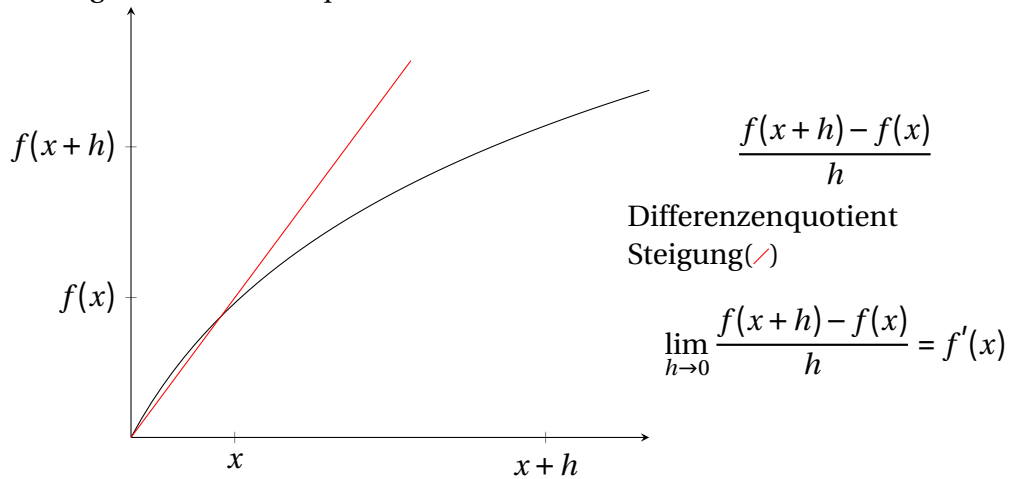
„Schönfinkel Isomorphismus“

Codebeispiel 34: Einfache Anwendung von Curry

```
(map ((curry +) 1) (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10))
; ~~~~~> (list 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11)
5 (map ((curry +) 10) (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10))
; ~~~~~> (list 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20)
(filter ((curry =) 2) (list 1 2 3 4 5 4 3 2 1))
; ~~~~~> (list 2 2)
```

Erinnerung: Bestimmung der ersten Ableitung der reellen Funktion durch Bildung des Differentialquotienten

Bildung des Differentialquotienten:



Operator ' (Ableitung konsumiert Funktionen und produziert Funktion) → ' ist higher Order

Codebeispiel 35: Ableitungen mit Curry

```

; Differenzenquotienten von f (mit Differenz h)
(: diffquot (real (real -> real) -> (real -> real)))
(define diffquot
  (lambda (h f)
    (lambda (x)
      (/ (- (f (+ x h)) (f x))
         h))))

; Berechne Differenzenquotienten mit Differenz h = 0.00001
; ((derive f) x) ≡ (f' x)
(: derive ((real -> real) -> (real -> real)))
(define derive
  (curry diffquot) 0.00001)

; Beispielfunktion: f1(x) = x³ + 2x
(: f1 (real -> real))
(define f1
  (lambda (x) (+ (* x x x)
                  (* 2 x))))

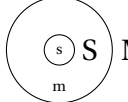
; Ableitung von f1(x)
; f1'(x) = 3x² + 2
(check-property

```

```

(for-all ((x real))
  (expect-within ((derive f1) x)
    (+ (* 3 x x) 2)
    0.01)))
30 ; Ableitung von f(x) = atan(x)
; f'(x) = 1 / (1 + x2)
(check-property
  (for-all ((x real))
    (expect-within ((derive atan) x)
35      (/ 1
          (+ 1 (* x x)))
          0.01)))

```

Charakteristische Funktion einer Menge $S \subseteq M$ 

Charakteristische Funktion für S: $(:\chi_s (M \rightarrow \text{Boolean}))$

$$\chi_s(x) = \begin{cases} \#t & x \in S \\ \#f & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\chi_s(m) = \#f \quad \chi_s(s) = \#t$$

Idee Repräsentiere $S \subseteq$ durch Prozedur $(M \rightarrow \text{boolean})$ und Mengenoperation auf Prozeduren (H.O.P)

Codebeispiel 36: Grundlagen Mengenimplementierung

```

; Charakteristische Funktion (M -> boolean) als
  Repräsentation
; für eine Menge  $S \subseteq M$ 
(define set-of
5   (lambda (t)
      (signature (t -> boolean))))

; S42 = { x ∈ ℤ | x > 42 }
(: S42 (set-of integer))
10 (define S42
    (lambda (x)
      (> x 42)))

; Leere Menge ∅
15 (: empty-set (set-of %a))
(define empty-set
  (lambda (x)
    #f))

```



```

20 ; Ist Element x in der Menge S ( $x \in S$ )?
(: set-member? (%a (set-of %a) -> boolean))
(define set-member?
  (lambda (x S)
    (S x)))

```

-) Darstellung unendlicher Mengen ($S_42 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 42\}$)

-) Mengenoperationen (\cup, \cap, \setminus) in *Konstanter Zeit*

Element x in Menge S einfügen:

$$\chi_{S \cup \{x\}}(y) = \begin{cases} \#f & x = y \\ \chi_S(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Codebeispiel 37: Erweiterte Mengenoperationen

```

; Element x in Menge S hinzufügen:  $S \cup \{x\}$ 
(: set-insert (number (set-of number) -> (set-of number)))
5 (define set-insert
  (lambda (x S)
    (lambda (y)
      (or (= y x)
          (S y)))))

10 ; Test: die leere Menge enthält kein Element
(check-property
  (for-all ((x integer))
    (boolean=? (set-member? x empty-set) #f)))

15 ; Test: die Menge  $\emptyset \cup \{x\}$  enthält x
(check-property
  (for-all ((x integer))
    (set-member? x (set-insert x empty-set))))

20 ; Konstruiere  $\{1, 2, 3, 4, 5\} = ((((\emptyset \cup \{1\}) \cup \{2\}) \cup \{3\}) \cup$ 
  {4})  $\cup \{5\}$ 
(: 1-to-5 (set-of integer))
25 (define 1-to-5
  (set-insert
    5
    (set-insert
      4

```

```
30 (set-insert  
    3  
    (set-insert  
      2  
      (set-insert  
        1 empty-set))))))
```