

Mathematik II SS 2015

Finn Ickler nach Peter Hauck

13.4.2015 - 14.7.2015

Danke an alle, die mich in diese schweren Zeit unterstützt haben, besonders an den großartigen Hermann Zapf, der die Font entwickelt hat. Möge er in Frieden ruhen. Ein Matheskript ist die höchste Form um die Kunst den $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -en zu lernen. Vielen Dank besonders an die Leute, die mir ihren Aufschrieb zur Verfügung gestellt haben, als ich wieder mal zu langsam war live mitzuschreiben (Lea Buchweitz, Jonathan Leistner, Flavia Nährlich, Manuela Weigold, u.v.a). Erstellt wurde das Skript mit lua-tex. Es liegt keine Garantie vor, Fehler können per Github gemeldet werden (www.github.com/FinnIckler/SS15-Skripte). Dieses Skript ist frei verfügbar.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1 Komplexe Zahlen | 10 |
| 1.1 Definition | 10 |
| 1.2 Veranschaulichung | 10 |
| 1.3 Rechenregeln in \mathbb{C} | 10 |
| 1.4 Definition Absolutbetrag | 11 |
| 1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag | 12 |
| 1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten | 13 |
| 1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie | 14 |
| 1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation | 14 |
| 1.9 Bemerkung und Definition | 15 |
| 1.10 Satz: Komplexe Wurzeln | 16 |
| 1.11 Beispiel | 16 |
| 1.12 Bemerkung | 17 |
| 2 Folgen und Reihen | 17 |
| 2.1 Definition | 17 |
| 2.2 Beispiel | 17 |
| 2.3 Definition | 18 |
| 2.4 Definition | 18 |
| 2.5 Beispiele | 19 |
| 2.6 Satz: Beschränktheit und Konvergenz | 20 |
| 2.7 Bemerkung | 21 |
| 2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen) | 21 |
| 2.9 Satz: Kriterien für Nullfolgen | 22 |
| 2.10 Bemerkung | 24 |
| 2.11 Definition | 24 |
| 2.12 Satz: Landausymbole bei Polynomen | 25 |
| 2.13 Bemerkung | 25 |
| 2.14 Definition | 25 |
| 2.15 Beispiel | 25 |
| 2.16 Satz: Monotonie und Konvergenz | 26 |

| | |
|---|-----------|
| 2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium) | 26 |
| 2.18 Definition | 27 |
| 2.19 Satz: Reihenkonvergenz | 28 |
| 2.20 Beispiele | 28 |
| 2.21 Satz (Leibniz-Kriterium) | 30 |
| 2.22 Satz (Majoranten-Kriterium) | 30 |
| 2.23 Beispiel | 31 |
| 2.24 Definition | 31 |
| 2.25 Korollar | 31 |
| 2.26 Satz: Wurzel- und Quotientenkriterium | 32 |
| 2.27 Bemerkung | 33 |
| 2.28 Beispiel | 33 |
| 2.29 Bemerkung | 34 |
| 2.30 Definition | 34 |
| 2.31 Satz: Konvergenz im Cauchy Produkt | 34 |
| 3 Potenzreihen | 34 |
| 3.1 Definition | 34 |
| 3.2 Beispiel | 35 |
| 3.3 Satz | 35 |
| 3.4 Bemerkung | 37 |
| 3.5 Die Exponentialreihe | 37 |
| 4 Funktionen und Grenzwerte | 40 |
| 4.1 Definition | 40 |
| 4.2 Beispiel | 40 |
| 4.3 Definition | 43 |
| 4.4 Beispiel | 43 |
| 4.5 Definition | 44 |
| 4.6 Beispiel | 45 |
| 4.7 Satz ($\varepsilon - \delta$)-Kriterium | 48 |
| 4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte) | 49 |
| 4.9 Beispiel | 50 |
| 4.10 Bemerkung | 50 |

| | |
|--|-----------|
| 4.11 Beispiel | 50 |
| 4.12 Definition | 50 |
| 4.13 Beispiel | 51 |
| 4.14 Bemerkung | 51 |
| 4.15 Definition | 52 |
| 4.16 Satz: Grenzwerte gegen unendlich | 53 |
| 4.17 Beispiel | 54 |
| 5 Stetigkeit | 55 |
| 5.1 Definition | 55 |
| 5.2 Satz | 55 |
| 5.3 Beispiel | 56 |
| 5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit) | 57 |
| 5.5 Satz: Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen | 57 |
| 5.6 Beispiel | 58 |
| 5.7 Satz: Stetigkeit von Potenzreihen | 58 |
| 5.8 Korollar | 58 |
| 5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen) | 59 |
| 5.10 Korollar (Zwischenwertsatz) | 59 |
| 5.11 Satz (Min-Max-Theorem) | 60 |
| 5.12 Definition | 61 |
| 5.13 Satz: Injektive Funktionen nur bei Monotonie | 61 |
| 5.14 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion) | 61 |
| 5.15 Korollar | 61 |
| 5.16 Satz: Exponentialfunktion und Logarithmus naturalis | 62 |
| 5.17 Satz: Wachstum des natürlichen Logarithmus' | 63 |
| 5.18 Definition | 63 |
| 5.19 Satz | 63 |
| 5.20 Bemerkung | 64 |
| 5.21 Definition | 64 |
| 5.22 Satz | 65 |

| | |
|--|-----------|
| 6 Differenzierbare Funktionen | 65 |
| 6.1 Definition | 66 |
| 6.2 Beispiel | 66 |
| 6.3 Satz | 67 |
| 6.4 Korollar | 68 |
| 6.5 Satz (Ableitungsregeln) | 68 |
| 6.6 Beispiel | 69 |
| 6.7 Satz | 69 |
| 6.8 Satz: Ableitungsregeln von cosinus und sinus | 70 |
| 6.9 Beispiel | 70 |
| 6.10 Satz: Potenzreihen und diverenzierbarkeit | 71 |
| 6.11 Korollar | 71 |
| 6.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) | 71 |
| 6.13 Bemerkung | 72 |
| 6.14 Satz | 73 |
| 6.15 Satz (logarithmische Abbildung) | 73 |
| 6.16 Beispiel | 73 |
| 6.17 Definition | 74 |
| 6.18 Satz | 74 |
| 6.19 Satz (Mittelwertsatz) | 75 |
| 6.20 Korollar | 76 |
| 6.21 Korollar | 76 |
| 6.22 Satz (Regeln von L'Hôpital) | 76 |
| 6.23 Beispiel | 77 |
| 7 Das bestimmte Integral | 77 |
| 7.1 Definition | 78 |
| 7.2 Definition | 79 |
| 7.3 Satz: Regelfunktionen | 79 |
| 7.4 Satz: Regelfunktion und Stetigkeit | 80 |
| 7.5 Beispiel | 80 |
| 7.6 Lemma | 82 |
| 7.7 Definition | 83 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 7.8 | Beispiel | 83 |
| 7.9 | Satz (Rechenregeln für Integrale) | 84 |
| 7.10 | Beispiel | 84 |
| 7.11 | Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung) | 84 |
| 8 | Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung | 85 |
| 8.1 | Definition | 85 |
| 8.2 | Definition | 85 |
| 8.3 | Bemerkung | 87 |
| 8.4 | Beispiel | 87 |
| 8.5 | Satz | 88 |
| 8.6 | Satz | 88 |
| 8.7 | Definiton | 90 |
| 8.8 | Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) | 90 |
| 8.9 | Beispiele | 91 |
| 8.10 | Beispiel | 92 |
| 8.11 | Satz (Partielle Integration) | 92 |
| 8.12 | Beispiele | 93 |
| 8.13 | Satz (Integration durch Substitution) | 94 |
| 8.14 | Satz | 95 |
| 8.15 | Beispiel | 95 |
| 9 | Matrizen und lineare Gleichungssysteme | 96 |
| 9.1 | Definition | 96 |
| 9.2 | Definition | 97 |
| 9.3 | Definition | 98 |
| 9.4 | Beispiel | 98 |
| 9.5 | Satz (Rechenregeln von Matrizen) | 100 |
| 9.6 | Definition | 101 |
| 9.7 | Definition | 103 |
| 9.8 | Definition | 103 |
| 9.9 | Bemerkung | 103 |
| 9.10 | Algorithmus zur Transformation einer Matrix auf Zeilenstufenform mit elementaren Zeilenumformungen | 104 |

| | |
|---|------------|
| 9.11 Beispiel | 105 |
| 9.12 Gauß-Algorithmus | 105 |
| 9.13 Beispiel | 107 |
| 10 Der Vektorraum \mathbb{R}^+ (Nicht mehr Klausurrelevant) | 110 |
| 10.1 Satz (Rechenregeln in \mathbb{R}^n) | 111 |
| 10.2 Definition | 112 |
| 10.3 Beispiele | 112 |
| 10.4 Satz | 113 |
| 10.5 Beispiel | 114 |
| 10.6 Definition | 115 |
| 10.7 Beispiel | 116 |

Abbildungsverzeichnis

| | |
|--|----|
| 1 Veranschaulichung Komplexe Zahlen | 10 |
| 2 Absolutbetrag | 12 |
| 3 Imaginäre Zahlen im Koordinatensystem durch Polarkoordinaten | 13 |
| 4 Winkel im Bogenmaß | 13 |
| 5 Multiplizieren komplexer Zahlen | 15 |
| 6 Multiplikation mit i | 15 |
| 7 Beschränktheit von Folgen | 19 |
| 8 Beschränkte aber nicht konvergente Folge | 20 |
| 9 Cauchy'sches Konvergenzkriterium | 27 |
| 10 Monotonie | 30 |
| 11 Konvergenzradien | 36 |
| 12 Die Exponentialreihe | 38 |
| 13 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ | 40 |
| 14 e^x | 41 |
| 15 Bogenmaß | 42 |
| 16 Sinus und Cosinus | 42 |
| 17 Tangens und Kotangens | 43 |
| 18 Abschnittsweise definierte Funktion | 45 |

| | | |
|----|--|----|
| 19 | x^2 | 46 |
| 20 | $x+1$ | 46 |
| 21 | Abschnittsweise definierte Funktion | 47 |
| 22 | $\sin(\frac{1}{x})$ | 47 |
| 23 | $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ | 48 |
| 24 | geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums | 48 |
| 25 | Grenzwerte gegen einen Festen Wert | 51 |
| 26 | Funktionen $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$ | 52 |
| 27 | $\sin(\frac{1}{x})$ | 53 |
| 28 | $\frac{e^x}{x^n}$ | 55 |
| 29 | Sinus und Cosinus am Einheitskreis | 57 |
| 30 | Zwischenwerte | 60 |
| 31 | Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion | 62 |
| 32 | $\exp(x)$ und $\ln(x)$ | 63 |
| 33 | Verschiedene Arten Exponentialfunktionen | 64 |
| 34 | Logithmen mit Basen > 1 und < 1 | 65 |
| 35 | Steigung am Steigungsdreieck | 66 |
| 36 | Sekante an Funktion | 67 |
| 37 | Abschnittsweise definierte cosinus Funktion | 70 |
| 38 | Zwei Funktionen an der Winkelhalbierenden | 72 |
| 39 | Ableitung keine Hinreichende Bedingung für Minima/Maxima | 74 |
| 40 | Eine Funktion und ihrer Steigung an der Stelle c | 75 |
| 41 | Flächeninhalt unter einer Funktion f | 78 |
| 42 | Treppenfunktion | 79 |
| 43 | Treppenfunktion | 80 |
| 44 | Abschnittsweise stetige Funktion | 81 |
| 45 | Treppenfunktion (Untersumme) von x^2 | 81 |
| 46 | Nicht integrierbare Funktion | 82 |
| 47 | Mittelwertsatz der Integralrechnung | 85 |
| 48 | Lokal Integrierbar von u bis v | 86 |
| 49 | Die Welt der Funktionen | 89 |
| 50 | Stammfunktionbildung | 89 |

| | | |
|----|--|-----|
| 51 | Integral Berechnung $x \cdot \cos(x)$ | 93 |
| 52 | Matrix Multiplikation | 99 |
| 53 | Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor | 111 |
| 54 | Vektoraddition durch Parallelogrammbildung | 111 |
| 55 | Gerade dargestellt durch Vektoren | 113 |

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Addition: } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Multiplikation: } (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i^1$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$. Rein imaginäre Zahlen: $b \cdot i$, $b \in \mathbb{R}$, $(0 + bi)$

i imaginäre Einheit. $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

$a = \Re(z)$ Realteil von z ($\Re(z)$).

$b = \Im(z)$ Imaginärteil von z ($\Im(z)$).

$\bar{z} = a - bi$ ($= a + (-b)i$) Die zu z konjugiert komplexe Zahl.

1.2 Veranschaulichung

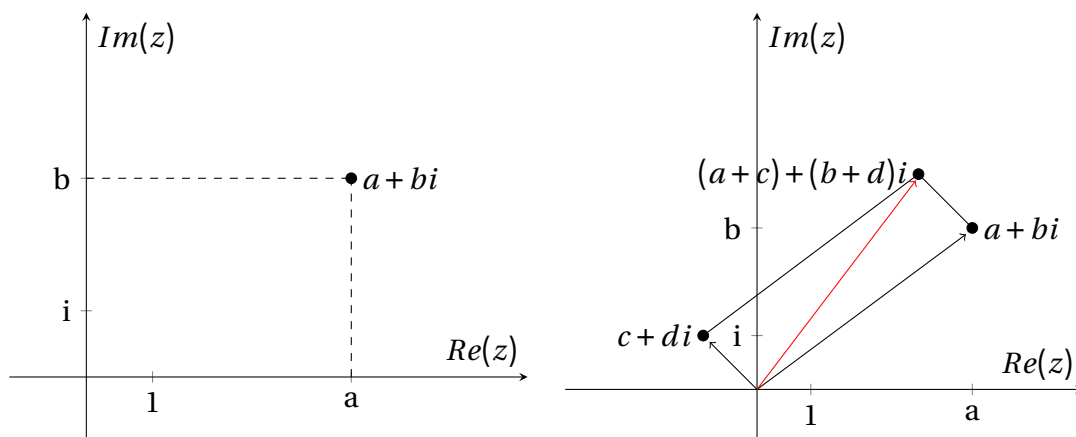


Abbildung 1: Addition entspricht Vektoraddition

1.3 Rechenregeln in \mathbb{C}

a) Es gelten alle Rechenregeln wie in \mathbb{R} .

(z.B Kommutativität bzgl. $+$, \cdot : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$)

¹Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ beachten

Inversenbildung bzgl. \cdot :

$z = a + bi \neq 0$, d.h. $a \neq 0$ oder $b \neq 0$:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \frac{5-7i}{3+2i} &= (5-7i) \cdot (3+2i)^{-1} \\ &= (5-7i) \cdot \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right) \\ &= \left(\frac{15}{13} - \frac{14}{13}\right) + \left(-\frac{10}{13} - \frac{21}{13}\right)i \\ &= \frac{1}{13} - \frac{31}{13}i \end{aligned}$$

$$\text{Speziell: } (bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i$$

$$\text{insbesondere: } \frac{1}{i} = -i$$

$$\begin{aligned} z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \quad \bar{\bar{z}} &= z \\ \text{b) } \quad \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

1.4 Definition Absolutbetrag

$$\text{a) Absolutbetrag von } z = a + bi \in \mathbb{C}: |z| = \underbrace{+\sqrt{a^2 + b^2}}_{\in \mathbb{R}, \geq 0}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}}$$

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} |z| &= \text{Abstand von } z \text{ zu } 0 \\ &= \text{Länge des Vektors, der } z \text{ entspricht} \end{aligned}$$

$$\text{b) Abstand von } z_1, z_2 \in \mathbb{C}:$$

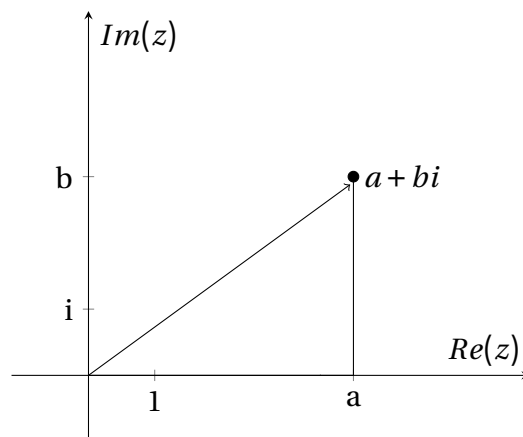


Abbildung 2: Graphische Definition des Absolutbetrages

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag

(a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 $|-z| = |z|$

1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

- a) Jeder Punkt $\neq (0,0)$ lässt sich durch seine Polarkoordinaten (r, φ) beschreiben:
 $-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$

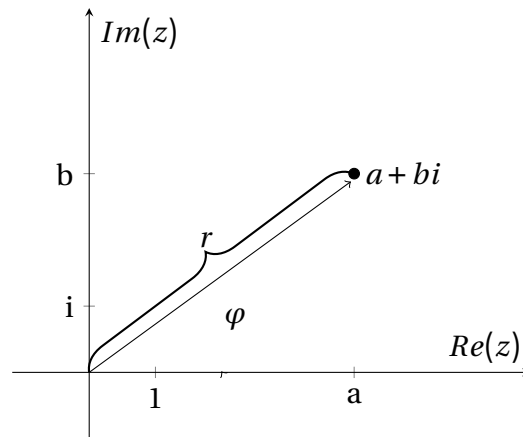
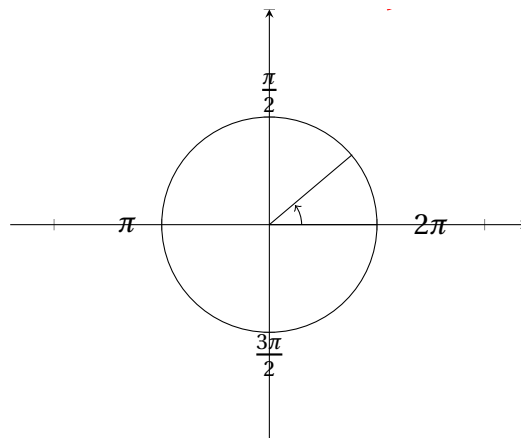


Abbildung 3: Polarkoordinaten

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes

Abbildung 4: Umrechnung Grad zu Bogenmaß



Umfang: 2π

φ in Grad $\hat{=}$ $\frac{2\pi \cdot \varphi}{360}$ im Bogenmaß

Für Punkte mit kartesischen Koordinaten $\neq (0,0)$ werden als Polarkoordinate (r, φ) verwendet.

b) komplexe Zahl $z = a + ib$

$$r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |z| \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

Darstellung von z durch Polarkoordinate

Beispiel: a) $z_1 = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
 $= 2 \cdot (0,5\sqrt{2} + i \cdot 0,5\sqrt{2})$

b) $z_2 = 2 + i$

$$|z_2| = \sqrt{5}$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\frac{2}{\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}} i) \text{ Suche } \varphi \text{ mit } 0 \leq 2\pi \text{ mit } \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}} z_2 \approx \sqrt{5} \cdot (\cos(0,46) + i \cdot \sin(0,46))$$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis:

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

(a) $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

(b) $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a) $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

$$z = |z| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$$

$$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + i (\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi))$$

$$w \cdot z = |w \cdot z| (\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$$

b) $z = i, w = a + ib$

$$i \cdot w = -b + ia$$

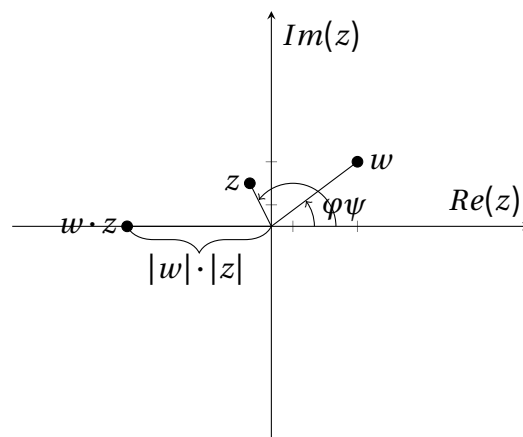
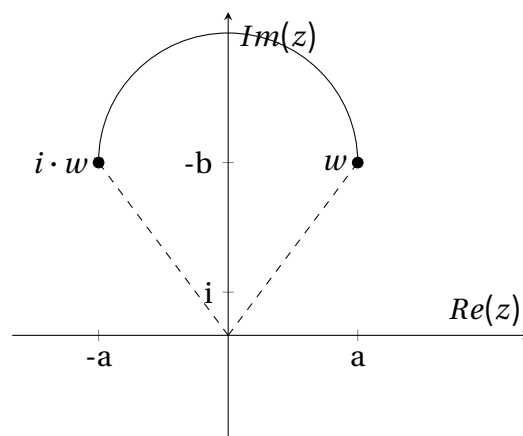


Abbildung 5: Multiplizieren komplexer Zahlen

Multiplikation mit $i \hat{=}$ Drehung um 90°

Abbildung 6: Multiplikation mit i

1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexe Exponentialfunktion einführen.

e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ e = Euler'sche Zahl $\approx 2,718718\dots$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

Es gilt: $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, $r = |z|$, φ Winkel

$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ ist Polarform von z .

$z = a + bi$ ist kartesische Form von z . $\bullet(r, \varphi)$ Polarkoordinaten

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Punkte auf dem Einheitskreis.

$$e^{i\pi} = -1$$

(Euler'sche Gleichung)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

1.10 Satz

Sei $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

- a) Ist $m \in \mathbb{Z}$, so ist $w^m = |w|^m \cdot (\cos(m \cdot \varphi) + i \cdot \sin(m \cdot \varphi))$
 $(m < 0 : w^m = \frac{1}{w^{|m|}}, w \neq 0)$

b) Quadratwurzeln

- c) Ist $n \in \mathbb{N}, w \neq 0$, so gibt es genau n n -te Wurzeln von w :

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n})), n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Beweis. a) richtig, wenn $m = 0, 1$

$m \geq 2$. Folgt aus 1.8

$m = -a$:

$$\begin{aligned} w^{-1} &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w| \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))}_{=1}} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) = |w|^{-1} \cdot (\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)) \end{aligned}$$

□

1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus i :

$$|i| = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Nach 1.10 b): } \sqrt{i} &= \pm(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})) \\ &= \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i) \end{aligned}$$

1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom

$$x^n - w \quad (w \in \mathbb{C})$$

eine Nullstelle in \mathbb{C} (sogar n verschiedene wenn $w \neq 0$)

Es gilt sogar : *Fundamentalsatz der Algebra*

(C. F. Gauß 1777-1855)

Jedes Polynom $a_n x^n + \dots + a_0$

mit irgendwelchen Koeffizienten: $a_n \dots a_0 \in \mathbb{C}$ hat Nullstelle in \mathbb{C}

2 Folgen und Reihen

2.1 Definition

Sei $k \in \mathbb{Z}$, $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$

($k = 0$, $A_0 \in \mathbb{N}_0$, $k = 1$, $A_n \in \mathbb{N}$)

Abbildung $a : A \Rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

$$m \Rightarrow a_m$$

heißt *Folge* reeller Zahlen

$$(a_k, a_{k+1} \dots)$$

Schreibweise:

$(a_m)_{m>k}$ oder einfach (a_m)

a_m heißt *m-tes Glied* der Folge, m *Index*

2.2 Beispiel

a) $a_n = 5$ für alle $n > 1$

(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...)

b) $a_n = n$ für alle $n > 1$

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...)

$$\text{c) } a_n = \frac{1}{n} \\ \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

$$\text{d) } a_n = \frac{(n+1)^2}{2^n} \\ \left(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \dots\right)$$

$$\text{e) } a_n = (-1)^n \\ (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

$$\text{f) } a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}} \text{ für } n \geq 2, a_1 = 1 \\ \left(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots\right)$$

$$\text{g) } a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \\ \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \dots\right)$$

$$\text{h) } a_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \frac{1}{i} \\ \left(-1, \frac{-1}{2}, -\frac{5}{6}, \dots\right)$$

2.3 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

D.h. $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$ für alle $n > k$.

2.4 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *konvergent* gegen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (konvergent gegen ε), falls gilt:

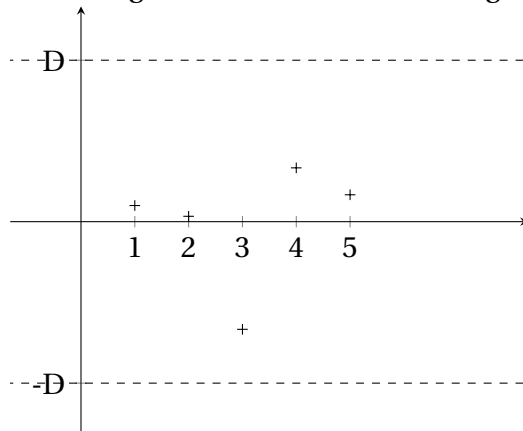
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) : |a_n - c| < \varepsilon$$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (oder einfach } c = \lim a_n)$$

c heißt *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge (a_n)

(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))

Abbildung 7: Beschränktheit von Folgen



Eine Folge die gegen 0 konvertiert, heißt *Nullfolge*

2.5 Beispiele

- a) $r \in \mathbb{R} : a_n = r$ für alle $n \geq 1$

(r, r, \dots)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = r$$

$$|a_n - r| = 0 \text{ für alle } n$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man $n(\varepsilon) = 1$ wählen

- b) $a_n = n$ für alle $n \geq 1$

Folge ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

- c) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$

(a_n) ist Nullfolge.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Suche Index $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$

D.s. es muss gelten.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

$$\text{Ich brauche : } \frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$$

$$\text{Ich brauche } n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Aus Mathe I folgt, dass solch ein $n(\varepsilon)$ existiert.

$$\text{z.B. } n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Dann:

$$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

d) $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$ für alle $n \geq 1$

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a - 3| &= \left| \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1} \right| \\ &= \left| \frac{-3n-2}{n^2+n+1} \right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Benötigt wird $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ für alle $n > n(\varepsilon)$.

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$$

Wähle $n(\varepsilon)$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$

Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$.

$$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

e) $a_n = (-1)^n$ beschränkte Folge $-1 \leq a_n \leq 1$ konvergiert nicht.

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$

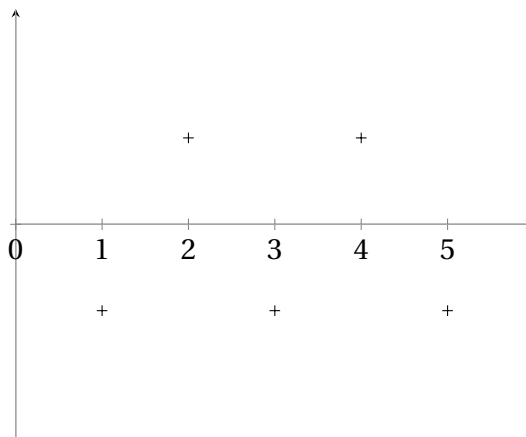


Abbildung 8: $(-1)^n$ ist beschränkt aber konvergiert nicht

$$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{↯}$$

2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: 2.5e))

Beweis. Sei $c = \lim a_n$, wähle $\varepsilon = 1$,

Es existiert $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - c| < 1$ für alle $n \geq n(1)$

Dann ist

$$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c| \text{ für alle } n \geq n(1)$$

$$M = \max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \dots, |a_{n(1)-1}|, 1 + |c|\}$$

Dann: $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq k$

$$-M \leq a_n \leq M$$

□

2.7 Bemerkung

$$\text{a) } (a_n)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n|)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge} \quad (|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0|)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n - c|)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge}$$

2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien $(a_n)_{n \geq k}$ und $(b_n)_{n \geq k}$ konvergente Folgen, $\lim a_n = c, \lim b_n = d$.

$$\text{a) } \lim |a_n| = |c|$$

$$\text{b) } \lim (a_n \pm b_n) = c \pm d$$

$$\text{c) } \lim (a_n \cdot b_n) = c \cdot d$$

insbesondere $\lim (r \cdot b_n) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.

$$\text{d) Ist } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k \text{ und ist } d \neq 0, \text{ so } \lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{c}{d}$$

$$\text{e) Ist } (b_n) \text{ Nullfolge, } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k, \text{ so konvergiert } \left(\frac{1}{b_n} \right) \text{ nicht!}.$$

$$\text{f) Existiert } m \geq k \text{ mit } a_n \leq b_n \text{ für alle } n \geq m, \text{ so ist } c \leq d.$$

$$\text{g) Ist } (c_n)_{n \geq k} \text{ Folge und existiert } m \geq k \text{ mit } 0 \leq c_n \leq a_n \text{ für alle } n \geq m \text{ und ist } (a_n) \text{ eine Nullfolge, so ist auch } (c_n) \text{ eine Nullfolge.}$$

$$\text{h) Ist } (c_n)_{n \geq l} \text{ beschränkte Folge und ist } (a_n)_{n \geq k} \text{ Nullfolge, so ist auch } (c_n \cdot a_n)_{n \geq k} \text{ Nullfolge.}$$

c_n muss nicht konvergieren!

Beweis. Exemplarisch:

- b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$ und $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$ und $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$
 $|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$
 Suche $n(\varepsilon) = \max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}), n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$
 Dann gilt für alle $n > n(\varepsilon)$:
 $|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
- f) Angenommen $c > d$. Setze $\delta = c - d > 0$
 Es existiert $\tilde{m} \geq m$ mit $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$
 und $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq \tilde{m}$.
 Für diese n gilt:
 $0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$ nach Voraussetzung
 $= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$
 $\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \nmid$

□

2.9 Satz

- a) $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge
- b) Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{1}{n^m})_{n \geq 1}$ Nullfolge.
- c) Sei $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$
 Dann ist $(n^m \cdot q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge
- d) Ist $r > 1, m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{n^m}{r^n})_{n \geq 1}$ eine Nullfolge
- e) $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$
 $Q(x) = b_e \cdot x^e + \dots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$
 Sei $Q(n) \neq 0$ für alle $n \geq k$.

- Ist $m > e$, so ist $\frac{P(n)}{Q(n)}$ nicht konvergent

- Ist $m = e$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$

- Ist $m < l$, so ist $(\frac{P(n)}{Q(n)})$ ein Nullfolge

a) Sei $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge

Beweis. a) Richtig für $q > 0$. Sei jetzt $q > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Mathe I: Es gibt ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt: $|q^n - 0| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

□

b) 2.5c): $\frac{1}{n}_{n \geq 1}$ Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

c) Richtig für $q = 0$. Sei jetzt $q > 0$.

1. Fall: $m = 1$

$$\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0.$$

$$(t+1)^n \stackrel{\text{Binomialsatz}}{=} 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 > \frac{n(n-1)}{2} t^2 \text{ für alle } n \geq 2$$

$$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$$

$$0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftrightarrow \text{Nullfolge 2.5e), 2.8e)}$$

Nach 2.8g) ist $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge, also auch $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$.

2. Fall: $m > 1$.

Setze $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} n^m \cdot q^n &= n^m \cdot (q')^{nm} \\ &= (n \cdot (q')^n)^m = 1 \text{ anwenden} \end{aligned}$$

$$0 < q' < 1$$

$(n^m + q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge noch Fall $m = 1$ und 2.8e)

d) Folgt aus c) und $q = \frac{1}{r}$

$$\text{e) Ist } m \leq l, \text{ so ist } \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^m (a_m + a_{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^m})}{n^l (b_l + b_{l-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$$

$$(I) \longrightarrow a_m, (II) \longrightarrow b_l \stackrel{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{a_m}{b_l}$$

$$n < l, \frac{1}{n^{l-m}} \text{ Nullfolge}$$

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$$

$m > l$:

Beh. folgt aus Fall $m < l$ und 2.8e).

2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, die Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$$

$$a_n \leq x \leq b_n$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2} \Leftarrow \text{Nullfolge (2.9b)}$$

$$2.8e) (|x - a_n|) \text{ Nullfolge.}$$

$$2.7e): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

$$\text{Analog: } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$$

2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

2.11 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *strikt positiv*, falls $a_n > 0$ für alle $n \geq k$.

Sei im Folgenden $(a_n)_{n \geq k}$ eine strikt positive Folge.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n \geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n \geq k} \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

$$c) \mathcal{O}(a_n) = \{(b_n)_{n \geq k} : (\frac{b_n}{a_n}) \text{ ist Nullfolge}\}$$

$(b_n) \in o(a_n)$ heißt Folge (a_n) wächst wesentlich schneller als die Folge (b_n) . Klar:

$$o(a_n) \subset \mathcal{O}(a_n)$$

\mathcal{O}, o („groß Oh“, „klein Oh“)

Landau-Symbole

$$\text{z.B. } (n^2) \in o(n^3)$$

$$(n^2 + n + 1) \in \mathcal{O}(n^2) \quad n^2 + n + 1 \leq 3n^2$$

$$(n^2) \in \mathcal{O}(n^2 + n + 1) \quad n^2 \leq n^2 + n + 1$$

$\mathcal{O}(1)$ = Menge der beschränkten Folgen

$o(1)$ = Menge aller Nullfolgen

Häufig gewählte Schreibweise:

$$n^2 \underbrace{=} o(n^2) \text{ statt } (n^2) \in o(n^3)$$

eig. falsch!

$$n^2 + n + 1 = \mathcal{O}(n^2) \text{ statt } (n^2 + n + 1)$$

2.12 Satz

Sei $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, $m \geq 0$, $a_m \neq 0$.

- a) $(P(n)) \in o(n^l)$ für alle $l > m$ und
 $(P(n)) \in O(n^l)$ für alle $l \geq m$.
- b) ist $r > 1$, so ist $(P(n)) \in o(r^n)$.
 $[(r^n) \text{ wächst deutlich schneller als } (P(n))]$

Beweis. a) folgt aus 2.9e).

$m = l$ (2.6)

b) folgt aus 2.9d) und 2.8 b)c)

□

2.13 Bemerkung

Algorithmus:

Sei t_n = maximale Anzahl von Reihenschritten des Algorithmus' bei Input der Länge n (binär codiert).

Worst-Case-Komplexität:

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $(t_n) \in O(n^l)$.
(gutartig)

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mindestens
 exponentielle Zeitkomplexität, falls $r > 1$ existiert mit $(r^n) \in O(t_n)$ *(böartig)*

2.14 Definition

- a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *monoton wachsend (steigend)*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$. Sie heißt *steng monoton wachsend (steigend)*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq k$
- b) $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$

2.15 Beispiel

- a) $a_n = 1$ für alle $n > 1$ (a_n) ist monoton steigend und monoton fallend.

- b) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$.
 (a_n) streng monoton fallend.
- c) $a_n = \sqrt{n}$ (positive Wurzel)
 $(a_n)_{n \geq 1}$ streng monoton steigend.
- d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$
 $(a_n)_{n \geq 1}$ streng monoton steigend.
- e) $a_n = (-1)^n, n \geq 1$
 (a_n) ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

2.16 Satz

- a) Ist $(a_n)_{n \geq k}$ monoton steigend und nach oben beschränkt (d.h. es existiert $D \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq D$ für alle $n \geq k$), so konvergiert $(a_n)'$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$
- b) $(a_n)_{n \geq k}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n \geq k}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$.

Beweis. a)

$c = \sup\{a_n : n \geq k\}$ existiert (Mathe I). Zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n(\varepsilon)$ mit $c - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq c$

Denn sonst $a_n \leq c - \varepsilon$ für alle $n \geq k$ und $c - \varepsilon$ wäre obere Schranke für $\{a_n : n \geq k\}$

Widerspruch dazu, dass c kleinste obere Schranke. Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

$$c - \varepsilon \leq a_{n(\varepsilon)} \leq a_n \leq c$$

$$|a_n - c| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon).$$

b) analog

□

2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

(Cauchy, 1789 - 1859)

Sei $(a_n)_{n \geq k}$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

- (1) $(a_n)_{n \geq k}$ konvergent

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N - M(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$ (Cauchyfolge)

Grenzwert muss nicht bekannt sein!

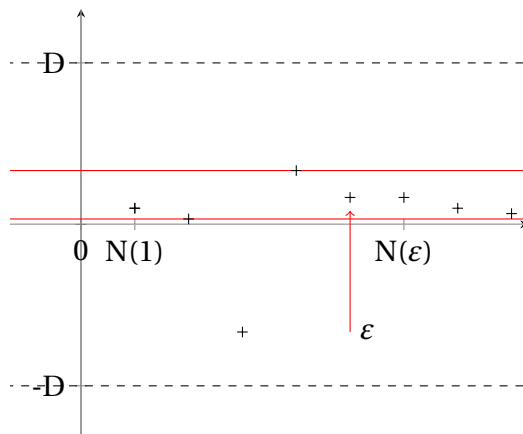


Abbildung 9: Cauchy'sches Konvergenzkriterium

2.18 Definition

a) Sei $(a_i)_{i \geq k}$ eine Folge, $s_n = \sum_{i=k}^n a_i$, $n \geq k$ (Partialsummen der Folge)

Dann heißt $(s_n)_{n \geq k}$ eine *unendliche Reihe*

$(k-1 : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$

Schreibweise : $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$

b) Ist die Folge $(s_n)_{n \geq k}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c$,

so schreibt man $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$. Reihe *konvergiert*.

Wenn (s_n) nicht konvergiert, so heißt die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *divergent*.

(Zwei Bedeutungen von $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$:

- Folge der Partialsummen
- Grenzwert von (s_n) , falls dieser existiert

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \sum_{n=k}^{\infty} a_n = (s_m)_{m \geq k}$$

2.19 Satz

- a) Ist die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine Nullfolge.
- b) Ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{i=k}^n a_i$ beschränkt und ist $a_i \geq 0$ für alle i , so ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis. a)

Sei $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$.

Sei $\varepsilon > 0$ Dann existiert $n(\frac{\varepsilon}{2}) \geq k$ mit $|\sum_{i=k}^{\infty} 2a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n(\frac{\varepsilon}{2})$

Dann gilt $|a_{n+1} - 0| = |a_{n+1}| = |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + \sum_{i=k}^n a_i| =$

$$|\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c - \sum_{i=k}^n a_i + c| \leq |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c| + |\sum_{i=k}^n a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(a_n) ist Nullfolge

b) folgt aus 2.16 a), denn (s_n) ist monoton steigend

□

2.20 Beispiele

a) Sei $q \in \mathbb{R}$.

Ist $q \neq 1$, so ist $\sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$[(\sum_{i=k}^n q^i) \cdot (q-1)]$$

Sei $|q| < 1$, d.h. $-1 < q < 1$.

Dann ist $\sum_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ (konvergiert)

$$s_n = \sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

(q^n) Nullfolge (2.9_a) für $q \geq 0$, 2.8_e) + 2.9_a) für $q < 0$, $q = -|q|$

Geometrische Reihe

Sei $|q| \geq 1$. Dann ist $\sum_{i=k}^{\infty} q^i$ divergent, da dann (q^i) keine Nullfolge (2.18_a)

b) $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert

harmonische Reihe

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{n}$$

$$n = 2^0 = 1 : s_1 = 1$$

$$n = 2^1 = 2 : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

...

$$n = 2^3 = 8 : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_7 > s_6 \dots$$

Per Induktion zu beweisen!

c) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert.

Folge der Partialsummen ist monoton steigend.

2.16a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^2}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{2}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^4} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

2.16a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ Kgt., Grenzwert ≤ 2 . (später: Grenzwert ist $\frac{\pi^2}{6}$)

Es gilt allgemeiner:

$s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert.

Allgemeiner: $s \in \mathbb{R}, s > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert

d) $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ konvergiert:

$$s_{2n} = \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{<0} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)}_{<0}$$

$$s_{2n} \leq s_{2(n+1)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$(s_{2n}) \text{ ist monoton fallend. } s_{2n-1} = -1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right)}_{>0}$$

(s_{2n-1}) ist monoton wachsend

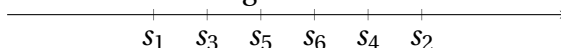
Ist k ungerade, so ist $s_k < s_l$: Wähle n so, dass $2n - a \geq k, 2n \geq l$

$$s_k \underset{(2)}{\leq} s_{2n-1} \underset{\uparrow}{<} s_{2n} \underset{(1)}{\leq} s_l$$

$$s_{2n} = s_{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

Abstand $s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n}$ geht gegen 0.

Abbildung 10: Monotonie



$$\sup\{s_{2n-1} : n \geq 1\}$$

$$\inf\{s_{2n} : n \geq 1\}$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} (-1)^i \frac{1}{i} \in]-1, -\frac{1}{2}[\text{ (Es gilt } \lim = -\ln 2 \text{)}$$

Bemerkung

Was bedeutet $0.\bar{8} = 0.88888888\dots$? (Dezimalsystem)

$$0.\bar{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots = 8 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = 8 \cdot \left(\frac{10}{9} - 1\right) = \frac{8}{9}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere $a_i \geq 0$ falls $i \geq k$), so ist

$$\sum_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i \text{ konvergent.}$$

2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_i)_{i \geq k}, (b_i)_{i \geq k}$ Folgen, wobei $b_i \geq 0$ für alle $i \geq k$ und $|a_i| \leq b_i$ für alle $i \geq k$.

Dann gilt

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent, so auch $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$. Für die Grenzwerte gilt:

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$$

Beweis. Konvergenz

von $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ folgt aus 2.16 a).

$\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$ folgt aus 2.8 f).

Sei $m > n$;

$$\left| \sum_{i=k}^m a_i - \sum_{i=k}^n b_i \right| = \sum_{i=n+1}^m a_i \leq \sum_{i=n+1}^m |a_i| = \left| \sum_{i=k}^m |a_i| - \sum_{i=k}^n |a_i| \right|$$

Mit Cauchy-Kriterium 2.17 folgt daher aus der Konvergenz von $\sum_{i=k}^m |a_i|$ auch die von

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i.$$

□

2.23 Beispiel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$$

$\sqrt{i} \leq i$ für alle $i \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Ang. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ konvergiert. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ konvergiert. \nexists

Widerspruch zu 2.20 b)

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{i}$$

2.20d): $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, aber $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert nicht. (★)

2.24 Definition

$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

(Falls alle $a_i \geq 0$: Konvergent = absolut Konvergent)

2.25 Korollar

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so auch konvergent. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beweis: 1. Behauptung 2.22 mit $b_i = |a_i|$

Umkehrung siehe (★)

Bemerkung

Was bedeutet $0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

$a_i \in \{0 \dots 9\}$ (Dezimalsystem)

$$a_1 \cdot \frac{1}{10} a_2 \cdot \frac{1}{100} \dots a_n \cdot \frac{1}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10} 9 \cdot \frac{1}{100} \dots 9 \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$a_i \frac{1}{10} \leq 9 \frac{1}{10}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} 9 \frac{1}{10} = 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 1 \Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \frac{1}{10} \text{ konvergiert}$$

2.26 Satz

Sei $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ eine Reihe.

a) Wurzelkriterium

Existiert $q < 1$ und ein Index i_0 , so dass $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ für alle $i \geq i_0$.

so konvergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i so divergiert $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$.

b) Quotientenkriterium

Existiert $q > 1$ und ein Index i_0 , so dass $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ für alle $i \geq i_0$,

so konvergiert $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Beweis. a) $|a_i| \leq q^i$ für alle $i \geq i_0$

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} q^i \text{ konvergiert (2.20 a))}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert.}$$

$$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } i$$

$\Rightarrow |a_i| \geq 1$ für unendlich viele i

$\Rightarrow (a_i)$ sind keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i$ divergiert.

b) Sei $i \geq i_0$.

$$\left| \frac{a_i}{a_{i_0}} \right| = \left| \frac{a_i}{a_{i-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{i_0+1}}{a_{i_0}} \right| \leq q \cdot q \cdot \dots \leq q^{i-i_0} = \frac{q^i}{q^{i_0}}$$

↑ Voraussetzung:

jeder dieser Quotienten ist $\leq q$

$$|a_i| \leq \underbrace{\frac{|a_{i_0}|}{q^{i_0}}}_{=:c} \cdot q^i \quad \sum_{i=i_0}^{\infty} c \cdot q^i \text{ konvergent}$$

$\Rightarrow \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

2.22

$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert

□

2.27 Bemerkung

a) Es reicht *nicht* in 2.26 nur vorauszusetzen, dass $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für alle $i \geq i_0$

bzw. $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$ für alle $i \geq i_0$.

z.B. harmonische Reihen: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert.

Aber: $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} > 1$ für alle i .

$\frac{i}{i+1} < 1$ für alle i

b) Es gibt Beispiele von absolut konvergenten Reihen mit $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|$ für unendlich viele i .

2.28 Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ absolut ($0^0 = 1, 0! = 1$):

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i} \right| = \left| \frac{x}{i+1} \right| = \frac{|x|}{i+1} \text{ Wähle } i_0, \text{ so dass } i_0 + 1 > 2 \cdot |x|$$

Für alle $i \geq i_0$:

$$\frac{|x|}{(i+1)} \leq \frac{|x|}{(i_0+1)} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q.$$

2.29 Bemerkung

Gegeben seien zwei endliche Summen

$$\sum_{n=0}^k a_n, \sum_{n=0}^l b_n.$$

$$\left(\sum_{n=0}^k a_n \right) \left(\sum_{n=0}^l b_n \right) \quad (\star)$$

Distributivgesetz: Multipliziere a_i mit jedem b_i und addiere diese Produkte.

$$(\star) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Indexsumme 0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Indexsumme 2}} + \dots + \underbrace{a_k b_l}_{\text{Indexsumme k+l}}$$

2.30 Definition

Seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ unendliche Reihen.

Das *Cauchy-Produkt* (*Faltungsprodukt*) der beiden Reihen ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i \cdot b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

2.31 Satz

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit Grenzwert c, d , so ist das Cauchy Produkt auch absolut konvergent mit Grenzwert $c \cdot d$. Beweis: [1]

3 Potenzreihen

3.1 Definition

Sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge, $a \in \mathbb{R}$

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$ eine *Potenzreihe* (mit *Entwicklungspunkt* a) Speziell: $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

(Potenzreihe im engeren Sinne)

Hauptfolge: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konv. die Potenzreihe (absolut)?

Suche für $x = a$

Dann Grenzwert b_0 (da $0^0 = 1$)

Ob Potenzreihe für andere x konvergiert, hängt von b_n ab!

3.2 Beispiel

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($b_n = 1$ für alle n)
geometrische Reihe, konvergiert für alle $x \in]-1, 1[$
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$ ($b_n = 2^n$) = $\sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$ konvergiert genau dann nach a), wenn $|2x| < 1$, d.h. $|x| < \frac{1}{2}$ d.h. $x \in]-0.5, 0.5[$
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($b_n = \frac{1}{n!}$)
konvergiert für alle x , $x \in]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

3.3 Satz

Sei $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ eine Potenzreihe (um 0). Dann gibt es $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $R \geq 0$, so dass gilt.

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < R$ konvergiert Potenzreihe absolut (d.h. $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert, dann auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$)
Falls $R = \infty$, so heißt das, dass Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$) (Für $|x| = R$ lassen sich keine allgemeine Aussagen treffen).
 R heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

Abbildung 11: Konvergenzradien und ihre Aussagen



Konvergenzintervall $< -R, R >$

besteht aus allen x für die $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert.

$<$ kann [oder] bedeuten.

$>$ kann] oder [bedeuten.

Beweis. $|x_1, x_2| \in \mathbb{R}, |x_1| \leq |x_2|$

Dann: Falls $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ konvergiert, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$ (2.22) (\star)

Falls $\sum b_n \cdot x_n$ für alle x absolut konvergiert, so setze $R = \infty$

Wenn nicht, so setze $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n| \text{ konvergiert}\} < \infty$ Nach (\star) gilt:

$|x| < R \Rightarrow \sum b_n x^n$ konvergiert absolut.

Für $|x| > R$ konvergiert $\sum b_n x^n$ nicht absolut.

Sie konvergiert sogar selbst nicht.

$$\sqrt[n]{|b_n| \cdot |x|^n} \leq q < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

$$\uparrow \text{ (setze } \varepsilon = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} > 0)$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : s - \frac{\varepsilon}{2} < |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq s + \frac{\varepsilon}{2} =: q < 1$$

□

3.4 Bemerkung

Konvergenz von Potenzreihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$:

gleichen Konvergenzradius R wie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

konvergiert absolut für $|x-a| < R$, d.h. $x \in]a-R, a+R[$ Divergiert für $|x-a| > R$.

Keine Aussage für $|x-a| = R$, d.h. $x = a-R$ oder $x = a+R$

Konvergenzintervall $< a-R, a+R >$

3.5 Die Exponentialreihe

a) Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (b_n = \frac{1}{n!})$$

2.28 Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setze für $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Exponentialfunktion $\exp(0) = \frac{0^n}{0!} = 1$

b) Serien $x, y \in \mathbb{R}$

$\exp(x) \cdot \exp(y) \stackrel{2.31}{=} \text{Limes des Cauchy Produkts der beiden Reihen.}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot x^i \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = \exp(x+y)$$

$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$

Daraus folgt: $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad (\star)$$

Für alle $x \geq 0 : \exp(x) > 0$. Dann auch wegen (\star)

$$\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

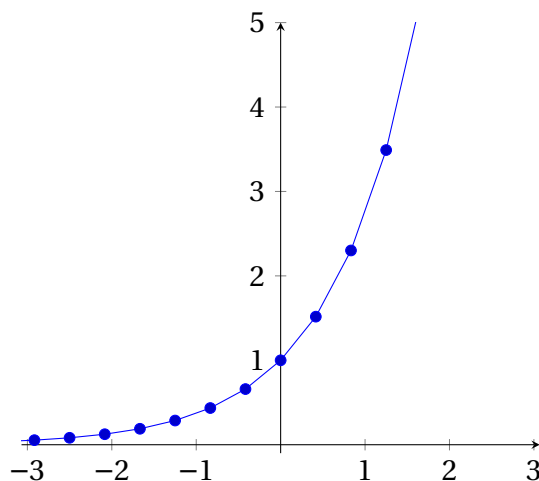


Abbildung 12: Die Exponentialreihe

c) $\exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$

Euler'sche Zahl

Approximation e durch $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$

| | | |
|---------------|-----------------------------------|-------------------|
| $m = 2$ | $1 + 1 + \frac{1}{2}$ | $= 2,5$ |
| $m = 3$ | $2,5 + \frac{1}{6}$ | $= 2, \bar{6}$ |
| $\dots m = 6$ | $\frac{326}{126} + \frac{1}{720}$ | $= 2,7180\bar{5}$ |

Es ist: $e \approx 2,71828\dots$ (irrationale Zahl)

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ konvergiert schnell

$$m \in \mathbb{N}$$

$$\exp(m) = \exp(\underbrace{1 + \dots + 1}_{\leftarrow m \rightarrow})$$

$$\exp(1)^m = e^m$$

$$e^0 = 1 \quad \exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = e^{-m}$$

$n \neq 0, n \in \mathbb{N}$:

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}^n\right)$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = + \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}.$$

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ stimmt $\exp(x)$ mit der 'normalen' Potenz e^x überein.

Dann definiert man für beliebige $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x := \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

In kürze: Definition a^x für $a > 0, x \in \mathbb{R}$

- d) Bei komplexen Zahlen kam e^{it} ($i^2 = -1, t \in \mathbb{R}$) vor als Abkürzung für $\cos(t) + i \sin(t)$

Tatsächlich kann auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ definieren $e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Dabei: Konvergenz von Folgen/Reihen in \mathbb{C} wie in \mathbb{R} mit komplexem Absolutbetrag.

Man kann dann zeigen:

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Dass tatsächlich dann gilt:

$$e^{it} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + i \sin(t). \text{ zeigen wir später}$$

2.718...) Man kann zeigen.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Bedeutung:

- Angelegtes Guthaben G wird in einem Jahr mit 100% verzinst. Guthaben am Ende eines Jahres $2G (= G(1 + 1))$

- Angelegtes Geld wird jedes halbe Jahr mit 50% verzinst. Am Ende eines Jahres (mit Zinsenzinsen)

$$G\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2,25G$$

n - mal pro Jahr mit $\frac{100}{n}\%$ verzinsen. Am Ende des Jahres $G\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot G \approx 2.718 \dots \cdot G \text{ (stetige Verzinsung)}$$

$$a\% \text{ statt } 100\% \cdot G e^{\frac{a}{100}}$$

4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

4.1 Definition

Reelle Funktionen f in einer Variable ist Abbildung

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ (D = Definitionsbereich).

Typisch: $D = \mathbb{R}$, Intervall, Verschachtelung von Intervallen

4.2 Beispiel

a) *Polynomfunktionen* (ganzrationale Funktion, Polynome)

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow a_n \cdot x^n + \dots a_1 x + a_0 \\ f(x) = a_n \cdot x^n + \dots a_1 \cdot x + q \end{cases}$$

$a_n \neq 0 : n = \text{Grad}(f)$ $f = 0$ (Nullfunktion), $\text{Grad}(f) = \infty$

Grad 0: konstante Funktionen $\neq 0$

Graph von f :

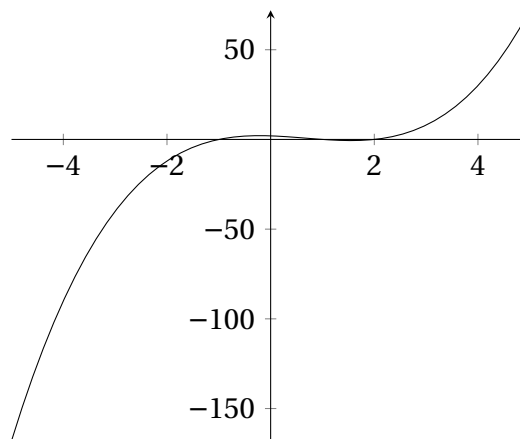


Abbildung 13: $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ für alle $x \in D$

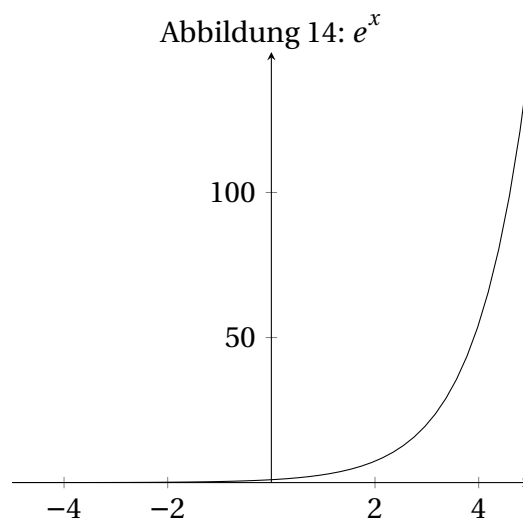
Summe: Differenz, Produkt von f und g .

Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so *Quotient*. $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$,
 Quotient von Polynomen = (gebrochen-)rationalen Funktionen
 $|f|(x) := |f(x)|$ Betrag von f .

c) Potenzreihe definiert Funktion auf ihrem Konvergenzintervall.

$$\text{z.B.: } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fkt. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



d) Hintereinanderausführung von Funktionen:

$f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}, g: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(D_1) \subseteq D_2$, dann $g \circ f$:

$$\begin{cases} D_1 \Rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow g(f(x)) \end{cases}$$

e) $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = e^{x^2 + 1}$$

f) *Trigonometrische Funktionen: Sinus- und Cosinusfunktion (vgl. \mathbb{C})*

$0 \leq x \leq 2\pi$ x = Bogenmaß von φ in Grad, so $x = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi$

$\sin(x) = s, \cos(x) = c$ Für beliebig $x \in \mathbb{R}$:

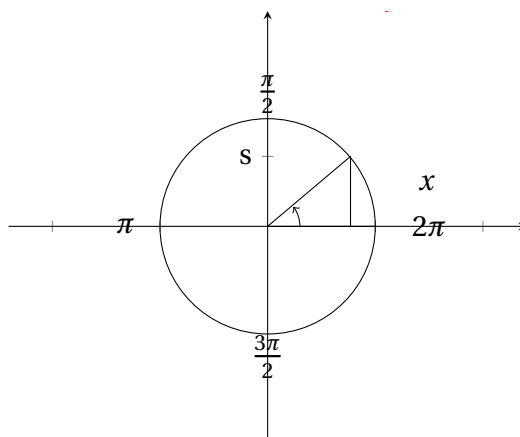


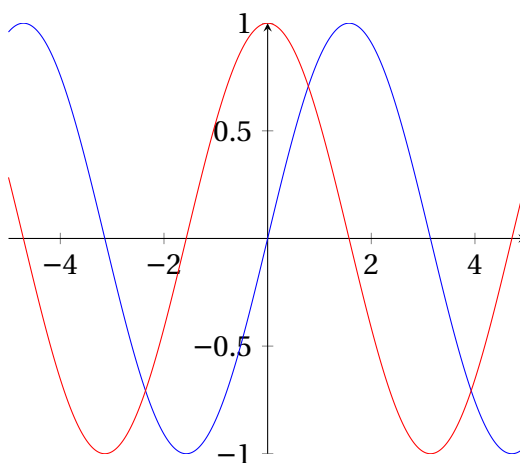
Abbildung 15: Bogenmaß

Periodische Fortsetzung, d.h. $x \in \mathbb{R}. x = x' + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}, x' \in [0, 2\pi[$

$$\sin(x) := \sin(x')$$

$$\cos(x) := \cos(x')$$

$$|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$$

Abbildung 16: $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

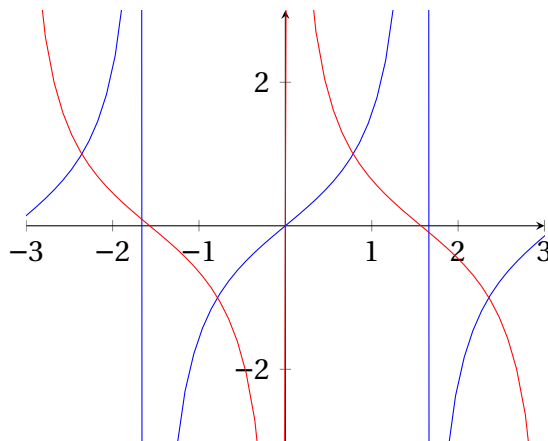
$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Tangens und Cotangensfunktion

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \cos(x) \neq 0$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \sin(x) \neq 0$$

Abbildung 17: $\tan(x)$ and $\cot(x)$

4.3 Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ heißt *Adharenzpunkt* von D , falls es eine Folge $(a_n)_n$, $a_n \in D$, mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \text{ gibt.}$$

\bar{D} = Menge der Adharenzpunkte von D

= *Abschluss* von D

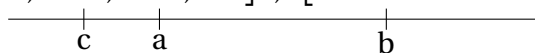
klar: $D \subset \bar{D}$.

$d \in D$. konstante Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = d$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d = d$.

Also: $d \in \bar{D}$.

4.4 Beispiel:

a) $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$, $D =]a, b[$



$$\bar{D} = [a, b] \quad D \in \bar{D}$$

$$a \in \bar{D}$$

$$a_n = a + \frac{b-a}{n} \in D, n \geq 2$$

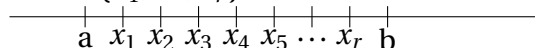
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Also $[a, b] \subset \bar{D}$.

Ist $c \in [a, b]$, etwa $c < a$, dann ist $|a_n - c| \geq a - c > 0$ für alle $a_n \in]a, b[$. Also: $\lim_{a_n} \neq c$

b) \mathcal{J} Intervall in \mathbb{R} , $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{J}$,

$$D = \mathcal{J} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$$



$$\bar{D} = \bar{\mathcal{J}} = [a, b],$$

falls $\mathcal{J} =]a, b[$.

c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

4.5 Definition

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \bar{D}$.

$d \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert von $f(x)$ für x gegen c* , $d = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, wenn für jede Folge $(a_n) \in D$, die gegen c konvergiert, die Bildfolge $(f(a_n))_n$ gegen d konvergiert.

Bemerkung

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow$ Für alle Folgen (a_n) , $a_n \in D$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$. Wenn man zeigen will, dass $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ nicht existiert, gibt es 2 Möglichkeiten:

- Suche eine bestimmte Folge (a_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ nicht existiert.
- Suche zwei Folgen $(a_n), (b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$f(a_n) = (101010\dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \text{ existiert nicht.}$$

Oder:

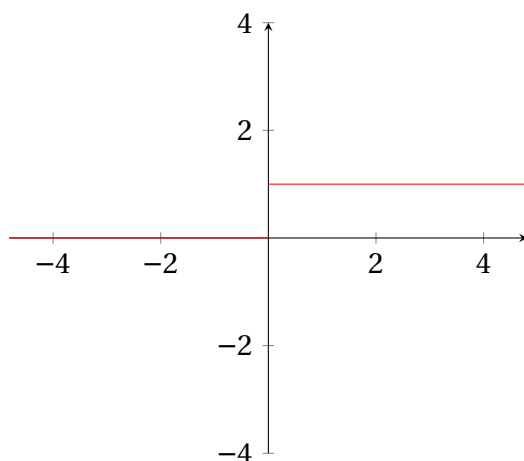


Abbildung 18: Abschnittsweise definierte Funktion

$$a_n = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\text{Aber: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(b_n)$$

4.6 Beispiel:

a) Sei $f(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$, eine Polynomfunktion, $c \in \mathbb{R}$. Sei (a_n) Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0 \\ &= b_k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k + b_{k-1} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{k-1} + \dots + b_0 \quad \text{Rechenregeln für Folgen, 2.8} \\ &= b_k \cdot c^k + b_{k-1} \cdot c^{k-1} + \dots + b_1 \cdot c + b_0 = f(c). \end{aligned}$$

b) Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

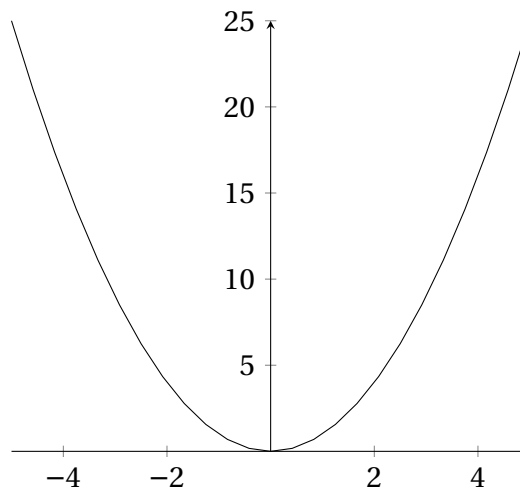
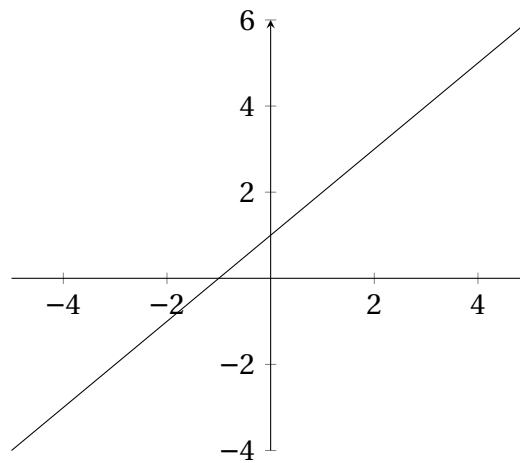
$$\text{Auf } D \text{ ist } f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1) \quad \bar{D} = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$\text{Sei } (a_n) \text{ Folge mit } D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$f(a_n) = a_n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = 1 + 1 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} = 2.$$

Abbildung 19: x^2 Abbildung 20: $x+1$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) ?$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$a_n = -\frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

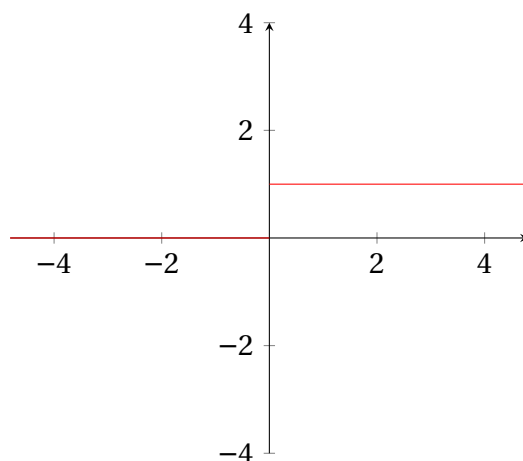
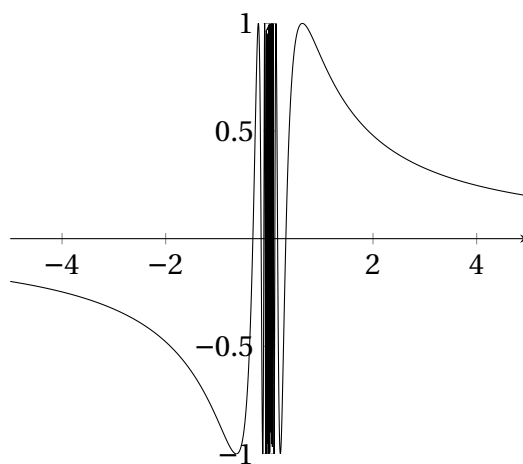


Abbildung 21: Abschnittsweise definierte Funktion

$\lim_{x \rightarrow 0}$ existiert nicht.

d) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_n = \frac{1}{n\pi}$, $f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$

Abbildung 22: $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$a'_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2}\pi)} \rightarrow 0, f(a'_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lim(a_n) = 0$$

$$\lim(f(a_n)) = \lim 0 = 0 \quad \lim(f(a'_n)) = \lim 1 = 1$$

$\lim(f(x))_{x \rightarrow 0}$ existiert nicht

e) $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ dann:

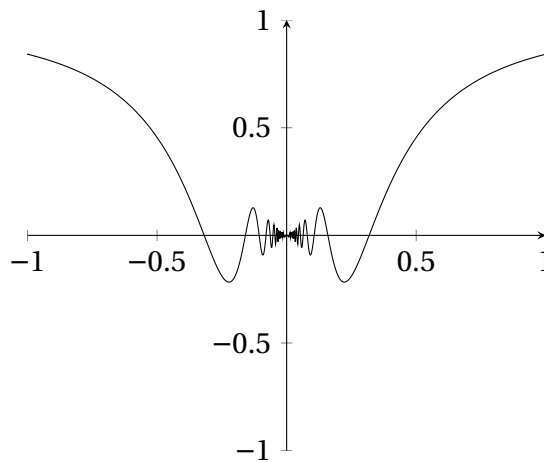


Abbildung 23: $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

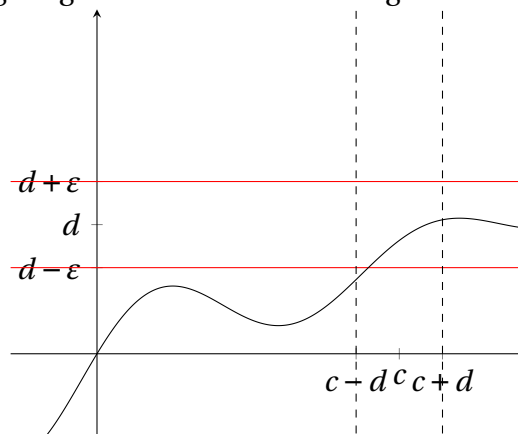
$$(a_n) \rightarrow 0, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin(\frac{1}{a_n}) = 0 \quad (2.8g)$$

4.7 Satz $(\varepsilon - \delta)$ -Kriterium

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \bar{D}$. Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \rightarrow |f(x) - d| \leq \varepsilon$

Abbildung 24: geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums



Beweis. \rightarrow : Angenommen falsch.

Dass heißt $\exists \varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ (z.B. $\delta = \frac{1}{n}$) ein $x_n \in D$ existiert mit $|x_n - c| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - d| > \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Aber:

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq d$

\Leftarrow : Sei (a_n) Folge, $a_n \in D$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall n \geq n(\varepsilon) : |f(a_n) - d| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, ex. $d > 0$:

(★)

Für alle $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$ gilt $|f(x) - d| < \varepsilon$.

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, existiert n_0 mit $|a_n - c| \leq \delta$ für alle $n \geq n_0$

Nach (★) gilt: $|f(a_n) - d| < \varepsilon \forall n \geq n_0$. ✓

□

4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

$f, g, D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$, Existieren die Grenzwerte auf der rechten Seite der folgenden Gleichungen, so auch die auf der linken (und es gilt Gleichheit)

a) $\lim_{x \rightarrow c} (f \pm / \cdot g) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm / \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.

b) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$, so

$$\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

c) $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow c} f(x)|$

Beweis. Folgt aus den entsprechenden Regeln für Folgen.

□

4.9 Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + 1}, D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{4 + 6 + 1}{8 + 1} = \frac{11}{9}$$

4.6a)

4.10 Bemerkung

Rechts- und linksseitige Grenzwerte:

Rechtsseitiger Grenzwert:

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = d \Rightarrow \forall (a_n)_n, a_n \in D, a_n \geq c$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$. Analog:

linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$

($a_n \leq c$).

4.11 Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, c = 0 \in \bar{D}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht.

Falls $\lim_{x \rightarrow c^+}$ und $\lim_{x \rightarrow c^-}$ existieren

$$\text{und } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$$

so existiert $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$. Grenzwert: $d \in \mathbb{R}$

4.12 Definition

$$D = \langle b, \infty[, f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{z.B. } D = \mathbb{R})$$

f konvergiert gegen $d \in \mathbb{R}$ für x gegen unendlich,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = d$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x \geq M : |f(x) - d| < \varepsilon.$$

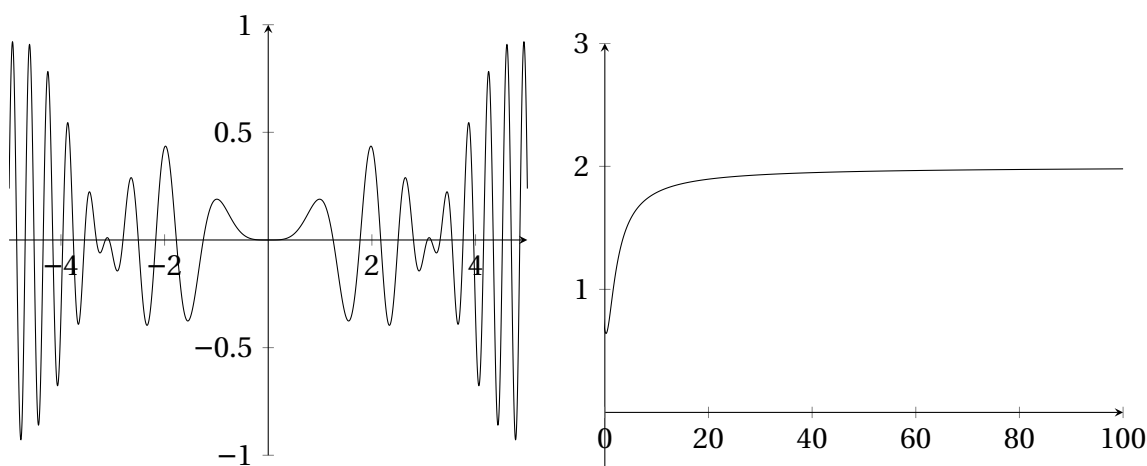


Abbildung 25: Grenzwerte gegen einen Festen Wert

(Analog: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d$)

4.13 Beispiel

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $x \geq M$:

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

b) Allgemein gilt:

P, Q Polynome vom Grad k bzw. $l \geq k$

$$P(x) = a_k \cdot x^k + \dots, Q(x) = b_l \cdot x^l + \dots, a_k \neq 0, b_l \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l > k \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{für } l = k \end{cases}$$

(Beweis wie für Folgen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 205x^3 + x^2 + 17}{14x^5 + 0,5} = \frac{1}{2}$$

4.14 Bemerkung

Die Rechenregeln aus 4.8 gelten auch für $x \rightarrow \infty / -\infty$

4.15 Definition

a) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$

f geht gegen ∞ für x gegen c ,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \text{ falls gilt:}$$

$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq L.$$

$=\delta(L)$

b) $c < b, \infty \in \bar{D}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, f$ geht gegen ∞ , für x gegen ∞ : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$,
falls gilt:

$$\forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D, x \geq M, f(x) \geq L.$$

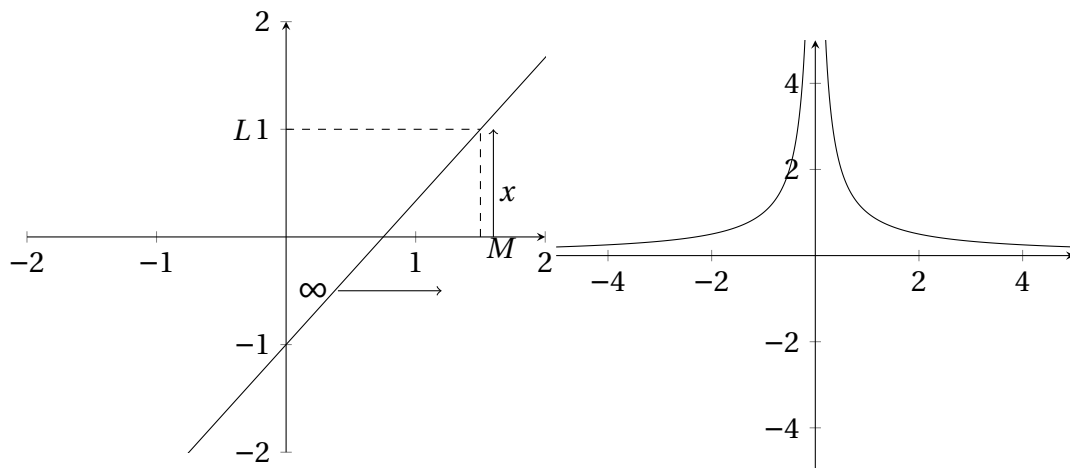
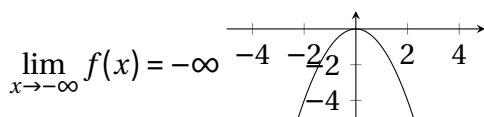


Abbildung 26: Funktionen $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$

(Entsprechend: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$)

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

**4.16 Satz**

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

a) Sei $c \in \bar{D}$, oder $c = \infty, -\infty$

falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ oder $-\infty$, so ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = 0$.

b) $c \in \bar{D} \subset \mathbb{R}$.

Falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ und falls $s > 0$

existiert mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [c - s, c + s]$, ($f(x) < 0$)

dann ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty (-\infty)$

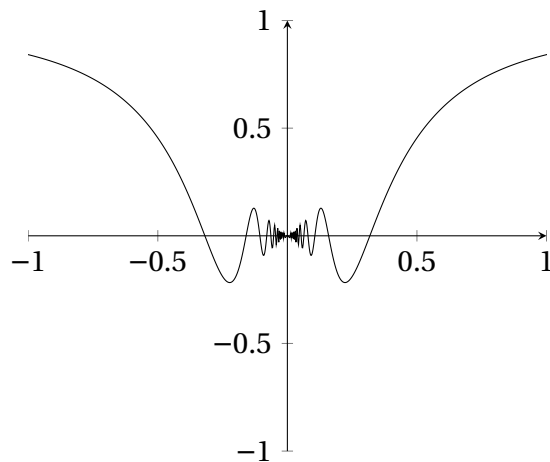


Abbildung 27: $\sin(\frac{1}{x})$

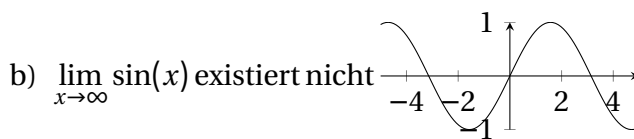
c) Falls $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ und falls $T > 0$ existiert mit $f(x) > 0$ für alle $x \geq T$, so ($f(x) < 0$)

ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty (-\infty)$

(Entsprechend für $\lim_{x \rightarrow -\infty}$)

4.17 Beispiel

- a) • $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]-\infty, 0[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$



- c) $P(x) = ak_x^k + \dots + a_0.$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \text{ k gerade oder } a_k < 0 \text{ k ungerade} \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \text{ k gerade oder } a_k > 0 \text{ k ungerade} \end{cases}$$

- d) $P(x)$ wie in c)
 $Q(x) = b_l^l + \dots + b_0$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ gleiche Vorzeichen} \\ -\infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ verschiedene Vorzeichen} \end{cases}$$

- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \forall L > 0 \exists M \forall x \geq M: f(x) \geq L$

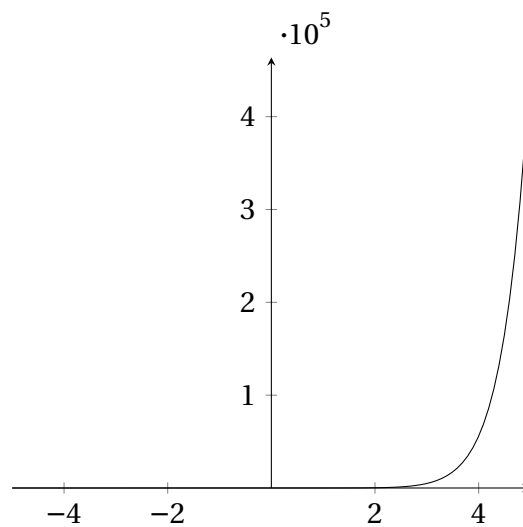
Sei $L \geq 0, x > 0.$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$$

Ist $x \geq (n+1)!L =: M$, so ist $\frac{e^x}{x^n} > L.$

- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$ Folgt aus e) und 4.16a)

Abbildung 28: $\frac{e^x}{x^n}$

5 Stetigkeit

5.1 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) f ist *stetig* an $c \in D$, falls $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.
- b) f heißt (absolut) stetig, falls f an allen $c \in D$ stetig ist.

5.2 Satz

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D$.

Existiert Konstante $\mathbf{K} > 0$ mit $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c|$ für alle $x \in D$, dann ist f stetig in c .

Beweis.

Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbf{K}}$. Ist $|x - c| \leq \delta$, so ist $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c| \leq \mathbf{K} \cdot \delta = \varepsilon$.

4.7 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

□

5.3 Beispiel

a) Polynome sind auf ganz \mathbb{R} stetig

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

f ist nicht stetig in 0.

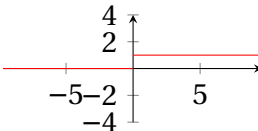
$$a_n = \frac{1}{n}, a_n \rightarrow 0$$

$$f(a_n) = 0$$

$$(f(f(a_n))) \rightarrow 0 \neq f(0)$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

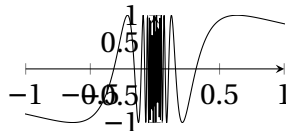
f ist nicht stetig in 0.



$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ ex. nicht.

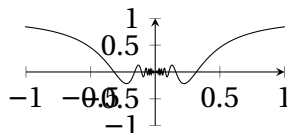
f ist nicht stetig in 0.



$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$$

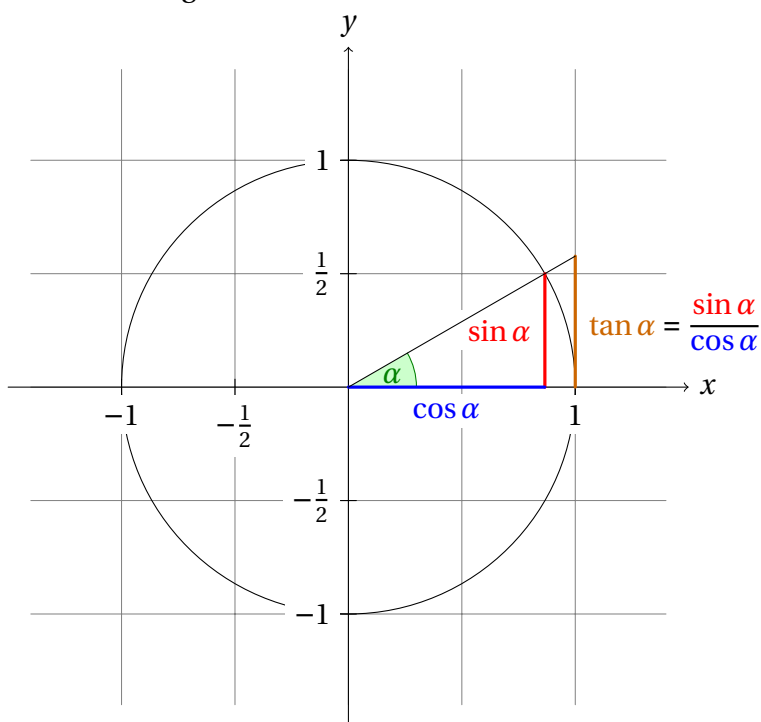
f ist stetig in 0.



$$\text{f) } f(x) = \sin(x)$$

$g(x) = \cos(x)$ Sind stetig auf \mathbb{R} : Für alle $x, c \in \mathbb{R}$ gilt:

Abbildung 29: Sinus und Cosinus am Einheitskreis



$$|\sin(x) - \sin(c)| \leq |x - c|.$$

$\sin(x)$ ist stetig auf \mathbb{R} (5.2, $\mathbf{K}=1$)

5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit)

$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D,$

sind f und g stetig in c , dann auch $f \pm \cdot$ und $|f|$. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in c .

Beweis. Folgt aus 4.8

□

5.5 Satz

$D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R},$

$g : D' \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'.$

Ist f stetig in $c \in D$ und ist g stetig in $f(c) \in D'$, so ist $g \circ f$ stetig in c ,

Beweis. $(a_n) \rightarrow c, a_n \in D$.

f stetig: $f(a_n) \rightarrow f(c)$

g stetig in $f(c)$: $(g \circ f)(a_n) \rightarrow (g \circ f)(c)$

□

5.6 Beispiel

a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{|x^2-1|}\right), D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. f ist stetig auf D . Folgt aus 5.3_{a),f)} und 5.4,5.5.

b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$
 stetig auf \mathbb{R} , 5.3e) für $c = 0$ für $c \neq 0$. 5.3,5.4,5.5

c) $f(x) = \tan(x) (= \frac{\sin(x)}{\cos(x)})$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ f stetig auf D

5.7 Satz

Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann ist f stetig $m]a - R[=: D$

$c \in D \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i = f(c)$$

5.8 Korollar

$f(x) = \exp(x) = e^x$ ist stetig auf \mathbb{R}

5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $[u, v] \subseteq D$, $u < v$

Es gelte $f(u) \cdot f(v) < 0$

(d.h. $f(u) > 0, f(v) < 0$, oder $f(u) < 0, f(v) > 0$) Dann existiert $w \in]u, v[$ mit $f(w) = 0$

Beweis. O.B.d.A., $f(u) < 0 < f(v)$.

Bijektionsverfahren:



Falls $f(u) < 0$, so $a = u$, sonst $a = v$. Liefert Folgen $(a_n), (b_n)$ und eindeutig bestimmte $w \in [u, v]$ mit $a_n \leq a_{n+1} \leq w \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle n

$f(a_n) < 0$

$f(b_n) \geq 0$

für alle n . $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = w$ f ist stetig in $w \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(w) = 0$.

$f(a_n) < 0 \forall n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$.

$f(b_n) \geq 0 \forall n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$.

$\Rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(w)$. □

5.10 Korollar (Zwischenwertsatz)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $[u, v] \subseteq D$

Dann nimmt f in $[u, v]$ jeden Wert zwischen $f(u)$ und $f(v)$ an (und evtl. weitere)

Beweis. O.B.d.A. $f(u) < f(v)$

Sei $f(u) < b < f(v)$ beliebig, aber dann fest.

Definiere $g(x) = f(x) - b$ stetig

$g(u) = f(u) - b < 0$

$g(v) = f(v) - b > 0$

5.9 (angewandt auf g): Ex. $w \in]u, v[$ mit $g(w) = 0$, d.h. $f(w) = b$. □

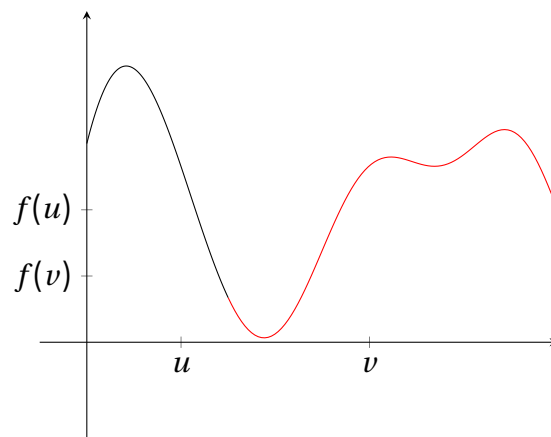


Abbildung 30: Zwischenwerte

5.11 Satz (Min-Max-Theorem)

$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

(Wichtig: *abgeschlossenes* Intervall)

Dann hat f ein Maximum und ein Minimum auf $[a, b]$, d.h es existieren

$x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit $f(x_{\max}) \leq f(x) \leq f(x_{\min})$ für alle $x \in [a, b]$ (Beweis mit Bisektionsverfahren, [4])

Zur Erinnerung

$f : D \rightarrow D'$ bijektiv, dann existiert Umkehrfunktion $f^{-1} : D' \rightarrow D$ mit

$$f \circ f^{-1} = id_{D'}$$
 und

$$f^{-1} \circ f = id_D$$

zum Beispiel $f(x) = x^2$

$$f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

bijektiv

$$f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

$$f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$$

5.12 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton wachsend (oder steigend), falls gilt:

Sind $x, y \in D, x < y$, so ist $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$)

Entsprechend: streng monoton fallend. f heißt (streng) monoton, falls sie entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

5.13 Satz

D Intervall (rechte/linke Grenze) $\infty, -\infty$ möglich), $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: f ist injektiv auf $D \Leftrightarrow f$ ist streng monoton auf D .

Beweis. $\Leftarrow \checkmark$

\Rightarrow : Angenommen f ist nicht streng monoton auf D .

Dann existieren $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D$. mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) < f(x_2)$ und $x_3 < x_4$ und $f(x_3) > f(x_4)$

($f(x_1) = f(x_2)$ bzw. $f(x_3) = f(x_4)$ nicht möglich, da f injektiv) Jetzt muss man Fallunterscheidungen machen.

z.B

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, \quad f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

□

5.14 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

D Intervall, $f : D \rightarrow f(D) =: D'$

eine stetige, streng monotone (also bijektive) Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : D' \rightarrow D$ stetig.

Beweis: [5] f streng monoton wachsend (fallend) $\Rightarrow f^{-1}$ streng monoton wachsend (fallend)

5.15 Korollar

Ist $n \in \mathbb{N} \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$, so

ist $f(x) = x^n$ stetig und bijektiv $\begin{cases} [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[\\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

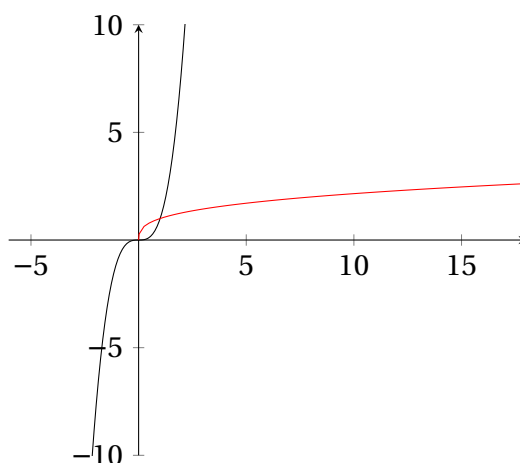


Abbildung 31: Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion $f^{-1} = \sqrt[n]{x}$ ist stetig und bijektiv $\begin{cases} [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[\\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ Nach 5.8 ist $\exp(x)$ stetig auf \mathbb{R} . Nach 3.5b) ist $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$, so ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3!} + \dots \geq 1$, Ist $x > y$ so ist $\exp(y) = \exp(x + (y - x)) \underset{3.5b)}{=} \exp(x) \cdot \underbrace{\exp(y - x)}_{<0} > \exp(x)$

5.16 Satz

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt $\ln(x) :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend und bijektiv.

Es gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$, $\ln(1) = 0$

Beweis. \exp streng monoton steigen s.V,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty \quad (4.17e))$$

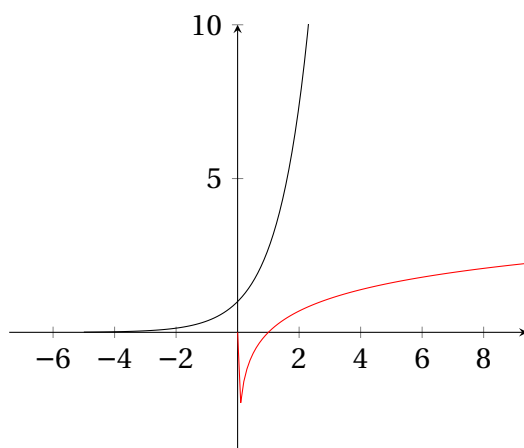
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \quad \text{Also: } \exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[\text{ bijektiv} \quad 4.16$$

$\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, streng monoton wachsend, stetig, bijektiv (5.14).

$x, y > 0. \exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $x = \exp(a)$, $y = \exp(b)$.

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(\exp(a) \cdot \exp(b)) \\ &= \ln(\exp(a + b)) = a + b \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

□

Abbildung 32: $\exp(x)$ und $\ln(x)$ **5.17 Satz**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0 \text{ (für jedes } k \in \mathbb{N})$$

(D.h. $(\ln(n)) \in o(n)$)

Beweis. $x = \exp(y)$, $x \leq 1$, d.h. $y \leq 0$.

$$\frac{\ln(x)}{x^k} = \frac{y}{(\exp(y))^k} \leq \frac{y}{\exp(y)} \rightarrow 0 \text{ (17e)}$$

□

5.18 Definition

Für $a > 0$ setze $a^x = \exp(x \cdot \ln(a)) \underbrace{(\exp(\ln(a)))}_0 a \leq e : e^x = \exp(x), a^x$, falls $a > 0$

5.19 Satz

Sei $a > 0$

a) $a^x : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend für alle $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

b) $a^x, a^y = a^{x+y}$
 $(a^{x^y} = a^{x^y})$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

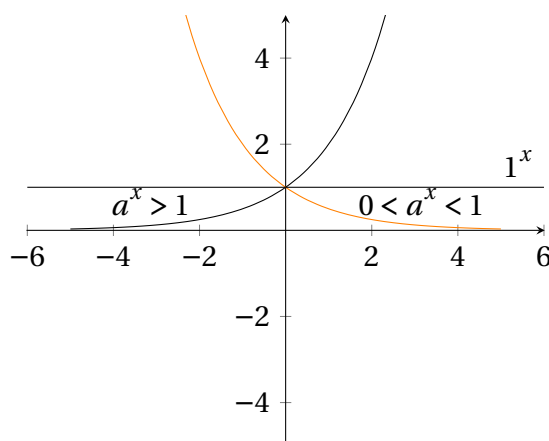


Abbildung 33: Verschiedene Arten Exponentialfunktionen

- c) Für $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} (p \in \mathbb{Z}, q > 0)$ stimmt Def. von a^x entsprechend 5.18 mit der üblichen Definition $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ überein.

Beweis. Folgt aus Definition mit 3.5

□

5.20 Bemerkung

Ist $x \in \mathbb{R}$ und (x_n) Folge mit $x_n \in \mathbb{Q}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$,

so $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x$

(Stetigkeit)

D.h. a^x lässt sich durch a^{x_n} , $x_n \in \mathbb{Q}$, beliebig gut approximieren

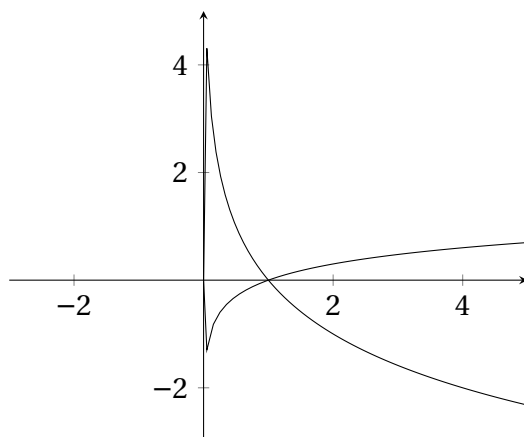
5.21 Definition

Für $a > 0$, $a \neq 1$, heißt die Umkehrfunktion von a^x *Logarithmus zur Basis a*

$\log_a(x)$

($a = 2$, $a = e$, $a = 10$ wichtig)

$\log_e(x) = \ln(x)$

Abbildung 34: Logarithmen mit Basen > 1 und < 1 **5.22 Satz**

Seien $a, b > 0, a \neq 1 \neq b, x, y > 0$

- (a) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- (b) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$
- (c) $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$
- (d) Sind $a, b > 1$, so $O(\log_a(n)) = O(\log_b(n))$

Beweis. a) wie 5.10

$$\text{b) } a^{y \cdot \log_a(x)} \stackrel{5.19b)}{=} (a^{\log_a(x)})^y = x^y$$

$$\Rightarrow \log_a(x^y) = \log_a(a^{y \cdot \log_a(x)}) = y \cdot \log_a(x)$$

$$\text{c) } \log_a(x) = \log_a(b^{\log_a(x)}) \stackrel{b)}{=} \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

d) Folgt aus c), da $\log_a(b) > 0$

□

6 Differenzierbare Funktionen

Sekante durch $(c, f(c)), (x, f(x))$

Steigung der Sekante:

$$x \neq c : \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\text{Differenzenquotient}} = s(x) \text{ definiert auf } \mathbb{R} \setminus \{c\}$$

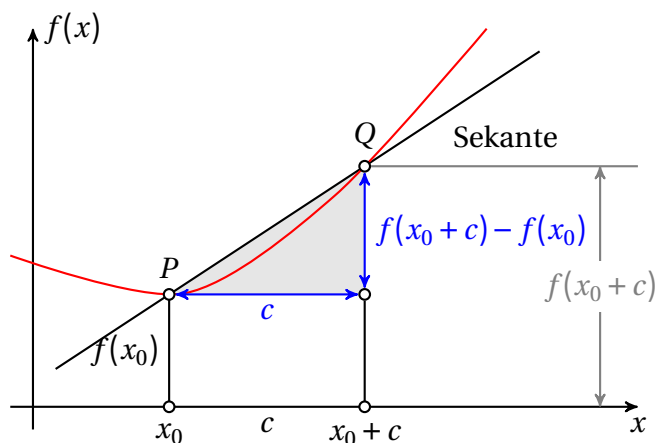


Abbildung 35: Steigung am Steigungsdreieck

Falls $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existiert: Steigung der Tangente an Graph von f in $(c, f(c))$
 (Änderungsrate von f in $(c, f(c))$)

6.1 Definition

\mathcal{J} Intervall, $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathcal{J}$

- a) f heißt *differenzierbar* (diffbar) an der Stelle c , falls $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existiert.
 Grenzwert heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f an der Stelle c .

$$f'(c) = \left(\frac{df}{dx}(c) \right) \quad \left[f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, h := x - c \right]$$

- b) f heißt *differenzierbar* auf \mathcal{J} , falls f in jedem Punkt von \mathcal{J} differenzierbar ist.

$$f': \begin{cases} \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

6.2 Beispiel

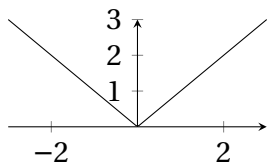
- a) $f(x) = a \cdot x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$x \neq c: \frac{ax^n - ac^n}{x - c} = \frac{a(x-c)(x^{n-1} \dots)}{x - c}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{ax^n - ac^n}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} a(x-c)(x^{n-1} \dots) = \frac{a(x-c)(x^{n-1} \dots)}{x - c} = a \cdot n \cdot c^{n-1} = f'(x).$$

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \text{ Gilt auch für } n = 0. (f \text{ konstant auf } f' = 0)$$

b) $f(x) = |x|$

 f ist diffbar in 0?Zu zeigen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$ existiert nicht.Sei (a_n) Folge, $a_n < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (z.B. $a_n = -\frac{1}{n}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{a_n} = -1$$

 $b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (z.B. $b_n = \frac{1}{n}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_n} = 1$$

 $f'(0)$ existiert nicht!

6.3 Satz

 $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ in $c \in \mathcal{I}$ diffbar. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{I}$:

$$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + \mathcal{R}(x) \cdot (x - c),$$

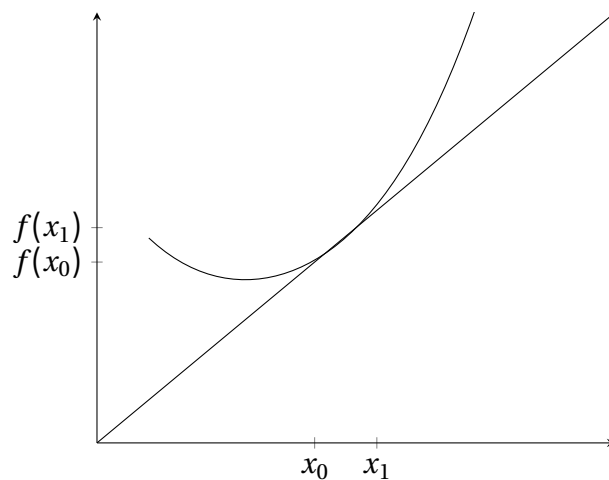
wobei $\mathcal{R} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in c , $\lim_{x \rightarrow c} \mathcal{R}(x) = 0$ D.h.: f lässt sich in der Nähe von c sehr gut durch eine lineare Funktion (d.h. Graph

Abbildung 36: Sekante an Funktion

ist Gerade) approximieren.

6.4 Korollar

$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $c \Rightarrow f$ ist steig in c . Beweis folgt aus 6.3

Beachte: Umkehrung von 6.4 gilt im Allgemeinen nicht. 6.2b).

Diffbare Funktionen sind stetig, aber sie haben keine Knicke im Graphen.

6.5 Satz (Ableitungsregeln)

\mathcal{I} Intervall, $c \in \mathcal{I}$. Für a)-c)

seien $f, g: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in c

a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so $\alpha f + \beta g$ diffbar in c ,

$$(\alpha f + \beta g)'(c) = \alpha \cdot f'(c) + \beta \cdot g'(c)$$

b) (Produktregel) $f \cdot g$ diffbar in c ,

$$(f \cdot g)'(c) = f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c)$$

c) (Quotientenregel) Ist $g(x) \neq 0$ auf \mathcal{I} , so

$$\frac{f'}{g}(c) = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g(c)^2}$$

d) (Kettenregel) \mathcal{I}_1 Intervall, $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}_1$, diffbar in c , $g: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $f(c)$, so $g \circ f$ diffbar in c , und

$$(g \circ f)' = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

Beweis. Nur b):

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)(g(x) - g(c)) + g(c)(f(x) - f(c))}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} +$$

$$g(c) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \stackrel{6.4}{=} f(c)g'(c) + g(c)f'(c).$$

□

6.6 Beispiel

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \\ f'(x) &\stackrel{6.5a)}{=} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \\ &\stackrel{6.2a)}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \mathcal{D} &=]0, \infty[\\ f'(x) &\stackrel{6.2a)}{=} \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = (-n) \cdot x^{-n-1} \text{ gilt auch auf }]-\infty, 0[\\ &\stackrel{6.5c)}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h(x) &= (x^2 + x + 1)^2 \\ (6.5d): f(x) &= x^2 + x + 1 \\ g(x) &= x^2 \\ h'(x) &= 2 \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1) \end{aligned}$$

6.7 Satz

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Beweis.

$$\text{a) Elementargeometrisch + Additionstheoreme 1.7 (Man zeigt: } \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \text{ für } 0 < x < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{b) } \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{(1 - \cos(x))}{x(1 + \cos(x))} = \frac{1 - \cos(x)}{x(1 + \cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \rightarrow 0$$

□

6.8 Satz

- a) $f(x) = \sin(x)$, so $f'(x) = \cos(x)$
 b) $f(x) = \cos(x)$, so $f'(x) = -\sin(x)$
 c) $f(x) = \tan(x)$, so $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Beweis. a), $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h+c) - \sin(c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(c) \cdot \cos(h) + \cos(c) \cdot \sin(h) - \sin(c)}{h} \\ &= \frac{\sin(c) \cdot \cos(h) - \sin(c)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(c) \sin(h)}{h} = \sin(c) \cdot 0 + \cos(c) \cdot 1 = \cos(c) \end{aligned}$$

b) analog
 c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ Quotientenregel + a)b) $\Rightarrow \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

□

6.9 Beispiel

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$
 f ist diffbar für alle $x \neq 0$

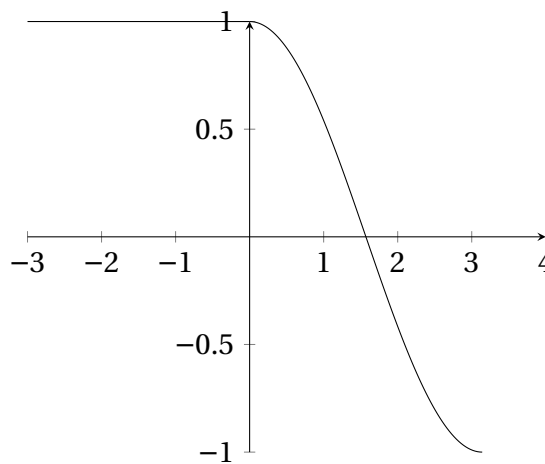


Abbildung 37: Abschnittsweise definierte cosinus Funktion

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x} \stackrel{6.7b)}{=} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 = f'(0)$$

b) $f(x) = \sin^2(x^3) = (\sin(x^3))^2$

$$f'(x) = 2 \cdot \sin(x^3) \cdot (\sin(x^3))' = 6 \cdot \sin(x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot x^2$$

6.10 Satz

Im Inneren ihres Konvergenzintervalls definieren Potenzreihen eine Funktion

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$

eine Potenzreihe um a mit Konvergenzradius $R > 0$.

Dann ist f in $]a-R, a+R[$ diffbar und es gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1} = f'(x)$.

(gliedweise Ableitung)

(Beweis [7])

6.11 Korollar

$$(\exp(x))' = \exp(x)$$

Beweis. $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$k = 1, \dots$$

Behauptung folgt. □

6.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}_1$ bijektiv, $\mathcal{I}, \mathcal{J}_1$ Intervall (linke und rechte Grenze darf nicht $-\infty/\infty$ sein)

Sei f in $c \in \mathcal{I}$ diffbar und $f'(c) \neq 0$.

Dann ist $f': \mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{I}$ in $f(c) \in \mathcal{J}_1$ diffbar, und es gilt: $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$

Ist f überall auf \mathcal{I} diffbar und $f'(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathcal{I}$, so ist f^{-1} auf \mathcal{J}_1 diffbar und es

gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

für alle $x \in \mathcal{I}$.

Beweisidee: f^{-1} diffbar an Stelle $f(c)$, falls $f'(c) \neq 0$. Grund: Graph von f^{-1} = Graph von f gespiegelt an Winkelhalbierende $s(x) = x$.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

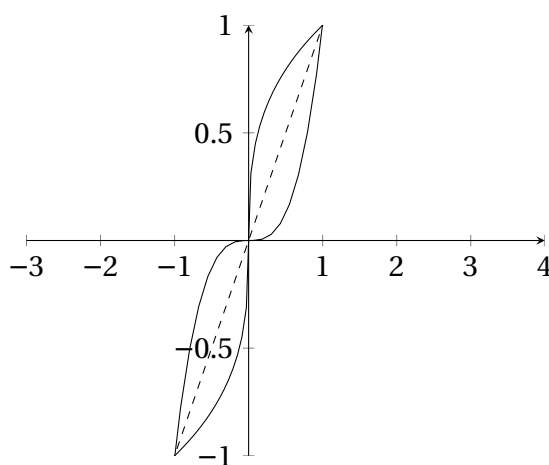


Abbildung 38: Zwei Funktionen an der Winkelhalbierenden

Ableiten mit Kettenregel.

$$f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = 1. \text{ Behauptung folgt.}$$

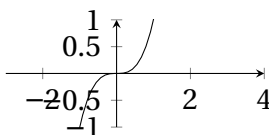
6.13 Bemerkung

Bedingung $f'(c) \neq 0$ in 6.12 ist notwendig.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^3 \end{cases} \quad \text{bijektiv}$$

$$f'(0) = 0.$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$



$$(f'(x) = 3x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

$(f^{-1})'(0)$ existiert nicht. (jedenfalls nicht als reelle Zahl!)

6.14 Satz

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|----------------------------|
| a) a^x ($a \in \mathbb{R}, a > 0$), $x \in \mathbb{R}$ | $\ln(a) \cdot a^x$ |
| b) $\ln(x)$ auf $]0, \infty[$ | $\frac{1}{x}$ |
| c) $\log_{10}(x)$ (konst. $a > 0, a \neq 1$) auf $]0, \infty[$ | $\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$ |
| d) $x \cdot (\ln(x) - 1)$ auf $]0, \infty[$ | $\ln(x)$ |
| e) $x^b \cdot (b \in \mathbb{R})$ auf $]0, \infty[$ | $b \cdot x^{b-1}$ |

Beweis. a)

$$f(x) = \exp(x \cdot \ln(a))$$

$$f'(x) \stackrel{6.12}{=} \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

Kettenregel

$$\text{b) } \ln(x)' \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{\exp'(\ln(x))} \stackrel{6.11}{=} \frac{1}{x}$$

$$\text{c) } \log_a'(x) \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{\ln(a) \cdot a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

□

6.15 Satz (logarithmische Abbildung)

$f : \mathcal{I} \rightarrow]0, \infty[$ diffbar.

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Beweis : Kettenregel und 6.14b)

6.16 Beispiel

$$f(x) = e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^6 \text{ f\"ur } x \neq 0$$

$$\ln(f(x)) = x + \ln(\sin(x) + 2) + 6 \cdot \ln(x)$$

$$\ln(f(x))' = 1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2} + \frac{6}{x}$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2} + \frac{6}{x}\right) \cdot e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^6$$

6.17 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat *lokales Maximum*

6.18 Satz

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Hat f in $c \in D$ lokales Minimum/Maximum, so $f'(c) = 0$

Beweis.

c lokale Max.stelle.

$f'(c)$ existiert nach Voraussetzung.

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0.$$

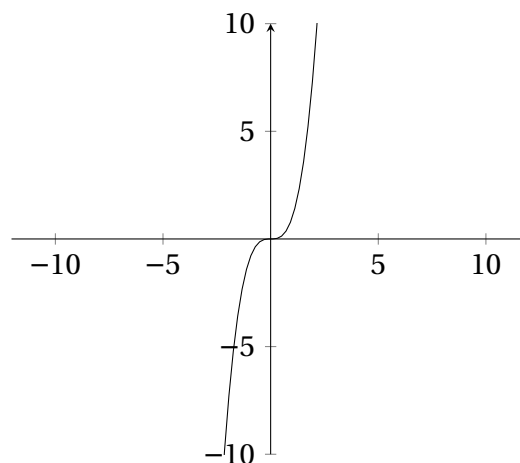
□

Vorsicht: $f'(c) = 0$ ist nicht hinreichend für lokale Maxima/Minima.

$$\text{z.B. } f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$$

f hat kein Maximum oder Minimum in 0

Globale Max/Min von f auf $[a, b]$:



Abbildungung 39: Ableitung keine Hinreichende Bedingung für Minima/Maxima

- Bestimme $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$ Teste, ob lokale Max/Min.

- Teste Intervallgrenzen a und b .

6.19 Satz (Mittelwertsatz)

$\mathcal{I} = [a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf $]a, b[$.

Dann existiert $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Speziell:

$f(a) = f(b) \Rightarrow$

$\exists c \in]a, b[$ mit

$f'(c) = 0$ Satz von

Rolle

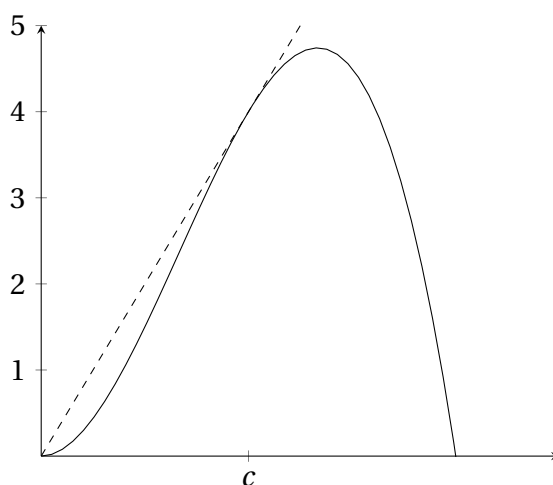


Abbildung 40: Eine Funktion und ihrer Steigung an der Stelle c

Beweis. Setze $s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

(Sekante durch $(a, f(a)), (b, f(b))$)

Def. $h(x) = f(x) - s(x)$. $h(a) = h(b) = 0$.

Zeige: $\exists c \in]a, b[$ mit $h'(c) = 0$.

Fertig, denn

$$h'(x) = f'(x) - s'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ist h konstant, so kann man jedes $c \in]a, b[$ wählen. Also sei h nicht konstant. h ist stetig auf $[a, b]$. 5.11. h nimmt auf $[a, b]$ globales Max. und Min. an: $x_{\max}, x_{\min}, x_{\max} \neq$

x_{\min} , da h nicht konstant $h(a) = h(b)$ O.B.d.A

$x_{\max} \in]a, b[$. 6.18 : $h'(x_{\max}) = 0$

□

6.20 Korollar

$\mathcal{I} = [a, b]$, $a < b$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, diffbar in $]a, b[$. (auch $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ oder $[a, \infty[$, $] - \infty, b]$ erlaubt)

a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f konstant auf $[a, b]$,

b) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f (streng) monoton wachsend auf \mathcal{I}

c) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[$ so ist f (streng) monoton fallend auf \mathcal{I} .

Beweis.

Wähle $u < v$, $u, v \in [a, b]$ beliebig.

Wende 6.19 auf $[u, v]$ an. $\exists c \in]u, v[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

Daraus folgt im Fall

a) $f(v) = f(u)$

b) $f(v) \geq f(u)$

c) $f(v) \leq f(u)$

Bedingung für strenge Monotonie nur hinreichend, nicht notwendig $f(x) = x^3$
streng monoton steigend $f'(0) = 0$

□

6.21 Korollar

$\mathcal{I} = [a, b]$, $a < b$ wie in 6.20.

$c \in]a, b[$. $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in \mathcal{I} .

f auf $\mathcal{I}_0 =]a, b[\setminus \{c\}$ diffbar

Existiert $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ auf \mathcal{I}_0 , so existiert $f'(c)$ und $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$.

6.22 Satz (Regeln von L'Hôpital)

a) \mathcal{I} Intervall, $c \in \mathcal{I}$, $f, g : \mathcal{I} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Es gelte $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{I} \setminus \{c\}$

Oder : $g'(x) < 0$ für alle $x \in \mathcal{I} \setminus \{c\}$

Es gelte $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ oder ∞

Existiert $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

b) $f, g: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Es gelte $g'(x) > 0$ für alle $x \in [a, \infty[$

oder $g'(x) < 0$ für alle $x \in [a, \infty[$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ oder ∞

Existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

6.23 Beispiel

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+ax)}{x} = ?$ ($a \in \mathbb{R}$) Zähler definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $1+ax > 0$ 6.22a):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+ax}}{1} = a$$

b) $\lim_{x \cdot \ln(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{6.22}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x \cdot \ln(x))$
 $\stackrel{\text{exp stetig}}{=} \exp(\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x)) \stackrel{b)}{=} \exp(0) = 1.$

(Deshalb definiert man $0^0 = 1$)

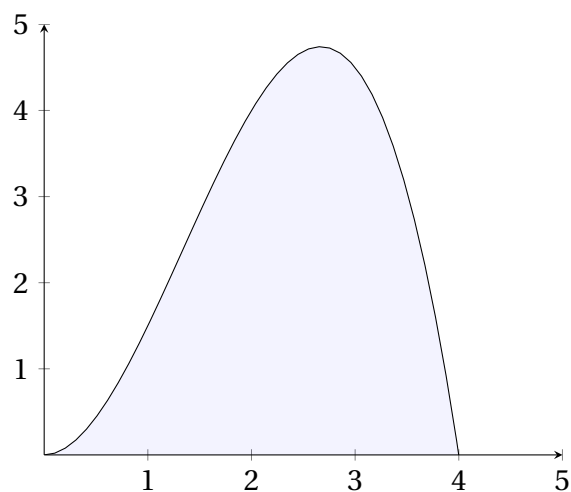
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{6.22}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ (schon in 5.17)}$$

7 Das bestimmte Integral

Ziel: Bestimmung des Flächeninhalts zwischen Graph einer Funktion und x-Achse zwischen zwei Grenzen a und b (sofern möglich).

Abbildung 41: Flächeninhalt unter einer Funktion f

7.1 Definition

- a) $a, b \in \mathbb{R}, a < b. f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ gibt, so dass f auf jedem offenem Intervall $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 0 \dots, n-1$, konstant ist. (Wert an den a_i beliebig.)

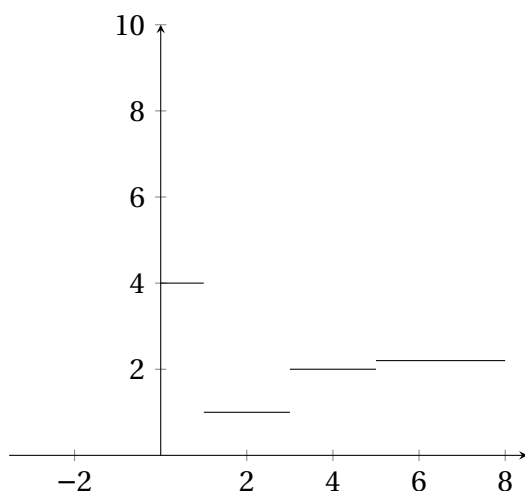


Abbildung 42: Treppenfunktion

b) f wie in a).

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f(x) dx := \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)$$

wobei $f(x) = c_i$ auf $]a_i, a_{i+1}[$.

Integral von f über $[a, b]$ (Integral kann negativ sein)

7.2 Definition

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion* (oder integrierbare Funktion) \Leftrightarrow

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (abh. von ε): $|f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$.

Bedeutung:

Gleichmäßige Approximierbarkeit durch Treppenfunktion.

7.3 Satz

$\mathcal{J} = [a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

a) Jede Regelfunktion f auf \mathcal{J} ist beschränkt d.h. $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

b) Summe, Produkt und Betrag von Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion

Beweisidee für a), b):

Man beweist 7.3 zunächst für Treppenfunktionen. Für b): Bestimme gemeinsame Verfeinerung der Intervallunterteilung der beiden Treppenfunktionen Dann auf Regelfunktionen übertragen.

7.4 Satz

Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist Regelfunktion *Beweis:* [8]

7.4 gilt auch für sogenannte *stückweise stetige* Funktionen auf $[a, b]$. $[a, b]$ ist Vereinigung *endlicher* Teilintervalle, auf denen Funktion stetig ist.

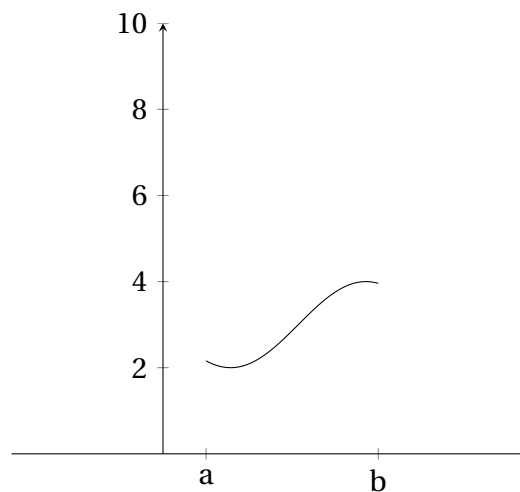


Abbildung 43: Treppenfunktion

7.5 Beispiel

a) $f(x) = x^2$, $\mathcal{J} = [0, t]$

Definition für $x \in \mathbb{N}$ Treppenfunktion.

$$f_n : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$$

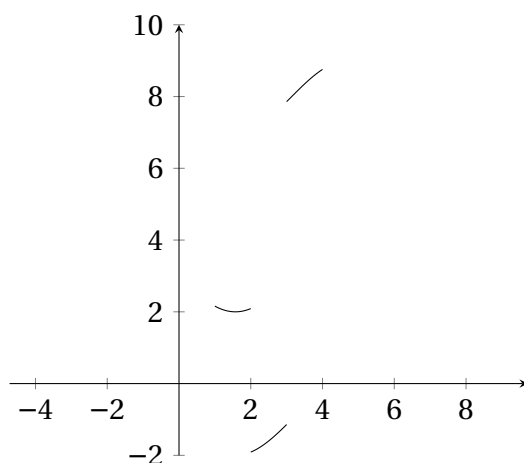
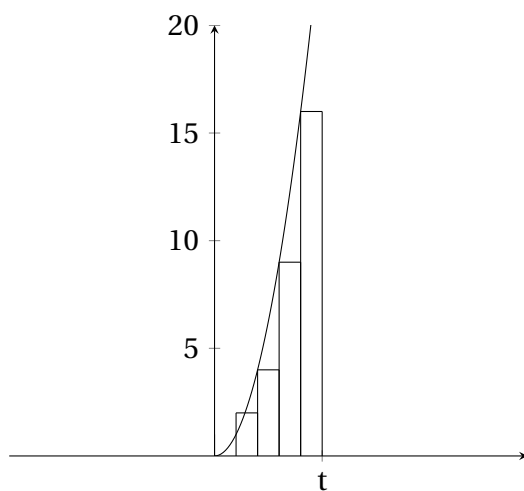


Abbildung 44: Abschnittsweise stetige Funktion

Abbildung 45: Treppenfunktion (Untersumme) von x^2

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{it^2}{n}\right) & \text{falls } x \in \left[\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}\right] \text{ für ein } i \in \{0, \dots, n-1\} \\ t^2 & \text{falls } x = t \end{cases}$$

$$x \in [0, t]: |f(x) - f_n(x)| = ?$$

$$x = t: |f(t) - f_n(x)| = 0.$$

$$0 \leq x < t: \text{Dann } x \in \left[\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}\right] \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|x^2 - \left(\frac{it}{n}\right)^2\right| \leq \left(\frac{(i+1)t}{n}\right)^2 - \left(\frac{it}{n}\right)^2 = \frac{2it + t^2}{n^2} \leq \frac{2t}{n} + \frac{t^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

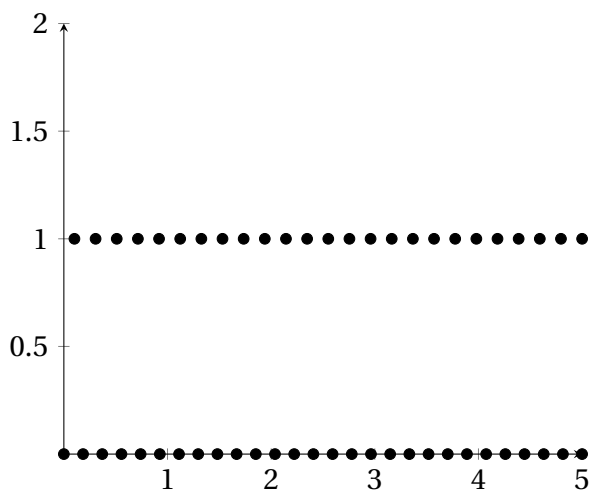


Abbildung 46: Nicht integrierbare Funktion

7.6 Lemma

f Regelfunktion auf $[a, b]$

- a) $(f_n)_n$ Folge von Treppenfunktion, die *gleichmäßig* gegen f konvergiert, dass heißt es existiert Nullfolge $(a_n)_n$, $a \geq 0$, und $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ für alle $x \in [a, b]$.

Dann konvergiert die Folge

$$\underbrace{\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)}_{\in \mathbb{R}}_n$$

- b) Sind $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ zwei Folgen von Treppenfunktionen die gegen f gleichmäßig konvergieren, so :

$$(\text{WHK, 7.20}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx$$

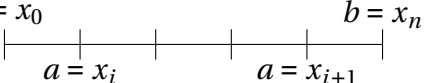
7.7 Definition

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktion, $(f_n)_n$ Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert (wie in 7.6 a).

Definition (*bestimmtes*) Integral:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Treppenfunktion:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)$$


7.8 Beispiel

$f(x) = x^2$ auf $[0, t]$

f_n wie in 7.5.

$$\int_a^b f_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{it}{n}\right)^2 \cdot \frac{t}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \cdot \frac{t^3}{n^3} = \frac{t^3}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Per Induktion nach n kann man zeigen: $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$$\text{Also: } \int_0^t f_n(x) dx = \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(x) dx = \frac{t^3}{6} \cdot 2 = \frac{t^3}{3} \text{ Falls } t > 0 - \frac{t^3}{3}$$

7.9 Satz (Rechenregeln für Integrale)

f, g Regelfunktionen auf $[a, b]$.

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$(a) \quad \int_a^b a \cdot f(x)dx = a \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$(b) \quad f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$(c) \quad \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Sei $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$:

$$(d) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$(e) \quad a < c < b, \text{ so } \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

7.10 Beispiel

$$a < b: \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$(0 < a < b:) \quad 7.9e \quad \int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Analog für die Fälle $a \leq 0 < b$ und $a < b \leq 0$

7.11 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert $c \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$

Beweis. f ist stetig nimmt also das Maximum von m an Stelle x_{min} und Maximum M an der Stelle x_{max} an. (5.11)

$$7.9d) : m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx$$

$$f(x_{min}) = m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M = f(x_{max})$$

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen 5.10: $\exists c$ zwischen x_{min} und x_{max} (d.h. $c \in$

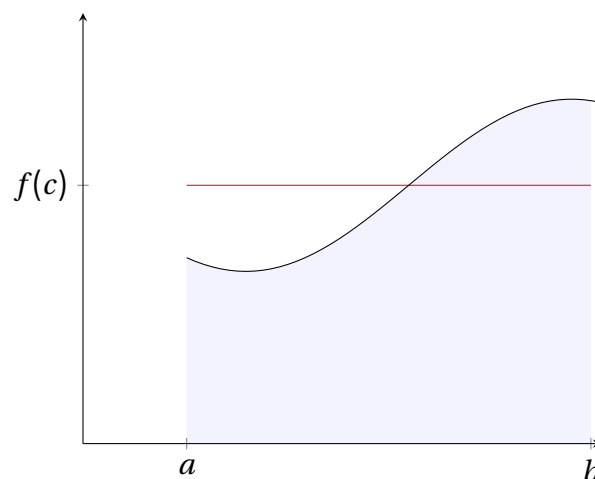


Abbildung 47: Mittelwertsatz der Integralrechnung

$[a, b]$) mit $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

□

8 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

8.1 Definition

- a) Sei $[a, b]$ abgeschlossenes, beschränktes (d.h. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) Intervall.
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar,

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

b)

$$\int_a^a f(t) dt = 0$$

8.2 Definition

Sei \mathcal{I} beliebiges Intervall ($-\infty$ bzw. ∞ als linke/rechte Grenze erlaubt).

$$7.8 \quad x > 0$$

$$x > 0 \quad \int_0^x t^2 dt = \boxed{\frac{x^3}{3}}$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

Kein Zufall

$$x \leq 0$$

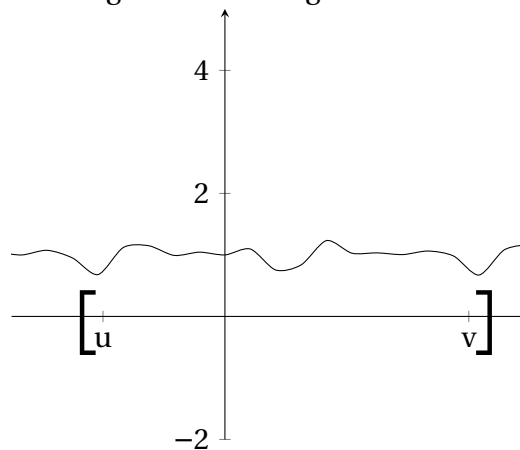
$$\int_0^x t^2 dt = -\int_x^0 t^2 dt = -\left(-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_a^b t^2 dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \text{ gilt für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

- a) $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn f auf jedem abgeschlossenem beschränktem Teilintervall $[u, v]$ von \mathcal{I} integrierbar ist.

(Ist \mathcal{I} selbst abgeschlossen und beschränkt, so „lokal integrierbar“ = „integrierbar“.)

Abbildung 48: Lokal Integrierbar von u bis v



- b) $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* der lokal Integrierbaren Funktion $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\int_a^v f(t) dt = F(v) - F(u)$$

für alle $u, v \in \mathcal{I}$.

Eine Stammfunktion von f wird auch als *unbestimmtes Integral* von f bezeichnet

$$F = \int f(t) dt$$

8.3 Bemerkung

Ist f lokal integrierbar auf \mathcal{I} , so gilt

$$\int_u^v f(t) dt + \int_v^w f(t) dt = \int_u^w f(t) dt$$

Folgt aus 7.9 + 8.1

für alle $u, v, w \in \mathcal{I}$ (nicht notwendig $u < v < w$)

8.4 Beispiel

a) $f(x) = x^2$ lokal integrierbar auf \mathbb{R} .

Stammfunktion von f .

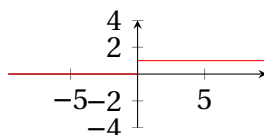
$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

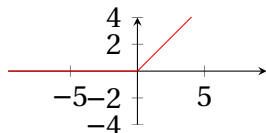
Heaviside - Funktion

f ist lokal integrierbar auf \mathbb{R}



Stammfunktion von f :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



Zeige: $\forall u, v \in \mathbb{R}$:

$$\int_u^v f(t) dt = F(v) - F(u)$$

$$\begin{aligned}
(u < v < 0) \quad & \int_u^v f(t) dt = 0F(v) - F(u) \\
(u < 0 < v) \quad & \int_u^v f(t) dt = 0 = \int_0^v f(t) dt = 1 \cdot v = F(v) - F(u) \\
(0 < u < v) \quad & \int_u^v f(t) dt = 1 \cdot (v - u)F(v) - F(u) \\
(u \geq 0) \quad & \int_u^v f(t) dt = -(F(u) - F(v)) = F(v) - F(u)
\end{aligned}$$

8.5 Satz

Sei $\mathcal{J} \neq \emptyset$ Intervall, $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal „Integrierbar“

- a) Ist F Stammfunktion von f , so auch $G(x) = F(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- b) Sind F und G Stammfunktionen von f , so ist $F(x) = G(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$
- c) Sei $x_0 \in \mathcal{J}$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f .

(Beachte

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x'_0}^x f(t) dt + \int_{x'_0}^{x_0} f(t) dt$$

)

Beweis. a), b)

F Stammfunktion, $c \in \mathbb{R}$ $G(x) = F(x) + c$ ist Stammfunktion von f :

$$G(v) - G(u) = F(v) - F(u) = \int_u^v f(t) dt$$

Umgekehrt: Seien F, G zwei Stammfunktionen von f . Sei $x_0 \in \mathcal{J}$ halte es fest.

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0) \text{ für alle } x \in \mathcal{J}$$

$$G(x) = F(x) + \underbrace{G(x_0) - F(x_0)}_{=:c} \text{ für alle } x \in \mathcal{J} \quad \text{c) } u, v \in \mathcal{J}$$

$$F(v) - F(u) = \int_{x_0}^v f(t) dt = \int_{x_0}^u f(t) dt + \int_u^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^v f(t) dt = \int_u^v f(t) dt \quad \square$$

8.6 Satz

Jede Stammfunktion einer lokal integrierbaren Funktion ist stetig.

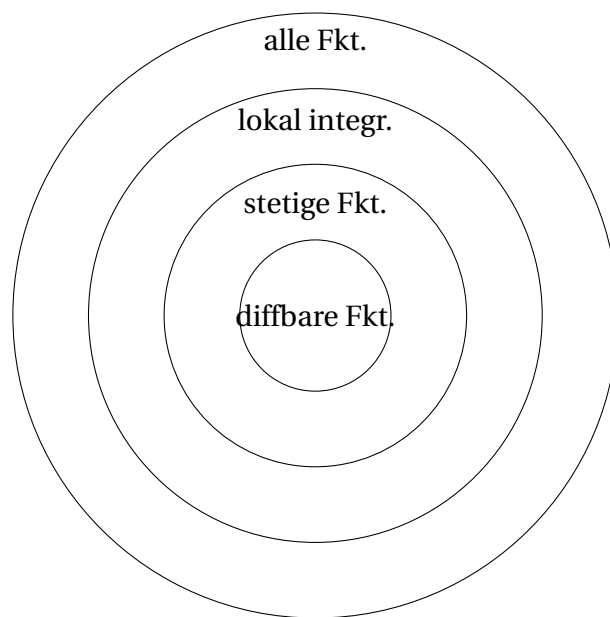


Abbildung 49: Die Welt der Funktionen

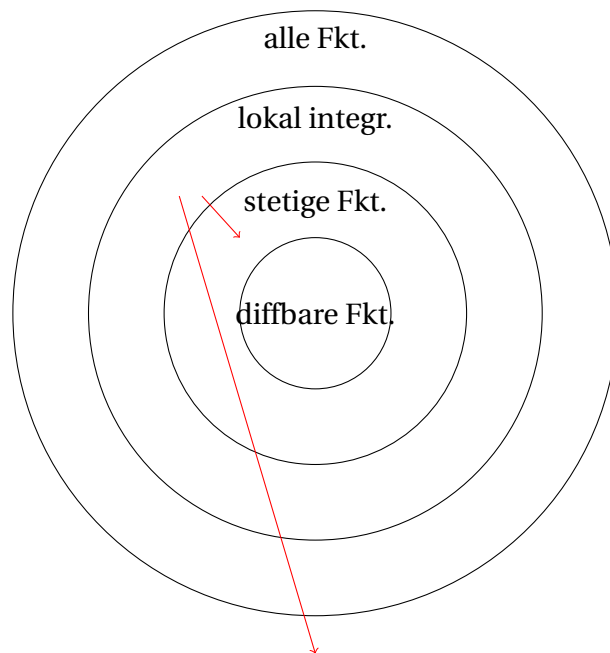


Abbildung 50: Stammfunktionbildung

Beweis. $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar

$x_0 \in \mathcal{J}$. Zeige: F ist stetig in x_0 (Stammfunktion von f).

Betrachte f auf $[x_0 - 1, x_0 + 1] \cap \mathcal{J}$

Sei $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathcal{J}_0$. (7.3a)

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \underset{7.9c)}{\geq} \int_{x_0}^x |f(t)| dt \underset{7.9d)}{\geq} M \cdot |x - x_0| \text{ für alle } x \in \mathcal{J}_0.$$

F stetig in x_0 nach 5.2

□

8.7 Definiton

$f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar*, falls f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.

[Beachte: Nicht jede differenzierbare Funktion ist stetig diffbar]

$$\text{Bsp: } f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

f' nicht stetig in 0

8.8 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

\mathcal{J} beliebiges Intervall, $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Ist f stetig, so ist jede Stammfunktion F von f differejzierbar auf \mathcal{J} und es gilt $F' = f$.

$$(a) \quad \left(\int f(t) dt \right)' = f$$

$$\text{Dass heißt } F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

b) Ist f stetig diffbar auf \mathcal{J} , so ist f Stammfunktion von f' , dass heißt.

$$(b) \quad \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0)$$

$\forall u, v \in \mathcal{J} :$

$$\int_u^v f'(t) dt = f(v) - f(u) = f(x) \Big|_u^v$$

$$\begin{array}{ccc}
 \textcircled{I} & \longrightarrow & F = \int f(t) dt \\
 F' = f & \longleftarrow & \\
 \\
 f' & \longleftarrow & \textcircled{I} \text{ stetig diffbar} \\
 & \longrightarrow & F = \int f'(t) dt = f + c
 \end{array}$$

Beweis. a) Sei $c \in \mathcal{J}$.

Zu zeigen: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c), x \neq c, x \in \mathcal{J}$:

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} \underset{\text{F. St.fkt. von } f}{=} \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (7.11). Es existiert $\Theta(x)$ zwischen x und c mit

$$\int_x^c f(t) dt = f(\Theta(x)) \cdot (x - c)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{F(x) - F(c)}{x - c} &= \frac{1}{x - c} \cdot f(\Theta(x)) \cdot (x - c) \\
 &= f(\Theta(x)) \xrightarrow[\Theta(x) \rightarrow c]{x \rightarrow c, \text{ so}} f(c), \text{ da } f \text{ stetig} \quad \text{b) } f' \text{ ist stetig.}
 \end{aligned}$$

Sei F eine Stammfunktion von f' . Nach a): $F' = f'$.

$$(F - f)' = 0.$$

6.20a) $F - f = c$ konstant, dass heißt $F = f + c$

□

8.9 Beispiele

Zu 8.8a):

$$\text{a) } g(x) = \int_1^x \underbrace{e^{t^2} \cdot \left(\sin(t) + \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)}_{\text{stetig}} dt \quad \text{8.8a) : } g'(x) = e^{x^2} \cdot \left(\sin(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$\text{b) } g(x) = \int_0^{x^2} e^t \cdot \sin(t) dt$$

$$F(x) = \int_0^x e^t \cdot \sin(t) dt$$

$$h(x) = x^2$$

$$g = F(h(x)) = (F \circ h)(x)$$

$$g'(x) = F'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x^2) \cdot 2x$$

8.10 Beispiel

zu 8.8b)

a) $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int a x^n dx = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ denn } \left(a \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = a x^n$$

$$\text{d.h.: } \int_a^b a \cdot x^n dx = \frac{a}{n+1} (v^{n+1} - u^{n+1})$$

$$\text{Damit: } \int \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^n a_i \frac{x^{i+1}}{(i+1)}$$

b) $n \geq -2$, so

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{x^{1-n}} + c$$

c) Für $x > 0$ ist $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ (6.14b)

$$\text{Also } \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c \text{ auf }]0, \infty[$$

$$\text{Auf }]-\infty, 0[\text{ gilt } \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$$

d) $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$ auf $]0, \infty[$ (6.14d)

e) $\int e^x dx = e^x + c$

f) $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$ $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

8.11 Satz (Partielle Integration)

Seien f und g stetig diffbare Funktionen auf Intervall \mathcal{J} . Dann:

$$\int f g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$$

Für bestimmte Integrale heißt das:

$$\int_u^v f(x) \cdot g'(x) dx = \left. \underbrace{f \cdot g}_{f(v) \cdot g(v) - f(u) \cdot g(u)} \right| - \int_y^u f'(x) g(x) dx$$

Für alle $u, v \in \mathcal{J}$

Beweis. 8.8b)

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

$$\int (f \cdot g' + f' \cdot g) dx = f \cdot g + c$$

$$\int f \cdot g' + \int f' \cdot g = f \cdot g$$

□

8.12 Beispiele

$$\text{a) } \int \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} dx \stackrel{8.11}{=} x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c$$

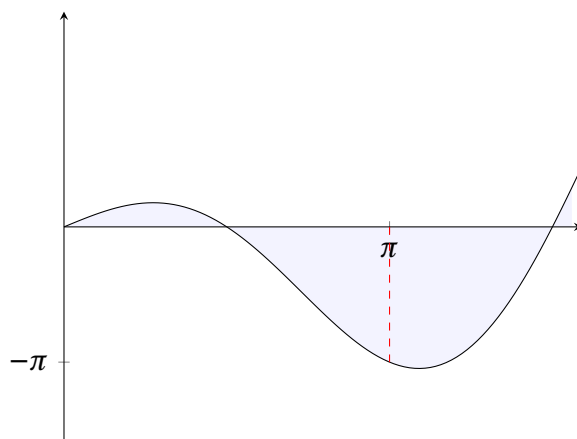


Abbildung 51: $\int_0^\pi x \cdot \cos(x) dx = 2$

$$\text{b) } \int \ln(x) dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_g dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + c \quad (\text{vgl. 8.10d})$$

$$\text{c) } \int \cos^2(x) dx \stackrel{8.11}{=} \underbrace{\cos(x)}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_g + \int \sin(x) dx \quad (\star)$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) dx &= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1 - \cos^2(x) dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \cos^2(x) dx \\ \Rightarrow 2 \cdot \int \cos^2(x) dx &= \cos(x) \cdot \sin(x) + x + c \end{aligned}$$

8.13 Satz (Integration durch Substitution)

\mathcal{I}, \mathcal{J} Intervalle $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ stetig diffbar, $g: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion G . Dann ist:

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(x)) + c$$

Für das bestimmte Integral heißt das:

$$\int_u^v g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(v)) - G(f(u)) = \int_{f(u)}^{f(v)} g(t) dt$$

für alle $u, v \in \mathcal{I}$

Beweis. $G \circ f$ diffbar: 8.8a)

Kettenregel:

$$\begin{aligned} (G \circ f)'(x) &= G'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &\stackrel{8.8a}{=} \underbrace{g(f(x)) \cdot f'(x)}_{\text{stetig}} \end{aligned}$$

Hauptsatz $G \circ f$ ist Stammfunktion von $g(f(x)) \cdot f'(x)$ □

Bemerkung: 8.13 kann in 2 Arten angewandt werden:

1. Art: Mann hat ein Integral der Form

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$$

Berechne

$$\int g(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{und ersetze} \\ x \text{ durch } f(x)}}{G(x)}$$

2. Art:

Man will $\int g(t) dt$ berechnen

Ersetze t durch $f(x)$ (Substitution)

$$\left[\frac{dt}{dx} = f'(x) \rightarrow dt = f'(x) dx \right]$$

und dt durch $f'(x) dx$ ersetzen.

$$\rightarrow \int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$$

Hoffnung: \uparrow ist einfacher zu berechnen.

8.14 Satz

f ist stetig diffbar auf \mathcal{J} , f stetig auf \mathcal{J} .

a) Ist $f(x) \neq 0$ auf \mathcal{J} ,

$$\text{so } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c$$

$$\text{dass heißt } \int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|)$$

für alle $a, b \in \mathcal{J}$

b) $\int_a^b g(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x) dx$
für alle c mit $a+c, b+c \in \mathcal{J}$.

c) $\int_a^b g(c \cdot x) dx = \frac{1}{c} \int_{a \cdot c}^{b \cdot c} g(x) dx$ für alle $c \neq 0$ mit $a \cdot c, b \cdot c \in \mathcal{J}$

Beweis. a) Setze $g(x) = \frac{1}{x}$.

Also : $G(x) = \ln(|x|) + c$ für alle $x \neq 0$.

$$8.13 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c \quad \text{b) Setze } f(x) = x + c, \quad 8.13$$

$$c) \text{ Setze } f(x) = x \cdot c, \quad 8.13^2$$

□

8.15 Beispiel

$$a) \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{-(\cos(x))'}{\cos(x)} dx \stackrel{8.14a)}{=} -\ln(|\cos(x)|) + c^3$$

$$b) \int x \cdot \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) dx \stackrel{8.13}{=} -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$$

$$c) \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx \stackrel{8.14a)}{=} \ln(x^2 + a^2) + c \text{ auf } \mathbb{R} \quad (a \neq 0)$$

$$d) \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

Fläche des Halbkreises vom Radius 1.

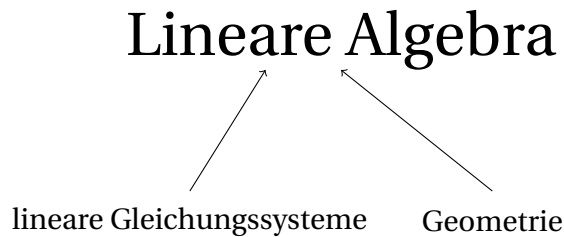
²Beachte $f'(x) = c$

³Gilt auf jedem Intervall $]k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}[$

Substitution $t = \sin(x)$

$$\frac{dt}{dx} = \cos(x), dt = \cos(x) dx$$

$$\int_{-1=\sin(-\frac{\pi}{2})}^{1=\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-t^2} \stackrel{8.13}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(x)^2} \cdot \cos(x) dx = \int \cos^2(x) dx \stackrel{8.11c}{=} \frac{\cos(x) \cdot \sin(x)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\right)$$



9 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

9.1 Definition

$$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

- a) Eine $m \times n$ Matrix A über K ist rechteckiges Schema .

$$\text{Spalten} \downarrow A = \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Zeilen}}$$

mit m Zeilen und n Spalten, $a_{ij} \in K$.

(Bezeichnung der Indizes ist Standard! 1.Index : Zeile, 2.Index : Spalte)

(m,n) heißt *Typ* der Matrix.

Schreibweise:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}, A = (a_{ij})$$

- b) $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ = Menge aller $m \times n$ -Matrizen über K (*quadratische Matrizen*)

- c) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$..

Definiere $A^t = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ mit $b_{ij} = a_{ji}$ für $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$

A^t ist die zu A *transponierte* Matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(Manchmal A^T statt A^t oder andere Schreibweise)

$1 \times n$ -Matrix (a_{11}, \dots, a_{1n}) *Zeilenvektor*

$$m \times 1\text{-Matrix } \textit{Spaltenvektor} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Alle $a_{ij} = 0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =: 0\text{Nullmatrix}$ (vom Typ (m,n))

$n \times n$ -Matrix $E_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $n \times n$ -Einheitsmatrix

$E_n = (\delta_{ij})_{i,j=1 \dots n}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j, \\ 0 & , \text{ falls } i \neq j \end{cases} \quad \textit{Kronecker Symbol}$$

9.2 Definition

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ (beide vom gleichen Typ!) $a \in K$.

a) $A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$

Summe von Matrizen

b) $a \cdot A = (a \cdot a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$

(skalares) *Vielfaches von A*.

Für Matrizen unterschiedlichen Typs ist keine Summe definiert.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 6 \\ \frac{9}{2} & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$A + B^t$ nicht definiert

$$B^t = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + A = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \text{Produkt:}$$

- Produkt von Matrizen gleichen Typs durch komponentenweise Multiplikation (kaum Anwendungen)
- wichtig ist Produkt von $m \times n$ -Matrizen mit $n \times p$ Matrizen:

9.3 Definition

$$m, n, p \in \mathbb{N}.$$

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

$$B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$$

Das *Produkt* $A \cdot B$ von A und $B = (d_{ik})_{\substack{i=1 \dots m \\ k=1 \dots p}}$

$$\text{mit } d_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$

($m \times n$ multiplizieren mit $n \times p \rightarrow m \times p$)

Beachte : Produkt von $m \times n$ - mit $r \times p$ -Matrix ist nicht definiert falls $n \neq r$

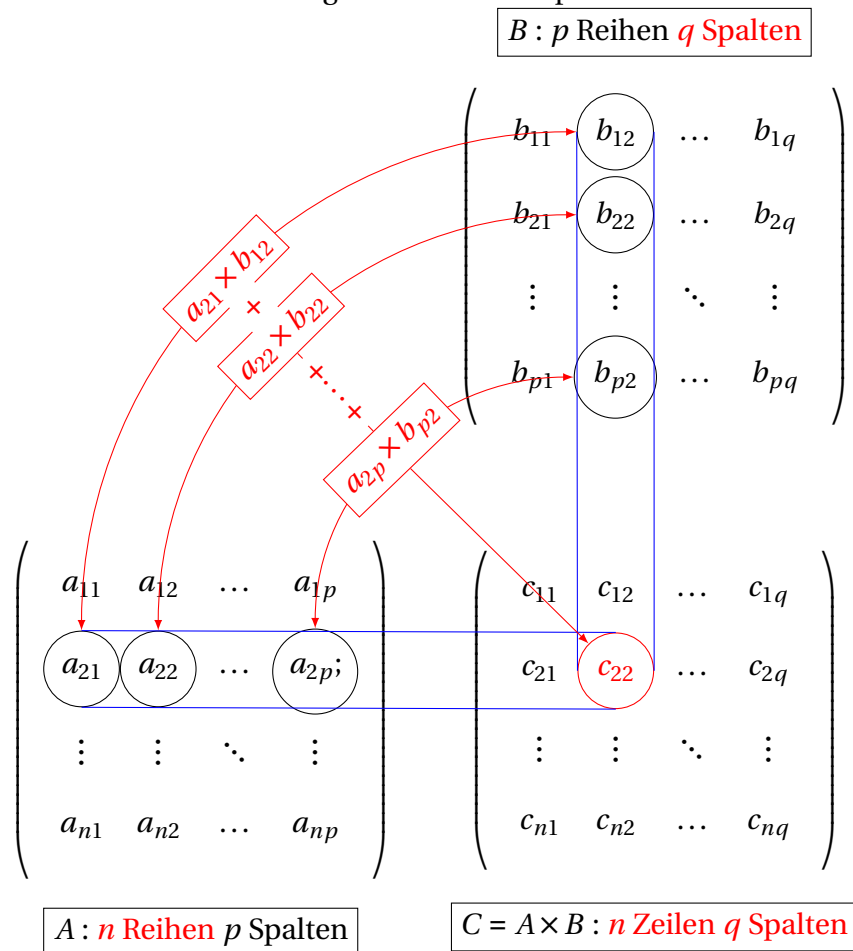
9.4 Beispiel

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Abbildung 52: Matrix Multiplikation



$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}, AB \neq BA!$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ wie in a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^t = B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\infty, \exists}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = (5) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) (= \mathbb{R})$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

$$E_m \cdot A = A$$

$$A \cdot E_n = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & a & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \cdot A$$

9.5 Satz (Rechenregeln von Matrizen)

$$A, A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{m,n}(K),$$

$$B, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{n,r}(K),$$

$$C \in \mathcal{M}_{r,s}(K), a \in K.$$

$$\text{(a) } (A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$$

$$\text{(b) } A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$

$$\text{(c) } (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (aB) = a(A \cdot B)$$

$$\text{(d) } \underbrace{(A \cdot B)}_{m \times r} \cdot \underbrace{C}_{r \times s} = \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{n \times s}$$

$$\text{(e) } (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

$$\text{Beweis. Nur d) } A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots r}}$$

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1 \dots r \\ j=1 \dots s}}$$

$$A \cdot B = (d_{ik})_{\substack{i=1 \dots m \\ k=1 \dots r}}$$

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

$$B \cdot C = (e_{jl})_{\substack{j=1 \dots n \\ l=1 \dots s}}$$

$$e_{jl} = \sum_{k=1}^r b_{jk} c_{kl}$$

$$(A \cdot B) \cdot C$$

Eintrag an der Stelle (i, l) :

$$\sum_{k=1}^r d_{ik} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl}$$

$A \cdot (B \cdot C)$ Eintrag an Stelle (i, l) :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot e_{jl} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^r b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^r a_{ij} b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \cdot c_{kl} \quad \square$$

9.6 Definition

Allgemeine Form eines *lineares Gleichungssystem* (LGS) über K :

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

m Gleichungen, n unbekannte x_1, \dots, x_n

($n = 2 \parallel 3 : x, y \parallel z$)

Koeffizienten $a_{ij} \in K$, rechte Seite $b_1 \dots b_m \in K$ (fest).

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_n 1(K) = K^n$$

(Elemente der $K^n = K \times K \dots \times K$ werden als Spalten geschrieben) heißt Lösung von

(*) wenn $x_1 \dots x_n$ sämtliche Gleichungen erfüllen.

Ist $b_1 = \dots b_m = 0$, so heißt (*) *homogenes* LGS, sonst *inhomogenes* LGS.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

Koeffizientenmatrix des LGS $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1} = K^m$ (rechte Seite)

(*), lässt sich schreiben in *Matrizenform*: $A \cdot x = b$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sind s_1, \dots, s_n die Spaltenvektoren von A, d.h. $s_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, so lässt sich (*) schreiben

als $x_1 \cdot s_1 + \dots + x_n \cdot s_n = b$

$$\begin{pmatrix} x_1 a_{11} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_n a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Spaltenform des LGS Beachte: Homogenes LGS hat immer *mindestens* eine Lösung

(triviale Lösung) $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Null-Lösung

Fragen:

(1) Wann hat LGS mindestens eine Lösung?

(2) Wenn es Lösungen gibt, wie bestimmt man alle?

Antwort: Gauß Algorithmus (C.F.Gauß 1777-1855)

Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht bei :

- Addition der Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung
- Multiplikation einer Gleichung mit Zahl $\neq 0$.
- Vertauschen zweier Gleichungen

Was passiert dann:

Aus $Ax = b$ wird

$$A'x = b'$$

Die Menge der x , die $ax = b$ erfüllen, stimmt mit der überein, die $A'x = b'$ erfüllen.

Ziel des Gauß Algorithmus: Mit obigen Umformungen einfache Form A' zu finden.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 4 \\ x + y & = & -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & -2 \\ 2x + 3y & = & 4 \end{array} \quad (-2) \text{ fache 1. Gl. zu 2. Gl. addieren}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & -2 \\ y & = & 8 \end{array} \quad y = 8, \quad x + 8 = -2 \quad x = -10, \text{ eindeutige Lösung}$$

9.7 Definition

Unter *elementaren Zeilenumformungen* an einer Matrix versteht man folgende Operationen:

- Addition des skalaren vielfachem einer Zeile zu anderen
- Multiplikation einer Zeile mit Zahl $\neq 0$
- Vertauschen von zwei Zeilen

Analog: *Elementare Spaltenumformungen*

(wird nicht für :GS benötigt — außer ggf. Spaltenvertauschung)

9.8 Definition

Ist $Ax = b$ ein LGS, so nennt man $(A, b) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(K)$ die *erweiterte Koeffizientenmatrix*. b als letzte Spalte an A anhängen.

9.9 Bemerkung

Führt man an (A, b) elementare Zeilenumformungen durch und erhält man dabei Matrix (A', b') , so ist $x \in k^n$ ist Lösung von $A \cdot x = b$ genau dann wenn x Lösung von $A'x = b'$.

Beispiel 9.6:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (A' b') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Kernstück des Gauß-Algorithmus:

Jede Matrix B lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf *Zeilenstufenform*

(Treppenform) bringen

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & & \\ & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \\ & & & \overline{0} & \\ & & & & \overline{0} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.10 Gauß Algorithmus

Sei B eine (m, n) -Matrix über K , Ist B Nullmatrix, so fertig.

Sei also im Folgenden B nicht Nullmatrix.

- (1) Suche erste Spalte j_1 , die nicht nur Nullen enthält.
- (2) Eventuell durch Zeilenvertauschung:
Eintrag a am der Stelle (i, j_1) ist $\neq 0$
- (3) Multipliziere die 1. Zeile mit $\frac{1}{a}$, Jetzt: Eintrag 1 an der Stelle (i, j_1) .
- (4) Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeilen zu den übrigen Zeilen alle Einträge in der Spalte j_1 unterhalb der ersten Zeile gleich 0 sind. Ab jetzt wird Zeile 1 nicht mehr benutzt. Sie bleibt unverändert.
- (5) Suche erste Spalte $j_2(> j_1)$, der unterhalb der ersten Zeile einen Eintrag $\neq 0$ enthält.
- (6) Wie in (2) imd (3) Eintrag 1 an Stelle $(2, j_2)$
- (7) Wie in (4) alle Einträge in Spalte j_2 unterhalb der 2. Zeile zu Null machen.
Ab jetzt wird Zeile 2 nie mehr benutzt.

So fortfahrend erhält man Zeilenstufenform.

9.11 Beispiel

$$\begin{aligned}
 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{Vert. 1Z./2.Z.}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1Z. \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3Z. + (-3) \cdot 1Z.} \\
 B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -9/2 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{1/6 \cdot 2. Z.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 4 & -9/2 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/6 \cdot 2. Z.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

9.12 Gauß-Algorithmus

Gegeben sei LGS $A \cdot x = b$
 $m \times n \quad n \times 1 \quad m \times 1$

Wende Algorithmus 9.10 auf (A, b) an, bis man Matrix (\tilde{A}, b') erhält, so dem \tilde{A} Zeilenstufenform hat (letzte Spalte b' muss nicht mehr bearbeitet werden).

Man kann noch Spaltenvertauschung am \tilde{A} vornehmen,

Beachte: Vertauschung von Spalte i und k bedeutet vertauschung von x_i und x_k (Buch führen). Dann kann Matrix (A', b') erhalten werden wobei

$$(A', b') = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b'_m \end{pmatrix}$$

Neues LGS $A'x' = b'$

$x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ entsteht aus x . durch Permutation der Einträge entsprechend der durchgeführten Spaltenvertauschungen.

Lösungsmenge des LGS $A'x' = b'$ ist leicht zu ermitteln:

(1) Ist $r < m$ und einer der Einträge $b'_r + a, b'_m$ ungleich 0 ist, so ist LGS nicht lösbar.

$$(2) \text{ Ist } r = m \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & b'_1 \\ 0 & 1 & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b'_m \end{pmatrix}$$

oder $r < m$ und $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & b'_1 \\ 0 & 1 & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_m \end{pmatrix}$$

(betrachte dann nur die ersten r Gleichungen), so gibt es mindestens eine Lösung:

(2a) $r < n$:

Wähle x_{r+1}, \dots, x'_n beliebig aus K . Dann:

$$x'_r = b'_r - \sum_{j=r+1}^n a'_{rj} x'_j$$

\vdots

$$x'_1 = b'_1 - \sum_{j=2}^n a'_{1j} x'_j$$

(rekursive Bestimmung der Lösungsmenge).

(2b) $r = n$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann sind x'_1, \dots, x'_r eindeutig bestimmt.

$$x'_n = b'_n$$

$$x'_{n-1} = b'_{n-1} - a'_{n-1} x'_n$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x'_1 = b'_1 - \sum_{j=2}^n a'_{1j} \cdot x'_j$$

9.13 Beispiel

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & +2x_2 & -3x_3 = 5 \\
 \text{a) } 2x_1 & -x_2 & +4x_3 = 0 \\
 x_1 & +x_2 & +2x_3 = 1
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2Z.+(-2)\cdot 1.Z \\ 3Z.+(-1)\cdot 1.Z}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\cdot 2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3.Z+2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot 3.Z} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = 2 + 2x_3 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = 5 - \frac{4}{3} - 2 = \frac{5}{3} \text{ eindeutige Lösung: Lösungsmenge } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{b) } x_1 & +2x_2 & x_3 + x_4 = 0 \\
 x_1 & -x_2 & +2x_3 - x_4 = 6 \\
 \begin{pmatrix} 1 & +2 & 1 & +1 & 0 \\ 1 & -1 & +2 & -1 & 6 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & +2 & 1 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix} \\
 \text{(Fall 2a)} & &
 \end{array}$$

x_4, x_3 frei wählbar

$$x_2 = -2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$$

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4$$

$$= -2 \cdot \left(-2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4\right) - x_3 - x_4$$

$$= 4 - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_4$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ -2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in K \right\}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & = 1 \\ \text{c) } 2x_1 & +x_2 & = 2 \end{array}$$

$$x_1 - x_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

LGS nicht lösbar (Fall 1)

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & = 1 \\ \text{d) } 2x_1 & +x_2 & = 2 \end{array}$$

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$$

LGS eindeutig lösbar

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 1 - x_2 = 1$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ (Fall 2b)}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\ \text{e) } -2x_1 & +2x_2 & -2x_3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & =1 \\ -2 & 2 & -2 & =3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & =1 \\ 0 & 0 & 0 & =5 \end{pmatrix}$$

LGS ist nicht lösbar

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & +x_3 = 0 \\ \text{f) } x_1 & +x_2 & -2x_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ Vert. 2./3.Sp.}$$

x'_3 frei wählbar

$$x'_2 = -\frac{1}{3} - 0 \cdot x'_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x'_1 = 9 - x'_2 - x'_3 = \frac{1}{3} - x'_3$$

x_2 frei wählbar

$$x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} - x_2$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - x_2 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} : x_2 \in K \right\}$$

g) LGS über \mathbb{C}

$$(1+i)x_1 + 2x_2 = 3-i$$

$$ix_1 + (-2+2i)x_2 = 4$$

$$\begin{pmatrix} (1+i) & 2 & 3-i \\ i & (-2+2i) & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ i & (-2+2i) & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ 0 & -3+i & 2-i \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i \end{pmatrix}$$

$$x_2 = -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$x_1 = 1 - 2i - (1-i)x_2 = \frac{8}{5} - \frac{14}{5}i$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{14}{5}i \\ -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i \end{pmatrix} \right\}$$

Nicht mehr Klausurrelevant

10 Der Vektorraum \mathbb{R}^+ (Nicht mehr Klausurrelevant)

$$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Spaltenvektoren der Länge } n : \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t$$

a_1, \dots, a_n Komponente der Spaltenvektoren.

Wie bei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(Multiplikation entspricht der Matrixmul-} \\ \text{tiplikation und ist nicht möglich falls } n > \\ 1) \end{matrix}$$

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Zahl (*Skalar*)

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}$$

Addition+Abbildung : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

\mathbb{R}^n mit Addition und Multiplikation mit Skalaren : \mathbb{R} -Vektorraum

Die Vektoren im $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R})$, \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 entsprechen Punkten auf der Zahlengerade, Ebene, dreidimensionalen Raums. Punkte des $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ lassen sich identifizieren mit, *Ortsvektoren* Pfeile mit Beginn in 0 (Komp = 0) und Ende im entsprechenden Punkt

Addition von Spaltenvektoren entspricht der Addition von Ortsvektoren entsprechend der Parallelogrammregel. Multiplikation mit Skalaren a :

Streckung (falls $|a| > 1$)

Stauchung (falls $0 \leq |a| \leq 1$)

Richtungspunkt, falls $a < 0$ TODO: Streckung und Stauchung

Abbildung 53: Ein Vektor dargestellt durch seinen Ortsvektor

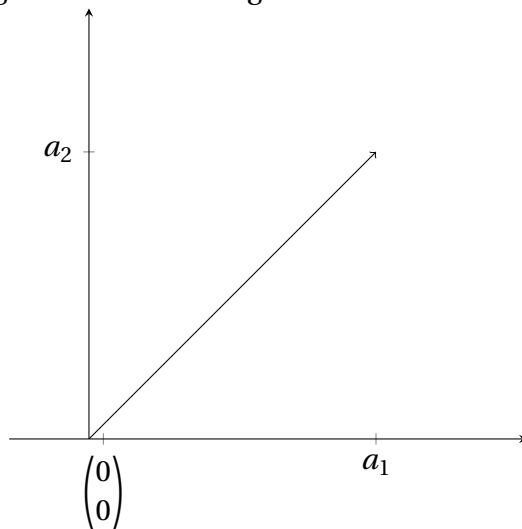
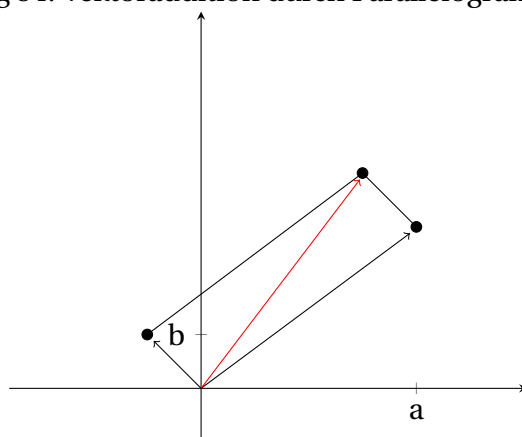


Abbildung 54: Vektoraddition durch Parallelogrammbildung



10.1 Satz (Rechenregeln in \mathbb{R}^n)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n, a, b \in \mathbb{R}$ Dann gilt:

a)

$$(1.1) \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$(1.2) \quad v + 0 = 0 + v = v, \text{ wobei } 0 \text{ Nullvektor}$$

 \mathbb{R}^n kommutative

$$(1.3) \quad v + -v = 0$$

Gruppe

$$(1.4) \quad u + v = v + u$$

$$(2.1) \quad (a + b)v = av + bv$$

$$(2.2) \quad a(u + v) = au + av$$

$$(2.3) \quad (a \cdot b)v = a(bv)$$

$$(2.4) \quad 1v = v$$

b) $0 \cdot v = 0$ und $a \cdot 0 = 0$

Beweis folgt aus entsprechenden Rechenregeln in 0

10.2 Definition

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Unterraum* (oder *Teilraum* von \mathbb{R}^n), falls gilt:

(1) $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} : u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$ (Abgeschlossenheit bezüglich +)

(2) $\forall u \in \mathcal{U} \forall a \in \mathbb{R} : au \in \mathcal{U}$ (Abgeschlossenheit bezüglich Mult. mit Skalaren)

\mathcal{U} enthält Nullvektor $\{0\}$ Unterraum von \mathbb{R}^n (Nullraum)

\mathbb{R}^n ist Unterraum von \mathbb{R}

10.3 Beispiele

a) $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ $G = \{av : a \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum von \mathbb{R}^2 G 2.1 in 10.2

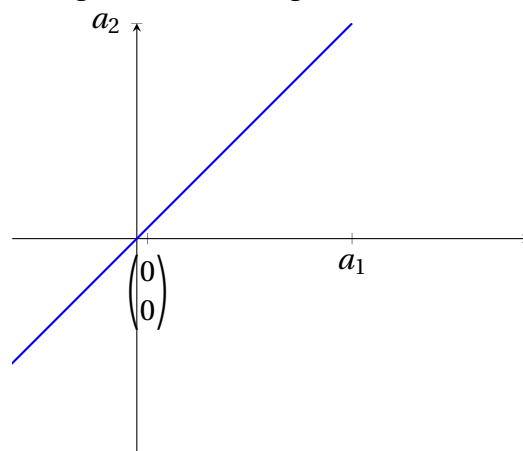
$(a_1 v, a_2 v \in G, (a_1 + a_2)v \in G$
 $av \in G, b \in \mathbb{R}(ba)v \in G)$

$G =$ Ursprungsgerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} n = 2:$

b) $v, w \in \mathbb{R}^n$

$E = \{av + bw : a, b \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum von \mathbb{R}^n

Abbildung 55: Gerade dargestellt durch Vektoren



$$v = o, w = o : E = \{o\}$$

$$v \neq o \quad w \notin \{av : a \in \mathbb{R}\}$$

$$E = \mathbb{R}^2 \quad n = 3 : \text{Ebene durch } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und durch } v, w$$

Ist $w \in \{av : a \in \mathbb{R}\}$, so ist $E = G$ (aus a))

c) $v, w \neq o$

$$G' = \{w + av : a \in \mathbb{R}\}$$

$$[v \in G' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w + av \in o \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : w = (-a)v \in G]$$

10.4 Satz

Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ Unterräume von \mathbb{R}^n

a) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ist Unterraum von \mathbb{R}^n

b) $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ ist im Allgemeinen KEIN Unterraum von \mathbb{R}^n

c) $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2\}$ (Summe von \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2) ist Unterraum von \mathbb{R}^n .

d) $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ und $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ ist der kleinste Unterraum von \mathbb{R}^n , der \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2 enthält. (d.h ist w Unterraum von \mathbb{R}^n mit $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subseteq w$, so $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq w$)

Beweis. a) ✓

b) TODO

c) TODO

□

10.5 Beispiel

a) ??b) $G_1 = \{av : a \in \mathbb{R}\}$

$$G_2 = \{aw : a\}$$

$$G_1 + G_2 = E$$

b) \mathbb{R}^3

$$E_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \right\}$$

$E_1 + E_2$ Unterräume von \mathbb{R}^3 (10.3.b)

$E_1 \cap E_2 = ?$

$$v \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = u, t+u = 0, s = u$$

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_1 + E_2 = ?$$

$$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3, \text{ denn:}$$

Es gilt sogar:

$$\mathbb{R}^3 = E_1 + G_2, \text{ wobei}$$

$$G_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq E_{@}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z-y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ z-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

10.6 Definition

a) $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

Dann heißt $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \sum_{i=1}^m a_i v_i$

Linearkombination von v_1, \dots, v_m (mit Koeffizienten a_1, \dots, a_m).

[Zwei formal verschiedene Linearkombinationen der gleichen v_1, \dots, v_m können den gleichen Vektor darstellen

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}]$$

b) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist der von M *erzeugte* (oder *aufgespannte*) Unterraum $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ (oder $\langle M \rangle$) die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus M bilden kann.

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \right\} \text{ falls } M \neq \emptyset$$

$$\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} := \{ \emptyset \}$$

$$M = \{ v_1, \dots, v_m \}, \text{ so TODO...}$$

10.7 Beispiel

$$\text{a) } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\text{b) } \mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

Ist $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$?

Für welche $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gibt es geeignete Skalare $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

$$\begin{aligned} a + 3b + 2c &= x \\ 2a + 2b + 3c &= y \\ 3a + b + 4c &= z \end{aligned}$$

LGS für die Unbekannten a, b, c mit variabler rechter Seite : Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & -4 & -1 & y-2x \\ 0 & -8 & -2 & z-3x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

LGS ist lösbar $\Leftrightarrow x - 2y + z = 0$.

Dass heißt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x + 2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$$

Lösungen des LGS: c frei wählen, b, a ergeben sich, (falls $x - 2y + z = 0$) z.B. $c = 0, b =$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y, a = x - 3b = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$$

Ist $x - 2y + z = 0$, so ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{rrcr} 6x^2 & -3xy & +y^3 & = 5 \\ 7x^3 & +3x^2y^2 & -xy & = 7 \end{array}$$

Literatur

[1] Kreußler, Phister Satz 33.16

[2] WHK 5.37

[3] WHK 6.21

[4] WHK 6.24

[5] WHK 6.25

[6] WHK 6.25

[7] WHK 7.32

[8] WHK 7.19