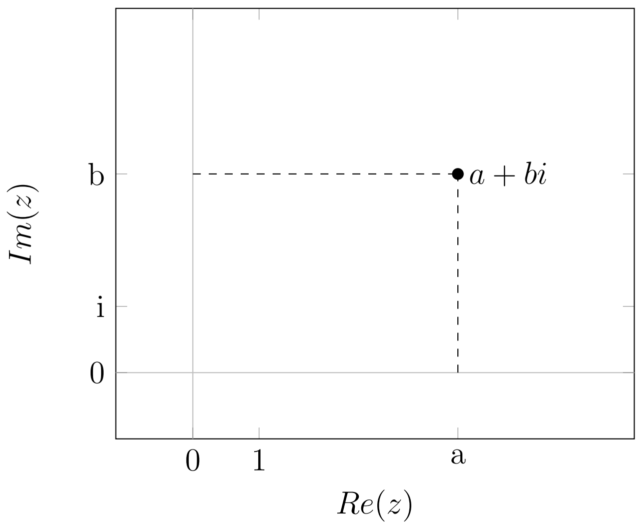
Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

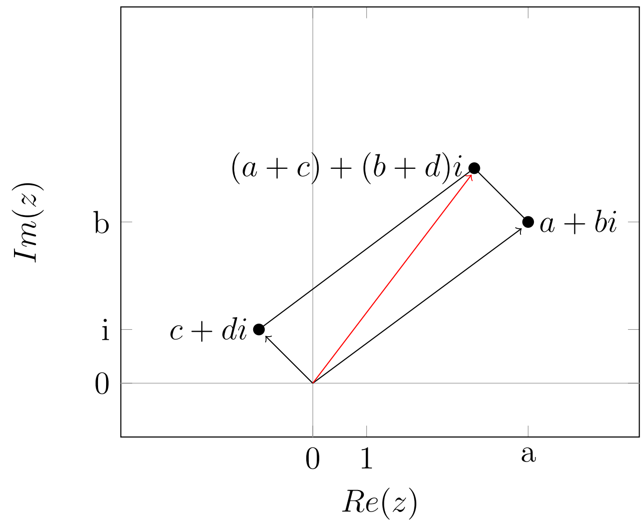
1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Addition:$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Multiplikation:$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
(Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ beachten)
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$
Rein imaginäre Zahlen : $bi, b \in \mathbb{R}, (0 + bi)$
i imaginäre Einheit
$z = a + bi \in \mathbb{C}$
$a = \Re(z)$ Realteil von $z(Re(z))$
$b = \Im(z)$ Imaginärteil von $z(Im(z))$
$\bar{z} = a - bi (= a + (-b)i)$
Die zu z konjugiert komplexe Zahl

1.2 Veranschaulichung



Addition entspricht Vektoraddition



1.3 Rechenregeln in $\mathbb{C}$

a) Es gelten alle Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$. (z.B Kommutativität bzgl. $+, \cdot$: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
Inversenbildung bzgl. $\cdot$:
$z = a + bi \neq 0$, d.h $a \neq 0$ oder $b \neq 0$
$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$
$z \cdot z^{-1} = 1$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{5-7i}{3+2i} &= (5-7i)\cdot(3+2i)^{-1} \\ &= (5-7i)\cdot\left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right) \\ &= \left(\frac{15}{13} - \frac{14}{13}\right) + \left(-\frac{10}{13} - \frac{21}{13}\right)i \\ &= \frac{1}{13} - \frac{31}{13}i \end{aligned}$$

Speziell: $(bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i$; insbesondere: $\frac{1}{i} = -i$

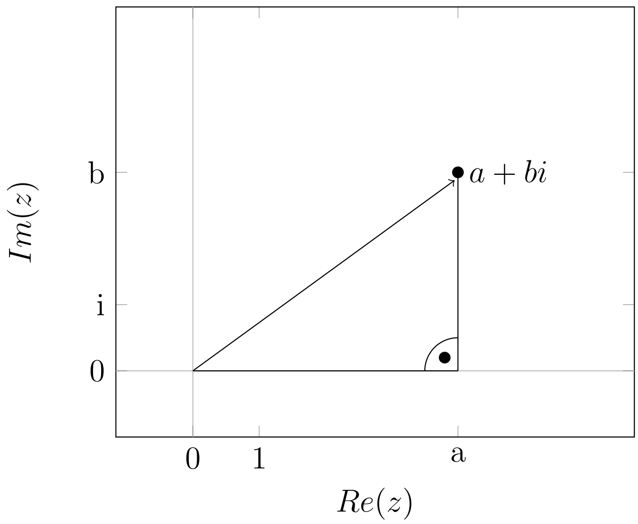
b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}} &= z \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

1.4 Definition Absolutbetrag

a) Absolutbetrag von $z = a + bi\mathbb{C}$:
$\mid z \mid = +\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R},\geq 0}$
$\boxed{a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}}$ $\mid z \mid = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$
$(a+bi)\cdot(a-bi) = (a^2+b^2) + 0i = a^2 + b^2$

$$\begin{aligned} |z| &= \text{Abstand von } z \text{ zu } 0 \\ &= \text{Länge des Vektors, der } z \text{ entspricht} \end{aligned}$$



b) Abstand von $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
$d(z_1, z_2) := \mid z_1 - z_2 \mid$

1.5 Rechenreglen für den Absolutbetrag

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

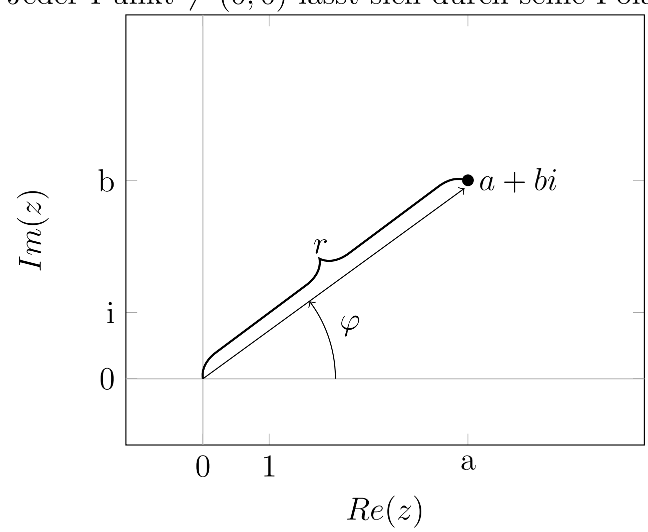
a) $\mid z \mid = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $\mid z_1 \cdot z_2 \mid = |z_1| \cdot |z_2|$

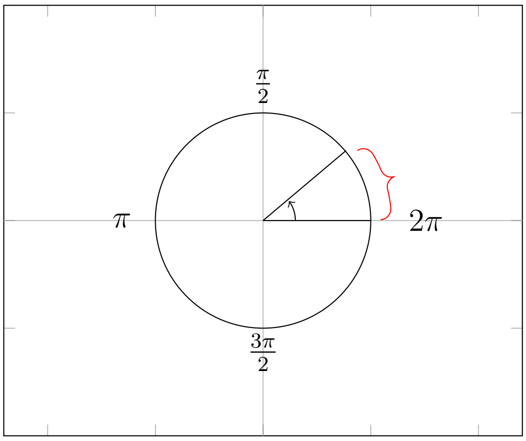
c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$|-z| = |z|$

1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

a) Jeder Punkt $\neq (0,0)$ lässt sich durch seine Polarkoordinaten (r, φ) beschreiben:



$-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes



Umfang:2π
φ in Grad $\widehat{=}\frac{2\pi\cdot\varphi}{360}$ im Bogenmaß
Für Punkte mit kartesischen Koordinaten (0,0) werden als Polarkoordinate (r,φ) verwendet.

b) komplexe Zahl $z = a + ib$

$$
\begin{aligned}
r &= |z| = +\sqrt{a^2+b^2} \\
a &= |z|\cdot\cos(\varphi) \\
b &= |z|\cdot\sin(\varphi) \\
z &= |z|\cdot\cos(\varphi) + i\cdot|z|\cdot\sin(\varphi) \\
z &= |z|(\cdot\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi))
\end{aligned}
$$

Darstellung von z durch Polarkoordinate

Beispiel:

a) $z_1 = 2\cdot(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}))$
$= 2\cdot(0,5\sqrt{2} + i\cdot 0.5\sqrt{2})$

b) $z_2 = 2 + i$
$|z_2| = \sqrt{5}$
$z_2 = \sqrt{5}\cdot(\frac{2}{\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}}i)$ Suche φ mit $0 \leq 2\pi$ mit $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}}z_2 \approx \sqrt{5}\cdot(\cos(0,46) + i\cdot \sin(0,46))$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis:¡ $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

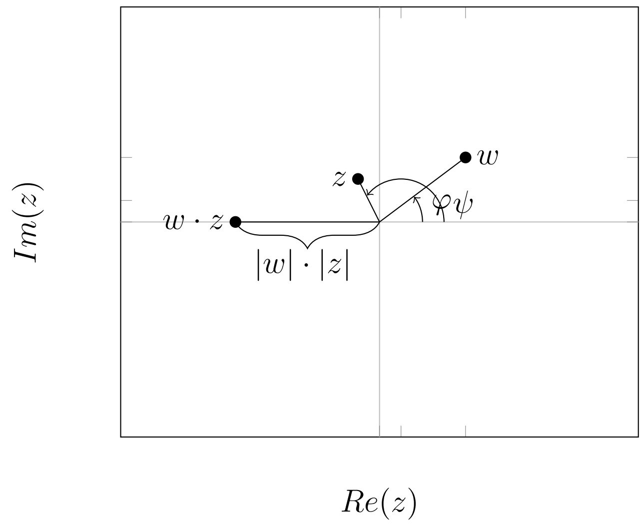
1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

a) $\sin(\varphi+\psi) = \sin(\varphi)\cdot\cos(\psi) + \cos(\varphi)\cdot\sin(\psi)$

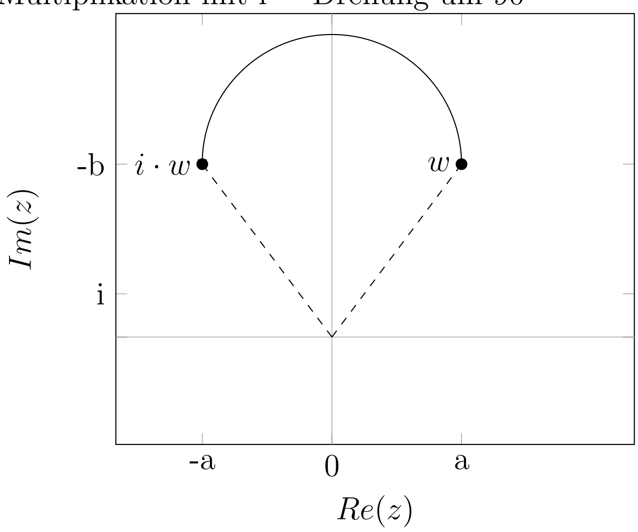
b) $\cos(\varphi+\psi) = \cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) - \sin(\varphi)\cdot sin(\varphi)\cdot\sin(\psi)$

1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a) $w = |w|\cdot(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi))$
$z = |z|\cdot(\cos(\psi) + i\cdot\sin(\psi))$
$w\cdot z = |w|\cdot|z|\cdot(\cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) - \sin(\varphi)\cdot\sin(\psi)) + i(\sin(\varphi)\cdot\cos(\psi) + \cos(\varphi)\cdot\sin(\psi))$
$w\cdot z = |w\cdot z|(\cos(\varphi+\psi) + i\cdot\sin(\varphi+\psi))$



b) $z = i, w = a + ib$
$i \cdot w = -b \cdot ia$
Multiplikation mit i $\widehat{=}$ Drehung um 90°



1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexen Exponentialfunktion einführen.
e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ e = Euler'sche Zahl $\approx 2,718718\ldots$
$e^{z_1} = cde^{z_2} = e^{z_1+z_2}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
Es gilt: $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$
Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}, r = |z|, \varphi$ Winkel
$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ ist Polarform von z.
$z = a + bi$ ist kartesische Form von z. $\bullet(r, \varphi)$ Polarkoordinaten
$|e^{i\varphi}| = +\sqrt{cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$
$e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Punkte auf dem Einheitskreis.
$e^{i\pi} = -1$
$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ Eulersche Gleichung

1.10 Satz

Sei $w =\mid w \mid \cdot(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

a) Ist $m \in \mathbb{Z}$, so ist $w^m =\mid w \mid^m \cdot(\cos(m \cdot \varphi) + i \cdot \sin(m \cdot \varphi))$

$(m < 0 : w^m = \frac{1}{w^{|m|}}), w \neq 0$

b) Quadratwurzeln

c) Ist $n \in \mathbb{N}, w \neq 0$, so gibt es genau n n-te Wurzeln von w :
$\sqrt[n]{w} = + \sqrt[n]{\mid w \mid} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n})), n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Beweis. a) richtig, wenn $m = 0, 1$
$m \geq 2$. Folgt aus $(\star)$
$m = -a$:
$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot \mid w \mid \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$
$= \frac{1}{w} = \frac{1}{midw| \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))}_{=1}} \cdot \mid w \mid \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$
$= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi + i \cdot \sin(-\varphi)) = \mid w \mid^{-1} \cdot (\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi))$

□

1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus i :
$|i| = 1$

$$\text{Nach 1.10 b):} \quad \sqrt{i} = \pm(\cos(\tfrac{\pi}{4} + i \cdot \sin(\tfrac{\pi}{4})) = \pm(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i)$$

1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom
$x^n - w \ (w \in \mathbb{C})$
eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ (sogar n verschiedene wenn $w \neq 0$)
Es gilt sogar : Fundamentalsatz der Algebra
(C. F. Gauß1777-1855)
Jedes Polynom $a_n x^n + \ldots + a_0$
mit irgendwelchen Koeffizienten: $a_n \ldots a_0 \in \mathbb{C}$ hat Nullstelle in $\mathbb{C}$

2 Folgen und Reihen

2.1 Definition

Sei k $\in \mathbb{Z}$, $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$
$(k = 0 A_0 \in \mathbb{N}_0, k = 1, A_n \in \mathbb{N})$
$Abbildung a : A \Rightarrow \mathbb{R}(oder \mathbb{C})$
$m \Rightarrow a_n$
heißt Folge reeller Zahlen
$(a_k, a_{k-1} \ldots)$
Schreibweise:
$(a_m)_{m>k}$ oder einfach (a_m)
a_m heißt m-tes Glied der Folge, m Index

2.2 Beispiel

a) $a_n = 5$ für alle $n > 1$
$(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$

b) $a_n = n$ für alle $n > 1$
(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...)

c) $a_n = \frac{1}{n}$
$(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

d) $a_n \frac{(n+1)^2}{2^n}$
$(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \ldots)$

e) $a_n = (-1)^n$
$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$

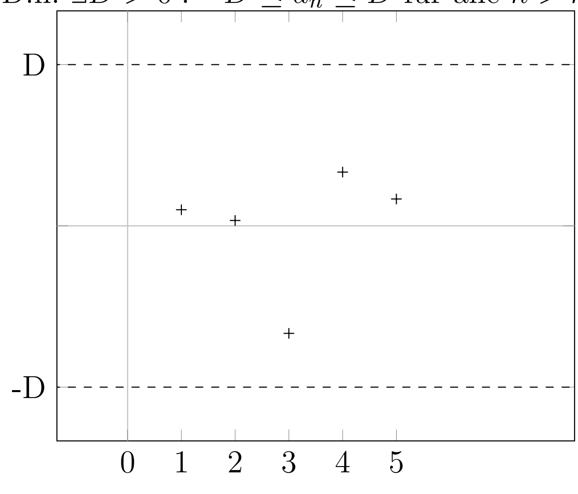
f) $a_n = \frac{1}{2} a_{n_1} = \frac{1}{a_{n-1}}$für $n \geq 2, a_1 = 1$
$(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \ldots)$

g) $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
$(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \ldots)$

h) $a_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$
$(-1, \frac{-1}{2}, -\frac{-5}{6}, \ldots)$

2.3 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n>k}$ heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.
D.h. $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$ für alle $n > k$.



2.4 Definiton

Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt konvergent gegen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (konvergent gegen ε), falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) : \mid a_n - c \mid < \varepsilon$
$c = \lim_{n \Rightarrow \infty} a_n$ (oder einfach $c = \lim a_n$)
c heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge (a_n)
(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))
Eine Folge die gegen 0 konvertiert, heißt Nullfolge

2.5 Beispiele

a) $r \in \mathbb{R} : a_n = r$ für alle $n \geq 1$
$(r, r, \ldots)$
$\lim_{n \Rightarrow \infty} = r$
$\mid a_n - r \mid = 0$ für alle n
Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man $n(\varepsilon) = 1$ wählen

b) $a_n = n$ für alle $n \ \geq 1$
Folgte ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

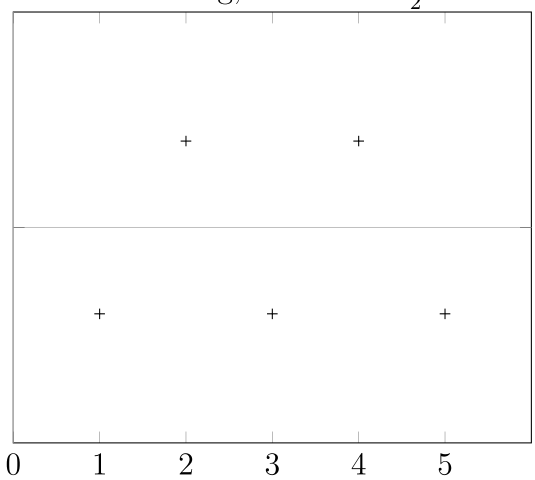
c) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$
(a_n) ist Nullfolge.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Suche Index $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - o| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$
D.s. es muss gelten.
$\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$
Ich brauche : $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$
Ich brauche $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$
Aus Mathe I folgt, dass solch ein $n(\varepsilon)$ existiert.
z.B $n(\varepsilon) - \lceil \frac{1}{2} \rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$
Dann:
$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$

d) $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$ für lle $n \geq 1$
Behauptung: $\lim_{n \Rightarrow \infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a - 3| &= \left|\frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3\right| &&= \left|\frac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1}\right| \\ &= \left|\frac{-3n-2}{n^2+n+1}\right| &&= \frac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Benötigt wird $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ für alle $n > n(\varepsilon)$.
$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$
Wähle $n(\varepsilon)$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$
Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$.
$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$
Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

e) $a_n = (-1)^n$ beschränkte Folge $-1 \leq a_{\leq} 1$ konvergiert nicht.
Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$



$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{1}$ ↯

2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: $2.5_{e)}$)

Beweis. Sei $c = \lim a_n$, wähle $\varepsilon = 1$,
Es existiert $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - c| < 1$ für alle $n \geq n(1)$
Dann ist
$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c|$ für alle $n \geq n(1)$
$M = max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \ldots, |a_{n(1)-1}), 1 + |c|\}$
Dann: $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq k$
$-M \leq a_n \leq M$ □

2.7 Bemerkung

a) $(a_n)_{n\geq 1}$ Nullfolge $\Leftrightarrow$ $(|a_n|)_{n\geq 1}$ Nullfolge $(|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0||$

b) $\lim_{n\Rightarrow\infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n\geq k}$ ist Nullfolge $\Leftrightarrow (|a_n - c|)_{n\geq k}$ ist Nullfolge

2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien $(a_n)_{n\geq k}$ und $(b_n)_{n\geq k}$ konvergente Folgen, $\lim a_n = c, \lim b_n = d$.

a) $\lim|a_n| = |c|$

b) $\lim(a_n \pm b_n) = c \pm d$

c) $\lim(a_n \cdot b_n) = c \cdot d$
insbesondere $\lim(r \cdot b_N) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.

d) Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$ und ist $d \neq 0$, so $\lim(\frac{a_n}{k_n}) = \frac{c}{d}$

e) Ist (b_n) Nullfolge, $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$, so konvergiert $(\frac{1}{b_n}$ <u>nicht</u>!.

f) Existiert $m \geq k$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$, so ist $c \leq d$.

g) Ist $(c_n)_{n\geq k}$ Folge und existiert $m \geq k$ mit $0 \leq c_n \leq a_n$ für alle $n \geq m$ und ist (a_n) eine Nullfolge, so ist auch (c_n) eine Nullfolge.

h) Ist $(c_n)_{n\geq l}$ beschränkte Folge und ist $(a_n)_{n\geq k}$ Nullfolge, so ist auch $(c_n \cdot a_n)_{n\geq k}$ Nullfolge.
$\boxed{c_n \text{ muss nicht konvergieren!}}$

Beweis. Exemplarisch:

b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$ und $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$ und $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$
$|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$
Suche $n(\varepsilon) = max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}, n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$
Dann gilt für alle $n > n(\varepsilon)$:
$|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

f) Angenommen $c > d$. Setze $\delta = c - d > 0$
Es existiert $\tilde{m} \geq m$ mit $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$
und $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq \tilde{m}$.
Für diese n gilt:
$0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$ nach Voraussetzung
$= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$
$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta ↯$

$\square$

2.9 Satz

a) $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge

b) Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $((\frac{1}{n^m})_{n\geq 1}$ Nullfolge.

c) Sei $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$
Dann ist $(n^m \cdot q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge

d) Ist $r > 1, m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{n^m}{r^n}{}_{r\geq 1}$ eine Nullfolge

e) $P(x) = a_m \cdot x^m + \ldots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$
$Q(x) = b_e \cdot x^e + \ldots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$
Sei $Q(n) \neq 0$ für alle $n \geq k$.

- Ist $m > e$, so ist $\frac{P(n)}{Q(n)}$ nicht konvergent
- Ist $m = e$, so ist $\lim_{n \Rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$
- Ist $m < l$, so ist$(\frac{P(n)}{Q(n)})$ ein Nullfolge

a) Sei $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n\geq}$ eine Nullfolge

Beweis. a) Richtig für $q > 0$. Sei jetzt $q > 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Mathe I: Es gibt ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $q^{n(\varepsilon} < \varepsilon$.
Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt: $|q^n - o| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

$\square$

b) 2.5.c): $\frac{1}{n}{}_{n\geq 1}$ Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

c) Richtig für $q = 0$. Sei jetzt $q > 0$.
<u>1.Fall</u>: m= 1
$\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0.$
$(t+1)^n \underbrace{=}_{Binomialsatz} 1 + nt + \frac{n(n+1)}{2}t^2 > \frac{n(n-1)}{2}t^2$ für alle $n \geq 2$
$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$
$0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftarrow$ Nullfolge 2.5e),2.8e)
Nach 2.9g) ist $(n \cdot q^n)_{n\geq q}$ Nullfolge, also auch $(n \cdot q^n)_{n\geq 1}$.
<u>2.Fall</u>: $m > 1$.
Setze $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
n^m \cdot q^n &= n^m \cdot (q')^n)^m)^n \\
&= (n \cdot (q')^n)^m)^n)m = 1 \text{anwenden}
\end{aligned}
$$

$0 < q' < 1$
$(n^m + q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge noch Fall $m = 1$ und 2.8e)

d) Folgt aus c) und $q = \frac{1}{r}$

e) Ist $m \leq l$, so ist $\frac{P(n(}{Q(n)} = \frac{n^m(a_m+a_{m-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots+a_1\cdot\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\cdot\frac{1}{n^m})}{n^l(b_l+b_{l-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots+b_1\cdot\frac{1}{n^{l-1}}+b_0\cdot\frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$
$(I) \longrightarrow a_m, (II) \longrightarrow b_l \; \frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{a_m}{b_l}$
$n < l, \frac{1}{n^{l-m}}$ Nullfolge
$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$
$m > l$:
Beh. folgt aus Fall $m < l$ und 2.8e).

2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, der Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.
$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$
$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$
$a_n \leq x \leq b_n$
$0 < b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$
$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0-a_n}{2} \Leftarrow$ Nullfolge (2.9b)
$2.8e)(|x - a_n|)$ Nullfolge.
2.7e): $\lim_{n\to\infty} a_n = x$
Analog: $\lim_{n\to\infty} b_n = x$
2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

2.11 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt strikt positiv, falls $a_n > 0$ für alle $n \geq k$.
Sei im Folgenden $(a_n)_{n\geq k}$ eine strikt positive Folge.

b) $$\begin{aligned} \mathbb{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n\geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n\geq k} \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

c) $O(a_n) = \{(b_n)_{n\geq k} : (\frac{b_n}{a_n}\text{ist Nullfolge}\}$
$(b_n) \in o(a_n)$ heißt Folge (a_n) wächst wesentlich schneller als die Folge (b_n). Klar: $o(a_n) \subset O(a_n)$
$O, o($ „groß Oh“, „klein Oh“)
Landau-Symbole

$$\begin{array}{llll} \text{z.B} \quad (n^2) & \in & o(n^3) & \\ (n^2+n+1) & \in & O(n^2) & n^2+n+1 \leq 3n^2 \\ (n^2) & \in & O(n^2+n+1) & n^2 \leq n^2+n+1 \end{array}$$

$O(1) =$ Menge der beschränkten Folgen
$o(1) =$ Menge aller Nullfolgen
Häufig gewählte schreibweise:
$n^2 \underbrace{=}_{\text{eig. falsch!}} o(n^2)$ statt $(n^2) \in o(n^3)$
$n^2 + n + 1 = O(n^2)$ statt $(n^2 + n + 1)$

2.12 Satz

Sei $P(x) = a_m \cdot x^m + \ldots + a_1 \cdot x + a_o, m \geq 0, a_m \neq 0$.

a) $(P(n)) \in o(n!)$ für alle $l > m$ und
$(P(n)) \in O(n')$ für alle $l \geq m$.

b) ist $r > 1$, so ist $(P(n)) \in o(r^n)$.
$[(r^n)$ wächst deutlich schneller als $(P(n))]$

Beweis. a) folgt aus 2.9e).
$m = l$ (2.6)
b) folgt aus 2.9d) und 2.8 b)c) □

2.13 Bemerkung

Algorihmus:
Sei t_n = maximale Anzahl von Reihenschritten des Algorithmus' bei Input der Länge n (binär codiert)
Worst-Case-Komplexität:
Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $(t_n) \in O(n^l)$. (gutartig)
Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existert mind. exponentielle Zeitkomplexität, falls $r > 1$ exestiert mit $(r^n) \in O(b_n)$ (bösartig)

2.14 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt monoton wachsend (steigend), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$. Sei heißt steng monoton wachsend (steigend), wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq k$

b) $(a_n)_{n \geq k}$ heißt monoton fallend, falls $a \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$

2.15 Beispiel

a) $a_n = 1$ für alle $n > 1 (a_n)$ ist monoton steigend und monoton fallend.

b) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$.
(a_n) streng monoton fallend.

c) $a_n = \sqrt{n}$ (positive Wuzel)
$(a_n) n \geq 1$ streng monoton steigend.

d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$
$(a_n)_{n \geq 1}$ streng monoton steigend.

e) $a_n = (-1)^n, n \geq 1$
(a_n) ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

2.16 Satz

a) Ist $(a_n)_{n \geq k}$ monoton steigend und nach oben beschränkt (d.h es exestiert $D \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq D$ für alle $n \geq k$), so konvergiert $(a_n)'$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$

b) $(a_n)_{n \geq k}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n \geq k}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$.

Beweis. a)
$c \sup\{a_n : n \geq k\}$. existiert (Mathe I). Zeige: $\lim\limits_{a_n} = c$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n(\varepsilon)$ mit $c - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq c$
Denn sonst $a_n \leq c - \varepsilon$ für alle $n \geq k$ und $c - \varepsilon$ wäre obere Schranke für $\{a_n : n \geq k\}$ Widerspruch dazu, dass c kleinste obere Schranke. Für alle $n \geq n(\varepsilon)$
$c - \varepsilon \leq a_{n(\varepsilon)} \leq a_n \leq c$
$|a_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$.
b) analog □

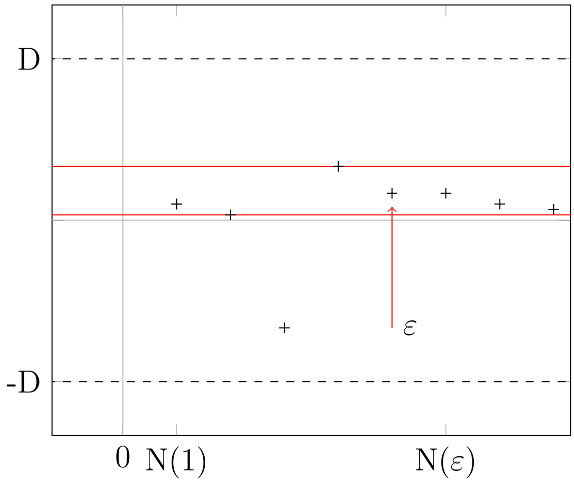
2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

(Cauchy, 1789 - 1859)

Sei $(a_n)_{n\geq k}$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

(1) $(a_n)_{n\geq k}$ konvergent

(2) $\forall\varepsilon > 0 \exists\ N - M(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$ (Cauchyfolge)
Grenzwert muss nicht bekannt sein!



2.18 Definition

a) Sei $(a_i)_{i\geq k}$ eine Folge, $s_n \sum\limits_{i=k}^{n} a_i, n \geq k$ (Partiealsummen der Folge)
Dann heißt $(s_n)_{n\geq k}$ eine unendliche Reihe
$(k-1 : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_2, \ldots)$
Schreibweise : $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$

b) Ist die Folge $(s_n)_{n\geq k}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = c$,
so schreibt man $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = c$. Reihe konvergiert.
Wenn (s_n) nicht konvergiert, so heißt die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ divergent.
(Zwei Bedeutungen von $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$:

- Folge der Partialsummen

- Grenzwert von (s_n), falls dieser existiert

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \sum_{n=k}^{\infty} a_n = (s_m)_{m\geq k}$$

2.19 Satz

a) Ist die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_1$ konvergent, so ist $(a_1)_{i\geq k}$ eine Nullfolge.

b) Ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ beschränkt und ist $a_i \geq 0$ für alle i, so ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis. a)

Sei $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = c$.

Sei $\varepsilon > 0$ Dann existiert $n(\frac{\varepsilon}{2}) \geq k$ mit $|\sum\limits_{i=k}^{\infty} 2a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n(\frac{\varepsilon}{2})$

Dann gilt $|a_{n+1} - o| = |an + 1| = |\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i + \sum\limits_{i=k}^{n} a_i| =$

$|\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i + c - \sum\limits_{i=k}^{n} a_i + c| \leq |\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i + c| + |\sum\limits_{i=k}^{n} a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

(a_n) ist Nullfolge

b) folgt aus 2.16a), denn (s_n) ist monoton steigend □

2.20 Beispiele

a) Sei $q \in \mathbb{R}$.

Ist $q \neq 1$, so ist $\sum\limits_{i=k}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$\left[(\sum\limits_{i=k}^{n} q^i) \cdot (q-1)\right]$

Sei $|q| < 1$, d.h $-1 < q < 1$.

Dann ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ (konvergiert)

$s_n = \sum\limits_{i=k}^{n} q^1 = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to} \frac{q^{n+1}=1}{q-1}$

(q^n) Nullfolge $(2.9_{a)}$ für $q \geq 0, 2.8_{e}) + 2.9_{a)}$ für $q < 0, q = -|q|)$

<u>Geomtetrische Reihe</u>

Sei $|q| \geq 1$. Dann ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} q^i$ divergent, da dann (q^i) keine Nullfolge $(2.18_{a)})$

b) $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert

<u>harmonische Reihe</u>

$\sum\limits_{i=k}^{n} \frac{1}{n}$

$n \quad = 2^0 \quad = 1 \quad : s_1 = 1$

$n \quad = 2^1 \quad = 2 \quad : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$

...

$n \quad = 2^3 \quad = 8 \quad : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_7 > s_6 \ldots$

Per Induktion zu beweisen!

c) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Folge der Partialsummen ist monoton steigend.

2.16a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen nach aber beschränkt ist.

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^n-1} &= 1 + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{7^2}) + \ldots + (\tfrac{1}{(2^{n-1})^2} + \ldots \tfrac{1}{(2^n-1)^2}) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \tfrac{2}{2^2} + 4 \cdot \tfrac{1}{4^4} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \tfrac{1}{(2^{n-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^i} = \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

2.16a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ Kgt., Grenzwert≤ 2. (später: Grenzwert ist $\frac{\pi^2}{6}$)

Es gilt allgemeiner:

$s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert.

Allgemeiner: $s \in \mathbb{R}, s > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{i^2}$ konvergiert

d) $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ konvergiert:

$s_{2n} = \underbrace{(-1 + \frac{1}{2})}_{<0} + \underbrace{(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}_{<0} + \ldots \underbrace{(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n})}_{<0}$

$s_{2n} \leq s2(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

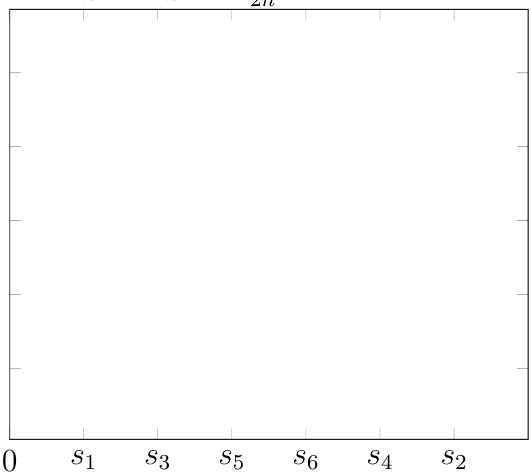
(s_{2n}) ist monoton fallend. $s_{2n-1} = -1 + \underbrace{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})}_{>0} + \ldots + \underbrace{(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1})}_{>0}$

(s_{2n-1}) ist monoton wachsend

Ist k ungerade, so ist $s_k < s_l$: Wähle n so, dass $2n - a \geq k, 2n \geq l$

$s_k \underset{(2)}{\leq} s_{2n-1} \underset{\uparrow}{<} s_{2n} \underset{(1)}{\leq} s_l$

$s_{2n} = s_{2n-1} + \frac{1}{2n}$



Abstand $s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n}$ geht gegen 0.

$\sup\{s_{2n-1} : n \geq 1\}$

$\inf\{s_{2n} : n \geq 1\}$

$= \lim_{i \leftarrow \infty} (-1^i)\frac{1}{i} \in]-1, -\frac{1}{2}[$ (Es gilt $limes = -\ln 2$)

Bemerkung

Was bedeutet $0.\bar{8} = 0.88888888\ldots$? (Dezimalsystem)

$0.\bar{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \ldots = 8 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = 8 \cdot (\frac{10}{9} - 1) = \frac{8}{9}$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$

2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine mononton fallende Nullfolge (ins besondere $a_i \geq 0$ falls $i \geq k$), so ist $\sum_{i=k}^{\infty}(-1)^i a_i$ konvergent.

2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_i)_{i \geq k}$, $(b_i)_{i \geq k}$ Folgen, wobei $b_i \geq 0$ für alle $i \geq k$ und $|a_i| \leq b_i$ für alle $i \geq k$. Dann gilt

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent, so auch $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$. Für die Grenzwerte gilt:

$|\sum_{i=k}^{\infty} a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$

Beweis. Konvergenz
von $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ folgt aus 2.16 a).
$\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$ folgt aus 2.8 f).
Sei $m > n$:
$|\sum_{i=k}^{m} a_i - \sum_{i=k}^{n} b_i| = \sum_{i=n+1}^{m} a_i \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| = |\sum_{i=k}^{m} |a_i| - \sum_{i=k}^{n} |a_i||$
Mit Cauchy-Kriterium 2.17 folgt daher aus der Konvergenz von $\sum_{i=k}^{m} |a_i|$ auch die von $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$.

□

2.23 Beispiel

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$
$\sqrt{i} \leq i$ für alle $i \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
Ang. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$ konvergiert. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ konvergiert. ↯
Widerspruch zu 2.20 b)

$a_i = (-1)^i \frac{1}{i}$
2.20d): $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, aber $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert nicht. ($\star$)

2.24 Definition

$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt <u>absolut konvergent</u>, falls $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.
(Falls alle $a_i \geq 0$: Konvergent = absolut Konvergent)

2.25 Korollar

Ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, sp ist auch konvergiert. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.
<u>Beweis</u>: 1.Behauptung 2.22 mit $b_i = |a_i|$
Umkehrung siehe ($\star$)

Bermerkung

Was bedeutet $0, a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$
$a_i \in \{0 \ldots 9\}$ (Dezimalsystem)
$a_1 \cdot \frac{1}{10} a_2 \cdot \frac{1}{100} \ldots a_n \cdot \frac{1}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10} 9 \cdot \frac{1}{100} \ldots 9 \cdot \cdot \frac{1}{10^n}$
$a_i \frac{1}{10} \leq 9 \frac{1}{10}$
$\sum_{i=k}^{\infty} 9 \frac{1}{10} = 9 \cdot (\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1) = 1 \Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \frac{1}{10}$ konvergiert

2.26 Satz

Sei $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ eine Reihe.

a) Wurzelkriterium
Existiert $q < 1$ und ein Index i_0, so dass $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ für alle $i \geq i_0$.
so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.
Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele im so divergiert $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$.

b) Quotientenkriterium
Existiert $q > 1$ und ein Index i_0, so dass $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \leq$ für alle $i \geq i_0$,
so konvergiert $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Beweis.

a) $|a_i| \leq q^i$ für alle $i \geq i_0$

$\sum\limits_{i=i_0}^{\infty} q^i$ konvergiert (2.20 a))

$\underset{2.22}{\Rightarrow} \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert

$\Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i

$\Rightarrow |a_i| \geq 1$ für unendlich viele i

$\Rightarrow (a_i)$ sind keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ divergiert.

b) Sei $i \geq i_0$.
$|\frac{a_i}{a_{i0}}| = |\frac{a_i}{a_{i-1}}| \cdot |\frac{a_i}{a_{i-2}}| \cdot \ldots \cdot |\frac{a_{io+1}}{a_{i0}}| \leq q \cdot q \cdot \ldots \leq = q^{i-i0} = \frac{q^i}{q^{i0}}$
$\uparrow$ Voraussetzung:
jeder dieser Quotienten ist $\leq q$

$|a_i| \leq \underbrace{\frac{|a_i 0|}{q^{i0}}}_{=:c} \cdot q^i$ $\qquad$ $\sum\limits_{i=i_0}^{\infty} c \cdot q^i$ konvergent

$\underset{2.22}{\Rightarrow} \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

$\Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert

$\square$

2.27 Bemerkung

a) Es reicht <u>nicht</u> in 2.26 nur vorauszusetzen, dass $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für alle $i \geq i_o$ bzw. $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$ für alle $i \geq i_0$.

z.B. harmonische Reihen : $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert.

<u>Aber</u>: $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} > 1$ für alle i.

$\frac{i}{i+1} < 1$ für alle i

b) Es gibt Beispiele von absolut konvergenten Reihen mit $|\frac{a_{i+1}}{a_i}|$ für unendlich viele i.

2.28 Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ absolut $(0^0 = 1, 0! = 1)$:
Quotientenkriterium:
$|\frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i}| = |fracxi + 1| = \frac{|x|}{i+1}$ Wähle i_o, so dass $i_0 + 1 > 2 \cdot |x|$
Für alle $i \geq i_0$:
$\frac{|x|}{(i+1)} \leq \frac{|x|}{(i_0+1)} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q.$

2.29 Bemerkung

Gegeben seien zwei endliche Summen
$\sum\limits_{a_n}^{k} n = 0, \sum\limits_{b_n}^{l} n = 0.$
$(\sum\limits_{a_n}^{k} n = 0)(\sum\limits_{b_n}^{l} n = 0) \quad (\star)$
Distributivgesetz: Multipliziere a_i mit jedem b_i und addiere diese Produkte.

$$(\star) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Indexsumme 0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Indexsumme 2}} + \ldots + \underbrace{a_k b_l}_{\text{Indexsumme k+l}}$$

2.30 Definition

Seien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n$ unendliche Reihen.

Das <u>Cauchy-Produkt</u>(<u>Faltungsprodukt</u>) der beiden Reihen ist die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_n$, wobei $c_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_{n-1} = a_0 b_n + a b_{n-1} + \ldots a_n b_0$

2.31 Satz

Sind $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent Reihen mit Grenzwert c, d, so ist das Cauchy Produkt auch absolut konvergent mit Grenzwert $c \cdot d$.

Beweis: Kreußler, Phister Satz 33.16

3 Potenzreihen

3.1 Definition

Seit (b_n) eine reelle Zahlenfolge, $a \in \Re$

Dann heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$ eine <u>Potenzreihe</u> (mit <u>Entwicklungspunkt</u> a)) Speziell: $a = 0$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
(Potenzreihe im Engeren Sinne)
Hauptfolge: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konv. die Potenzreihe (absolut)?
Suche für $x = a$
Dann Grenzwert b_0 (da $0^0 = 1$)
Ob Potenzreihe für andere x konvergiert, hängt von b_n ab!

3.2 Beispiel

a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^n (b_n = 1 \text{ für alle } n)$
geometrische Reihe, konvergiert für alle $x \in \,]-1, 1[$

b) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n (b_n = 2^n) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$ konvergiert genau dann nach a), wenn $|2x| < 1$, d.h $|x| < \frac{1}{2}$ d.h. $x \in]-0.5, 0.5[$

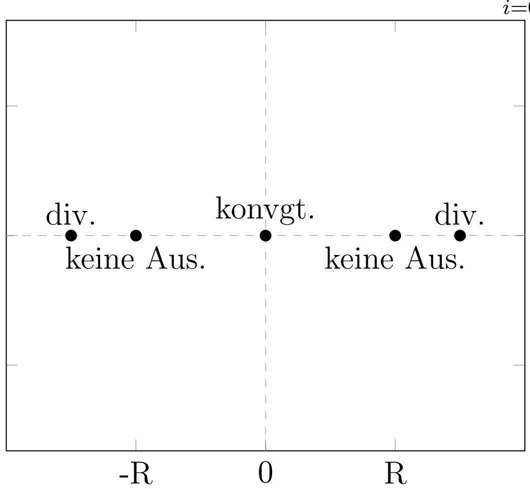
c) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n})$
konvergiert für alle x, $x \in]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

3.3 Satz

Sei $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ eine Potenzreihe (um 0). Dawnn gibt es $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, R \geq 0$, so dass gilt.

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < R$ konvergiert Potenzreihe absolut (d.h. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert, dann auch $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$)
Falls $R = \infty$, so heißt das, dass Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ divergiert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$



$(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty)$ (Für $|x| = R$ lassen sich keine allgeine Aussagen treffen).
R heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
Konvergenzintervall $< -R, R >$

besteht aus allen x für die $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert.
$<$ kann [oder] bedeuten.
$>$ kann] oder [bedeuten.

Beweis. $|x_1, x_2|\mathbb{R}, |x_1| \leq |x_2|$
Dann: Falls $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|b_n| \cdot |x_n|^n$ konvergiert, so auch$\sum\limits_{i=0}^{\infty}|b_n| \cdot |x_n|^n$ (2.22) $(\star)$
Falls $\sum b_n \cdot x_n$ für alle x absolut konvergiert, so setze $R = \infty$
Wenn nicht, so setze $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{i=0}^{\infty}|b_n| \cdot |x_n| \text{ konvergiert}\} < \infty$ Nach $(\star)$ gilt: $|x| < R \Rightarrow \sum b_n x^n$ konvergiert absolut.
Für $|x| > R$ konvergiert $\sum b_n x^n$ nicht absolut.
Sie konvergiert sogar selbst nicht. (WHK 5.37)

$$\sqrt[n]{|b_n| \cdot |x|^n} \leq q < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \; |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \; \lim_{n\to\infty} |x_n| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

$$\uparrow \; (\text{setze } \varepsilon = 1 - \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \; |x| < \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : s - \tfrac{\varepsilon}{2} < |x| \cdot \sqrt[n]{b_n} \leq s + \tfrac{\varepsilon}{2} =: q < 1$$

□

3.4 Bemerkung

Konvergenz von Potenzreihen der Form $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$:
gleichen Konvergenzradius R wie $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
konvergiert absolut für $|x-a| < R$, d.h $x \in \,]a-R, a+R[$ Divergiert für $|x-a| > R$.
Keine Aussage für $|x-a| = R$, d.h $x = a-R$ oder $x = a+R$
Konvergenzintervall $< a-R, a+R >$

3.5 Die Exponentialreihe

a) Exponentialreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!} (b_n = \tfrac{1}{n!})$$

2.28 Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setze für $x \in \mathbb{R} : \exp(x) := \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
Exponentialfunktion $\exp(0) = \frac{0^n}{0!} = 1$

b) Serien $x, y \in \mathbb{R}$

$\exp(x) \cdot \exp(y) \underset{2.31}{=}$ Limes des Cauchy Produkts der beiden Reihen.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot x^i \cdot y^{n-i}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \cdot x \cdot y^{n-i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n}! \cdot (x+y)^n = \text{exp(x+y)}$$

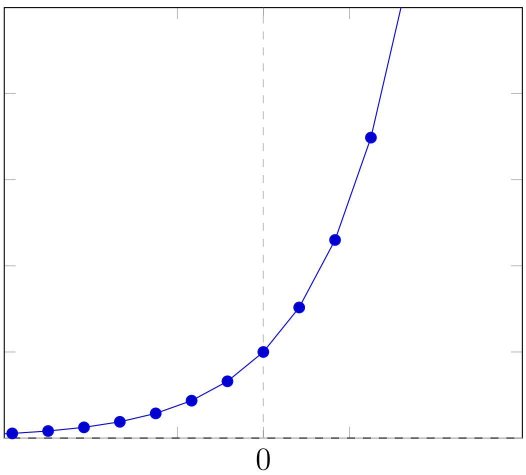
$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \text{ für alle x,y} \in \mathbb{R}}$

Daraus folgt: $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \text{ für alle x} \in \mathbb{R}} (\star)$

Für alle x $\geq 0 : \exp(x) > 0$. Dann auch wegen $(\star)$

$\boxed{\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}}$



c) $\exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

<u>Eulersche Zahl</u> Approximation e durch $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\begin{array}{lll} m = 2 & 1 + 1 + \frac{1}{2} & = 2,5 \\ m = 3 & 2,5 + \frac{1}{6} & = 2,\bar{6} \\ ...m = 6 & \frac{326}{126} + \frac{1}{720} & = 2,7180\bar{5} \end{array}$ Es ist: $e \approx 2,71828\ldots$

(irrationale Zahl)

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert schnell

$m \in \mathbb{N}$

$\exp(m) = \exp(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\leftarrow m \rightarrow})$

$\exp(1)^m = e^m$

$e^0 = 1$ $\exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = e^{-m}$

$n \neq 0, n \in \mathbb{N}:$

$e = \exp(1) = \exp(\frac{n}{n}) = \exp(\frac{1}{n}^n)$

$\exp(\frac{1}{n}) = +\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$

$\exp(\frac{m}{n}) = e^{\frac{m}{n}}.$

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ stimmt $\exp(x)$ mit der 'normalen' Potenz e^x überein.

Dann definiert man für beliebige $x \in R$:

$\boxed{e^x := \exp(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$

In kürze: Definition a^x für $a > 0, x \in \mathbb{R}$

d) Bei komplexen Zahlen kam e^{it} $(i^2 = -1, t \in \mathbb{R})$ vor als Abkürzung für $\cos(t) + i\sin(t)$
Tatsächlich kann auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ definieren $e^z = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
Dabei: Konvergenz von Folgen/Reihen in $\mathbb{C}$ wie in $\mathbb{R}$ mit komplexen Absolutbetrag.
Man kann dann zeigen:
$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
Dass tatsächlich dann gilt:
$e^{it} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + \sin(t)$. zeigen wir später

2.718...) Man kann zeigen.
$\underline{e = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + (\frac{1}{n})^n)}$
Bedeutung:

- Angelegtes Guthaben G wird in einem Jahr mit 100% verzinst. Guthaben am Ende eines Jahres $2G (= G(1+1)$
- Angelegtes Geld wird jedes halbe Jahr mit 50% verzinst. Am Ende eines Jahres (mit Zinsenzinsen)
  $G(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) = 2,25G$
  n- mal pro Jahr mit $\frac{100}{n}$% verzinsen. Am Ende desx Jahres $G(1 + \frac{1}{n})^n$.
  $\lim\limits_{n \to \infty} G(1 + \frac{1}{n})^n = e \cdot G \approx 2.718 \ldots \cdot G$ (stetige Verzinsung)
  $a\%$ statt $100\% \cdot Ge^{\frac{a}{100}}$

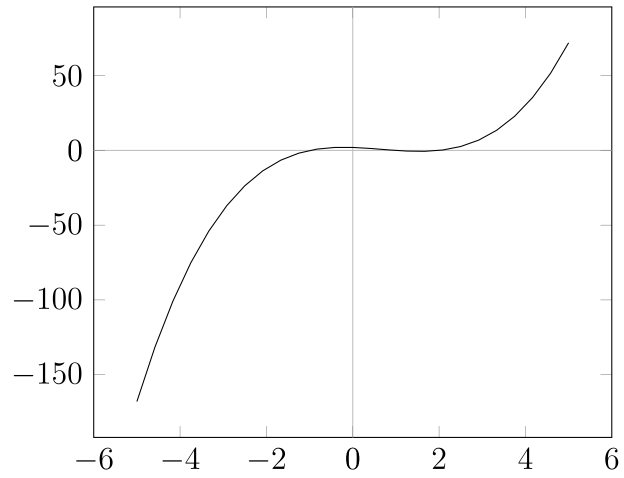
4 Reele Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

4.1 Definition

<u>Reele Funktionen f ein einer Variablen</u> ist Abbildung
$f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ (D = Definitionsbereich).
Typisch: $D = \mathbb{R}$, Intervall, Verschachtelung von Intervallen

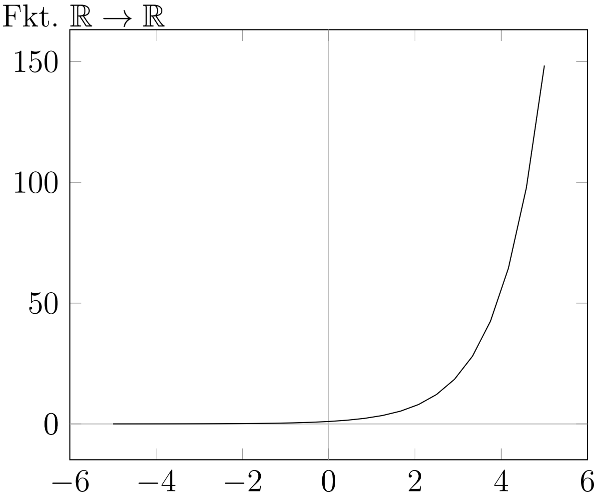
4.2 Beispiel

a) <u>Polynomfunktionen</u> (ganzrationale Funktion, Polynome)
$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to a_n \cdot x^n + \ldots a_1 x + a_0 \end{cases}$
$f(x) = a_n \cdot x^n + \ldots a_1 \cdot x + q$
$a_n \neq 0 : n =$ Grad (f) f $= 0$ (Nullfunktion), Grad$(f) = \infty$
Grad 0: konstante Funktionen $\neq 0$
Graph von f:
z.B. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$



b) $f, g : D \to R$ $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ für alle $x \in D$
Summe: Differenz, Produkt von f und g.
Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so Quotient. $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$,
Quotient von Polynomen = (gebrochen-)rationalen Funktionen
$|f|(x) := |f(x)|$ Betrag von f.

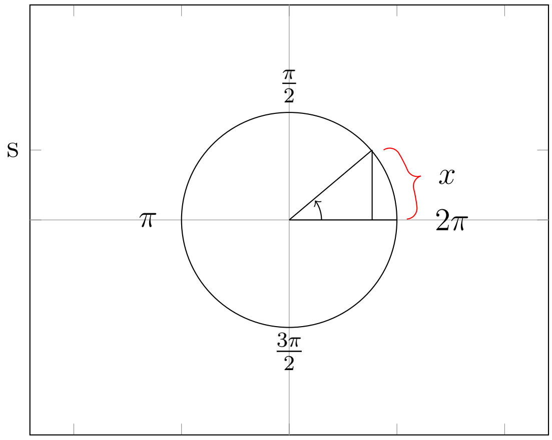
c) Potenzreihe definiert Funktion auf ihrem Konvergenzintervall.
z.B : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
Fkt. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



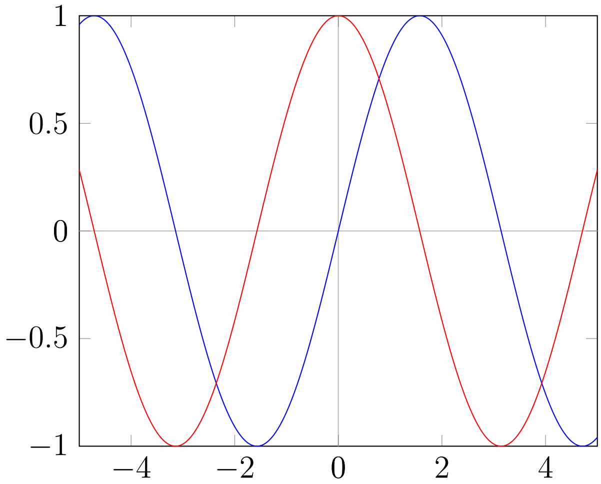
d) Hintereinanderausführung von Funktionen:
$f : D_1 \to \mathbb{R}, g : D_2 \to \mathbb{R} f(D_1) \subset f(D_2)$, dann $g \circ f$:
$$\begin{cases} D_1 \Rightarrow & \mathbb{R} \\ x \to & g(f(x)) \end{cases}$$

e) $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^2 x + 1$
$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = e^{x^2+1}$

f) Trigonometrische Funktionen: Sinus- und Cosinusfunktion (vgl. $\mathbb{C}$)



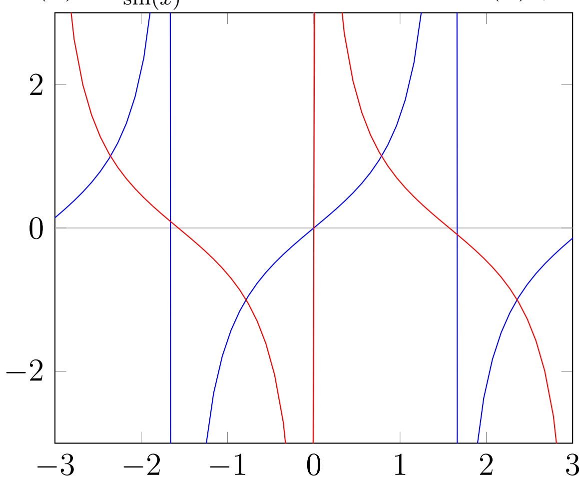
$0 \geq x \geq 2\pi$ x = Bogenmaß von φ in Grad, so $x = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi$
$\sin(x) = s, \cos(x) = c$ Für beliebig $x \in \mathbb{R}$:
Periodische Fortsetzung, d.h. $x \in \mathbb{R}. x = x' + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}, x' \in [0, 2\pi[$
$\sin(x) := \sin(x')$
$\cos(x) := \cos(x')$



$|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tangens und Cotangensfunktion

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) \neq 0$

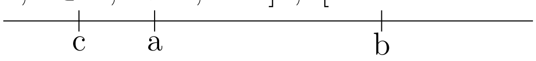


4.3 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ heißt Adharenzpunkt von D, falls es eine Folge $(a_n)_n, a_n \in D$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ gibt.
$\bar{D} =$ Menge der Adharenzpunkte von D
$\quad =$ Abschluss von D
klar: $D \subset \bar{D}$.
$d \in D$. konstante Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = d$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} d = d$.
Also: $d \in \bar{D}$.

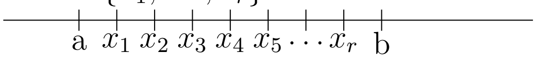
4.4 Beispiel

a) $a, b \in \mathbb{R}, a > b, D =]a, b[$



$\bar{D} = [a, b] D \in \bar{D}$
$a \in \bar{D}$
$a_n = a + \frac{b-a}{n} \in D, n \geq 2$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Also $[a, b] \subset \bar{D}$.
Ist $c \notin [a, b]$,etwa $c < a$, dann ist $|a_n - c| \geq a - c > 0$ für alle $a_n \in]a, b[$ Also: $\lim\limits_{a_n} \neq c$

b) $\mathcal{I}$ Intervall in $\mathbb{R}, x_1, \ldots, x_r \in \mathcal{I}$,
$D = \mathcal{I}\ \{x_1, \ldots, x_r\}$



$\bar{D} = \bar{\mathcal{I}} = [a, b]$,
falls $\mathcal{I} = < a, b >$.

c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

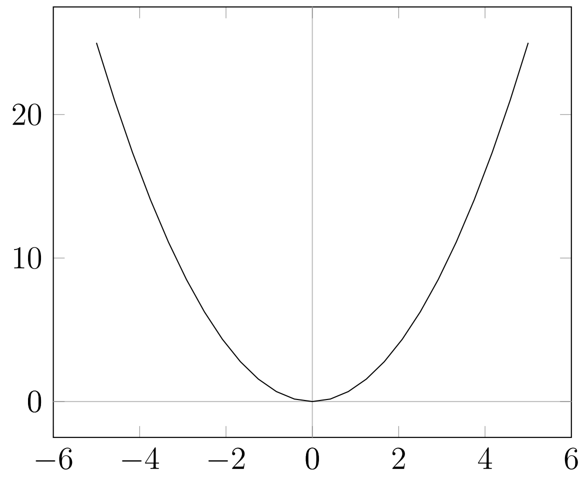
4.5 Definition

$f : D \to, c \in \bar{D}$.
$d \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f(x) für x gegen c,$d = \lim\limits_{x\to c}$, wenn für jede Folge $(a_n) \in D$, die gegen c konvergiert, die Bildfolge $(f(a_n))_n$ gegen d konvergiert.

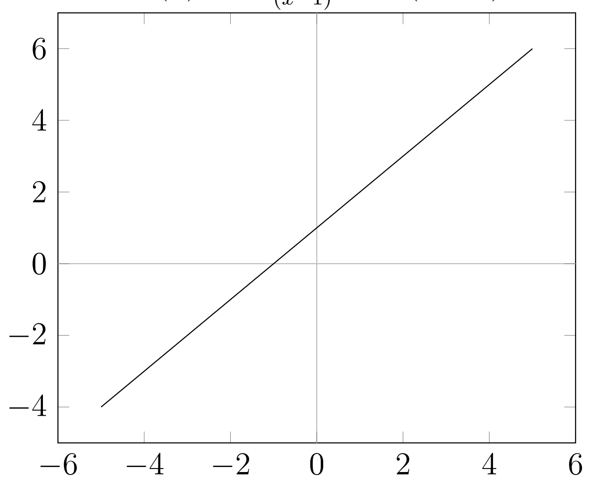
4.6 Beispiel

a) Sei $f(x) = b_k x^k + \ldots + b_1 x + b_0$, eine Polynomsfunktion, $c \in \mathbb{R}$. Sei (a_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} b_k x^k + \ldots + b_1 x + b_0 \\
&= b_k(\lim_{n\to\infty} a_n)^k + b_{k-1} \cdot (\lim_{n\to\infty} a_n)^{k-1} + \ldots + b_0 \qquad \text{Rechenregeln für Folgen, 2.8} \\
&= b_k \cdot c^k + b_{k-1} \cdot c^{k-1} + \ldots + b_1 \cdot c + b_0 = f(c).
\end{aligned}$$

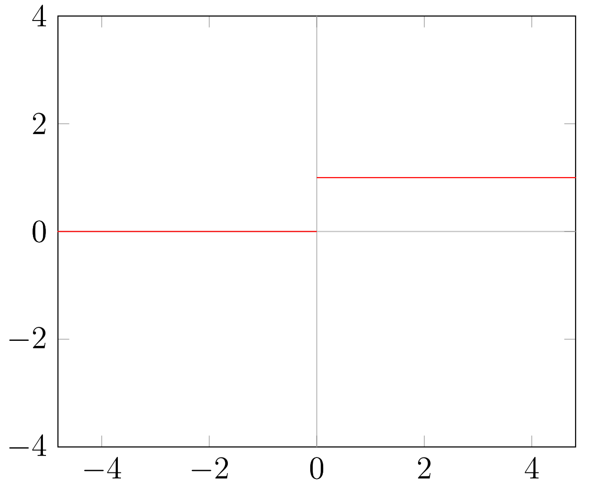


b) Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,
$D = R\backslash\{1\}$
Auf D ist $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1)$



$\bar{D} = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ?$
Sei (a_n) Folge mit $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
$f(a_n) = a_n + 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 1) = 1 + 1 + 2. \lim\limits_{x\to 1} = 2.$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} D = \mathbb{R}$



$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

$a_n = \frac{1}{n}. \lim a_n = 0.$

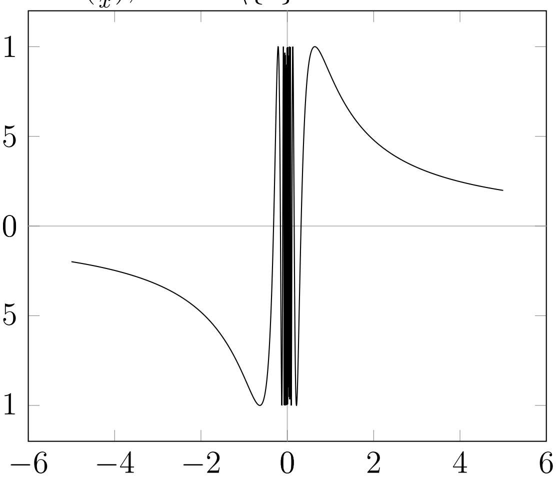
$\lim\limits_{x\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = \underline{1}$

$a_n = -\frac{1}{n}, \lim a_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = \underline{0}.$

$\lim\limits_{x\to 0}$ existiert nicht.

d) $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$



$a_n = \frac{1}{n\pi}, f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$

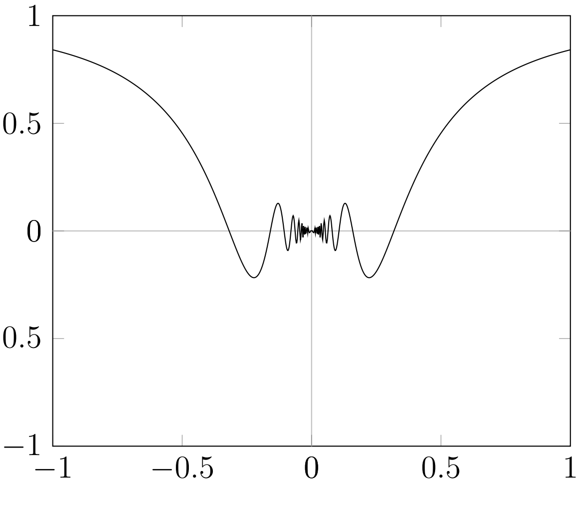
$a'_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2}\pi)} \to 0, f(a'n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$

$\lim(a_n) = 0$

$\lim(f(a_n)) = \lim 0 = 0 \lim(f(a'_n)) = \lim 1 = 1$

$\lim(f(x))_{x\to 0}$ existiert nicht

e) $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{2}), D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$



$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ dann:

$(a_n) \to 0, a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \sin(\frac{1}{a_n}) \underset{2.8g)}{=} 0$

4.7 Satz ($\varepsilon - \delta$)-Kriterium

$f : D \to \mathbb{R}, c \in \bar{D}$. Dann gilt: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta\forall x \in D : |x - c| \leq \delta \to |f(x) - d| \leq \varepsilon$