

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>2</b>
1.1	Definition . . . . .	2
1.2	Veranschaulichung . . . . .	3
1.3	Rechenregeln in $\mathbb{C}$ . . . . .	3
1.4	Definition Absolutbetrag . . . . .	4
1.5	Rechenregeln für den Absolutbetrag . . . . .	4
1.6	Darstellung durch Polarkoordinaten . . . . .	5
1.7	Additionstheoreme der Trigonometrie . . . . .	6
1.8	geometrische Interpretation der Multiplikation . . . . .	6
1.9	Bemerkung und Definition . . . . .	6
1.10	Satz . . . . .	7
1.11	Beispiel . . . . .	7
1.12	Bemerkung . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>7</b>
2.1	Definition . . . . .	7
2.2	Beispiel . . . . .	8
2.3	Definition . . . . .	8
2.4	Definiton . . . . .	9
2.5	Beispiele . . . . .	9
2.6	Satz . . . . .	10
2.7	Bemerkung . . . . .	10
2.8	Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen) . . . . .	10
2.9	Satz . . . . .	11
2.10	Bemerkung . . . . .	12
2.11	Definition . . . . .	12
2.12	Satz . . . . .	13
2.13	Bemerkung . . . . .	13
2.14	Definition . . . . .	13
2.15	Beispiel . . . . .	13
2.16	Satz . . . . .	14
2.17	Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium) . . . . .	14
2.18	Definition . . . . .	14
2.19	Satz . . . . .	15
2.20	Beispiele . . . . .	15
2.21	Satz (Leibniz-Kriterium) . . . . .	17
2.22	Satz (Majoranten-Kriterium) . . . . .	17
2.23	Beispiel . . . . .	17
2.24	Definition . . . . .	17
2.25	Korollar . . . . .	18
2.26	Satz . . . . .	18
2.27	Bemerkung . . . . .	19
2.28	Beispiel . . . . .	19
2.29	Bemerkung . . . . .	19
2.30	Definition . . . . .	19
2.31	Satz . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>20</b>
3.1	Definition . . . . .	20
3.2	Beispiel . . . . .	20
3.3	Satz . . . . .	20

3.4	Bemerkung . . . . .	21
3.5	Die Exponentialreihe . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Reele Funktionen und Grenzwerte von Funktionen</b>	<b>24</b>
4.1	Definition . . . . .	24
4.2	Beispiel . . . . .	24
4.3	Definition . . . . .	26
4.4	Beispiel . . . . .	26
4.5	Definition . . . . .	27
4.6	Beispiel . . . . .	27
4.7	Satz $(\varepsilon - \delta)$ -Kriterium . . . . .	30
4.8	Satz (Rechenregeln für Grenzwerte) . . . . .	31
4.9	Beispiel . . . . .	31
4.10	Bemerkung . . . . .	32
4.11	Beispiel: . . . . .	32
4.12	Definition . . . . .	32
4.13	Beispiel . . . . .	33
4.14	Bemerkung . . . . .	33
4.15	Definition . . . . .	33
4.16	Satz . . . . .	34
4.17	Beispiel . . . . .	35

# 1 Komplexe Zahlen

## 1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

Addition:  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplikation:  $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$   
 (Ausmultiplizieren und  $i^2 = -1$  beachten)

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$

Rein imaginäre Zahlen :  $bi, b \in \mathbb{R}, (0 + bi)$

i imaginäre Einheit

$z = a + bi \in \mathbb{C}$

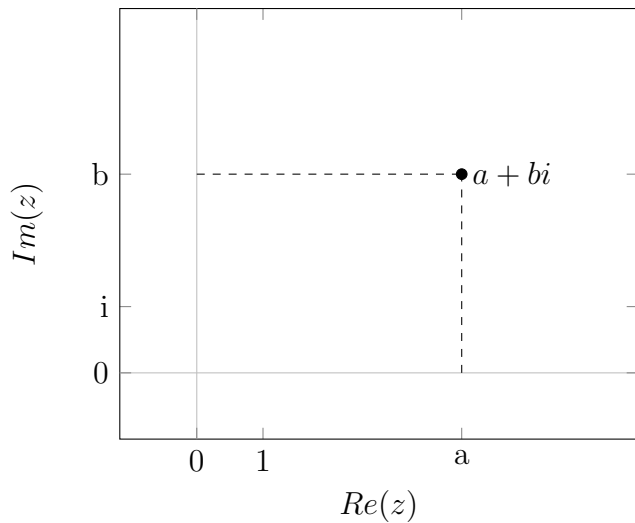
$a = \Re(z)$  Realteil von  $z(Re(z))$

$b = \Im(z)$  Imaginärteil von  $z(Im(z))$

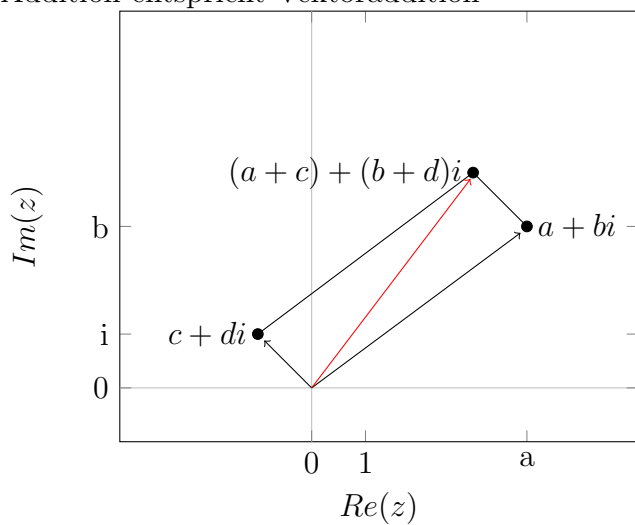
$\bar{z} = a - bi (= a + (-b)i)$

Die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl

## 1.2 Veranschaulichung



Addition entspricht Vektoraddition



## 1.3 Rechenregeln in $\mathbb{C}$

- a) Es gelten alle Rechenregeln wie in  $\mathbb{R}$ . (z.B. Kommutativität bzgl.  $+$ ,  $\cdot$ :  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  und  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ )

Inversenbildung bzgl.  $\cdot$ :

$z = a + bi \neq 0$ , d.h.  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$z \cdot z^{-1} = \frac{5-7i}{3+2i} = (5-7i) \cdot (3+2i)^{-1}$$

$$\text{Beispiel:} \quad = (5-7i) \cdot \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right)$$

$$= \left(\frac{15}{13} - \frac{14}{13}\right) + \left(-\frac{10}{13} - \frac{21}{13}\right)i$$

$$= \frac{1}{13} - \frac{31}{13}i$$

Speziell:  $(bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i$ ; insbesondere:  $\frac{1}{i} = -i$

- b)  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

## 1.4 Definition Absolutbetrag

a) Absolutbetrag von  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  :

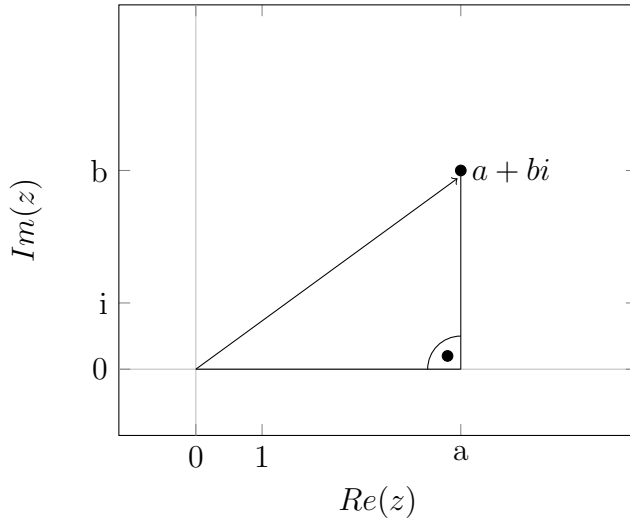
$$|z| = \underbrace{+\sqrt{a^2 + b^2}}_{\in \mathbb{R}, \geq 0}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}} \quad |z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2$$

$$|z| = \text{Abstand von } z \text{ zu } 0$$

$$= \text{Länge des Vektors, der } z \text{ entspricht}$$



b) Abstand von  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  :

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

## 1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

a)  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

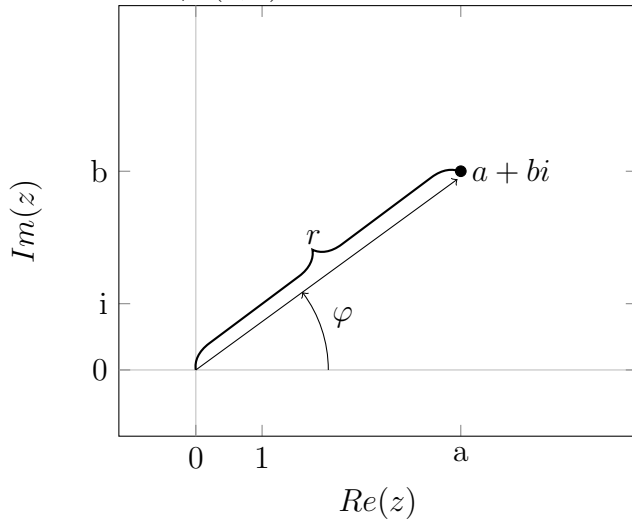
c)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|-z| = |z|$$

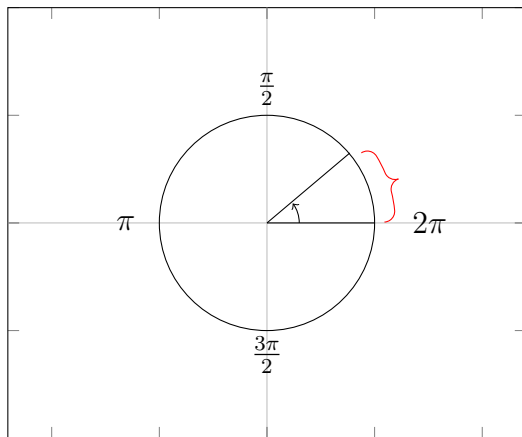
## 1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

a) Jeder Punkt  $\neq (0, 0)$  lässt sich durch seine Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  beschreiben:



$$-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes



Umfang:  $2\pi$

$\varphi$  in Grad  $\hat{=} \frac{2\pi \cdot \varphi}{360}$  im Bogenmaß

Für Punkte mit kartesischen Koordinaten  $(0,0)$  werden als Polarkoordinate  $(r, \varphi)$  verwendet.

b) komplexe Zahl  $z = a + ib$

$$r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |z| \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

Darstellung von  $z$  durch Polarkoordinate

Beispiel:

a)  $z_1 = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$   
 $= 2 \cdot (0,5\sqrt{2} + i \cdot 0,5\sqrt{2})$

b)  $z_2 = 2 + i$

$$|z_2| = \sqrt{5}$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i) \text{ Suche } \varphi \text{ mit } 0 \leq 2\pi \text{ mit } \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}}z_2) \approx \sqrt{5} \cdot (\cos(0,46) + i \cdot \sin(0,46))$$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis:  $\cos(\varphi) + i \sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

## 1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

a)  $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

b)  $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

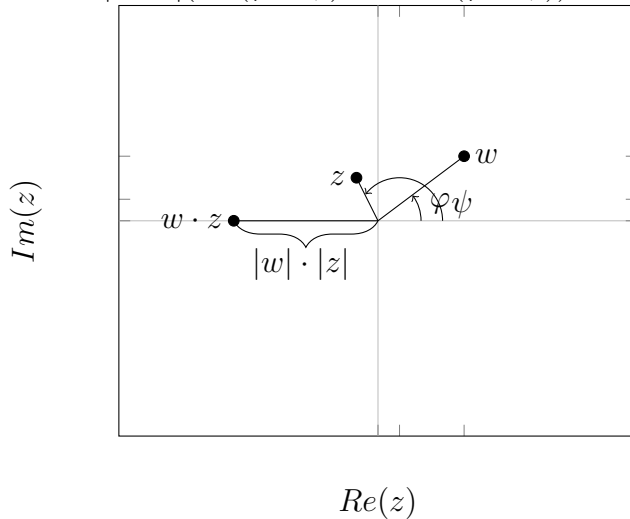
## 1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a)  $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

$z = |z| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$

$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + i(\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi))$

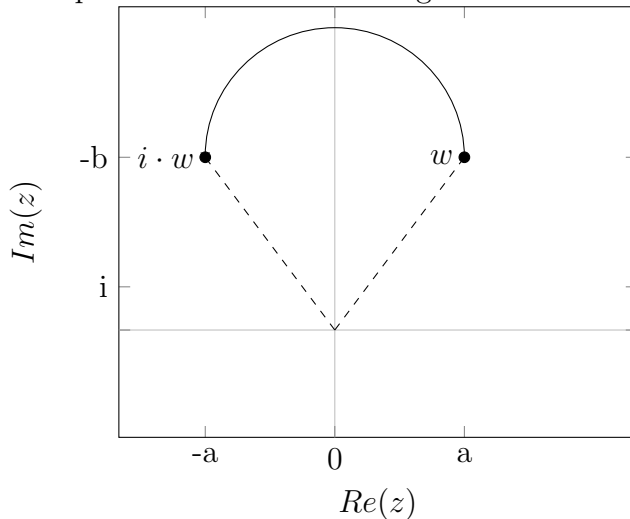
$w \cdot z = |w \cdot z|(\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$



b)  $z = i, w = a + ib$

$i \cdot w = -b \cdot ia$

Multiplikation mit  $i \hat{=}$  Drehung um  $90^\circ$



## 1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexen Exponentialfunktion einführen.

$e^z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$   $e$  = Euler'sche Zahl  $\approx 2,718718\dots$

$e^{z_1} = cde^{z_2} = e^{z_1+z_2}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Es gilt:  $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben  $z = r \cdot e^{i\varphi}, r = |z|, \varphi$  Winkel

$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$  ist Polarform von  $z$ .

$z = a + bi$  ist kartesische Form von  $z$ .  $\bullet(r, \varphi)$  Polarkoordinaten

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , Punkte auf dem Einheitskreis.

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \text{ Eulersche Gleichung}$$

## 1.10 Satz

Sei  $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

a) Ist  $m \in \mathbb{Z}$ , so ist  $w^m = |w|^m \cdot (\cos(m \cdot \varphi) + i \cdot \sin(m \cdot \varphi))$   
 $(m < 0 : w^m = \frac{1}{|w|^{|m|}}, w \neq 0)$

b) Quadratwurzeln

c) Ist  $n \in \mathbb{N}, w \neq 0$ , so gibt es genau  $n$   $n$ -te Wurzeln von  $w$  :

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n})), n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

*Beweis.* a) richtig, wenn  $m = 0, 1$

$m \geq 2$ . Folgt aus  $(\star)$

$m = -a$  :

$$\begin{aligned} w^{-1} &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w| \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) = |w|^{-1} \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) \end{aligned}$$

□

## 1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus  $i$  :

$$|i| = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Nach 1.10 b): } \sqrt{i} &= \pm(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})) \\ &= \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i) \end{aligned}$$

## 1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom

$$x^n - w \quad (w \in \mathbb{C})$$

eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  (sogar  $n$  verschiedene wenn  $w \neq 0$ )

Es gilt sogar : Fundamentalsatz der Algebra

(C. F. Gauß 1777-1855)

Jedes Polynom  $a_n x^n + \dots + a_0$

mit irgendwelchen Koeffizienten:  $a_n \dots a_0 \in \mathbb{C}$  hat Nullstelle in  $\mathbb{C}$

# 2 Folgen und Reihen

## 2.1 Definition

Sei  $k \in \mathbb{Z}, A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$

$(k = 0, A_0 \in \mathbb{N}_0, k = 1, A_n \in \mathbb{N})$

Abbildung  $a : A \Rightarrow \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$

$$m \Rightarrow a_n$$

heißt Folge reeller Zahlen

$$(a_k, a_{k-1} \dots)$$

Schreibweise:

$$(a_m)_{m>k} \text{ oder einfach } (a_m)$$

$a_m$  heißt m-tes Glied der Folge, m Index

## 2.2 Beispiel

a)  $a_n = 5$  für alle  $n > 1$   
 $(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \dots)$

b)  $a_n = n$  für alle  $n > 1$   
 $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots)$

c)  $a_n = \frac{1}{n}$   
 $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

d)  $a_n = \frac{(n+1)^2}{2^n}$   
 $(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \dots)$

e)  $a_n = (-1)^n$   
 $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

f)  $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}}$  für  $n \geq 2, a_1 = 1$   
 $(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots)$

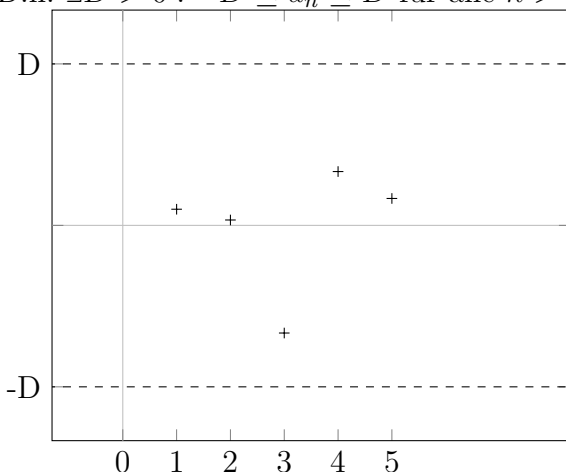
g)  $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$   
 $(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \dots)$

h)  $a_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$   
 $(-1, \frac{-1}{2}, -\frac{5}{6}, \dots)$

## 2.3 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n>k}$  heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

D.h.  $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$  für alle  $n > k$ .





## 2.4 Definiton

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq k}$  heißt konvergent gegen  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  (konvergent gegen  $\varepsilon$ ), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) : |a_n - c| < \varepsilon$$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (oder einfach } c = \lim a_n)$$

$c$  heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge  $(a_n)$

(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))

Eine Folge die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge

## 2.5 Beispiele

- a)  $r \in \mathbb{R} : a_n = r$  für alle  $n \geq 1$

$$(r, r, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$$

$$|a_n - r| = 0 \text{ für alle } n$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$  kann man  $n(\varepsilon) = 1$  wählen

- b)  $a_n = n$  für alle  $n \geq 1$

Folge ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

- c)  $a_n = \frac{1}{n}$  für alle  $n \geq 1$

$(a_n)$  ist Nullfolge.

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Suche Index  $n(\varepsilon)$  mit  $|a_n - 0| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n(\varepsilon)$

D.s. es muss gelten.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

$$\text{Ich brauche : } \frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$$

$$\text{Ich brauche } n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Aus Mathe I folgt, dass solch ein  $n(\varepsilon)$  existiert.

$$\text{z.B. } n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Dann:

$$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

- d)  $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$  für alle  $n \geq 1$

Behauptung:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a_n - 3| &= \left| \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1} \right| \\ &= \left| \frac{-3n-2}{n^2+n+1} \right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Benötigt wird  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$  für alle  $n > n(\varepsilon)$ .

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$$

Wähle  $n(\varepsilon)$  so, dass  $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$

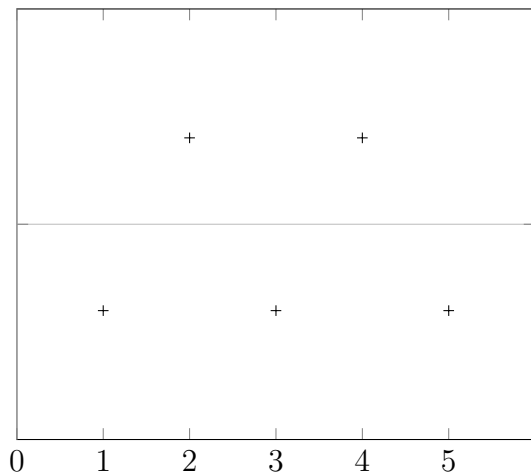
Dann gilt für alle  $n \geq n(\varepsilon)$ .

$$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Für alle  $n \geq n(\varepsilon)$

- e)  $a_n = (-1)^n$  beschränkte Folge  $-1 \leq a_n \leq 1$  konvergiert nicht.

Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig, Wähle  $\varepsilon = \frac{1}{2}$



$$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \not\leq$$

## 2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: 2.5<sub>e</sub>)

*Beweis.* Sei  $c = \lim a_n$ , wähle  $\varepsilon = 1$ ,

Es existiert  $n(1) \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - c| < 1$  für alle  $n \geq n(1)$

Dann ist

$$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c| \text{ für alle } n \geq n(1)$$

$$M = \max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \dots, |a_{n(1)-1}|, 1 + |c|\}$$

Dann:  $|a_n| \leq M$  für alle  $n \geq k$

$$-M \leq a_n \leq M$$

□

## 2.7 Bemerkung

$$\text{a) } (a_n)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n|)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge } (|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0|)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n - c|)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge}$$

## 2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien  $(a_n)_{n \geq k}$  und  $(b_n)_{n \geq k}$  konvergente Folgen,  $\lim a_n = c, \lim b_n = d$ .

$$\text{a) } \lim |a_n| = |c|$$

$$\text{b) } \lim (a_n \pm b_n) = c \pm d$$

$$\text{c) } \lim (a_n \cdot b_n) = c \cdot d$$

insbesondere  $\lim (r \cdot b_n) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$  für jedes  $r \in \mathbb{R}$ .

$$\text{d) } \text{Ist } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k \text{ und ist } d \neq 0, \text{ so } \lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{c}{d}$$

$$\text{e) } \text{Ist } (b_n) \text{ Nullfolge, } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k, \text{ so konvergiert } \left(\frac{1}{b_n}\right) \text{ nicht!}$$

$$\text{f) } \text{Existiert } m \geq k \text{ mit } a_n \leq b_n \text{ für alle } n \geq m, \text{ so ist } c \leq d.$$

$$\text{g) } \text{Ist } (c_n)_{n \geq k} \text{ Folge und existiert } m \geq k \text{ mit } 0 \leq c_n \leq a_n \text{ für alle } n \geq m \text{ und ist } (a_n) \text{ eine Nullfolge, so ist auch } (c_n) \text{ eine Nullfolge.}$$

$$\text{h) } \text{Ist } (c_n)_{n \geq l} \text{ beschränkte Folge und ist } (a_n)_{n \geq k} \text{ Nullfolge, so ist auch } (c_n \cdot a_n)_{n \geq k} \text{ Nullfolge.}$$

$c_n$  muss nicht konvergieren!

*Beweis.* Exemplarisch:

- b) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$  und  $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$  und  $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$   
 $|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$   
 Suche  $n(\varepsilon) = \max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}), n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$   
 Dann gilt für alle  $n > n(\varepsilon)$  :  
 $|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

- f) Angenommen  $c > d$ . Setze  $\delta = c - d > 0$   
 Es existiert  $\tilde{m} \geq m$  mit  $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$   
 und  $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$  für alle  $n \geq \tilde{m}$ .  
 Für diese  $n$  gilt:  
 $0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$  nach Voraussetzung  
 $= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$   
 $\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \not\leq$

□

## 2.9 Satz

- a)  $0 \leq q \leq 1$  Dann ist  $(q^n)_{n \geq 1}$  Nullfolge
- b) Ist  $m \in \mathbb{N}$ , so ist  $(\frac{1}{n^m})_{n \geq 1}$  Nullfolge.
- c) Sei  $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$   
 Dann ist  $(n^m \cdot q^n)_{n \geq 1}$  Nullfolge
- d) Ist  $r > 1, m \in \mathbb{N}$ , so ist  $(\frac{n^m}{r^n})_{n \geq 1}$  eine Nullfolge
- e)  $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$   
 $Q(x) = b_e \cdot x^e + \dots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$   
 Sei  $Q(n) \neq 0$  für alle  $n \geq k$ .
- Ist  $m > e$ , so ist  $\frac{P(n)}{Q(n)}$  nicht konvergent
  - Ist  $m = e$ , so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$
  - Ist  $m < e$ , so ist  $(\frac{P(n)}{Q(n)})$  eine Nullfolge
- a) Sei  $0 \leq q \leq 1$  Dann ist  $(q^n)_{n \geq 1}$  eine Nullfolge

*Beweis.* a) Richtig für  $q > 0$ . Sei jetzt  $q > 0$ .  
 Sei  $\varepsilon > 0$ . Mathe I: Es gibt ein  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$ .  
 Für alle  $n \geq n(\varepsilon)$  gilt:  $|q^n - 0| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$ .

□

- b) 2.5.c):  $\frac{1}{n^m}$  Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

- c) Richtig für  $q = 0$ . Sei jetzt  $q > 0$ .  
1.Fall:  $m = 1$   
 $\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0$ .

$$(t+1)^n \stackrel{\text{Binomialsatz}}{=} 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 > \frac{n(n-1)}{2}t^2 \text{ für alle } n \geq 2$$

$$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$$

$$0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftrightarrow \text{Nullfolge 2.5e), 2.8e)}$$

Nach 2.9g) ist  $(n \cdot q^n)_{n \geq q}$  Nullfolge, also auch  $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$ .

2.Fall:  $m > 1$ .

Setze  $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} n^m \cdot q^n &= n^m \cdot (q')^m \cdot (q')^m \cdot \dots \cdot (q')^m \\ &= (n \cdot (q')^m)^m = 1 \text{ anwenden} \end{aligned}$$

$$0 < q' < 1$$

$(n^m + q^n)_{n \geq 1}$  Nullfolge noch Fall  $m = 1$  und 2.8e)

d) Folgt aus c) und  $q = \frac{1}{r}$

$$\text{e) Ist } m \leq l, \text{ so ist } \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^m(a_m + a_{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^m})}{n^l(b_l + b_{l-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$$

$$(I) \rightarrow a_m, (II) \rightarrow b_l \xrightarrow{(I)} \frac{a_m}{b_l}$$

$$n < l, \frac{1}{n^{l-m}} \text{ Nullfolge}$$

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$$

$m > l$ :

Beh. folgt aus Fall  $m < l$  und 2.8e).

## 2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, der Zahl  $x \in \mathbb{R}$  bestimmt.

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$$

$$a_n \leq x \leq b_n$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_n}{2} \Leftrightarrow \text{Nullfolge (2.9b)}$$

$$2.8e)(|x - a_n|) \text{ Nullfolge.}$$

$$2.7e): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

$$\text{Analog: } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$$

2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

## 2.11 Definition

a) Eine Folge  $(a_n)_{n \geq k}$  heißt strikt positiv, falls  $a_n > 0$  für alle  $n \geq k$ .

Sei im Folgenden  $(a_n)_{n \geq k}$  eine strikt positive Folge.

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n \geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n \geq k} \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \mathcal{O}(a_n) = \{(b_n)_{n \geq k} : (\frac{b_n}{a_n} \text{ ist Nullfolge})\}$$

$(b_n) \in \mathcal{O}(a_n)$  heißt Folge  $(a_n)$  wächst wesentlich schneller als die Folge  $(b_n)$ . Klar:  $\mathcal{O}(a_n) \subset \mathcal{O}(a_n)$

$\mathcal{O}, \mathcal{o}$  („groß Oh“, „klein Oh“)

Landau-Symbole

$$\begin{aligned} \text{z.B. } (n^2) &\in \mathcal{O}(n^3) \\ (n^2 + n + 1) &\in \mathcal{O}(n^2) & n^2 + n + 1 \leq 3n^2 \\ (n^2) &\in \mathcal{O}(n^2 + n + 1) & n^2 \leq n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{O}(1)$  = Menge der beschränkten Folgen

$\mathcal{o}(1)$  = Menge aller Nullfolgen

Häufig gewählte Schreibweise:

$$n^2 \underbrace{=} o(n^2) \text{ statt } (n^2) \in o(n^3)$$

eig. falsch!

$$n^2 + n + 1 = O(n^2) \text{ statt } (n^2 + n + 1)$$

## 2.12 Satz

Sei  $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots + a_1 \cdot x + a_0, m \geq 0, a_m \neq 0$ .

- a)  $(P(n)) \in o(n^l)$  für alle  $l > m$  und  
 $(P(n)) \in O(n^l)$  für alle  $l \geq m$ .
- b) ist  $r > 1$ , so ist  $(P(n)) \in o(r^n)$ .  
 $[(r^n) \text{ wächst deutlich schneller als } (P(n))]$

*Beweis.* a) folgt aus 2.9e).

$$m = l \text{ (2.6)}$$

b) folgt aus 2.9d) und 2.8 b)c) □

## 2.13 Bemerkung

Algorithmus:

Sei  $t_n$  = maximale Anzahl von Reihenschritten des Algorithmus' bei Input der Länge  $n$  (binär codiert)

Worst-Case-Komplexität:

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein  $l \in \mathbb{N}$  existiert mit  $(t_n) \in O(n^l)$ . (gutartig)

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein  $l \in \mathbb{N}$  existiert mind. exponentielle Zeitkomplexität, falls  $r > 1$  existiert mit  $(r^n) \in O(b_n)$  (bösartig)

## 2.14 Definition

- a) Eine Folge  $(a_n)_{n \geq k}$  heißt monoton wachsend (steigend), wenn  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \geq k$ . Sei heißt steng monoton wachsend (steigend), wenn  $a_n < a_{n+1}$  für alle  $n \geq k$
- b)  $(a_n)_{n \geq k}$  heißt monoton fallend, falls  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \geq k$

## 2.15 Beispiel

- a)  $a_n = 1$  für alle  $n > 1$  ( $a_n$ ) ist monoton steigend und monoton fallend.
- b)  $a_n = \frac{1}{n}$  für alle  $n \geq 1$ .  
 $(a_n)$  streng monoton fallend.
- c)  $a_n = \sqrt{n}$  (positive Wurzel)  
 $(a_n)_{n \geq 1}$  streng monoton steigend.
- d)  $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$   
 $(a_n)_{n \geq 1}$  streng monoton steigend.
- e)  $a_n = (-1)^n, n \geq 1$   
 $(a_n)$  ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

## 2.16 Satz

- a) Ist  $(a_n)_{n \geq k}$  monoton steigend und nach oben beschränkt (d.h. es existiert  $D \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \leq D$  für alle  $n \geq k$ ), so konvergiert  $(a_n)'$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$
- b)  $(a_n)_{n \geq k}$  monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert  $(a_n)_{n \geq k}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$ .

*Beweis.* a)

$c = \sup\{a_n : n \geq k\}$  existiert (Mathe I). Zeige:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $n(\varepsilon)$  mit  $c - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq c$

Denn sonst  $a_n \leq c - \varepsilon$  für alle  $n \geq k$  und  $c - \varepsilon$  wäre obere Schranke für  $\{a_n : n \geq k\}$  Widerspruch dazu, dass  $c$  kleinste obere Schranke. Für alle  $n \geq n(\varepsilon)$

$$c - \varepsilon \leq a_{n(\varepsilon)} \leq a_n \leq c$$

$$|a_n - c| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon).$$

b) analog

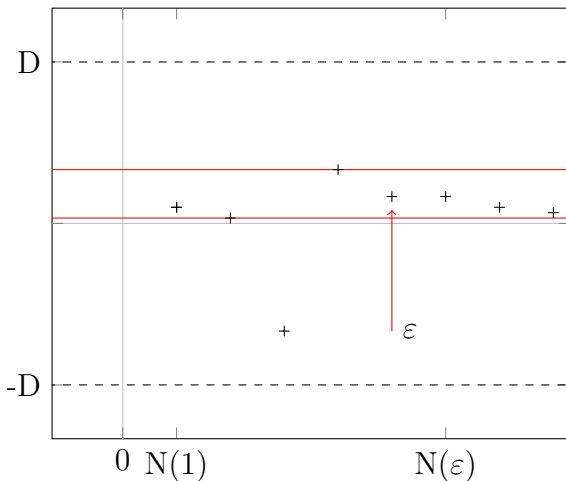
□

## 2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

(Cauchy, 1789 - 1859)

Sei  $(a_n)_{n \geq k}$  eine Folge. Dann sind äquivalent:

- (1)  $(a_n)_{n \geq k}$  konvergent
- (2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$  (Cauchyfolge)  
Grenzwert muss nicht bekannt sein!



## 2.18 Definition

- a) Sei  $(a_i)_{i \geq k}$  eine Folge,  $s_n = \sum_{i=k}^n a_i, n \geq k$  (Partiellsommen der Folge)

Dann heißt  $(s_n)_{n \geq k}$  eine unendliche Reihe

$$(k-1 : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$$

Schreibweise :  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$

- b) Ist die Folge  $(s_n)_{n \geq k}$  konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c$ ,

so schreibt man  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$ . Reihe konvergiert.

Wenn  $(s_n)$  nicht konvergiert, so heißt die Reihe  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  divergent.

(Zwei Bedeutungen von  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  :

- Folge der Partialsummen

- Grenzwert von  $(s_n)$ , falls dieser existiert

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \sum_{n=k}^{\infty} a_n = (s_m)_{m \geq k}$$

## 2.19 Satz

a) Ist die Reihe  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  konvergent, so ist  $(a_i)_{i \geq k}$  eine Nullfolge.

b) Ist die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$  beschränkt und ist  $a_i \geq 0$  für alle  $i$ , so ist  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  konvergent.

*Beweis.* a)

Sei  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  Dann existiert  $n(\frac{\varepsilon}{2}) \geq k$  mit  $|\sum_{i=k}^{\infty} 2a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq n(\frac{\varepsilon}{2})$

Dann gilt  $|a_{n+1} - 0| = |a_{n+1}| = |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + \sum_{i=k}^n a_i| =$

$$|\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c - \sum_{i=k}^n a_i + c| \leq |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c| + |\sum_{i=k}^n a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$(a_n)$  ist Nullfolge

b) folgt aus 2.16a), denn  $(s_n)$  ist monoton steigend

□

## 2.20 Beispiele

a) Sei  $q \in \mathbb{R}$ .

Ist  $q \neq 1$ , so ist  $\sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$\left[ \left( \sum_{i=k}^n q^i \right) \cdot (q-1) \right]$$

Sei  $|q| < 1$ , d.h.  $-1 < q < 1$ .

Dann ist  $\sum_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$  (konvergiert)

$$s_n = \sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$(q^n)$  Nullfolge (2.9<sub>a</sub>) für  $q \geq 0, 2.8_e) + 2.9_a)$  für  $q < 0, q = -|q|$ )

Geometrische Reihe

Sei  $|q| \geq 1$ . Dann ist  $\sum_{i=k}^{\infty} q^i$  divergent, da dann  $(q^i)$  keine Nullfolge (2.18<sub>a</sub>)

b)  $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i}$  divergiert

harmonische Reihe

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{n}$$

$$n = 2^0 = 1 : s_1 = 1$$

$$n = 2^1 = 2 : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

...

$$n = 2^3 = 8 : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_7 > s_6 \dots$$

Per Induktion zu beweisen!

c)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert.

Folge der Partialsummen ist monoton steigend.

2.16a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen nach aber beschränkt ist.

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^{n-1}} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^2}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{2}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^4} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

2.16a)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$  Kgt., Grenzwert  $\leq 2$ . (später: Grenzwert ist  $\frac{\pi^2}{6}$ )

Es gilt allgemeiner:

$$s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s} \text{ konvergiert.}$$

$$\text{Allgemeiner: } s \in \mathbb{R}, s > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{i^2} \text{ konvergiert}$$

d)  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$  konvergiert:

$$s_{2n} = \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{<0} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)}_{<0}$$

$$s_{2n} \leq s_{2(n+1)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

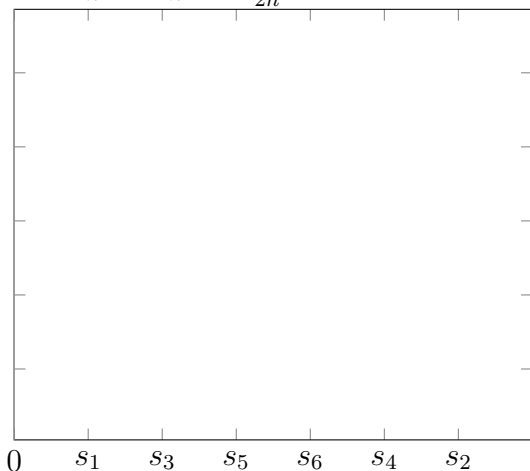
$$(s_{2n}) \text{ ist monoton fallend. } s_{2n-1} = -1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right)}_{>0}$$

$(s_{2n-1})$  ist monoton wachsend

Ist  $k$  ungerade, so ist  $s_k < s_l$ : Wähle  $n$  so, dass  $2n - a \geq k, 2n \geq l$

$$s_k \leq s_{2n-1} \leq s_{2n} \leq s_l$$

$$s_{2n} = s_{2n-1} + \frac{1}{2n}$$



Abstand  $s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n}$  geht gegen 0.

$$\sup\{s_{2n-1} : n \geq 1\}$$

$$\inf\{s_{2n} : n \geq 1\}$$

$$= \lim_{i \leftarrow \infty} (-1)^i \frac{1}{i} \in ]-1, -\frac{1}{2}[ \text{ (Es gilt } \lim_{i \leftarrow \infty} \frac{1}{i} = 0 \text{)}$$



## Bemerkung

Was bedeutet  $0.\bar{8} = 0.88888888\dots$ ? (Dezimalsystem)

$$0.\bar{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots = 8 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = 8 \cdot \left(\frac{10}{9} - 1\right) = \frac{8}{9}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

## 2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist  $(a_i)_{i \geq k}$  eine monoton fallende Nullfolge (ins besondere  $a_i \geq 0$  falls  $i \geq k$ ), so ist  $\sum_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i$  konvergent.

## 2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien  $(a_i)_{i \geq k}$ ,  $(b_i)_{i \geq k}$  Folgen, wobei  $b_i \geq 0$  für alle  $i \geq k$  und  $|a_i| \leq b_i$  für alle  $i \geq k$ . Dann gilt

Ist  $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$  konvergent, so auch  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ . Für die Grenzwerte gilt:

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$$

*Beweis.* Konvergenz

von  $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$  folgt aus 2.16 a).

$\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$  folgt aus 2.8 f).

Sei  $m > n$ :

$$\left| \sum_{i=k}^m a_i - \sum_{i=k}^n b_i \right| = \sum_{i=n+1}^m a_i \leq \sum_{i=n+1}^m |a_i| = \left| \sum_{i=k}^m |a_i| - \sum_{i=k}^n |a_i| \right|$$

Mit Cauchy-Kriterium 2.17 folgt daher aus der Konvergenz von  $\sum_{i=k}^m |a_i|$  auch die von  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ .

□

## 2.23 Beispiel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$$

$$\sqrt{i} \leq i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

Ang.  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$  konvergiert.  $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$  konvergiert.  $\nexists$

Widerspruch zu 2.20 b)

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{i}$$

2.20d):  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergiert, aber  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$  konvergiert nicht. (★)

## 2.24 Definition

$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  heißt absolut konvergent, falls  $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$  konvergiert.

(Falls alle  $a_i \geq 0$  : Konvergent = absolut Konvergent)

## 2.25 Korollar

Ist  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  absolut konvergent, so ist auch konvergiert. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beweis: 1. Behauptung 2.22 mit  $b_i = |a_i|$

Umkehrung siehe ( $\star$ )

## Bemerkung

Was bedeutet  $0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

$a_i \in \{0 \dots 9\}$  (Dezimalsystem)

$$a_1 \cdot \frac{1}{10} a_2 \cdot \frac{1}{100} \dots a_n \cdot \frac{1}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10} 9 \cdot \frac{1}{100} \dots 9 \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$a_i \frac{1}{10} \leq 9 \frac{1}{10}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} 9 \frac{1}{10} = 9 \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 1 \Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \frac{1}{10} \text{ konvergiert}$$

## 2.26 Satz

Sei  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  eine Reihe.

a) Wurzelkriterium

Existiert  $q < 1$  und ein Index  $i_0$ , so dass  $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$  für alle  $i \geq i_0$ .

so konvergiert die Reihe  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  absolut.

Ist  $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$  für unendlich viele  $i$  so divergiert  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ .

b) Quotientenkriterium

Existiert  $q > 1$  und ein Index  $i_0$ , so dass  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$  für alle  $i \geq i_0$ ,

so konvergiert  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  absolut.

*Beweis.*

a)  $|a_i| \leq q^i$  für alle  $i \geq i_0$

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} q^i \text{ konvergiert (2.20 a))}$$

$$\stackrel{2.22}{\Rightarrow} \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert.}$$

$$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } i$$

$$\Rightarrow |a_i| \geq 1 \text{ für unendlich viele } i$$

$$\Rightarrow (a_i) \text{ sind keine Nullfolge}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \text{ divergiert.}$$

b) Sei  $i \geq i_0$ .

$$\left| \frac{a_i}{a_{i_0}} \right| = \left| \frac{a_i}{a_{i-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{i_0+1}}{a_{i_0}} \right| \leq q \cdot q \cdot \dots \leq q^{i-i_0} = \frac{q^i}{q^{i_0}}$$

↑ Voraussetzung:

jeder dieser Quotienten ist  $\leq q$

$$|a_i| \leq \underbrace{\frac{|a_{i_0}|}{q^{i_0}}}_{=:c} \cdot q^i \quad \sum_{i=i_0}^{\infty} c \cdot q^i \text{ konvergent}$$

$$\stackrel{2.22}{\Rightarrow} \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert.}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert}$$

□

## 2.27 Bemerkung

a) Es reicht nicht in 2.26 nur vorauszusetzen, dass  $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$  für alle  $i \geq i_0$   
bzw.  $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$  für alle  $i \geq i_0$ .

z.B. harmonische Reihen:  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$  divergiert.

Aber:  $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} > 1$  für alle  $i$ .  
 $\frac{i}{i+1} < 1$  für alle  $i$

b) Es gibt Beispiele von absolut konvergenten Reihen mit  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|$  für unendlich viele  $i$ .

## 2.28 Beispiel

Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann konvergiert  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$  absolut ( $0^0 = 1, 0! = 1$ ):

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i} \right| = \left| \frac{x}{i+1} \right| \quad \text{Wähle } i_0, \text{ so dass } i_0 + 1 > 2 \cdot |x|$$

Für alle  $i \geq i_0$ :

$$\frac{|x|}{(i+1)} \leq \frac{|x|}{(i_0+1)} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q.$$

## 2.29 Bemerkung

Gegeben seien zwei endliche Summen

$$\sum_{a_n}^k n = 0, \sum_{b_n}^l n = 0.$$

$$\left( \sum_{a_n}^k n = 0 \right) \left( \sum_{b_n}^l n = 0 \right) \quad (\star)$$

Distributivgesetz: Multipliziere  $a_i$  mit jedem  $b_i$  und addiere diese Produkte.

$$(\star) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Indexsumme 0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Indexsumme 2}} + \dots + \underbrace{a_k b_l}_{\text{Indexsumme k+l}}$$

## 2.30 Definition

Seien  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n, \sum_{i=0}^{\infty} b_n$  unendliche Reihen.

Das Cauchy-Produkt (Faltungsprodukt) der beiden Reihen ist die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} c_n$ , wobei  $c_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot$

$$b_{n-1} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

## 2.31 Satz

Sind  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n, \sum_{i=0}^{\infty} b_n$  absolut konvergent Reihen mit Grenzwert  $c, d$ , so ist das Cauchy Produkt auch absolut konvergent mit Grenzwert  $c \cdot d$ .

Beweis: Kreußler, Phister Satz 33.16

## 3 Potenzreihen

### 3.1 Definition

Sei  $(b_n)$  eine reelle Zahlenfolge,  $a \in \mathbb{R}$

Dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - a)^n$  eine Potenzreihe (mit Entwicklungspunkt  $a$ ) Speziell:  $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

(Potenzreihe im Engeren Sinne)

Hauptfolge: Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konv. die Potenzreihe (absolut)?

Suche für  $x = a$

Dann Grenzwert  $b_0$  (da  $0^0 = 1$ )

Ob Potenzreihe für andere  $x$  konvergiert, hängt von  $b_n$  ab!

### 3.2 Beispiel

a)  $\sum_{i=0}^{\infty} x^n (b_n = 1 \text{ für alle } n)$

geometrische Reihe, konvergiert für alle  $x \in ]-1, 1[$

b)  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n (b_n = 2^n) = \sum_{i=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$  konvergiert genau dann nach a), wenn  $|2x| < 1$ , d.h.  $|x| < \frac{1}{2}$  d.h.  
 $x \in ]-0.5, 0.5[$

c)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n!})$

konvergiert für alle  $x, x \in ]-\infty, \infty[ = \mathbb{R}$

### 3.3 Satz

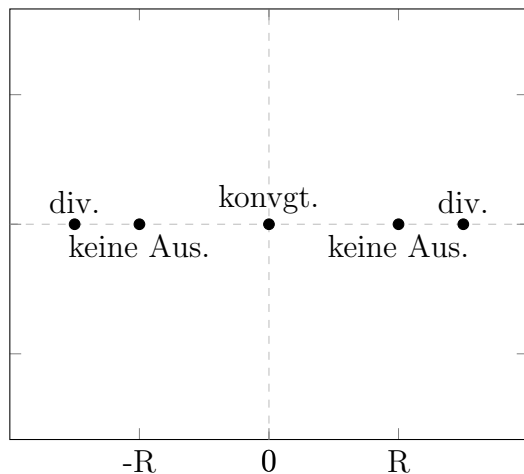
Sei  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$  eine Potenzreihe (um 0). Dann gibt es  $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, R \geq 0$ , so dass gilt.

1. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $|x| < R$  konvergiert Potenzreihe absolut (d.h.  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$  konvergiert, dann

auch  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ )

Falls  $R = \infty$ , so heißt das, dass Potenzreihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  absolut konvergiert.

2. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| > R$  divergiert  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$



( $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$ ) (Für  $|x| = R$  lassen sich keine allgemeine Aussagen treffen).

$R$  heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

Konvergenzintervall  $< -R, R >$

besteht aus allen  $x$  für die  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$  konvergiert.

$<$  kann  $[$  oder  $]$  bedeuten.

$>$  kann  $]$  oder  $[$  bedeuten.

*Beweis.*  $|x_1, x_2| \mathbb{R}, |x_1| \leq |x_2|$

Dann: Falls  $\sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$  konvergiert, so auch  $\sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$  (2.22)  $(\star)$

Falls  $\sum b_n \cdot x_n$  für alle  $x$  absolut konvergiert, so setze  $R = \infty$

Wenn nicht, so setze  $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n| \text{ konvergiert}\} < \infty$  Nach  $(\star)$  gilt:  $|x| < R \Rightarrow$

$\sum b_n x^n$  konvergiert absolut.

Für  $|x| > R$  konvergiert  $\sum b_n x^n$  nicht absolut.

Sie konvergiert sogar selbst nicht. (WHK 5.37)

$$\sqrt[n]{|b_n|} \cdot |x|^n \leq q < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

$$\uparrow \text{ (setze } \varepsilon = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} > 0)$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : s - \frac{\varepsilon}{2} < |x| \cdot \sqrt[n]{b_n} \leq s + \frac{\varepsilon}{2} =: q < 1$$

□

### 3.4 Bemerkung

Konvergenz von Potenzreihen der Form  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot (x - a)^n$ :

gleichen Konvergenzradius  $R$  wie  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

konvergiert absolut für  $|x - a| < R$ , d.h.  $x \in ]a - R, a + R[$  Divergiert für  $|x - a| > R$ .  
 Keine Aussage für  $|x - a| = R$ , d.h.  $x = a - R$  oder  $x = a + R$   
 Konvergenzintervall  $< a - R, a + R >$

### 3.5 Die Exponentialreihe

a) Exponentialreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n!})$$

2.28 Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Setze für  $x \in \mathbb{R}$  :  $\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Exponentialfunktion  $\exp(0) = \frac{0^n}{0!} = 1$

b) Serien  $x, y \in \mathbb{R}$

$\exp(x) \cdot \exp(y) \underset{2.31}{=} \text{Limes des Cauchy Produkts der beiden Reihen.}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot x^i \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \cdot x \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x + y)^n = \exp(x+y)$$

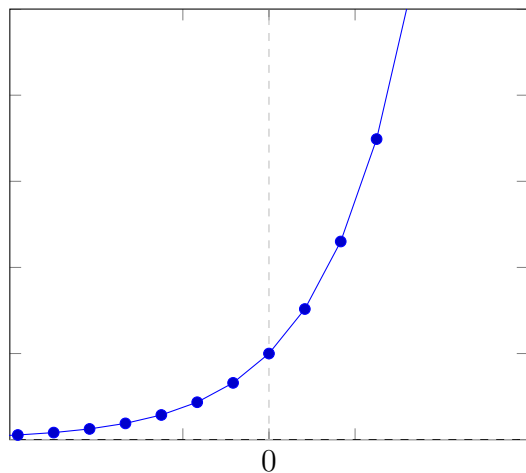
$$\boxed{\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}}$$

Daraus folgt:  $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

$$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad (\star)}$$

Für alle  $x \geq 0$  :  $\exp(x) > 0$ . Dann auch wegen  $(\star)$

$$\boxed{\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}}$$



c)  $\exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$

Eulersche Zahl Approximation  $e$  durch  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$

$m = 2$	$1 + 1 + \frac{1}{2}$	$= 2,5$
$m = 3$	$2,5 + \frac{1}{6}$	$= 2,\bar{6}$
$\dots m = 6$	$\frac{326}{126} + \frac{1}{720}$	$= 2,7180\bar{5}$

Es ist:  $e \approx 2,71828\dots$

(irrationale Zahl)

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$  konvergiert schnell

$$m \in \mathbb{N}$$

$$\exp(m) = \exp(1 + \dots + 1)$$

$$\exp(1)^m = e^m \quad \leftarrow m \rightarrow$$

$$e^0 = 1 \quad \exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = e^{-m}$$

$$n \neq 0, n \in \mathbb{N} :$$

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = +\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}$$

Für alle  $x \in \mathbb{Q}$  stimmt  $\exp(x)$  mit der 'normalen' Potenz  $e^x$  überein.

Dann definiert man für beliebige  $x \in \mathbb{R}$ :

$$e^x := \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

In kürze: Definition  $a^x$  für  $a > 0, x \in \mathbb{R}$

d) Bei komplexen Zahlen kam  $e^{it}$  ( $i^2 = -1, t \in \mathbb{R}$ ) vor als Abkürzung für  $\cos(t) + i \sin(t)$

Tatsächlich kann auch für jedes  $z \in \mathbb{C}$  definieren  $e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$

Dabei: Konvergenz von Folgen/Reihen in  $\mathbb{C}$  wie in  $\mathbb{R}$  mit komplexen Absolutbetrag.

Man kann dann zeigen:

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$  konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

Dass tatsächlich dann gilt:

$$e^{it} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(it)^i}{i!} = \cos(t) + i \sin(t). \text{ zeigen wir später}$$

2.718...) Man kann zeigen.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Bedeutung:

- Angelegtes Guthaben  $G$  wird in einem Jahr mit 100% verzinst. Guthaben am Ende eines Jahres  $2G (= G(1 + 1))$

- Angelegtes Geld wird jedes halbe Jahr mit 50% verzinst. Am Ende eines Jahres (mit Zinseszinsen)

$$G(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) = 2,25G$$

$n$ -mal pro Jahr mit  $\frac{100}{n}\%$  verzinsen. Am Ende des Jahres  $G(1 + \frac{1}{n})^n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(1 + \frac{1}{n})^n = e \cdot G \approx 2.718\dots \cdot G \text{ (stetige Verzinsung)}$$

$$a\% \text{ statt } 100\% \cdot G e^{\frac{a}{100}}$$

## 4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

### 4.1 Definition

Reelle Funktionen  $f$  ein einer Variablen ist Abbildung

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subset \mathbb{R}$  ( $D$  = Definitionsbereich).

Typisch:  $D = \mathbb{R}$ , Intervall, Verschachtelung von Intervallen

### 4.2 Beispiel

a) Polynomfunktionen (ganzrationale Funktion, Polynome)

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow a_n \cdot x^n + \dots a_1 x + a_0 \end{cases}$$

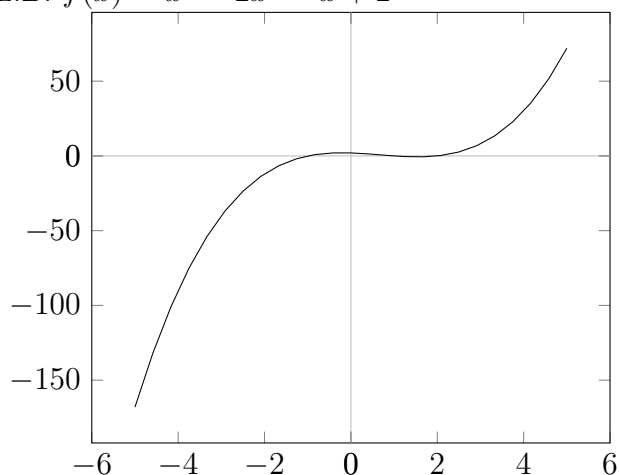
$$f(x) = a_n \cdot x^n + \dots a_1 \cdot x + q$$

$a_n \neq 0 : n = \text{Grad}(f)$   $f = 0$  (Nullfunktion),  $\text{Grad}(f) = \infty$

Grad 0: konstante Funktionen  $\neq 0$

Graph von  $f$ :

z.B.  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$



b)  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$  für alle  $x \in D$

Summe: Differenz, Produkt von  $f$  und  $g$ .

Ist  $g(x) \neq 0$  für  $x \in D$ , so Quotient.  $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$  für alle  $x \in D$ ,

Quotient von Polynomen = (gebrochen-)rationalen Funktionen

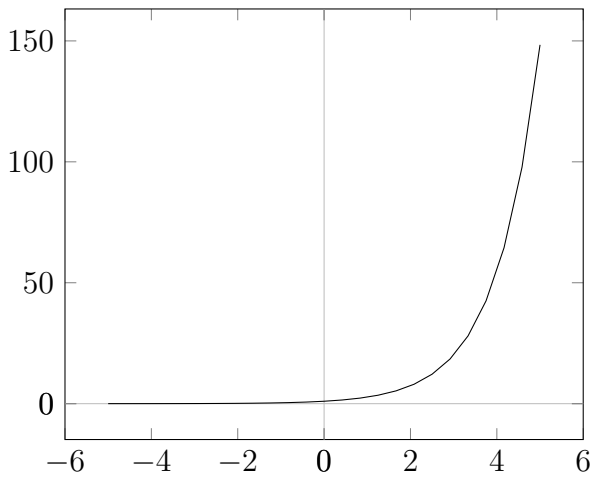
$|f|(x) := |f(x)|$  Betrag von  $f$ .

c) Potenzreihe definiert Funktion auf ihrem Konvergenzintervall.

z.B.  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Fkt.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$





d) Hintereinanderausführung von Funktionen:

$f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f(D_1) \subset D_2$ , dann  $g \circ f :$

$$\begin{cases} D_1 \Rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow g(f(x)) \end{cases}$$

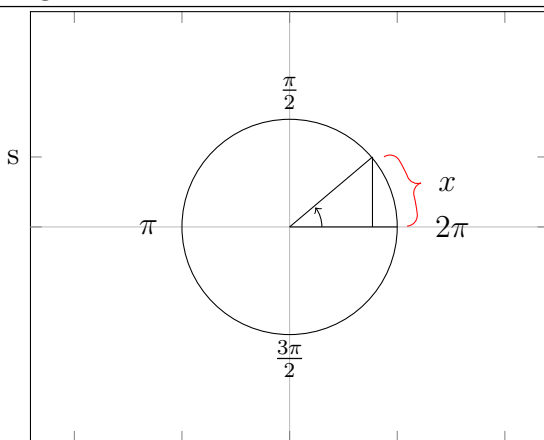
e)  $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = e^{x^2 + 1}$$

f) Trigonometrische Funktionen: Sinus- und Cosinusfunktion (vgl. C)



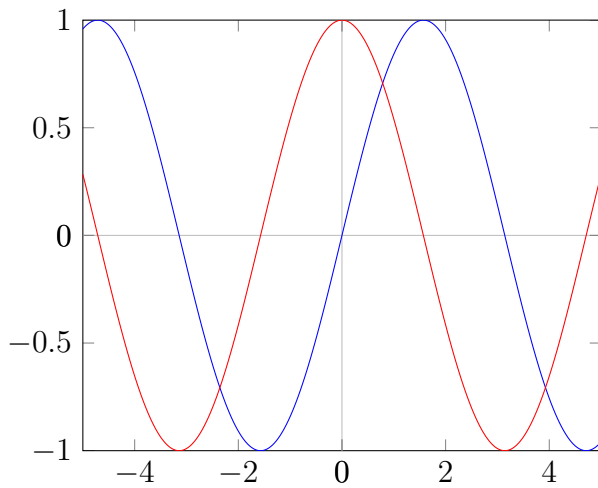
$0 \leq x \leq 2\pi$   $x =$  Bogenmaß von  $\varphi$  in Grad, so  $x = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi$

$\sin(x) = s, \cos(x) = c$  Für beliebig  $x \in \mathbb{R}$ :

Periodische Fortsetzung, d.h.  $x \in \mathbb{R} \mid x = x' + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}, x' \in [0, 2\pi[$

$$\sin(x) := \sin(x')$$

$$\cos(x) := \cos(x')$$



$$|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

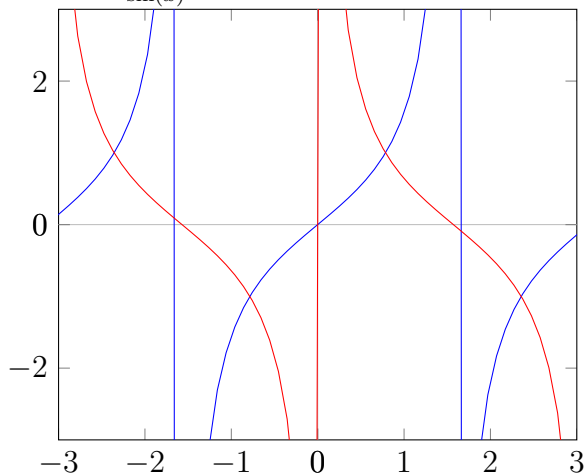
$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Tangens und Cotangensfunktion

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \cos(x) \neq 0$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \sin(x) \neq 0$$



### 4.3 Definition

Sei  $D \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$  heißt Adhärenzpunkt von  $D$ , falls es eine Folge  $(a_n)_n, a_n \in D$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$  gibt.

$\bar{D}$  = Menge der Adhärenzpunkte von  $D$

= Abschluss von  $D$

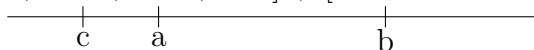
klar:  $D \subset \bar{D}$ .

$d \in D$ . konstante Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n = d$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d = d$ .

Also:  $d \in \bar{D}$ .

### 4.4 Beispiel

a)  $a, b \in \mathbb{R}, a > b, D = ]a, b[$



$$\bar{D} = [a, b]$$

$$a \in \bar{D}$$

$$a_n = a + \frac{b-a}{n} \in D, n \geq 2$$

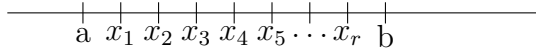
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Also  $[a, b] \subset \bar{D}$ .

Ist  $c \notin [a, b]$ , etwa  $c < a$ , dann ist  $|a_n - c| \geq a - c > 0$  für alle  $a_n \in ]a, b[$ . Also:  $\lim_{a_n} \neq c$

b)  $\mathcal{I}$  Intervall in  $\mathbb{R}$ ,  $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{I}$ ,

$$D = \mathcal{I} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$$



$$\bar{D} = \bar{\mathcal{I}} = [a, b],$$

falls  $\mathcal{I} = ]a, b[$ .

c)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

## 4.5 Definition

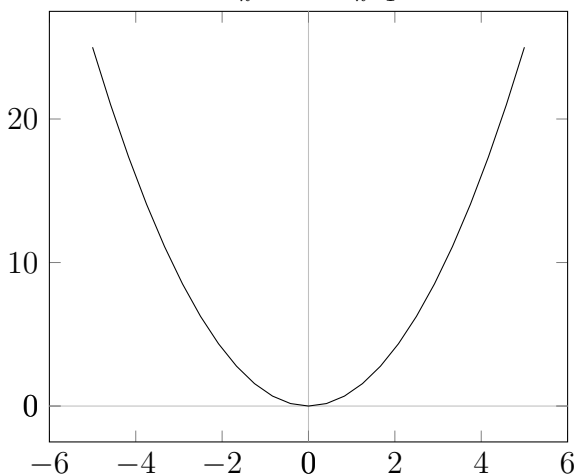
$f: D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$ .

$d \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert von  $f(x)$  für  $x$  gegen  $c$ ,  $d = \lim_{x \rightarrow c}$ , wenn für jede Folge  $(a_n) \in D$ , die gegen  $c$  konvergiert, die Bildfolge  $(f(a_n))_n$  gegen  $d$  konvergiert.

## 4.6 Beispiel

a) Sei  $f(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$ , eine Polynomfunktion,  $c \in \mathbb{R}$ . Sei  $(a_n)$  Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

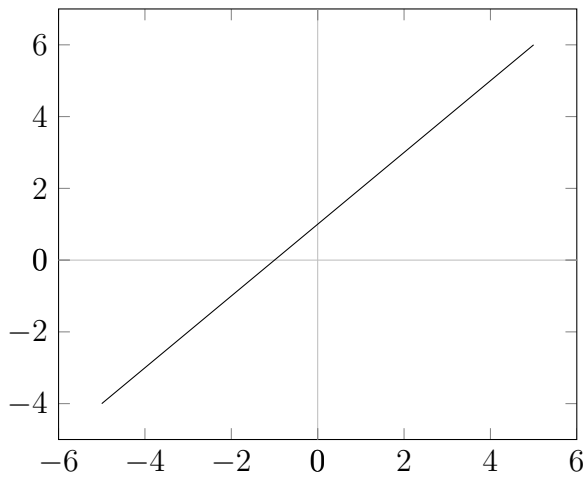
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0 \\ &= b_k \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k + b_{k-1} \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{k-1} + \dots + b_0 \quad \text{Rechenregeln für Folgen, 2.8} \\ &= b_k \cdot c^k + b_{k-1} \cdot c^{k-1} + \dots + b_1 \cdot c + b_0 = f(c). \end{aligned}$$



b) Sei  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\text{Auf } D \text{ ist } f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1)$$



$$\bar{D} = \mathbb{R}$$

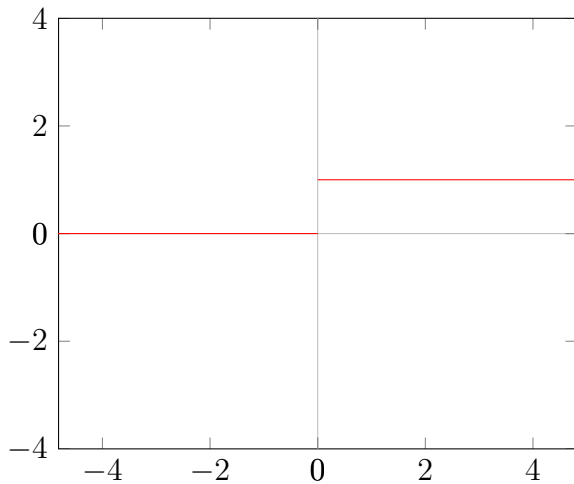
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

Sei  $(a_n)$  Folge mit  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$$f(a_n) = a_n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = 1 + 1 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} = 2.$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) ?$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

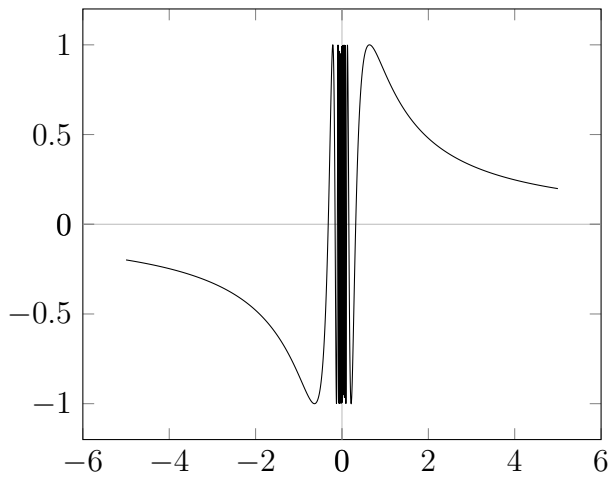
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \underline{1}$$

$$a_n = -\frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \underline{0}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0}$  existiert nicht.

$$d) f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$a_n = \frac{1}{n\pi}, f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$$

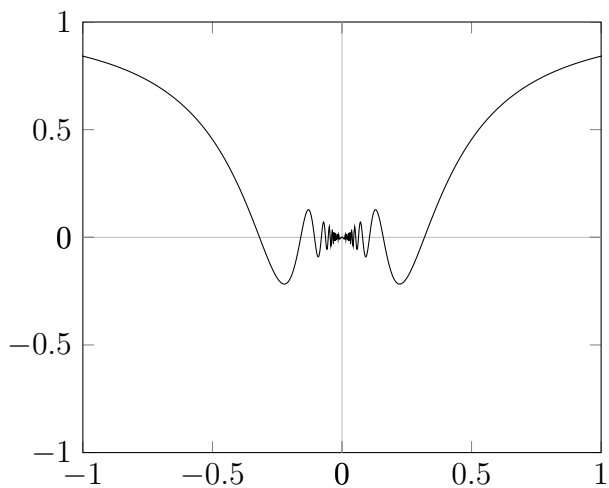
$$a'_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2}\pi)} \rightarrow 0, f(a'_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim(a_n) = 0$$

$$\lim(f(a_n)) = \lim 0 = 0 \quad \lim(f(a'_n)) = \lim 1 = 1$$

$\lim(f(x))_{x \rightarrow 0}$  existiert nicht

e)  $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



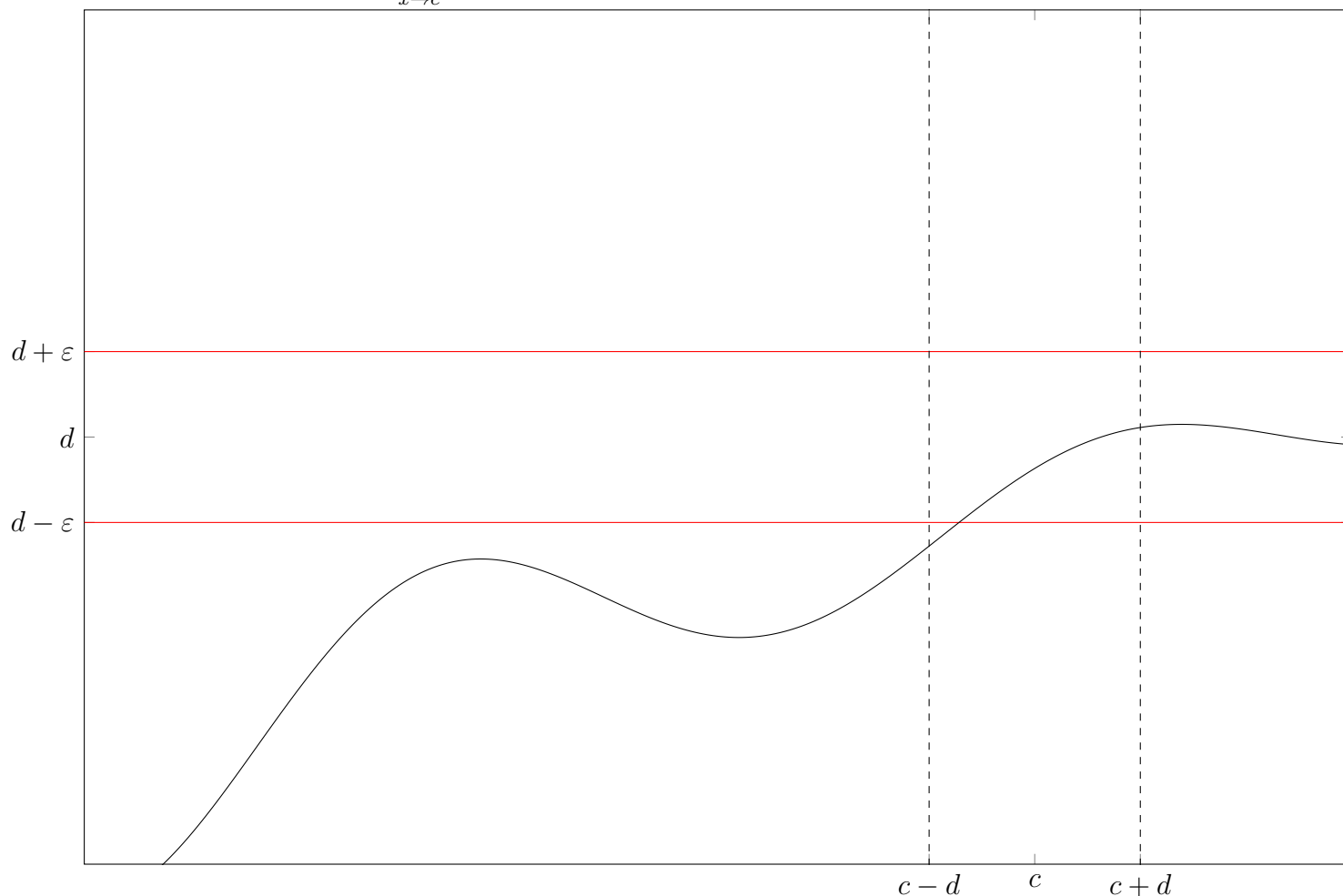
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  dann:

$$(a_n) \rightarrow 0, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin(\frac{1}{a_n}) \stackrel{2.8g)}{=} 0$$

## 4.7 Satz $(\varepsilon - \delta)$ -Kriterium

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$ . Dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \rightarrow |f(x) - d| \leq \varepsilon$



*Beweis.*  $\rightarrow$ : Angenommen falsch.

Dass heißt  $\exists \varepsilon > 0$ , so dass für alle  $\delta > 0$  (z.B.  $\delta = \frac{1}{n}$ ) ein  $x_n \in D$  existiert mit  $|x_n - c| \leq \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - d| > \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ . Aber:

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq d$

$\Leftarrow$ : Sei  $(a_n)$  Folge,  $a_n \in D$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ .

Zu zeigen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$ , d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall n \geq n(\varepsilon) : |f(a_n) - d| < \varepsilon$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, ex.  $d > 0$ :

(\*)

Für alle  $x \in D$  mit  $|x - c| \leq \delta$  gilt  $|f(x) - d| < \varepsilon$ .

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ , existiert  $n_0$  mit  $|a_n - c| \leq \delta$  für alle  $n \geq n_0$

Nach (\*) gilt:  $|f(a_n) - d| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ . ✓

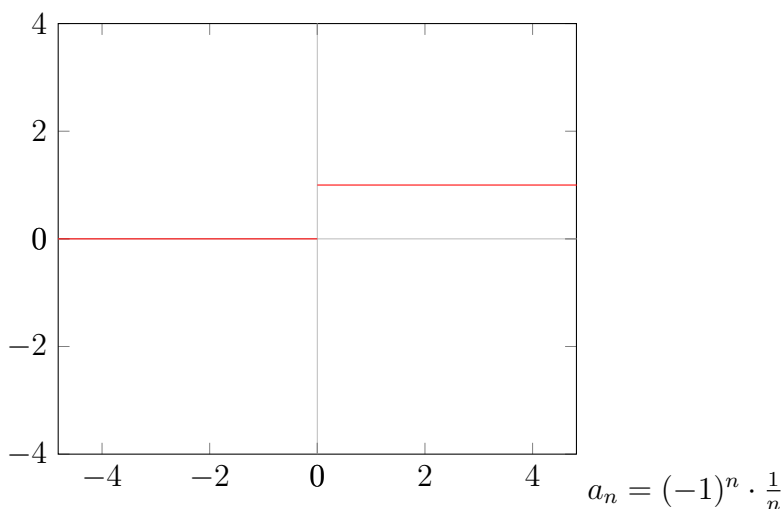
□

## Bemerkung

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow$  Für alle Folgen  $(a_n), a_n \in D$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$ . Wenn man zeigen will, dass  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  nicht existiert, gibt es 2 Möglichkeiten:

- Suche eine bestimmte Folge  $(a_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$  nicht existiert.

- Suche zwei Folgen  $(a_n), (b_n)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = c$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} b_n = c$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(b_n)$



$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$   
 $f(a_n) = (101010 \dots)$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$  existiert nicht.  
 Oder:

$$a_n = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Aber:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(b_n)$

## 4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

$f, g, D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$ , Existieren die Grenzwerte auf der rechten Seite der folgenden Gleichungen, so auch die auf der linken (und es gilt Gleichheit)

a)  $\lim_{x \rightarrow c} (f \pm / \cdot g) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm / \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x).$

b) Ist  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$  und  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$ , so

$$\lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow c} f(x)|$

*Beweis.* Folgt aus den entsprechenden Regeln für Folgen. □

## 4.9 Beispiel

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + 1}, D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{4 + 6 + 1}{8 + 1} = \frac{11}{9}$$

4.6a)

## 4.10 Bemerkung

Rechts- und linksseitige Grenzwerte:

Rechtsseiteiger Grenzwert:

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = d \Rightarrow \forall (a_n)_n, a_n \in D, a_n \geq c \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d.$  Analog: linksseitiger

Grenzwert:  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$

$(a_n \leq c).$

## 4.11 Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, c = 0 \in \bar{D}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

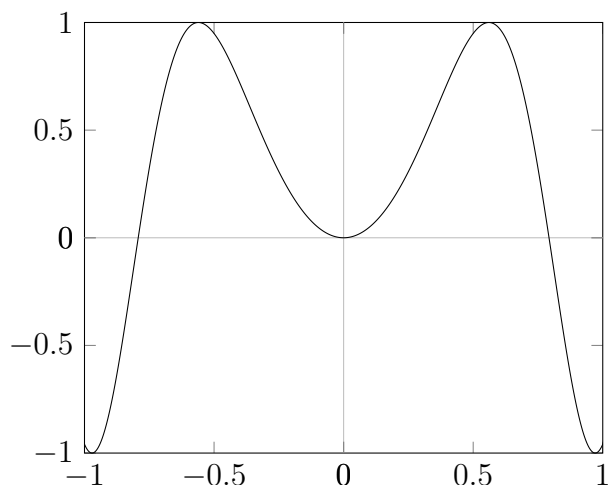
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht.

Falls  $\lim_{x \rightarrow c^+}$  und  $\lim_{x \rightarrow c^-}$  existieren

$$\text{und } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$$

so existiert  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d.$

TODO : abgefahrene funktion plotten (so wie sinus, nur abgefahrener)



Grenzwert:  $d \in \mathbb{R}$  TODO: Noch eine funktion, so logarithmisch mit gerader asymptote

## 4.12 Definition

$$D = ]b, \infty[, f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{z.B. } D = \mathbb{R})$$

$f$  konvergiert gegen  $d \in \mathbb{R}$  für  $x$  gegen unendlich,

$\lim_{f(x)} = d$ , falls gilt:

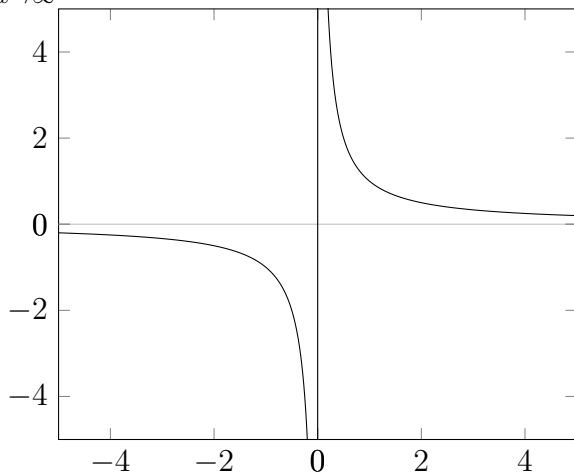
$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x \geq M : |f(x) - d| < \varepsilon.$$

(Analog :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d$ )



## 4.13 Beispiel

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$



Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $M = \frac{1}{\varepsilon}$ . Dann gilt für alle  $x \geq M$  :  
 $|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{M} = \varepsilon$ .

b) Allgemein gilt:

$P, Q$  Polynome vom Grad  $k$  bzw.  $l$   $l \geq k$

$$P(x) = a_k \cdot x^k + \dots, Q(x) = b_l \cdot x^l + \dots, a_k \neq 0, b_l \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l > k \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{für } l = k \end{cases}$$

(Beweis wie für Folgen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 205x^3 + x^2 + 17}{14x^5 + 0,5} = \frac{1}{2}$$

## 4.14 Bemerkung

Die Rechenregeln aus 4.8 gelten auch für  $x \rightarrow \infty / -\infty$

## 4.15 Definition

a)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$

$f$  geht gegen  $\infty$  für  $x$  gegen  $c$ ,

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ , falls gilt:

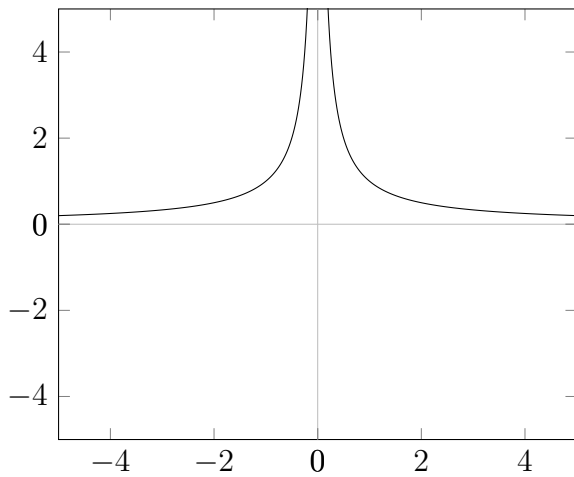
$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq L.$$

$=_{\delta(L)}$

b)  $< b, \infty [ \sup D, f : D \rightarrow \mathbb{R}, f$  geht gegen  $\infty$ , für  $x$  gegen  $\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,

falls gilt:

$$\forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D, x \geq M, f(x) \geq L.$$



TODO: PLOT GERADE MIT MARKIERUNGEN

(Entsprechend:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

TODO: ALLE 4 FUNKTIONEN PLOTTEN

## 4.16 Satz

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

a) Sei  $c \in \bar{D}$ , oder  $c = \infty, -\infty$

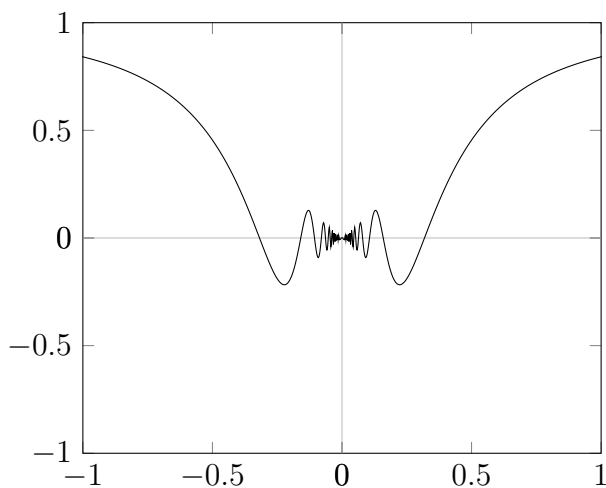
falls  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  oder  $-\infty$ , so ist  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

b)  $c \in \bar{D} \supset \mathbb{R}$ .

Falls  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  und falls  $s > 0$

existiert mit  $f(x) > 0$  für alle  $x \in [c - s, c + s]$ , ( $f(x) < 0$ )

dann ist  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$



c) Falls  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  und falls  $T > 0$  existiert mit  $f(x) > 0$  für  $x \geq T$ , so ( $f(x) < 0$ )

ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$

(Entsprechend für  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ )

## 4.17 Beispiel

a) •  $f(x) = \frac{1}{x}, D = ]0, \infty[$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

•  $f(x) = \frac{1}{x}, D = ]-\infty, 0[$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

•  $f(x) = \frac{1}{x}, D = ]0, \infty[$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$  existiert nicht TODO SINUS HINZUFÜGEN!

c)  $P(x) = ak_x^k + \dots + a_0.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \begin{cases} \infty, \text{ falls} & a_k > 0 \\ -\infty, \text{ falls} & a_k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, \text{ falls} & a_k > 0 \text{ k gerade oder } a_k < 0 \text{ k ungerade} \\ -\infty, \text{ falls} & a_k < 0 \text{ k gerade oder } a_k > 0 \text{ k ungerade} \end{cases}$$

d)  $P(x)$  wie in c)

$$Q(x) = b_l^l + \dots + b_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{ falls } a_k \text{ und } b_k \text{ gleiche Vorzeichen} \\ -\infty, & \text{ falls } a_k \text{ und } b_k \text{ verschiedene Vorzeichen} \end{cases}$$