

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Komplexe Zahlen</b>	<b>8</b>
1.1 Definition . . . . .	8
1.2 Veranschaulichung . . . . .	8
1.3 Rechenregeln in $\mathbb{C}$ . . . . .	8
1.4 Definition Absolutbetrag . . . . .	9
1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag . . . . .	10
1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten . . . . .	11
1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie . . . . .	12
1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation . . . . .	12
1.9 Bemerkung und Definition . . . . .	13
1.10 Satz: Komplexe Wurzeln . . . . .	14
1.11 Beispiel . . . . .	14
1.12 Bemerkung . . . . .	15
<b>2 Folgen und Reihen</b>	<b>15</b>
2.1 Definition . . . . .	15
2.2 Beispiel . . . . .	15
2.3 Definition . . . . .	16
2.4 Definition . . . . .	16
2.5 Beispiele . . . . .	17
2.6 Satz: Beschränktheit und Konvergenz . . . . .	18
2.7 Bemerkung . . . . .	19
2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen) . . . . .	19
2.9 Satz: Kriterien für Nullfolgen . . . . .	20
2.10 Bemerkung . . . . .	22
2.11 Definition . . . . .	22
2.12 Satz: Landausymbole bei Polynomen . . . . .	23
2.13 Bemerkung . . . . .	23
2.14 Definition . . . . .	23
2.15 Beispiel . . . . .	23
2.16 Satz: Monotonie und Konvergenz . . . . .	24

2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium) . . . . .	24
2.18 Definition . . . . .	25
2.19 Satz: Reihenkonvergenz . . . . .	26
2.20 Beispiele . . . . .	26
2.21 Satz (Leibniz-Kriterium) . . . . .	28
2.22 Satz (Majoranten-Kriterium) . . . . .	28
2.23 Beispiel . . . . .	29
2.24 Definition . . . . .	29
2.25 Korollar . . . . .	29
2.26 Satz: Wurzel- und Quotientenkriterium . . . . .	30
2.27 Bemerkung . . . . .	31
2.28 Beispiel . . . . .	31
2.29 Bemerkung . . . . .	32
2.30 Definition . . . . .	32
2.31 Satz: Konvergenz im Cauchy Produkt . . . . .	32
<b>3 Potenzreihen</b>	<b>32</b>
3.1 Definition . . . . .	32
3.2 Beispiel . . . . .	33
3.3 Satz . . . . .	33
3.4 Bemerkung . . . . .	35
3.5 Die Exponentialreihe . . . . .	35
<b>4 Funktionen und Grenzwerte</b>	<b>38</b>
4.1 Definition . . . . .	38
4.2 Beispiel . . . . .	38
4.3 Definition . . . . .	41
4.4 Beispiel . . . . .	41
4.5 Definition . . . . .	42
4.6 Beispiel . . . . .	43
4.7 Satz ( $\varepsilon - \delta$ )-Kriterium . . . . .	46
4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte) . . . . .	47
4.9 Beispiel . . . . .	48
4.10 Bemerkung . . . . .	48

4.11 Beispiel . . . . .	48
4.12 Definition . . . . .	48
4.13 Beispiel . . . . .	49
4.14 Bemerkung . . . . .	49
4.15 Definition . . . . .	50
4.16 Satz: Grenzwerte gegen unendlich . . . . .	51
4.17 Beispiel . . . . .	52
<b>5 Stetigkeit</b>	<b>53</b>
5.1 Definition . . . . .	53
5.2 Satz . . . . .	53
5.3 Beispiel . . . . .	54
5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit) . . . . .	55
5.5 Satz: Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen . . . . .	55
5.6 Beispiel . . . . .	56
5.7 Satz: Stetigkeit von Potenzreihen . . . . .	56
5.8 Korollar . . . . .	56
5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen) . . . . .	57
5.10 Korollar (Zwischenwertsatz) . . . . .	57
5.11 Satz (Min-Max-Theorem) . . . . .	58
5.12 Definition . . . . .	59
5.13 Satz: Injektive Funktionen nur bei Monotonie . . . . .	59
5.14 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion) . . . . .	59
5.15 Korollar . . . . .	59
5.16 Satz: Exponentialfunktion und Logarithmus naturalis . . . . .	60
5.17 Satz: Wachstum des natürlichen Logarithmus' . . . . .	61
5.18 Definition . . . . .	61
5.19 Satz . . . . .	61
5.20 Bemerkung . . . . .	62
5.21 Definition . . . . .	62
5.22 Satz . . . . .	63

<b>6 Differenzierbare Funktionen</b>	<b>63</b>
6.1 Definition . . . . .	64
6.2 Beispiel . . . . .	64
6.3 Satz . . . . .	65
6.4 Korollar . . . . .	66
6.5 Satz (Ableitungsregeln) . . . . .	66
6.6 Beispiel . . . . .	67
6.7 Satz . . . . .	67
6.8 Satz: Ableitungsregeln von cosinus und sinus . . . . .	68
6.9 Beispiel . . . . .	68
6.10 Satz: Potenzreihen und diverenzierbarkeit . . . . .	69
6.11 Korollar . . . . .	69
6.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) . . . . .	69
6.13 Bemerkung . . . . .	70
6.14 Satz . . . . .	71
6.15 Satz (logarithmische Abbildung) . . . . .	71
6.16 Beispiel . . . . .	71
6.17 Definition . . . . .	72
6.18 Satz . . . . .	72
6.19 Satz (Mittelwertsatz) . . . . .	73
6.20 Korollar . . . . .	74
6.21 Korollar . . . . .	74
6.22 Satz (Regeln von L'Hôpital) . . . . .	74
6.23 Beispiel . . . . .	75
<b>7 Das bestimmte Integral</b>	<b>75</b>
7.1 Definition . . . . .	76
7.2 Definition . . . . .	77
7.3 Satz: Regelfunktionen . . . . .	77
7.4 Satz: Regelfunktion und Stetigkeit . . . . .	78
7.5 Beispiel . . . . .	78
7.6 Lemma . . . . .	80
7.7 Definition . . . . .	81

7.8	Beispiel . . . . .	81
7.9	Satz (Rechenregeln für Integrale) . . . . .	82
7.10	Beispiel . . . . .	82
7.11	Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung) . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</b>	<b>83</b>
8.1	Definition . . . . .	83
8.2	Definition . . . . .	83
8.3	Bemerkung . . . . .	85
8.4	Beispiel . . . . .	85
8.5	Satz . . . . .	86
8.6	Satz . . . . .	86
8.7	Definiton . . . . .	88
8.8	Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) . . . . .	88
8.9	Beispiele . . . . .	89
8.10	Beispiel . . . . .	90
8.11	Satz (Partielle Integration) . . . . .	90
8.12	Beispiele . . . . .	91
8.13	Satz (Integration durch Substitution) . . . . .	92
8.14	Satz . . . . .	93
8.15	Beispiel . . . . .	93
<b>9</b>	<b>Matrizen und lineare Gleichungssysteme</b>	<b>94</b>
9.1	Definition . . . . .	94
9.2	Definition . . . . .	95
9.3	Definition . . . . .	96
9.4	Beispiel . . . . .	96
9.5	Satz (Rechenregeln von Matrizen) . . . . .	98
9.6	Definition . . . . .	99
9.7	Definition . . . . .	101
9.8	Definition . . . . .	101
9.9	Bemerkung . . . . .	101
9.10	Algorithmus zur Transformation einer Matrix auf Zeilenstufenform mit elementaren Zeilenumformungen . . . . .	102

9.11 Beispiel . . . . .	103
9.12 Gauß-Algorithmus . . . . .	103
9.13 Beispiel . . . . .	105

## Abbildungsverzeichnis

1	Veranschaulichung Komplexe Zahlen . . . . .	8
2	Absolutbetrag . . . . .	10
3	Imaginäre Zahlen im Koordinatensystem durch Polarkoordinaten . . .	11
4	Winkel im Bogenmaß . . . . .	11
5	Multiplizieren komplexer Zahlen . . . . .	13
6	Multiplikation mit $i$ . . . . .	13
7	Beschränktheit von Folgen . . . . .	17
8	Beschränkte aber nicht konvergente Folge . . . . .	18
9	Cauchy'sches Konvergenzkriterium . . . . .	25
10	Monotonie . . . . .	28
11	Konvergenzradien . . . . .	34
12	Die Exponentialreihe . . . . .	36
13	$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ . . . . .	38
14	$e^x$ . . . . .	39
15	Bogenmaß . . . . .	40
16	Sinus und Cosinus . . . . .	40
17	Tangens und Kotangens . . . . .	41
18	Abschnittsweise definierte Funktion . . . . .	43
19	$x^2$ . . . . .	44
20	$x+1$ . . . . .	44
21	Abschnittsweise definierte Funktion . . . . .	45
22	$\sin(\frac{1}{x})$ . . . . .	45
23	$x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ . . . . .	46
24	geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums . . . . .	46
25	Grenzwerte gegen einen Festen Wert . . . . .	49
26	Funktionen $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$ . . . . .	50

27	$\sin(\frac{1}{x})$	51
28	$\frac{e^x}{x^n}$	53
29	Sinus und Cosinus am Einheitskreis	55
30	Zwischenwerte	58
31	Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion	60
32	$\exp(x)$ und $\ln(x)$	61
33	Verschiedene Arten Exponentialfunktionen	62
34	Logithmen mit Basen $> 1$ und $< 1$	63
35	Steigung am Steigungsdreieck	64
36	Sekante an Funktion	65
37	Abschnittsweise definierte cosinus Funktion	68
38	Zwei Funktionen an der Winkelhalbierenden	70
39	Ableitung keine Hinreichende Bedingung für Minima/Maxima	72
40	Eine Funktion und ihrer Steigung an der Stelle $c$	73
41	Flächeninhalt unter einer Funktion $f$	76
42	Treppenfunktion	77
43	Treppenfunktion	78
44	Abschnittsweise stetige Funktion	79
45	Treppenfunktion (Untersumme) von $x^2$	79
46	Nicht integrierbare Funktion	80
47	Mittelwertsatz der Integralrechnung	83
48	Lokal Integrierbar von $u$ bis $v$	84
49	Die Welt der Funktionen	87
50	Stammfunktionbildung	87
51	Integral Berechnung $x \cdot \cos(x)$	91
52	Matrix Multiplikation	97

# 1 Komplexe Zahlen

## 1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Addition: } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Multiplikation: } (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i^1$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$ . Rein imaginäre Zahlen:  $b \cdot i$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $(0 + bi)$

$i$  imaginäre Einheit.  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ .

$a = \Re(z)$  Realteil von  $z$  ( $\Re(z)$ ).

$b = \Im(z)$  Imaginärteil von  $z$  ( $\Im(z)$ ).

$\bar{z} = a - bi$  ( $= a + (-b)i$ ) Die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl.

## 1.2 Veranschaulichung

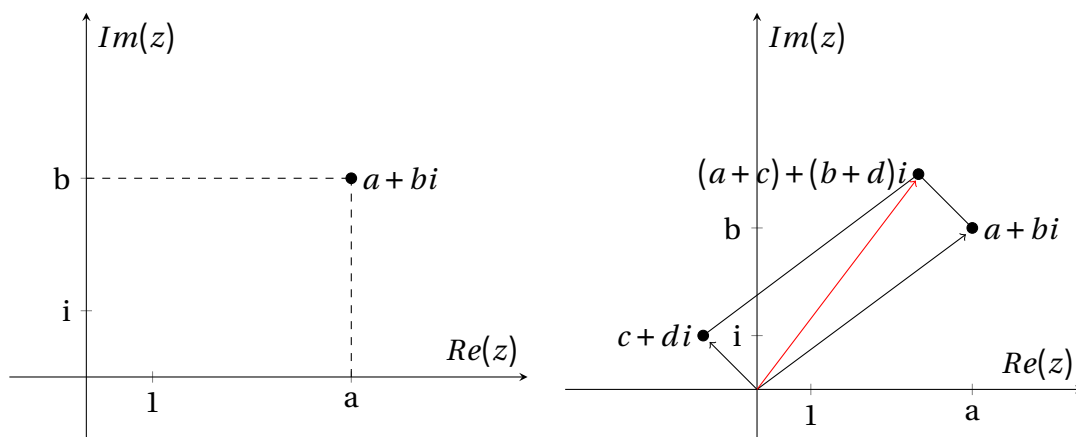


Abbildung 1: Addition entspricht Vektoraddition

## 1.3 Rechenregeln in $\mathbb{C}$

a) Es gelten alle Rechenregeln wie in  $\mathbb{R}$ .

(z.B Kommutativität bzgl.  $+$ ,  $\cdot$ :  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  und  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ )

<sup>1</sup>Ausmultiplizieren und  $i^2 = -1$  beachten



Inversenbildung bzgl.  $\cdot$ :

$z = a + bi \neq 0$ , d.h.  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \frac{5-7i}{3+2i} &= (5-7i) \cdot (3+2i)^{-1} \\ &= (5-7i) \cdot \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right) \\ &= \left(\frac{15}{13} - \frac{14}{13}\right) + \left(-\frac{10}{13} - \frac{21}{13}\right)i \\ &= \frac{1}{13} - \frac{31}{13}i \end{aligned}$$

$$\text{Speziell: } (bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i$$

$$\text{insbesondere: } \frac{1}{i} = -i$$

$$\begin{aligned} z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \quad \bar{\bar{z}} &= z \\ \text{b) } \quad \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

## 1.4 Definition Absolutbetrag

$$\text{a) Absolutbetrag von } z = a + bi \in \mathbb{C}: |z| = \underbrace{+\sqrt{a^2 + b^2}}_{\in \mathbb{R}, \geq 0}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}}$$

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} |z| &= \text{Abstand von } z \text{ zu } 0 \\ &= \text{Länge des Vektors, der } z \text{ entspricht} \end{aligned}$$

$$\text{b) Abstand von } z_1, z_2 \in \mathbb{C}:$$

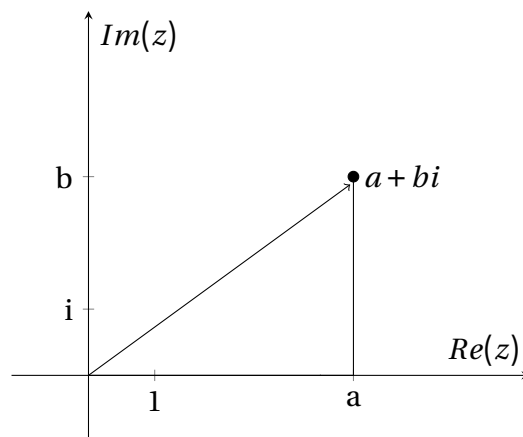


Abbildung 2: Graphische Definition des Absolutbetrages

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

### 1.5 Rechenregeln für den Absolutbetrag

(a)  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(b)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(c)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|-z| = |z|$$

## 1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

- a) Jeder Punkt  $\neq (0,0)$  lässt sich durch seine Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  beschreiben:  
 $-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$

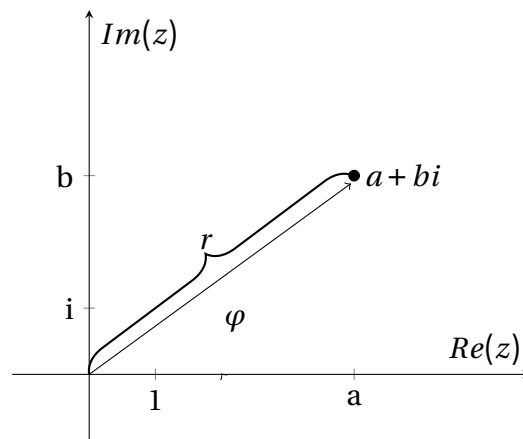
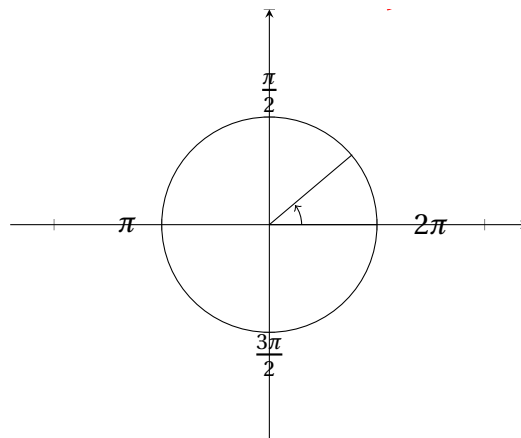


Abbildung 3: Polarkoordinaten

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes

Abbildung 4: Umrechnung Grad zu Bogenmaß



Umfang:  $2\pi$

$\varphi$  in Grad  $\hat{=}$   $\frac{2\pi \cdot \varphi}{360}$  im Bogenmaß

Für Punkte mit kartesischen Koordinaten  $\neq (0,0)$  werden als Polarkoordinate  $(r, \varphi)$  verwendet.

b) komplexe Zahl  $z = a + ib$

$$r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |z| \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

Darstellung von  $z$  durch Polarkoordinate

*Beispiel:* a)  $z_1 = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$   
 $= 2 \cdot (0,5\sqrt{2} + i \cdot 0,5\sqrt{2})$

b)  $z_2 = 2 + i$

$$|z_2| = \sqrt{5}$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\frac{2}{\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}} i) \text{ Suche } \varphi \text{ mit } 0 \leq 2\pi \text{ mit } \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}} z_2 \approx \sqrt{5} \cdot (\cos(0,46) + i \cdot \sin(0,46))$$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis:

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

## 1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

(a)  $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

(b)  $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

## 1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a)  $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

$$z = |z| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$$

$$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + i (\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi))$$

$$w \cdot z = |w \cdot z| (\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$$

b)  $z = i, w = a + ib$

$$i \cdot w = -b + ia$$

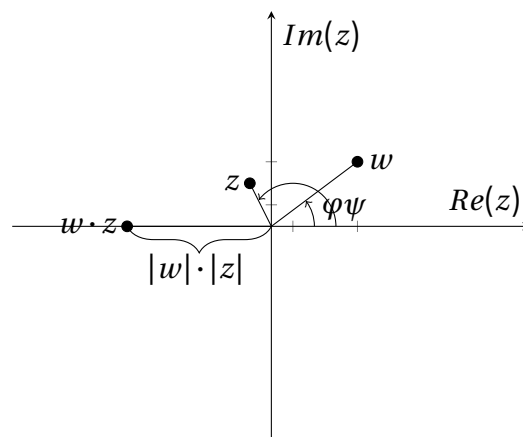
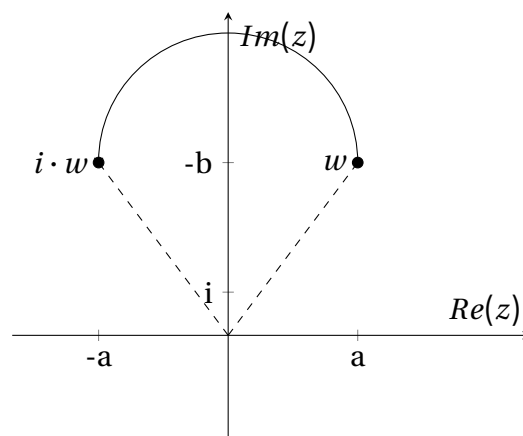


Abbildung 5: Multiplizieren komplexer Zahlen

Multiplikation mit  $i \hat{=}$  Drehung um  $90^\circ$

Abbildung 6: Multiplikation mit  $i$ 

## 1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexe Exponentialfunktion einführen.

$e^z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$   $e$  = Euler'sche Zahl  $\approx 2,718718\dots$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

Es gilt:  $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben  $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ ,  $r = |z|$ ,  $\varphi$  Winkel

$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$  ist Polarform von  $z$ .

$z = a + bi$  ist kartesische Form von  $z$ .  $\bullet(r, \varphi)$  Polarkoordinaten

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , Punkte auf dem Einheitskreis.

$$e^{i\pi} = -1$$

(Euler'sche Gleichung)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

### 1.10 Satz

Sei  $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

a) Ist  $m \in \mathbb{Z}$ , so ist  $w^m = |w|^m \cdot (\cos(m \cdot \varphi) + i \cdot \sin(m \cdot \varphi))$   
 $(m < 0 : w^m = \frac{1}{w^{|m|}}, w \neq 0)$

b) Quadratwurzeln

c) Ist  $n \in \mathbb{N}, w \neq 0$ , so gibt es genau  $n$ -te Wurzeln von  $w$ :

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n})), n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

*Beweis.* a) richtig, wenn  $m = 0, 1$

$m \geq 2$ . Folgt aus 1.8

$m = -a$ :

$$\begin{aligned} w^{-1} &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{w} = \frac{1}{|w| \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))}_{=1}} \cdot |w| \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) = |w|^{-1} \cdot (\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)) \end{aligned}$$

□

### 1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus  $i$ :

$$|i| = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Nach 1.10 b): } \sqrt{i} &= \pm(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})) \\ &= \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i) \end{aligned}$$

## 1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom

$$x^n - w \quad (w \in \mathbb{C})$$

eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  (sogar  $n$  verschiedene wenn  $w \neq 0$ )

Es gilt sogar : *Fundamentalsatz der Algebra*

(C. F. Gauß 1777-1855)

Jedes Polynom  $a_n x^n + \dots + a_0$

mit irgendwelchen Koeffizienten:  $a_n \dots a_0 \in \mathbb{C}$  hat Nullstelle in  $\mathbb{C}$

## 2 Folgen und Reihen

### 2.1 Definition

Sei  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$

( $k = 0$ ,  $A_0 \in \mathbb{N}_0$ ,  $k = 1$ ,  $A_n \in \mathbb{N}$ )

Abbildung  $a : A \Rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ )

$$m \Rightarrow a_m$$

heißt *Folge* reeller Zahlen

$$(a_k, a_{k-1} \dots)$$

Schreibweise:

$(a_m)_{m>k}$  oder einfach  $(a_m)$

$a_m$  heißt *m-tes Glied* der Folge,  $m$  *Index*

### 2.2 Beispiel

a)  $a_n = 5$  für alle  $n > 1$

(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...)

b)  $a_n = n$  für alle  $n > 1$

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...)

$$\text{c) } a_n = \frac{1}{n} \\ \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

$$\text{d) } a_n = \frac{(n+1)^2}{2^n} \\ \left(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \dots\right)$$

$$\text{e) } a_n = (-1)^n \\ (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

$$\text{f) } a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}} \text{ für } n \geq 2, a_1 = 1 \\ \left(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots\right)$$

$$\text{g) } a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \\ \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \dots\right)$$

$$\text{h) } a_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \frac{1}{i} \\ \left(-1, \frac{-1}{2}, -\frac{5}{6}, \dots\right)$$

## 2.3 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq k}$  heißt *beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

D.h.  $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$  für alle  $n > k$ .

## 2.4 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq k}$  heißt *konvergent* gegen  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  (konvergent gegen  $\varepsilon$ ), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) : |a_n - c| < \varepsilon$$

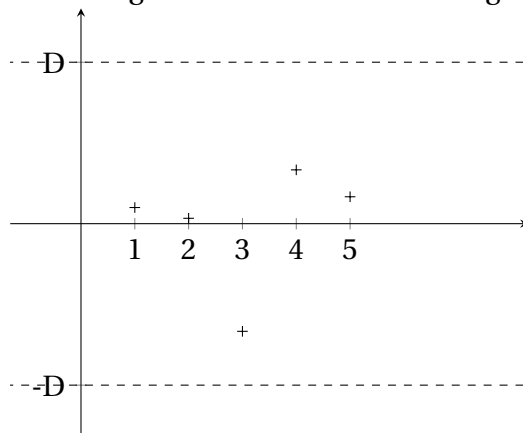
$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (oder einfach } c = \lim a_n)$$

$c$  heißt *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge  $(a_n)$

(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))



Abbildung 7: Beschränktheit von Folgen



Eine Folge die gegen 0 konvertiert, heißt *Nullfolge*

## 2.5 Beispiele

- a)  $r \in \mathbb{R} : a_n = r$  für alle  $n \geq 1$

$(r, r, \dots)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = r$$

$$|a_n - r| = 0 \text{ für alle } n$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$  kann man  $n(\varepsilon) = 1$  wählen

- b)  $a_n = n$  für alle  $n \geq 1$

Folge ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

- c)  $a_n = \frac{1}{n}$  für alle  $n \geq 1$

$(a_n)$  ist Nullfolge.

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Suche Index  $n(\varepsilon)$  mit  $|a_n - 0| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n(\varepsilon)$

D.s. es muss gelten.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

$$\text{Ich brauche : } \frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$$

$$\text{Ich brauche } n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Aus Mathe I folgt, dass solch ein  $n(\varepsilon)$  existiert.

$$\text{z.B. } n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Dann:

$$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon)$$

d)  $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$  für alle  $n \geq 1$

Behauptung:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a - 3| &= \left| \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1} \right| \\ &= \left| \frac{-3n-2}{n^2+n+1} \right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Benötigt wird  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$  für alle  $n > n(\varepsilon)$ .

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$$

Wähle  $n(\varepsilon)$  so, dass  $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$

Dann gilt für alle  $n \geq n(\varepsilon)$ .

$$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Für alle  $n \geq n(\varepsilon)$

e)  $a_n = (-1)^n$  beschränkte Folge  $-1 \leq a_n \leq 1$  konvergiert nicht.

Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig, Wähle  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

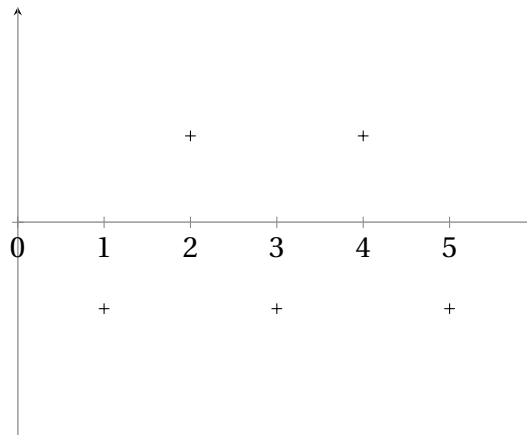


Abbildung 8:  $(-1)^n$  ist beschränkt aber konvergiert nicht

$$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{↯}$$

## 2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: 2.5e))

*Beweis.* Sei  $c = \lim a_n$ , wähle  $\varepsilon = 1$ ,

Es existiert  $n(1) \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - c| < 1$  für alle  $n \geq n(1)$

Dann ist

$$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c| \text{ für alle } n \geq n(1)$$

$$M = \max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \dots, |a_{n(1)-1}|, 1 + |c|\}$$

Dann:  $|a_n| \leq M$  für alle  $n \geq k$

$$-M \leq a_n \leq M$$

□

## 2.7 Bemerkung

$$\text{a) } (a_n)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n|)_{n \geq 1} \text{ Nullfolge} \quad (|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0|)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge} \Leftrightarrow (|a_n - c|)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge}$$

## 2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien  $(a_n)_{n \geq k}$  und  $(b_n)_{n \geq k}$  konvergente Folgen,  $\lim a_n = c, \lim b_n = d$ .

$$\text{a) } \lim |a_n| = |c|$$

$$\text{b) } \lim (a_n \pm b_n) = c \pm d$$

$$\text{c) } \lim (a_n \cdot b_n) = c \cdot d$$

insbesondere  $\lim (r \cdot b_n) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$  für jedes  $r \in \mathbb{R}$ .

$$\text{d) Ist } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k \text{ und ist } d \neq 0, \text{ so } \lim \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{c}{d}$$

$$\text{e) Ist } (b_n) \text{ Nullfolge, } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq k, \text{ so konvergiert } \left( \frac{1}{b_n} \right) \text{ nicht!}.$$

$$\text{f) Existiert } m \geq k \text{ mit } a_n \leq b_n \text{ für alle } n \geq m, \text{ so ist } c \leq d.$$

$$\text{g) Ist } (c_n)_{n \geq k} \text{ Folge und existiert } m \geq k \text{ mit } 0 \leq c_n \leq a_n \text{ für alle } n \geq m \text{ und ist } (a_n) \text{ eine Nullfolge, so ist auch } (c_n) \text{ eine Nullfolge.}$$

$$\text{h) Ist } (c_n)_{n \geq l} \text{ beschränkte Folge und ist } (a_n)_{n \geq k} \text{ Nullfolge, so ist auch } (c_n \cdot a_n)_{n \geq k} \text{ Nullfolge.}$$

$c_n$  muss nicht konvergieren!

*Beweis.* Exemplarisch:

- b) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$  und  $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$  und  $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$   
 $|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$   
 Suche  $n(\varepsilon) = \max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}), n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$   
 Dann gilt für alle  $n > n(\varepsilon)$ :  
 $|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
- f) Angenommen  $c > d$ . Setze  $\delta = c - d > 0$   
 Es existiert  $\tilde{m} \geq m$  mit  $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$   
 und  $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$  für alle  $n \geq \tilde{m}$ .  
 Für diese  $n$  gilt:  
 $0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$  nach Voraussetzung  
 $= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$   
 $\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \nless$

□

## 2.9 Satz

- a)  $0 \leq q \leq 1$  Dann ist  $(q^n)_{n \geq 1}$  Nullfolge
- b) Ist  $m \in \mathbb{N}$ , so ist  $(\frac{1}{n^m})_{n \geq 1}$  Nullfolge.
- c) Sei  $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$   
 Dann ist  $(n^m \cdot q^n)_{n \geq 1}$  Nullfolge
- d) Ist  $r > 1, m \in \mathbb{N}$ , so ist  $(\frac{n^m}{r^n})_{n \geq 1}$  eine Nullfolge
- e)  $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$   
 $Q(x) = b_e \cdot x^e + \dots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$   
 Sei  $Q(n) \neq 0$  für alle  $n \geq k$ .

- Ist  $m > e$ , so ist  $\frac{P(n)}{Q(n)}$  nicht konvergent

- Ist  $m = e$ , so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$

- Ist  $m < l$ , so ist  $(\frac{P(n)}{Q(n)})$  ein Nullfolge

a) Sei  $0 \leq q \leq 1$  Dann ist  $(q^n)_{n \geq 1}$  eine Nullfolge

*Beweis.* a) Richtig für  $q > 0$ . Sei jetzt  $q > 0$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Mathe I: Es gibt ein  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$ .

Für alle  $n \geq n(\varepsilon)$  gilt:  $|q^n - 0| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$ .

□

b) 2.5c):  $\frac{1}{n}_{n \geq 1}$  Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

c) Richtig für  $q = 0$ . Sei jetzt  $q > 0$ .

1. Fall:  $m = 1$

$$\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0.$$

$$(t+1)^n \stackrel{\text{Binomialsatz}}{=} 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 > \frac{n(n-1)}{2} t^2 \text{ für alle } n \geq 2$$

$$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$$

$$0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftrightarrow \text{Nullfolge 2.5e), 2.8e)}$$

Nach 2.8g) ist  $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$  Nullfolge, also auch  $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$ .

2. Fall:  $m > 1$ .

Setze  $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} n^m \cdot q^n &= n^m \cdot (q')^{nm} \\ &= (n \cdot (q')^n)^m \quad m = 1 \text{ anwenden} \end{aligned}$$

$$0 < q' < 1$$

$(n^m \cdot q^n)_{n \geq 1}$  Nullfolge noch Fall  $m = 1$  und 2.8e)

d) Folgt aus c) und  $q = \frac{1}{r}$

$$\text{e) Ist } m \leq l, \text{ so ist } \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^m (a_m + a_{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^m})}{n^l (b_l + b_{l-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$$

$$(I) \longrightarrow a_m, (II) \longrightarrow b_l \quad \frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{a_m}{b_l}$$

$$n < l, \frac{1}{n^{l-m}} \text{ Nullfolge}$$

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$$

$m > l$ :

Beh. folgt aus Fall  $m < l$  und 2.8e).

## 2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, die Zahl  $x \in \mathbb{R}$  bestimmt.

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$$

$$a_n \leq x \leq b_n$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_n}{2} \Leftarrow \text{Nullfolge (2.9b)}$$

$$2.8e) (|x - a_n|) \text{ Nullfolge.}$$

$$2.7e): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

$$\text{Analog: } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$$

2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

## 2.11 Definition

a) Eine Folge  $(a_n)_{n \geq k}$  heißt *strikt positiv*, falls  $a_n > 0$  für alle  $n \geq k$ .

Sei im Folgenden  $(a_n)_{n \geq k}$  eine strikt positive Folge.

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n \geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n \geq k} \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \mathcal{O}(a_n) = \{(b_n)_{n \geq k} : (\frac{b_n}{a_n}) \text{ ist Nullfolge}\}$$

$(b_n) \in o(a_n)$  heißt Folge  $(a_n)$  wächst wesentlich schneller als die Folge  $(b_n)$ . Klar:

$$o(a_n) \subset \mathcal{O}(a_n)$$

$\mathcal{O}, o$  („groß Oh“, „klein Oh“)

*Landau-Symbole*

$$\text{z.B. } (n^2) \in o(n^3)$$

$$(n^2 + n + 1) \in \mathcal{O}(n^2) \quad n^2 + n + 1 \leq 3n^2$$

$$(n^2) \in \mathcal{O}(n^2 + n + 1) \quad n^2 \leq n^2 + n + 1$$

$\mathcal{O}(1)$  = Menge der beschränkten Folgen

$o(1)$  = Menge aller Nullfolgen

Häufig gewählte Schreibweise:

$$n^2 \underbrace{=} o(n^2) \text{ statt } (n^2) \in o(n^3)$$

eig. falsch!

$$n^2 + n + 1 = \mathcal{O}(n^2) \text{ statt } (n^2 + n + 1)$$

**2.12 Satz**

Sei  $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ ,  $m \geq 0$ ,  $a_m \neq 0$ .

- a)  $(P(n)) \in o(n^l)$  für alle  $l > m$  und  
 $(P(n)) \in O(n^l)$  für alle  $l \geq m$ .
- b) ist  $r > 1$ , so ist  $(P(n)) \in o(r^n)$ .  
 $[(r^n) \text{ wächst deutlich schneller als } (P(n))]$

*Beweis.* a) folgt aus 2.9e).

$m = l$  (2.6)

b) folgt aus 2.9d) und 2.8 b)c)

□

**2.13 Bemerkung**

Algorithmus:

Sei  $t_n$  = maximale Anzahl von Reihenschritten des Algorithmus' bei Input der Länge  $n$  (binär codiert).

Worst-Case-Komplexität:

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein  $l \in \mathbb{N}$  existiert mit  $(t_n) \in O(n^l)$ .  
*(gutartig)*

Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein  $l \in \mathbb{N}$  existiert mindestens  
 exponentielle Zeitkomplexität, falls  $r > 1$  existiert mit  $(r^n) \in O(b_n)$  *(böartig)*

**2.14 Definition**

- a) Eine Folge  $(a_n)_{n \geq k}$  heißt *monoton wachsend (steigend)*, wenn  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \geq k$ . Sie heißt *steng monoton wachsend (steigend)*, wenn  $a_n < a_{n+1}$  für alle  $n \geq k$
- b)  $(a_n)_{n \geq k}$  heißt *monoton fallend*, falls  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \geq k$

**2.15 Beispiel**

- a)  $a_n = 1$  für alle  $n > 1$  ( $a_n$ ) ist monoton steigend und monoton fallend.

- b)  $a_n = \frac{1}{n}$  für alle  $n \geq 1$ .  
 $(a_n)$  streng monoton fallend.
- c)  $a_n = \sqrt{n}$  (positive Wurzel)  
 $(a_n)_{n \geq 1}$  streng monoton steigend.
- d)  $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$   
 $(a_n)_{n \geq 1}$  streng monoton steigend.
- e)  $a_n = (-1)^n, n \geq 1$   
 $(a_n)$  ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

## 2.16 Satz

- a) Ist  $(a_n)_{n \geq k}$  monoton steigend und nach oben beschränkt (d.h. es existiert  $D \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \leq D$  für alle  $n \geq k$ ), so konvergiert  $(a_n)'$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$
- b)  $(a_n)_{n \geq k}$  monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert  $(a_n)_{n \geq k}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$ .

*Beweis.* a)

$c = \sup\{a_n : n \geq k\}$ . existiert (Mathe I). Zeige:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $n(\varepsilon)$  mit  $c - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq c$

Denn sonst  $a_n \leq c - \varepsilon$  für alle  $n \geq k$  und  $c - \varepsilon$  wäre obere Schranke für  $\{a_n : n \geq k\}$

Widerspruch dazu, dass  $c$  kleinste obere Schranke. Für alle  $n \geq n(\varepsilon)$

$$c - \varepsilon \leq a_{n(\varepsilon)} \leq a_n \leq c$$

$$|a_n - c| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n(\varepsilon).$$

b) analog

□

## 2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

(Cauchy, 1789 - 1859)

Sei  $(a_n)_{n \geq k}$  eine Folge. Dann sind äquivalent:

- (1)  $(a_n)_{n \geq k}$  konvergent



(2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N - M(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$  (Cauchyfolge)

Grenzwert muss nicht bekannt sein!

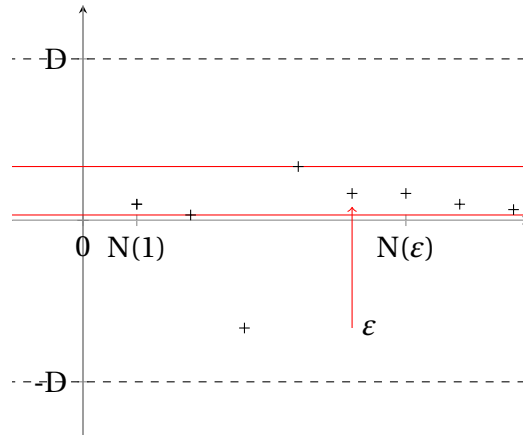


Abbildung 9: Cauchy'sches Konvergenzkriterium

## 2.18 Definition

a) Sei  $(a_i)_{i \geq k}$  eine Folge,  $s_n = \sum_{i=k}^n a_i$ ,  $n \geq k$  (Partialsummen der Folge)

Dann heißt  $(s_n)_{n \geq k}$  eine *unendliche Reihe*

$(k-1 : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$

Schreibweise :  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$

b) Ist die Folge  $(s_n)_{n \geq k}$  konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c$ ,

so schreibt man  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$ . Reihe *konvergiert*.

Wenn  $(s_n)$  nicht konvergiert, so heißt die Reihe  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  *divergent*.

(Zwei Bedeutungen von  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  :

- Folge der Partialsummen
- Grenzwert von  $(s_n)$ , falls dieser existiert

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \sum_{n=k}^{\infty} a_n = (s_m)_{m \geq k}$$

## 2.19 Satz

- a) Ist die Reihe  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  konvergent, so ist  $(a_i)_{i \geq k}$  eine Nullfolge.
- b) Ist die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{i=k}^n a_i$  beschränkt und ist  $a_i \geq 0$  für alle  $i$ , so ist  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  konvergent.

*Beweis.* a)

Sei  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  Dann existiert  $n(\frac{\varepsilon}{2}) \geq k$  mit  $|\sum_{i=k}^{\infty} 2a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq n(\frac{\varepsilon}{2})$

Dann gilt  $|a_{n+1} - 0| = |a_{n+1}| = |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + \sum_{i=k}^n a_i| =$

$$|\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c - \sum_{i=k}^n a_i + c| \leq |\sum_{i=k}^{n+1} a_i + c| + |\sum_{i=k}^n a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$(a_n)$  ist Nullfolge

b) folgt aus 2.16 a), denn  $(s_n)$  ist monoton steigend

□

## 2.20 Beispiele

a) Sei  $q \in \mathbb{R}$ .

Ist  $q \neq 1$ , so ist  $\sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$[(\sum_{i=k}^n q^i) \cdot (q-1)]$$

Sei  $|q| < 1$ , d.h.  $-1 < q < 1$ .

Dann ist  $\sum_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$  (konvergiert)

$$s_n = \sum_{i=k}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$(q^n)$  Nullfolge (2.9<sub>a</sub>) für  $q \geq 0$ , 2.8<sub>e</sub>) + 2.9<sub>a</sub>) für  $q < 0$ ,  $q = -|q|$

*Geometrische Reihe*

Sei  $|q| \geq 1$ . Dann ist  $\sum_{i=k}^{\infty} q^i$  divergent, da dann  $(q^i)$  keine Nullfolge (2.18<sub>a</sub>)

b)  $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i}$  divergiert

*harmonische Reihe*

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{n}$$

$$n = 2^0 = 1 : s_1 = 1$$

$$n = 2^1 = 2 : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

...

$$n = 2^3 = 8 : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_7 > s_6 \dots$$

Per Induktion zu beweisen!

c)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2}$  konvergiert.

Folge der Partialsummen ist monoton steigend.

2.16a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^2}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{2}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^4} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

2.16a)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$  Kgt., Grenzwert  $\leq 2$ . (später: Grenzwert ist  $\frac{\pi^2}{6}$ )

Es gilt allgemeiner:

$s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$  konvergiert.

Allgemeiner:  $s \in \mathbb{R}, s > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$  konvergiert

d)  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$  konvergiert:

$$s_{2n} = \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{<0} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)}_{<0}$$

$$s_{2n} \leq s_{2(n+1)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$(s_{2n}) \text{ ist monoton fallend. } s_{2n-1} = -1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right)}_{>0}$$

$(s_{2n-1})$  ist monoton wachsend

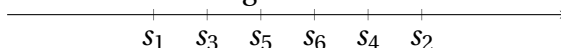
Ist  $k$  ungerade, so ist  $s_k < s_l$ : Wähle  $n$  so, dass  $2n - a \geq k, 2n \geq l$

$$s_k \underset{(2)}{\leq} s_{2n-1} \underset{\uparrow}{<} s_{2n} \underset{(1)}{\leq} s_l$$

$$s_{2n} = s_{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

Abstand  $s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n}$  geht gegen 0.

Abbildung 10: Monotonie



$$\sup\{s_{2n-1} : n \geq 1\}$$

$$\inf\{s_{2n} : n \geq 1\}$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} (-1)^i \frac{1}{i} \in ]-1, -\frac{1}{2}[ \text{ (Es gilt } \lim = -\ln 2 \text{)}$$

### Bemerkung

Was bedeutet  $0.\bar{8} = 0.88888888\dots$ ? (Dezimalsystem)

$$0.\bar{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots = 8 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = 8 \cdot \left(\frac{10}{9} - 1\right) = \frac{8}{9}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

### 2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist  $(a_i)_{i \geq k}$  eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere  $a_i \geq 0$  falls  $i \geq k$ ), so ist

$$\sum_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i \text{ konvergent.}$$

### 2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien  $(a_i)_{i \geq k}, (b_i)_{i \geq k}$  Folgen, wobei  $b_i \geq 0$  für alle  $i \geq k$  und  $|a_i| \leq b_i$  für alle  $i \geq k$ .

Dann gilt

Ist  $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$  konvergent, so auch  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ . Für die Grenzwerte gilt:

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$$

*Beweis.* Konvergenz

von  $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$  folgt aus 2.16 a).

$\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$  folgt aus 2.8 f).

Sei  $m > n$ ;

$$\left| \sum_{i=k}^m a_i - \sum_{i=k}^n b_i \right| = \sum_{i=n+1}^m a_i \leq \sum_{i=n+1}^m |a_i| = \left| \sum_{i=k}^m |a_i| - \sum_{i=k}^n |a_i| \right|$$

Mit Cauchy-Kriterium 2.17 folgt daher aus der Konvergenz von  $\sum_{i=k}^m |a_i|$  auch die von

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i.$$

□

## 2.23 Beispiel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$$

$\sqrt{i} \leq i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{i}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$

Ang.  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$  konvergiert.  $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$  konvergiert.  $\nexists$

Widerspruch zu 2.20 b)

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{i}$$

2.20d):  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergiert, aber  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$  konvergiert nicht. (★)

## 2.24 Definition

$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  heißt *absolut konvergent*, falls  $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$  konvergiert.

(Falls alle  $a_i \geq 0$  : Konvergent = absolut Konvergent)

## 2.25 Korollar

Ist  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  absolut konvergent, so auch konvergent. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

*Beweis:* 1. Behauptung 2.22 mit  $b_i = |a_i|$

Umkehrung siehe (★)

**Bemerkung**

Was bedeutet  $0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

$a_i \in \{0 \dots 9\}$  (Dezimalsystem)

$$a_1 \cdot \frac{1}{10} a_2 \cdot \frac{1}{100} \dots a_n \cdot \frac{1}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10} 9 \cdot \frac{1}{100} \dots 9 \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$a_i \frac{1}{10} \leq 9 \frac{1}{10}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} 9 \frac{1}{10} = 9 \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 1 \Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i \frac{1}{10} \text{ konvergiert}$$

**2.26 Satz**

Sei  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  eine Reihe.

**a) Wurzelkriterium**

Existiert  $q < 1$  und ein Index  $i_0$ , so dass  $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$  für alle  $i \geq i_0$ .

so konvergiert die Reihe  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  absolut.

Ist  $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$  für unendlich viele  $i$  so divergiert  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ .

**b) Quotientenkriterium**

Existiert  $q > 1$  und ein Index  $i_0$ , so dass  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$  für alle  $i \geq i_0$ ,

so konvergiert  $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$  absolut.

*Beweis.* a)  $|a_i| \leq q^i$  für alle  $i \geq i_0$

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} q^i \text{ konvergiert (2.20 a))}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \text{ konvergiert.}$$

$$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } i$$

$\Rightarrow |a_i| \geq 1$  für unendlich viele  $i$

$\Rightarrow (a_i)$  sind keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i$  divergiert.

b) Sei  $i \geq i_0$ .

$$\left| \frac{a_i}{a_{i_0}} \right| = \left| \frac{a_i}{a_{i-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{i_0+1}}{a_{i_0}} \right| \leq q \cdot q \cdot \dots \leq q^{i-i_0} = \frac{q^i}{q^{i_0}}$$

↑ Voraussetzung:

jeder dieser Quotienten ist  $\leq q$

$$|a_i| \leq \underbrace{\frac{|a_{i_0}|}{q^{i_0}}}_{=:c} \cdot q^i \quad \sum_{i=i_0}^{\infty} c \cdot q^i \text{ konvergent}$$

$\Rightarrow \sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$  konvergiert.

2.22

$\Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$  konvergiert

□

## 2.27 Bemerkung

a) Es reicht *nicht* in 2.26 nur vorauszusetzen, dass  $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$  für alle  $i \geq i_0$

bzw.  $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$  für alle  $i \geq i_0$ .

z.B. harmonische Reihen:  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$  divergiert.

Aber:  $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} > 1$  für alle  $i$ .

$\frac{i}{i+1} < 1$  für alle  $i$

b) Es gibt Beispiele von absolut konvergenten Reihen mit  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|$  für unendlich viele  $i$ .

## 2.28 Beispiel

Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann konvergiert  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$  absolut ( $0^0 = 1, 0! = 1$ ):

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i} \right| = \left| \frac{x}{i+1} \right| = \frac{|x|}{i+1} \text{ Wähle } i_0, \text{ so dass } i_0 + 1 > 2 \cdot |x|$$

Für alle  $i \geq i_0$ :

$$\frac{|x|}{(i+1)} \leq \frac{|x|}{(i_0+1)} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q.$$

## 2.29 Bemerkung

Gegeben seien zwei endliche Summen

$$\sum_{n=0}^k a_n, \sum_{n=0}^l b_n.$$

$$\left( \sum_{n=0}^k a_n \right) \left( \sum_{n=0}^l b_n \right) \quad (\star)$$

Distributivgesetz: Multipliziere  $a_i$  mit jedem  $b_i$  und addiere diese Produkte.

$$(\star) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Indexsumme 0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Indexsumme 2}} + \dots + \underbrace{a_k b_l}_{\text{Indexsumme k+l}}$$

## 2.30 Definition

Seien  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  unendliche Reihen.

Das *Cauchy-Produkt* (*Faltungsprodukt*) der beiden Reihen ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , wobei

$$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_i \cdot b_{n-1} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

## 2.31 Satz

Sind  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  absolut konvergente Reihen mit Grenzwert  $c, d$ , so ist das Cauchy Produkt auch absolut konvergent mit Grenzwert  $c \cdot d$ . Beweis: [1]

# 3 Potenzreihen

## 3.1 Definition

Sei  $(b_n)$  eine reelle Zahlenfolge,  $a \in \mathbb{R}$

Dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$  eine *Potenzreihe* (mit *Entwicklungspunkt*  $a$ ) Speziell:  $a = 0$



$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

(Potenzreihe im engeren Sinne)

*Hauptfolge:* Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konv. die Potenzreihe (absolut)?

Suche für  $x = a$

Dann Grenzwert  $b_0$  (da  $0^0 = 1$ )

Ob Potenzreihe für andere  $x$  konvergiert, hängt von  $b_n$  ab!

### 3.2 Beispiel

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  ( $b_n = 1$  für alle  $n$ )

geometrische Reihe, konvergiert für alle  $x \in ]-1, 1[$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$  ( $b_n = 2^n$ ) =  $\sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$  konvergiert genau dann nach a), wenn  $|2x| < 1$ , d.h.  $|x| < \frac{1}{2}$  d.h.  $x \in ]-0.5, 0.5[$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $b_n = \frac{1}{n!}$ )

konvergiert für alle  $x$ ,  $x \in ]-\infty, \infty[ = \mathbb{R}$

### 3.3 Satz

Sei  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$  eine Potenzreihe (um 0). Dann gibt es  $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $R \geq 0$ , so dass gilt.

1. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $|x| < R$  konvergiert Potenzreihe absolut (d.h.  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$  kon-

vergiert, dann auch  $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ )

Falls  $R = \infty$ , so heißt das, dass Potenzreihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  absolut konvergiert.

2. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| > R$  divergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$ ) (Für  $|x| = R$  lassen sich keine allgemeine Aussagen treffen).

$R$  heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

Abbildung 11: Konvergenzradien und ihre Aussagen



Konvergenzintervall  $< -R, R >$

besteht aus allen  $x$  für die  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$  konvergiert.

$<$  kann [ oder ] bedeuten.

$>$  kann ] oder [ bedeuten.

*Beweis.*  $|x_1, x_2| \in \mathbb{R}, |x_1| \leq |x_2|$

Dann: Falls  $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$  konvergiert, so auch  $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n|^n$  (2.22)  $(\star)$

Falls  $\sum b_n \cdot x_n$  für alle  $x$  absolut konvergiert, so setze  $R = \infty$

Wenn nicht, so setze  $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \cdot |x_n| \text{ konvergiert}\} < \infty$  Nach  $(\star)$  gilt:

$|x| < R \Rightarrow \sum b_n x^n$  konvergiert absolut.

Für  $|x| > R$  konvergiert  $\sum b_n x^n$  nicht absolut.

Sie konvergiert sogar selbst nicht.

$$\sqrt[n]{|b_n| \cdot |x|^n} \leq q < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

$$\uparrow \text{ (setze } \varepsilon = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} > 0)$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : s - \frac{\varepsilon}{2} < |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq s + \frac{\varepsilon}{2} =: q < 1$$

□

### 3.4 Bemerkung

Konvergenz von Potenzreihen der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$ :

gleichen Konvergenzradius  $R$  wie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

konvergiert absolut für  $|x-a| < R$ , d.h.  $x \in ]a-R, a+R[$  Divergiert für  $|x-a| > R$ .

Keine Aussage für  $|x-a| = R$ , d.h.  $x = a-R$  oder  $x = a+R$

Konvergenzintervall  $< a-R, a+R >$

### 3.5 Die Exponentialreihe

a) Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (b_n = \frac{1}{n!})$$

2.28 Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Setze für  $x \in \mathbb{R}$ :  $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Exponentialfunktion  $\exp(0) = \frac{0^n}{0!} = 1$

b) Serien  $x, y \in \mathbb{R}$

$\exp(x) \cdot \exp(y) \stackrel{2.31}{=} \text{Limes des Cauchy Produkts der beiden Reihen.}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot x^i \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \cdot x \cdot y^{n-i} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = \exp(x+y)$$

$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$

Daraus folgt:  $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad (\star)$$

Für alle  $x \geq 0 : \exp(x) > 0$ . Dann auch wegen  $(\star)$

$$\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

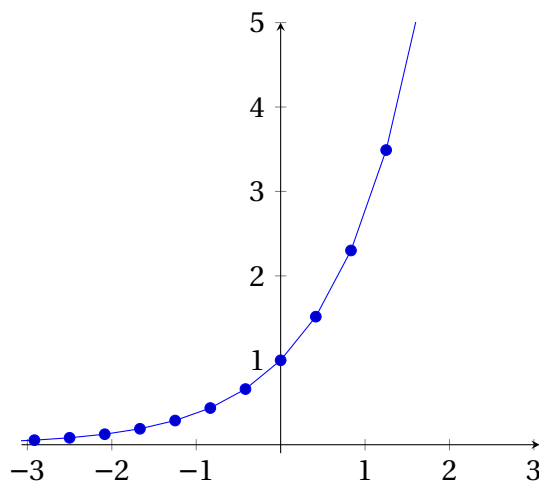


Abbildung 12: Die Exponentialreihe

c)  $\exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$

*Euler'sche Zahl*

Approximation  $e$  durch  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$

$m = 2$	$1 + 1 + \frac{1}{2}$	$= 2,5$
$m = 3$	$2,5 + \frac{1}{6}$	$= 2, \bar{6}$
$\dots m = 6$	$\frac{326}{126} + \frac{1}{720}$	$= 2,7180\bar{5}$

Es ist:  $e \approx 2,71828\dots$  (irrationale Zahl)

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$  konvergiert schnell

$$m \in \mathbb{N}$$

$$\exp(m) = \exp(\underbrace{1 + \dots + 1}_{\leftarrow m \rightarrow})$$

$$\exp(1)^m = e^m$$

$$e^0 = 1 \quad \exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = e^{-m}$$

$n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ :

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}^n\right)$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = + \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}.$$

Für alle  $x \in \mathbb{Q}$  stimmt  $\exp(x)$  mit der 'normalen' Potenz  $e^x$  überein.

Dann definiert man für beliebige  $x \in \mathbb{R}$ :

$$e^x := \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

In kürze: Definition  $a^x$  für  $a > 0, x \in \mathbb{R}$

- d) Bei komplexen Zahlen kam  $e^{it}$  ( $i^2 = -1, t \in \mathbb{R}$ ) vor als Abkürzung für  $\cos(t) + i \sin(t)$

Tatsächlich kann auch für jedes  $z \in \mathbb{C}$  definieren  $e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Dabei: Konvergenz von Folgen/Reihen in  $\mathbb{C}$  wie in  $\mathbb{R}$  mit komplexem Absolutbetrag.

Man kann dann zeigen:

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

Dass tatsächlich dann gilt:

$$e^{it} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + i \sin(t). \text{ zeigen wir später}$$

2.718...) Man kann zeigen.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Bedeutung:

- Angelegtes Guthaben  $G$  wird in einem Jahr mit 100% verzinst. Guthaben am Ende eines Jahres  $2G (= G(1 + 1))$

- Angelegtes Geld wird jedes halbe Jahr mit 50% verzinst. Am Ende eines Jahres (mit Zinsenzinsen)

$$G\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2,25G$$

$n$ - mal pro Jahr mit  $\frac{100}{n}\%$  verzinsen. Am Ende des Jahres  $G\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot G \approx 2.718 \dots \cdot G \text{ (stetige Verzinsung)}$$

$$a\% \text{ statt } 100\% \cdot G e^{\frac{a}{100}}$$

## 4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

### 4.1 Definition

Reelle Funktionen  $f$  in einer Variable ist Abbildung

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$  ( $D$  = Definitionsbereich).

Typisch:  $D = \mathbb{R}$ , Intervall, Verschachtelung von Intervallen

### 4.2 Beispiel

a) *Polynomfunktionen* (ganzrationale Funktion, Polynome)

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow a_n \cdot x^n + \dots a_1 x + a_0 \\ f(x) = a_n \cdot x^n + \dots a_1 \cdot x + q \end{cases}$$

$a_n \neq 0 : n = \text{Grad}(f)$   $f = 0$  (Nullfunktion),  $\text{Grad}(f) = \infty$

Grad 0: konstante Funktionen  $\neq 0$

Graph von  $f$ :

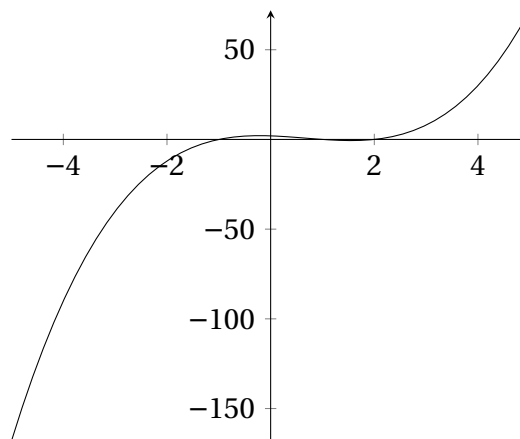


Abbildung 13:  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b)  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$  für alle  $x \in D$

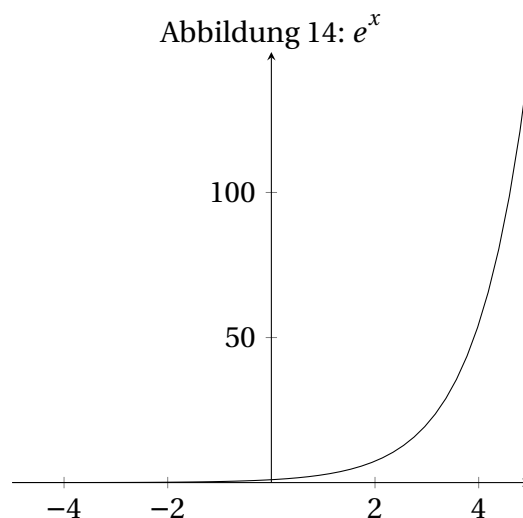
*Summe*: Differenz, Produkt von  $f$  und  $g$ .

Ist  $g(x) \neq 0$  für  $x \in D$ , so *Quotient*.  $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$  für alle  $x \in D$ ,  
 Quotient von Polynomen = (gebrochen-)rationalen Funktionen  
 $|f|(x) := |f(x)|$  Betrag von  $f$ .

c) Potenzreihe definiert Funktion auf ihrem Konvergenzintervall.

$$\text{z.B.: } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fkt.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



d) Hintereinanderausführung von Funktionen:

$$f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}, g: D_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(D_1) \subseteq D_2, \text{ dann } g \circ f:$$

$$\begin{cases} D_1 \Rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow g(f(x)) \end{cases}$$

e)  $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = e^{x^2 + 1}$$

f) *Trigonometrische Funktionen: Sinus- und Cosinusfunktion (vgl.  $\mathbb{C}$ )*

$0 \leq x \leq 2\pi$   $x$  = Bogenmaß von  $\varphi$  in Grad, so  $x = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi$

$\sin(x) = s, \cos(x) = c$  Für beliebig  $x \in \mathbb{R}$ :

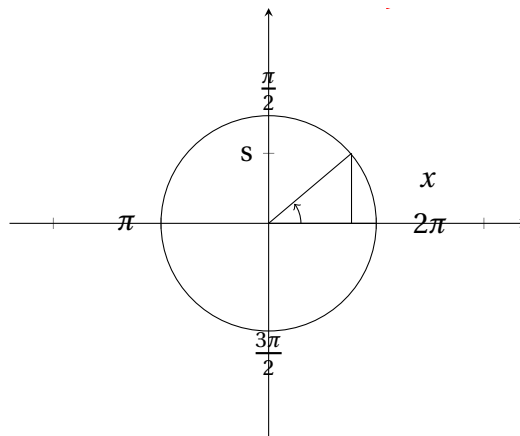


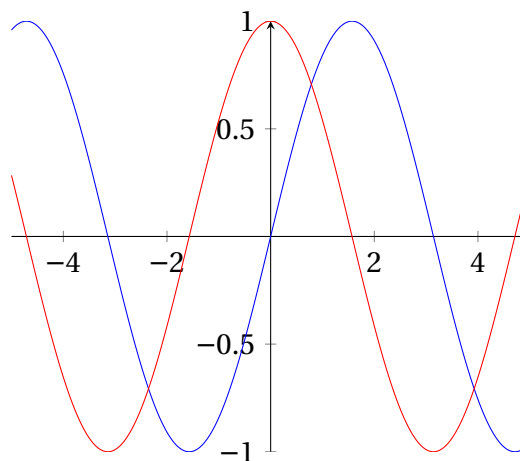
Abbildung 15: Bogenmaß

Periodische Fortsetzung, d.h.  $x \in \mathbb{R}. x = x' + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}, x' \in [0, 2\pi[$

$$\sin(x) := \sin(x')$$

$$\cos(x) := \cos(x')$$

$$|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$$

Abbildung 16:  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$ 

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

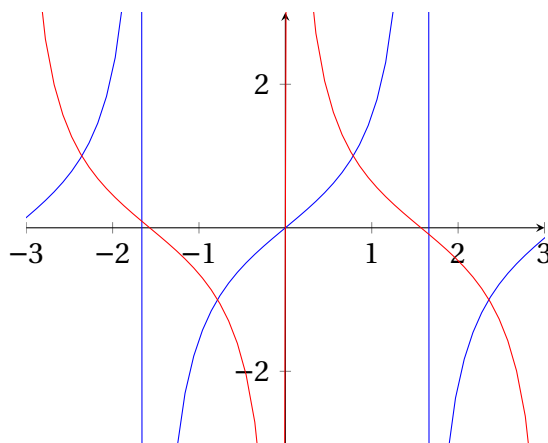
$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

*Tangens und Cotangensfunktion*



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \cos(x) \neq 0$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \sin(x) \neq 0$$

Abbildung 17:  $\tan(x)$  and  $\cot(x)$ 

### 4.3 Definition

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  heißt *Adharenzpunkt* von  $D$ , falls es eine Folge  $(a_n)_n$ ,  $a_n \in D$ , mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \text{ gibt.}$$

$\bar{D}$  = Menge der Adharenzpunkte von  $D$

= *Abschluss* von  $D$

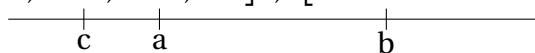
klar:  $D \subset \bar{D}$ .

$d \in D$ . konstante Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n = d$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d = d$ .

Also:  $d \in \bar{D}$ .

### 4.4 Beispiel:

a)  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > b$ ,  $D = ]a, b[$



$$\bar{D} = [a, b] \quad D \in \bar{D}$$

$$a \in \bar{D}$$

$$a_n = a + \frac{b-a}{n} \in D, n \geq 2$$

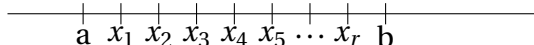
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Also  $[a, b] \subset \bar{D}$ .

Ist  $c \in [a, b]$ , etwa  $c < a$ , dann ist  $|a_n - c| \geq a - c > 0$  für alle  $a_n \in ]a, b[$ . Also:  $\lim_{a_n} \neq c$

b)  $\mathcal{J}$  Intervall in  $\mathbb{R}$ ,  $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{J}$ ,

$$D = \mathcal{J} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$$



$$\bar{D} = \bar{\mathcal{J}} = [a, b],$$

falls  $\mathcal{J} = ]a, b[$ .

c)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

## 4.5 Definition

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}.$$

$d \in \mathbb{R}$  heißt *Grenzwert von  $f(x)$  für  $x$  gegen  $c$* ,  $d = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ , wenn für jede Folge  $(a_n) \in D$ , die gegen  $c$  konvergiert, die Bildfolge  $(f(a_n))_n$  gegen  $d$  konvergiert.

## Bemerkung

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow$  Für alle Folgen  $(a_n)$ ,  $a_n \in D$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$ . Wenn man zeigen will, dass  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  nicht existiert, gibt es 2 Möglichkeiten:

- Suche eine bestimmte Folge  $(a_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$  nicht existiert.
- Suche zwei Folgen  $(a_n), (b_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$f(a_n) = (101010\dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \text{ existiert nicht.}$$

Oder:

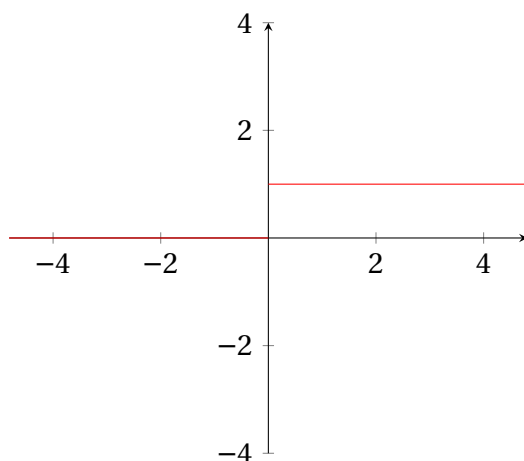


Abbildung 18: Abschnittsweise definierte Funktion

$$a_n = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\text{Aber: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(b_n)$$

#### 4.6 Beispiel:

a) Sei  $f(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$ , eine Polynomfunktion,  $c \in \mathbb{R}$ . Sei  $(a_n)$  Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0 \\ &= b_k \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k + b_{k-1} \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{k-1} + \dots + b_0 \quad \text{Rechenregeln für Folgen, 2.8} \\ &= b_k \cdot c^k + b_{k-1} \cdot c^{k-1} + \dots + b_1 \cdot c + b_0 = f(c). \end{aligned}$$

b) Sei  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

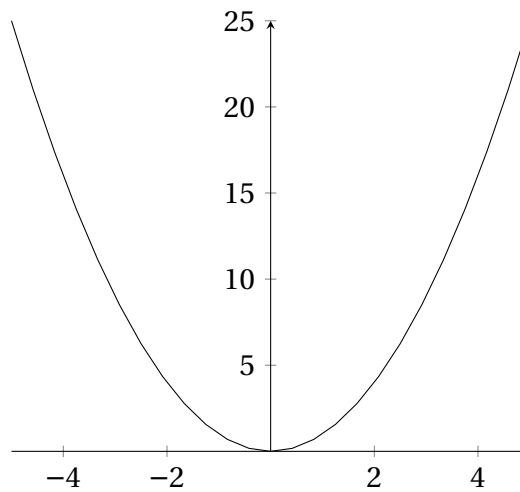
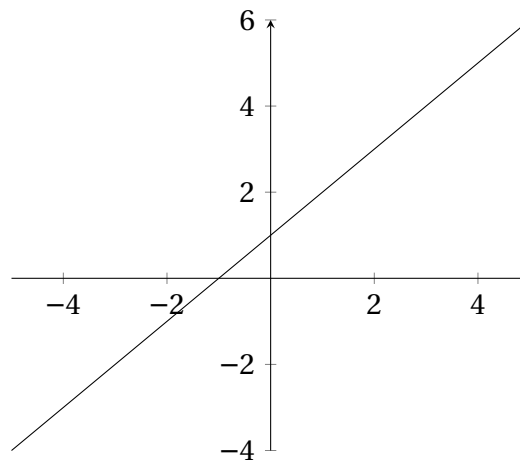
$$\text{Auf } D \text{ ist } f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1) \quad \bar{D} = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$\text{Sei } (a_n) \text{ Folge mit } D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$f(a_n) = a_n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = 1 + 1 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} = 2.$$

Abbildung 19:  $x^2$ Abbildung 20:  $x+1$ 

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) ?$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$a_n = -\frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

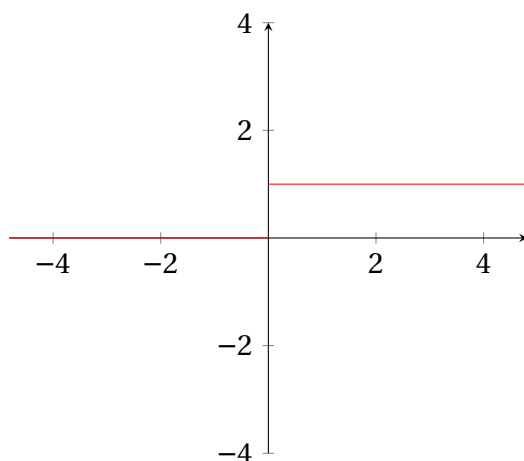
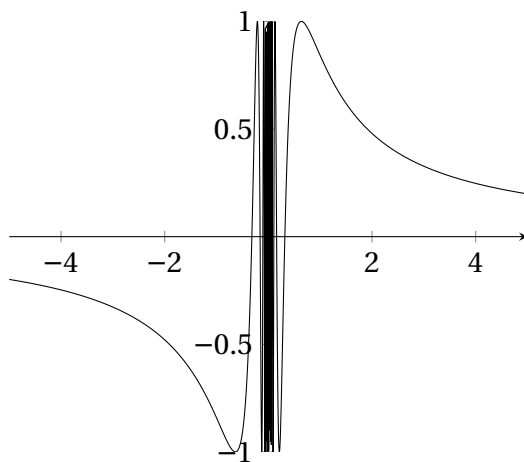


Abbildung 21: Abschnittsweise definierte Funktion

$\lim_{x \rightarrow 0}$  existiert nicht.

d)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $a_n = \frac{1}{n\pi}$ ,  $f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$

Abbildung 22:  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 

$$a'_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2}\pi)} \rightarrow 0, f(a'_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lim(a_n) = 0$$

$$\lim(f(a_n)) = \lim 0 = 0 \quad \lim(f(a'_n)) = \lim 1 = 1$$

$\lim(f(x))_{x \rightarrow 0}$  existiert nicht

e)  $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  dann:

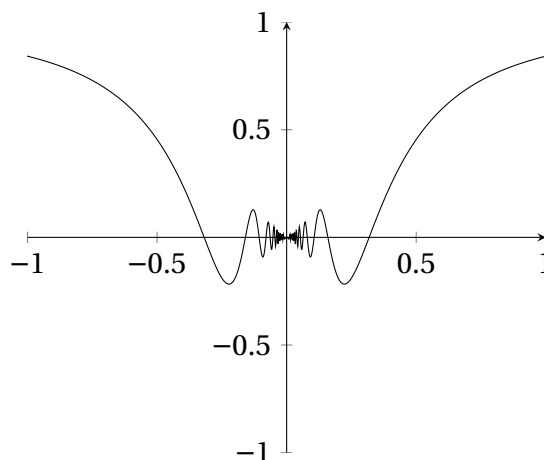


Abbildung 23:  $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

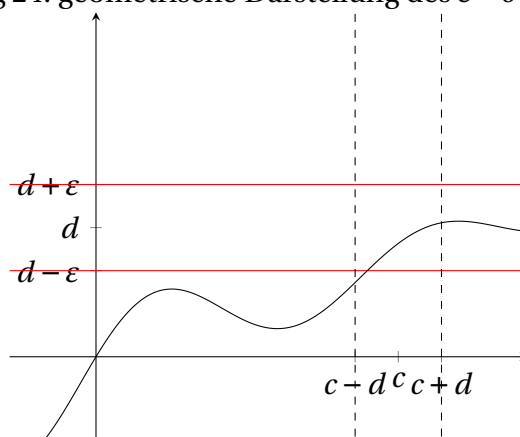
$$(a_n) \rightarrow 0, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin(\frac{1}{a_n}) = 0 \quad (2.8g)$$

#### 4.7 Satz ( $\varepsilon - \delta$ )-Kriterium

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in \bar{D}$ . Dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \rightarrow |f(x) - d| \leq \varepsilon$

Abbildung 24: geometrische Darstellung des  $\varepsilon - \delta$  Kriteriums



*Beweis.*  $\rightarrow$ : Angenommen falsch.

Dass heißt  $\exists \varepsilon > 0$ , so dass für alle  $\delta > 0$  (z.B.  $\delta = \frac{1}{n}$ ) ein  $x_n \in D$  existiert mit  $|x_n - c| \leq \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - d| > \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ . Aber:

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq d$

$\Leftarrow$ : Sei  $(a_n)$  Folge,  $a_n \in D$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ .

Zu zeigen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$ , d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall n \geq n(\varepsilon) : |f(a_n) - d| < \varepsilon$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, ex.  $d > 0$ :

(★)

Für alle  $x \in D$  mit  $|x - c| \leq \delta$  gilt  $|f(x) - d| < \varepsilon$ .

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ , existiert  $n_0$  mit  $|a_n - c| \leq \delta$  für alle  $n \geq n_0$

Nach (★) gilt:  $|f(a_n) - d| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ . ✓

□

## 4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

$f, g, D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$ , Existieren die Grenzwerte auf der rechten Seite der folgenden Gleichungen, so auch die auf der linken (und es gilt Gleichheit)

a)  $\lim_{x \rightarrow c} (f \pm / \cdot g) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm / \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ .

b) Ist  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$  und  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$ , so

$$\lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow c} f(x)|$

*Beweis.* Folgt aus den entsprechenden Regeln für Folgen.

□

**4.9 Beispiel:**

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + 1}, D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{4 + 6 + 1}{8 + 1} = \frac{11}{9}$$

4.6a)

**4.10 Bemerkung**

Rechts- und linksseitige Grenzwerte:

Rechtsseitiger Grenzwert:

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = d \Rightarrow \forall (a_n)_n, a_n \in D, a_n \geq c$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = d$ . Analog:

linksseitiger Grenzwert:  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$   
 $(a_n \leq c)$ .

**4.11 Beispiel:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, c = 0 \in \bar{D}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht.

Falls  $\lim_{x \rightarrow c^+}$  und  $\lim_{x \rightarrow c^-}$  existieren

$$\text{und } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$$

so existiert  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$ . Grenzwert:  $d \in \mathbb{R}$

**4.12 Definition**

$$D = \langle b, \infty[, f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{z.B. } D = \mathbb{R})$$

$f$  konvergiert gegen  $d \in \mathbb{R}$  für  $x$  gegen unendlich,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = d$ , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x \geq M : |f(x) - d| < \varepsilon.$$



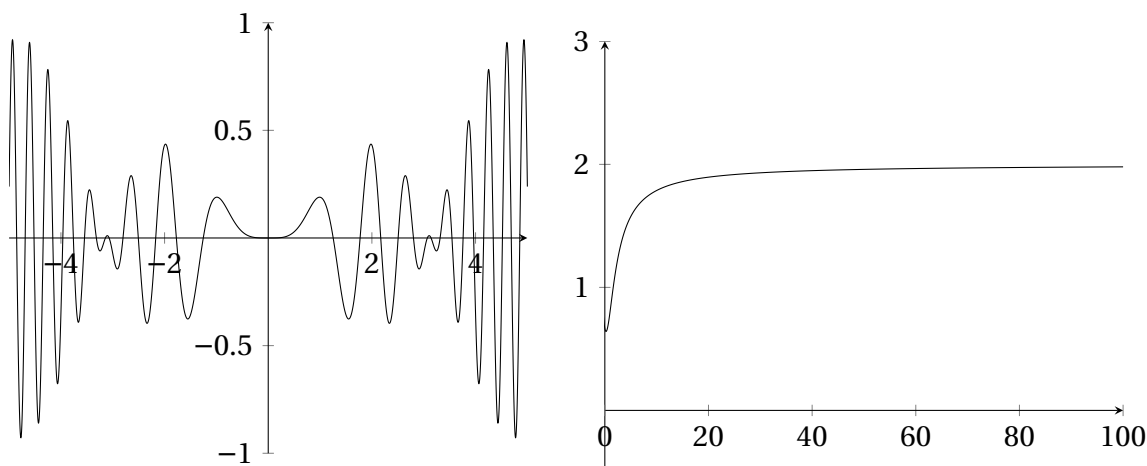


Abbildung 25: Grenzwerte gegen einen Festen Wert

(Analog:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d$ )

### 4.13 Beispiel

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $M = \frac{1}{\varepsilon}$ . Dann gilt für alle  $x \geq M$ :

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

b) Allgemein gilt:

$P, Q$  Polynome vom Grad  $k$  bzw.  $l \geq k$

$$P(x) = a_k \cdot x^k + \dots, Q(x) = b_l \cdot x^l + \dots, a_k \neq 0, b_l \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l > k \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{für } l = k \end{cases}$$

(Beweis wie für Folgen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 205x^3 + x^2 + 17}{14x^5 + 0,5} = \frac{1}{2}$$

### 4.14 Bemerkung

Die Rechenregeln aus 4.8 gelten auch für  $x \rightarrow \infty / -\infty$

## 4.15 Definition

a)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in \bar{D}$

 $f$  geht gegen  $\infty$  für  $x$  gegen  $c$ ,

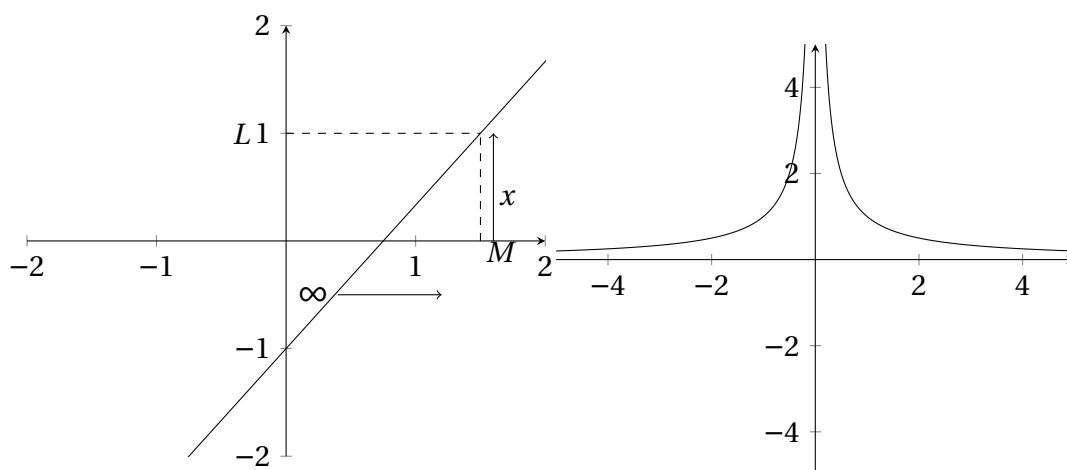
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \text{ falls gilt:}$$

$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq L.$$

$=\delta(L)$

b)  $c < b, \infty \in \bar{D}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, f$  geht gegen  $\infty$ , für  $x$  gegen  $\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  
falls gilt:

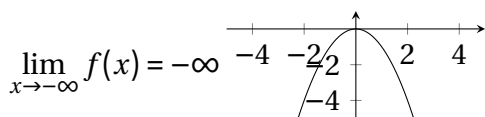
$$\forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D, x \geq M, f(x) \geq L.$$

Abbildung 26: Funktionen  $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$ 

(Entsprechend:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

**4.16 Satz**

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

a) Sei  $c \in \bar{D}$ , oder  $c = \infty, -\infty$

falls  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  oder  $-\infty$ , so ist  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

b)  $c \in \bar{D} \subset \mathbb{R}$ .

Falls  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  und falls  $s > 0$

existiert mit  $f(x) > 0$  für alle  $x \in [c - s, c + s]$ , ( $f(x) < 0$ )

dann ist  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty (-\infty)$

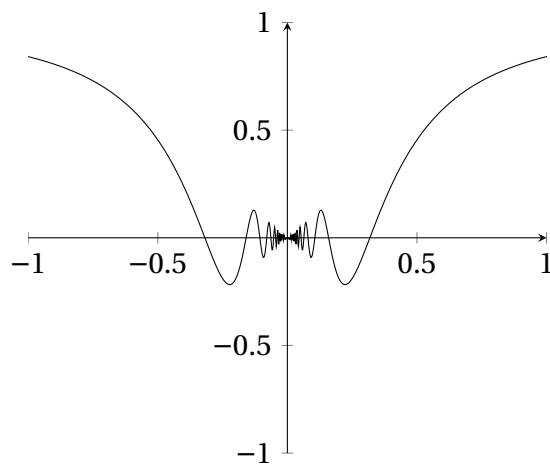


Abbildung 27:  $\sin(\frac{1}{x})$

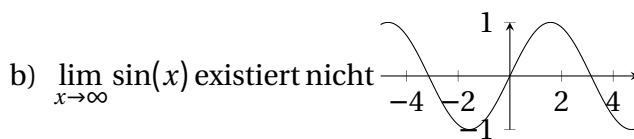
c) Falls  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  und falls  $T > 0$  existiert mit  $f(x) > 0$  für alle  $x \geq T$ , so ( $f(x) < 0$ )

ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty (-\infty)$

(Entsprechend für  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ )

**4.17 Beispiel**

- a) •  $f(x) = \frac{1}{x}, D = ]0, \infty[$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D = ]-\infty, 0[$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D = ]0, \infty[$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$



- c)  $P(x) = ak_x^k + \dots + a_0$ .
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \text{ k gerade oder } a_k < 0 \text{ k ungerade} \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \text{ k gerade oder } a_k > 0 \text{ k ungerade} \end{cases}$$

- d)  $P(x)$  wie in c)  
 $Q(x) = b_l^l + \dots + b_0$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ gleiche Vorzeichen} \\ -\infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ verschiedene Vorzeichen} \end{cases}$$

- e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \forall L > 0 \exists M \forall x \geq M: f(x) \geq L$

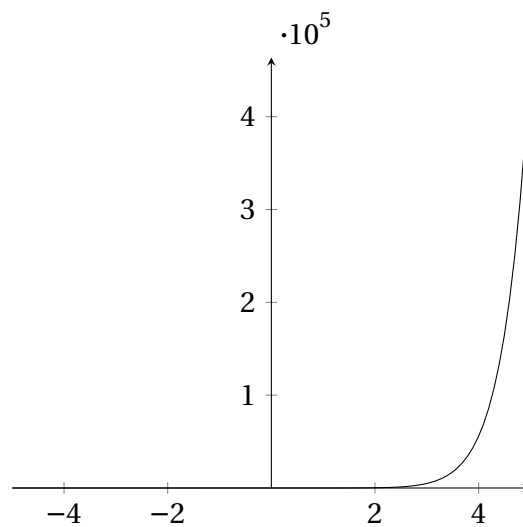
Sei  $L \geq 0, x > 0$ .

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$$

Ist  $x \geq (n+1)!L =: M$ , so ist  $\frac{e^x}{x^n} > L$ .

- f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ . Folgt aus e) und 4.16a)

Abbildung 28:  $\frac{e^x}{x^n}$ 

## 5 Stetigkeit

### 5.1 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

- a)  $f$  ist *stetig* an  $c \in D$ , falls  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .
- b)  $f$  heißt (absolut) stetig, falls  $f$  an allen  $c \in D$  stetig ist.

### 5.2 Satz

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D$ .

Existiert Konstante  $\mathbf{K} > 0$  mit  $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c|$  für alle  $x \in D$ , dann ist  $f$  stetig in  $c$ .

*Beweis.*

Sei  $\varepsilon > 0$ .

Wähle  $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbf{K}}$ . Ist  $|x - c| \leq \delta$ , so ist  $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c| \leq \mathbf{K} \cdot \delta = \varepsilon$ .

4.7  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

□

### 5.3 Beispiel

a) Polynome sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$f$  ist nicht stetig in 0.

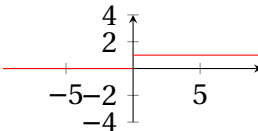
$$a_n = \frac{1}{n}, a_n \rightarrow 0$$

$$f(a_n) = 0$$

$$(f(a_n)) \rightarrow 0 \neq f(0)$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

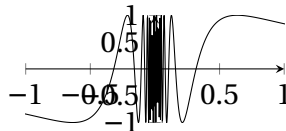
$f$  ist nicht stetig in 0.



$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$  ex. nicht.

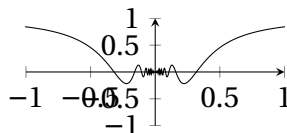
$f$  ist nicht stetig in 0.



$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$$

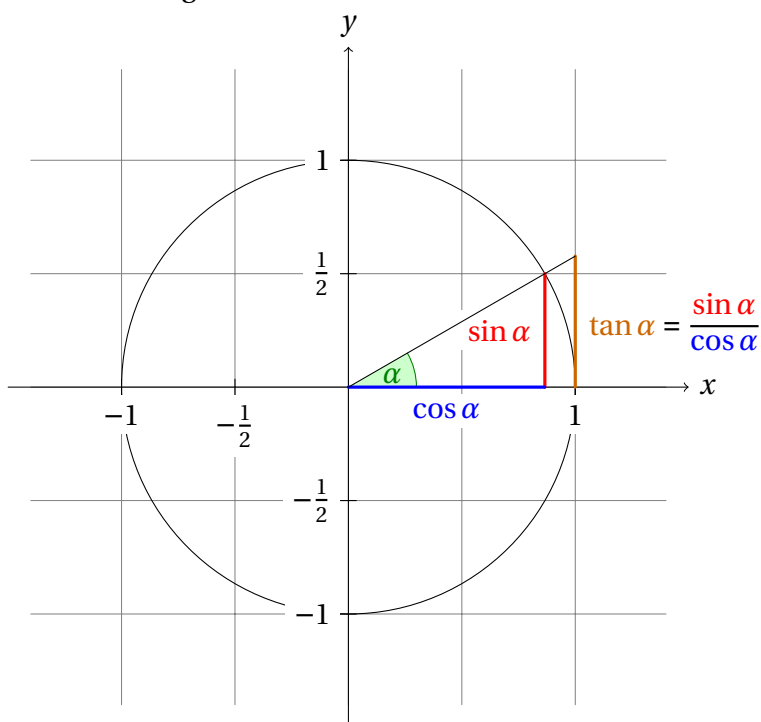
$f$  ist stetig in 0.



$$\text{f) } f(x) = \sin(x)$$

$g(x) = \cos(x)$  Sind stetig auf  $\mathbb{R}$ : Für alle  $x, c \in \mathbb{R}$  gilt:

Abbildung 29: Sinus und Cosinus am Einheitskreis



$$|\sin(x) - \sin(c)| \leq |x - c|.$$

$\sin(x)$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$  (5.2,  $\mathbf{K}=1$ )

## 5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit)

$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D,$

sind  $f$  und  $g$  stetig in  $c$ , dann auch  $f \pm \cdot$  und  $|f|$ . Ist  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$ , so ist auch  $\frac{f}{g}$  stetig in  $c$ .

*Beweis.* Folgt aus 4.8

□

## 5.5 Satz

$D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R},$

$g : D' \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'.$

Ist  $f$  stetig in  $c \in D$  und ist  $g$  stetig in  $f(c) \in D'$ , so ist  $g \circ f$  stetig in  $c$ ,

*Beweis.*  $(a_n) \rightarrow c, a_n \in D$ .

$f$  stetig:  $f(a_n) \rightarrow f(c)$

$g$  stetig in  $f(c)$ :  $(g \circ f)(a_n) = (g \circ f)(c)$

□

## 5.6 Beispiel

a)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{|x^2-1|}\right), D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ .  $f$  ist stetig auf  $D$ . Folgt aus 5.3<sub>a),f)</sub> und 5.4,5.5.

b)  $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$   
 stetig auf  $\mathbb{R}$ , 5.3e) für  $c = 0$  für  $c \neq 0$ . 5.3,5.4,5.5

c)  $f(x) = \tan(x) (= \frac{\sin(x)}{\cos(x)})$   
 $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$   $f$  stetig auf  $D$

## 5.7 Satz

Sei  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Dann ist  $f$  stetig  $m]a - R[ =: D$

$c \in D \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i = f(c)$$

## 5.8 Korollar

$f(x) = \exp(x) = e^x$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$



### 5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $[u, v] \subseteq D$ ,  $u < v$

Es gelte  $f(u) \cdot f(v) < 0$

(d.h.  $f(u) > 0, f(v) < 0$ , oder  $f(u) < 0, f(v) > 0$ ) Dann existiert  $w \in ]u, v[$  mit  $f(w) = 0$

*Beweis.* O.B.d.A.,  $f(u) < 0 < f(v)$ .

Bijektionsverfahren:



Falls  $f(u) < 0$ , so  $a = u$ , sonst  $a = v$ . Liefert Folgen  $(a_n), (b_n)$  und eindeutig bestimmte  $w \in [u, v]$  mit  $a_n \leq a_{n+1} \leq w \leq b_{n+1} \leq b_n$  für alle  $n$

$$f(a_n) < 0$$

$$f(b_n) \geq 0$$

für alle  $n$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = w$   $f$  ist stetig in  $w \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(w) =$

$$f(a_n) < 0 \forall n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0.$$

$$f(b_n) \geq 0 \forall n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0.$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(w).$$

□

### 5.10 Korollar (Zwischenwertsatz)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $[u, v] \subseteq D$

Dann nimmt  $f$  in  $[u, v]$  jeden Wert zwischen  $f(u)$  und  $f(v)$  an (und evtl. weitere)

*Beweis.* O.B.d.A.  $f(u) < f(v)$

Sei  $f(u) < b < f(v)$  beliebig, aber dann fest.

Definiere  $g(x) = f(x) - b$  stetig

$$g(u) = f(u) - b < 0$$

$$g(v) = f(v) - b > 0$$

5.9 (angewandt auf  $g$ ): Ex.  $w \in ]u, v[$  mit  $g(w) = 0$ , d.h.  $f(w) = b$ .

□

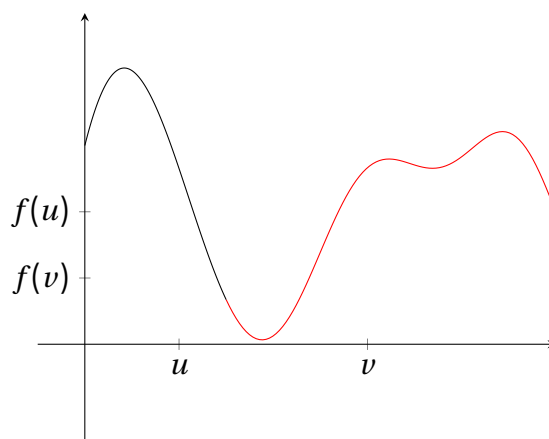


Abbildung 30: Zwischenwerte

### 5.11 Satz (Min-Max-Theorem)

$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

(Wichtig: *abgeschlossenes* Intervall)

Dann hat  $f$  ein Maximum und ein Minimum auf  $[a, b]$ , d.h es existieren

$x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$  mit  $f(x_{\max}) \leq f(x) \leq f(x_{\min})$  für alle  $x \in [a, b]$  (Beweis mit Bisektionsverfahren, [4])

### Zur Erinnerung

$f : D \rightarrow D'$  bijektiv, dann existiert Umkehrfunktion  $f^{-1} : D' \rightarrow D$  mit

$$f \circ f^{-1} = id_{D'}$$
 und

$$f^{-1} \circ f = id_D$$

zum Beispiel  $f(x) = x^2$

$$f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$$

bijektiv

$$f^{-1} : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$$

$$f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$$

## 5.12 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (streng) monoton wachsend (oder steigend), falls gilt:

Sind  $x, y \in D, x < y$ , so ist  $f(x) \leq f(y)$  ( $f(x) < f(y)$ )

Entsprechend: streng monoton fallend.  $f$  heißt (streng) monoton, falls sie entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

## 5.13 Satz

$D$  Intervall (rechte/linke Grenze)  $\infty, -\infty$  möglich),  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt:  $f$  ist injektiv auf  $D \Leftrightarrow f$  ist streng monoton auf  $D$ .

Beweis.  $\Leftarrow \checkmark$

$\Rightarrow$ : Angenommen  $f$  ist nicht streng monoton auf  $D$ .

Dann existieren  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D$ . mit  $x_1 < x_2$  und  $f(x_1) < f(x_2)$  und  $x_3 < x_4$  und  $f(x_3) > f(x_4)$

( $f(x_1) = f(x_2)$  bzw.  $f(x_3) = f(x_4)$  nicht möglich, da  $f$  injektiv) Jetzt muss man Fallunterscheidungen machen.

z.B

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

□

## 5.14 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

$D$  Intervall,  $f : D \rightarrow f(D) =: D'$

eine stetige, streng monotone (also bijektive) Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : D' \rightarrow D$  stetig.

Beweis: [5]  $f$  streng monoton wachsend (fallend)  $\Rightarrow f^{-1}$  streng monoton wachsend (fallend)

## 5.15 Korollar

Ist  $n \in \mathbb{N} \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ , so

ist  $f(x) = x^n$  stetig und bijektiv  $\begin{cases} [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[ \\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

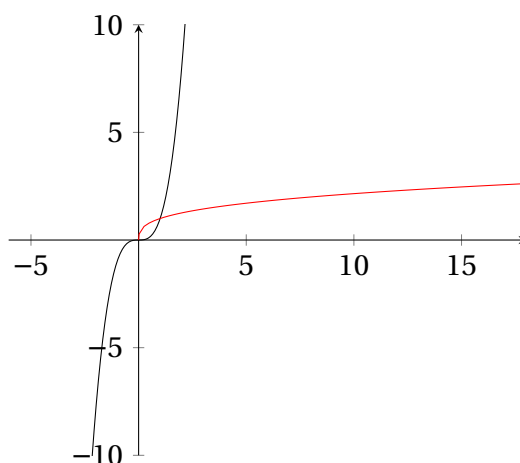


Abbildung 31: Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion  $f^{-1} = \sqrt[n]{x}$  ist stetig und bijektiv  $\begin{cases} [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[ \\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$  Nach 5.8 ist  $\exp(x)$  stetig auf  $\mathbb{R}$ . Nach 3.5b) ist  $\exp(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Für  $x > 0$ , so ist  $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3!} + \dots \geq 1$ , Ist  $x > y$  so ist  $\exp(y) = \exp(x + (y - x)) \underset{3.5b)}{=} \exp(x) \cdot \underbrace{\exp(y - x)}_{<0} > \exp(x)$

## 5.16 Satz

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt  $\ln(x) : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und streng monoton wachsend und bijektiv.

Es gilt:  $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$  für alle  $x, y > 0$ ,  $\ln(1) = 0$

*Beweis.*  $\exp$  streng monoton steigen s.V,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty \quad (4.17e))$$

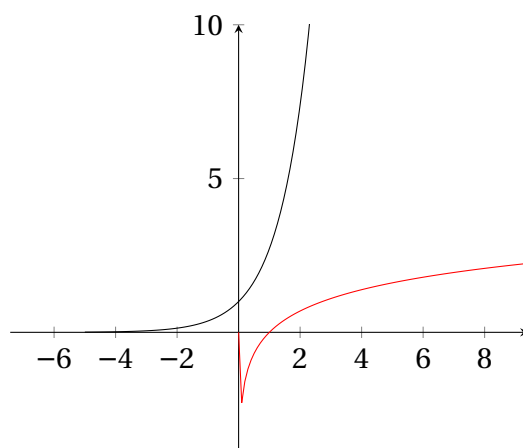
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \quad \text{Also: } \exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[ \text{ bijektiv} \quad 4.16$$

$\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , streng monoton wachsend, stetig, bijektiv (5.14).

$x, y > 0. \exists a, b \in \mathbb{R}$  mit  $x = \exp(a)$ ,  $y = \exp(b)$ .

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(\exp(a) \cdot \exp(b)) \\ &= \ln(\exp(a + b)) = a + b \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

□

Abbildung 32:  $\exp(x)$  und  $\ln(x)$ **5.17 Satz**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0 \text{ (für jedes } k \in \mathbb{N})$$

(D.h.  $(\ln(n)) \in o(n)$ )

*Beweis.*  $x = \exp(y)$ ,  $x \leq 1$ , d.h.  $y \leq 0$ .

$$\frac{\ln(x)}{x^k} = \frac{y}{(\exp(y))^k} \leq \frac{y}{\exp(y)} \rightarrow 0 \text{ (17e)}$$

□

**5.18 Definition**

Für  $a > 0$  setze  $a^x = \exp(x \cdot \ln(a)) \underbrace{(\exp(\ln(a)))}_0 a \leq e : e^x = \exp(x), a^x$ , falls  $a > 0$

**5.19 Satz**

Sei  $a > 0$

a)  $a^x : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  ist streng monoton wachsend für alle  $a > 1$  und streng monoton fallend für  $0 < a < 1$ .

b)  $a^x, a^y = a^{x+y}$   
 $(a^{x^y} = a^{x^y})$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$

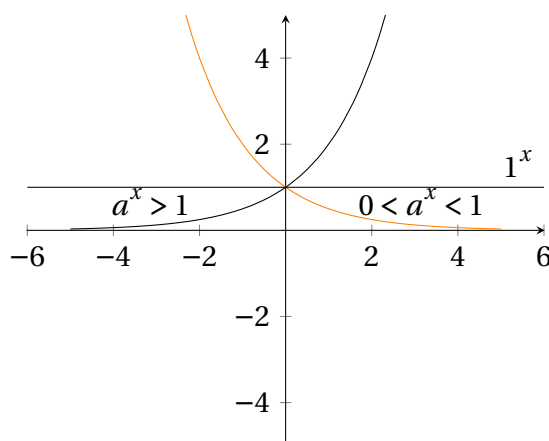


Abbildung 33: Verschiedene Arten Exponentialfunktionen

- c) Für  $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} (p \in \mathbb{Z}, q > 0)$  stimmt Def. von  $a^x$  entsprechend 5.18 mit der üblichen Definition  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$  überein.

*Beweis.* Folgt aus Definition mit 3.5

□

## 5.20 Bemerkung

Ist  $x \in \mathbb{R}$  und  $(x_n)$  Folge mit  $x_n \in \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,

so  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x$

(Stetigkeit)

D.h.  $a^x$  lässt sich durch  $a^{x_n}$ ,  $x_n \in \mathbb{Q}$ , beliebig gut approximieren

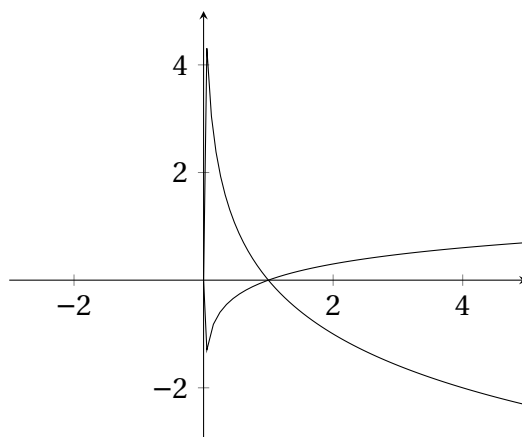
## 5.21 Definition

Für  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , heißt die Umkehrfunktion von  $a^x$  *Logarithmus zur Basis a*

$\log_a(x)$

( $a = 2$ ,  $a = e$ ,  $a = 10$  wichtig)

$\log_e(x) = \ln(x)$

Abbildung 34: Logarithmen mit Basen  $> 1$  und  $< 1$ **5.22 Satz**

Seien  $a, b > 0, a \neq 1 \neq b, x, y > 0$

- (a)  $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- (b)  $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$
- (c)  $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$
- (d) Sind  $a, b > 1$ , so  $O(\log_a(n)) = O(\log_b(n))$

*Beweis.* a) wie 5.10

$$\text{b) } a^{y \cdot \log_a(x)} \stackrel{5.19b)}{=} (a^{\log_a(x)})^y = x^y$$

$$\Rightarrow \log_a(x^y) = \log_a(a^{y \cdot \log_a(x)}) = y \cdot \log_a(x)$$

$$\text{c) } \log_a(x) = \log_a(b^{\log_b(x)}) \stackrel{b)}{=} \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

d) Folgt aus c), da  $\log_a(b) > 0$

□

**6 Differenzierbare Funktionen**

Sekante durch  $(c, f(c)), (x, f(x))$

Steigung der Sekante:

$$x \neq c: \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\text{Differenzenquotient}} = s(x) \text{ definiert auf } \mathbb{R} \setminus \{c\}$$

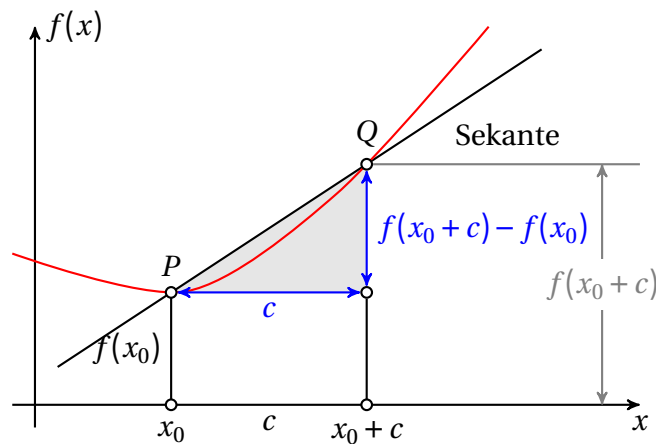


Abbildung 35: Steigung am Steigungsdreieck

Falls  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  existiert: Steigung der Tangente an Graph von  $f$  in  $(c, f(c))$   
 (Änderungsrate von  $f$  in  $(c, f(c))$ )

## 6.1 Definition

$\mathcal{J}$  Intervall,  $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathcal{J}$

- a)  $f$  heißt *differenzierbar* (diffbar) an der Stelle  $c$ , falls  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  existiert.  
 Grenzwert heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* von  $f$  an der Stelle  $c$ .

$$f'(c) = \left( \frac{df}{dx}(c) \right) \quad \left[ f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, h := x - c \right]$$

- b)  $f$  heißt *differenzierbar* auf  $\mathcal{J}$ , falls  $f$  in jedem Punkt von  $\mathcal{J}$  differenzierbar ist.

$$f': \begin{cases} \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

## 6.2 Beispiel

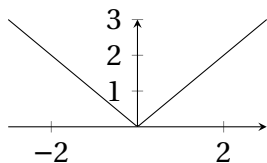
- a)  $f(x) = a \cdot x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$x \neq c: \frac{ax^n - ac^n}{x - c} = \frac{a(x-c)(x^{n-1} \dots)}{x - c}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{ax^n - ac^n}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} a(x-c)(x^{n-1} \dots) = \frac{a(x-c)(x^{n-1} \dots)}{x - c} = a \cdot n \cdot c^{n-1} = f'(x).$$

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \text{ Gilt auch für } n = 0. (f \text{ konstant auf } f' = 0)$$



b)  $f(x) = |x|$  $f$  ist diffbar in 0?Zu zeigen  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$  existiert nicht.Sei  $(a_n)$  Folge,  $a_n < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (z.B.  $a_n = -\frac{1}{n}$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{a_n} = -1$$

 $b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  (z.B.  $b_n = \frac{1}{n}$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_n} = 1$$

 $f'(0)$  existiert nicht!

### 6.3 Satz

 $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $c \in \mathcal{I}$  diffbar. Dann gilt für alle  $x \in \mathcal{I}$  :

$$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + \mathcal{R}(x) \cdot (x - c),$$

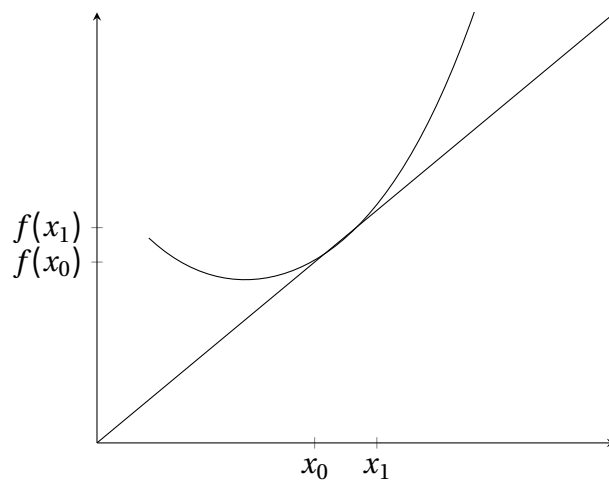
wobei  $\mathcal{R} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $c$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} \mathcal{R}(x) = 0$ D.h. :  $f$  lässt sich in der Nähe von  $c$  sehr gut durch eine lineare Funktion (d.h. Graph

Abbildung 36: Sekante an Funktion

ist Gerade) approximieren.

## 6.4 Korollar

$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar in  $c \Rightarrow f$  ist steig in  $c$ . Beweis folgt aus 6.3

Beachte: Umkehrung von 6.4 gilt im Allgemeinen nicht. 6.2b).

Diffbare Funktionen sind stetig, aber sie haben keine Knicke im Graphen.

## 6.5 Satz (Ableitungsregeln)

$\mathcal{I}$  Intervall,  $c \in \mathcal{I}$ . Für a)-c)

seien  $f, g: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar in  $c$

a)  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so  $\alpha f + \beta g$  diffbar in  $c$ ,

$$(\alpha f + \beta g)'(c) = \alpha \cdot f'(c) + \beta \cdot g'(c)$$

b) (Produktregel)  $f \cdot g$  diffbar in  $c$ ,

$$(f \cdot g)'(c) = f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c)$$

c) (Quotientenregel) Ist  $g(x) \neq 0$  auf  $\mathcal{I}$ , so

$$\frac{f'}{g}(c) = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g(c)^2}$$

d) (Kettenregel)  $\mathcal{I}_1$  Intervall,  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}_1$ , diffbar in  $c$ ,  $g: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar in  $f(c)$ , so  $g \circ f$  diffbar in  $c$ , und

$$(g \circ f)' = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

*Beweis.* Nur b):

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)(g(x) - g(c)) + g(c)(f(x) - f(c))}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} +$$

$$g(c) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \stackrel{6.4}{=} f(c)g'(c) + g(c)f'(c).$$

□

## 6.6 Beispiel

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \\ f'(x) &\stackrel{6.5a)}{=} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \mathcal{D} &= ]0, \infty[ \\ f'(x) &\stackrel{6.2a)}{=} \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} \stackrel{6.5c)}{=} \frac{-n}{x^{n+1}} = (-n) \cdot x^{-n-1} \text{ gilt auch auf } ]-\infty, 0[ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h(x) &= (x^2 + x + 1)^2 \\ (6.5d): f(x) &= x^2 + x + 1 \\ g(x) &= x^2 \\ h'(x) &= 2 \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1) \end{aligned}$$

## 6.7 Satz

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

*Beweis.*

$$\text{a) Elementargeometrisch + Additionstheoreme 1.7 (Man zeigt: } \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \text{ für } 0 < x < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{b) } \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{(1 - \cos(x))}{x(1 + \cos(x))} = \frac{1 - \cos(x)}{x(1 + \cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \rightarrow 0$$

□

## 6.8 Satz

- a)  $f(x) = \sin(x)$ , so  $f'(x) = \cos(x)$   
b)  $f(x) = \cos(x)$ , so  $f'(x) = -\sin(x)$   
c)  $f(x) = \tan(x)$ , so  $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

*Beweis.* a),  $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h+c) - \sin(c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(c) \cdot \cos(h) + \cos(c) \cdot \sin(h) - \sin(c)}{h} \\ &= \frac{\sin(c) \cdot \cos(h) - \sin(c)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(c) \sin(h)}{h} = \sin(c) \cdot 0 + \cos(c) \cdot 1 = \cos(c) \text{ b) analog} \\ \text{c) } f(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ Quotientenregel + a)b) } \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

□

## 6.9 Beispiel

- a)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$   
 $f$  ist diffbar für alle  $x \neq 0$

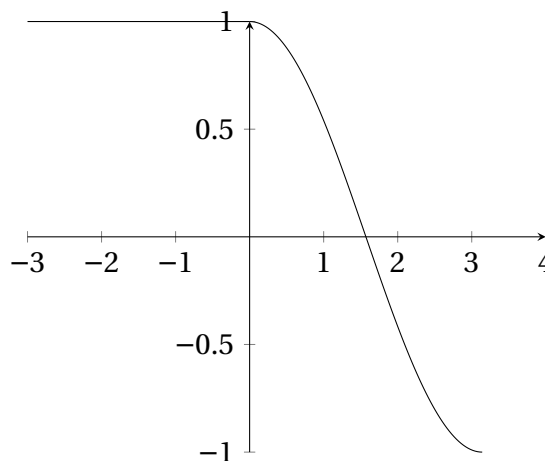


Abbildung 37: Abschnittsweise definierte cosinus Funktion

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x} \stackrel{6.7b)}{=} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 = f'(0)$$

b)  $f(x) = \sin^2(x^3) = (\sin(x^3))^2$

$$f'(x) = 2 \cdot \sin(x^3) \cdot (\sin(x^3))' = 6 \cdot \sin(x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot x^2$$

## 6.10 Satz

Im Inneren ihres Konvergenzintervalls definieren Potenzreihen eine Funktion

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$

eine Potenzreihe um  $a$  mit Konvergenzradius  $R > 0$ .

Dann ist  $f$  in  $]a-R, a+R[$  diffbar und es gilt:  $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1} = f'(x)$ .

(gliedweise Ableitung)

(Beweis [7])

## 6.11 Korollar

$$(\exp(x))' = \exp(x)$$

*Beweis.*  $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$k = 1, \dots$$

Behauptung folgt. □

## 6.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

$f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}_1$  bijektiv,  $\mathcal{I}, \mathcal{J}_1$  Intervall (linke und rechte Grenze darf nicht  $-\infty/\infty$  sein)

Sei  $f$  in  $c \in \mathcal{I}$  diffbar und  $f'(c) \neq 0$ .

Dann ist  $f': \mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{I}$  in  $f(c) \in \mathcal{J}_1$  diffbar, und es gilt:  $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$

Ist  $f$  überall auf  $\mathcal{I}$  diffbar und  $f'(y) \neq 0$  für alle  $y \in \mathcal{I}$ , so ist  $f^{-1}$  auf  $\mathcal{J}_1$  diffbar und es

gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

für alle  $x \in \mathcal{I}$ .

*Beweisidee:*  $f^{-1}$  diffbar an Stelle  $f(c)$ , falls  $f'(c) \neq 0$ . Grund: Graph von  $f^{-1}$  = Graph von  $f$  gespiegelt an Winkelhalbierende  $s(x) = x$ .

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

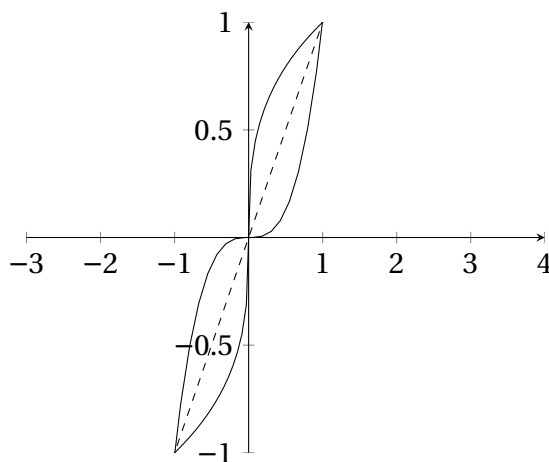


Abbildung 38: Zwei Funktionen an der Winkelhalbierenden

Ableiten mit Kettenregel.

$$f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = 1. \text{ Behauptung folgt.}$$

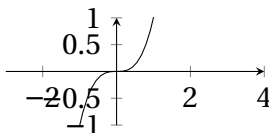
### 6.13 Bemerkung

Bedingung  $f'(c) \neq 0$  in 6.12 ist notwendig.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^3 \end{cases} \quad \text{bijektiv}$$

$$f'(0) = 0.$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$



$$(f'(x) = 3x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

$(f^{-1})'(0)$  existiert nicht. (jedenfalls nicht als reelle Zahl!)

## 6.14 Satz

$f(x)$	$f'(x)$
a) $a^x$ ( $a \in \mathbb{R}, a > 0$ ), $x \in \mathbb{R}$	$\ln(a) \cdot a^x$
b) $\ln(x)$ auf $]0, \infty[$	$\frac{1}{x}$
c) $\log_{10}(x)$ (konst. $a > 0, a \neq 1$ ) auf $]0, \infty[$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
d) $x \cdot (\ln(x) - 1)$ auf $]0, \infty[$	$\ln(x)$
e) $x^b \cdot (b \in \mathbb{R})$ auf $]0, \infty[$	$b \cdot x^{b-1}$

*Beweis.* a)

$$f(x) = \exp(x \cdot \ln(a))$$

$$f'(x) \stackrel{6.12}{=} \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

Kettenregel

$$\text{b) } \ln(x)' \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{\exp'(\ln(x))} \stackrel{6.11}{=} \frac{1}{x}$$

$$\text{c) } \log_a'(x) \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{\ln(a) \cdot a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

□

## 6.15 Satz (logarithmische Abbildung)

$f : \mathcal{I} \rightarrow ]0, \infty[$  diffbar.

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Beweis : Kettenregel und 6.14b)

## 6.16 Beispiel

$$f(x) = e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^6 \text{ für } x \neq 0$$

$$\ln(f(x)) = x + \ln(\sin(x) + 2) + 6 \cdot \ln(x)$$

$$\ln(f(x))' = 1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2} + \frac{6}{x}$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2} + \frac{6}{x}\right) \cdot e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^6$$

**6.17 Definition**

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  hat *lokales Maximum*

**6.18 Satz**

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar.

Hat  $f$  in  $c \in D$  lokales Minimum/Maximum, so  $f'(c) = 0$

*Beweis.*

$c$  lokale Max.stelle.

$f'(c)$  existiert nach Voraussetzung.

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0.$$

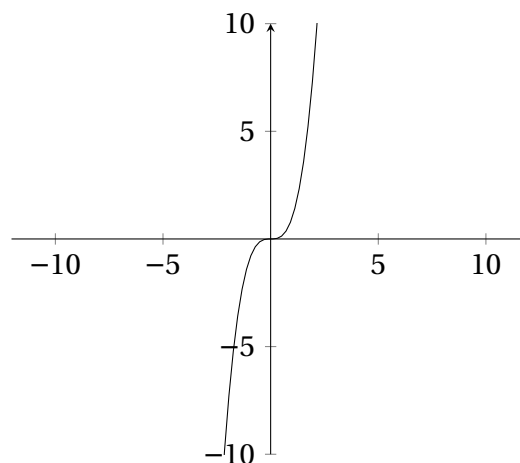
□

*Vorsicht:*  $f'(c) = 0$  ist nicht hinreichend für lokale Maxima/Minima.

$$\text{z.B. } f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$$

$f$  hat kein Maximum oder Minimum in 0

Globale Max/Min von  $f$  auf  $[a, b]$ :



Abbildungung 39: Ableitung keine Hinreichende Bedingung für Minima/Maxima

- Bestimme  $c \in ]a, b[$  mit  $f'(c) = 0$  Teste, ob lokale Max/Min.



- Teste Intervallgrenzen  $a$  und  $b$ .

### 6.19 Satz (Mittelwertsatz)

$\mathcal{I} = [a, b]$ ,  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

$f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und diffbar auf  $]a, b[$ .

Dann existiert  $c \in ]a, b[$  mit  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Speziell:

$f(a) = f(b) \Rightarrow$

$\exists c \in ]a, b[$  mit

$f'(c) = 0$  Satz von

Rolle

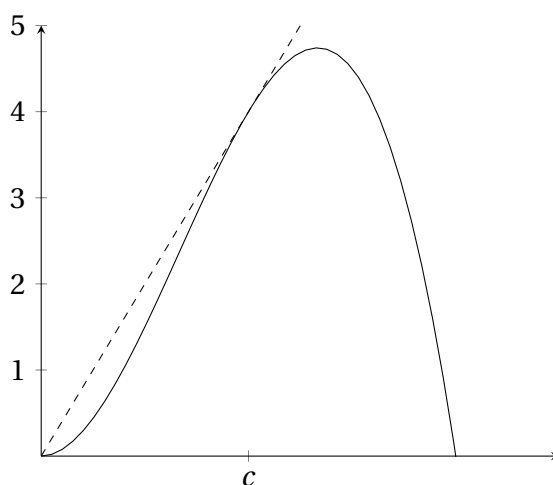


Abbildung 40: Eine Funktion und ihrer Steigung an der Stelle  $c$

*Beweis.* Setze  $s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

(Sekante durch  $(a, f(a)), (b, f(b))$ )

Def.  $h(x) = f(x) - s(x)$ .  $h(a) = h(b) = 0$ .

Zeige:  $\exists c \in ]a, b[$  mit  $h'(c) = 0$ .

Fertig, denn

$$h'(x) = f'(x) - s'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ist  $h$  konstant, so kann man jedes  $c \in ]a, b[$  wählen. Also sei  $h$  nicht konstant.  $h$  ist stetig auf  $[a, b]$ . 5.11.  $h$  nimmt auf  $[a, b]$  globales Max. und Min. an:  $x_{\max}, x_{\min}, x_{\max} \neq$

$x_{\min}$ , da  $h$  nicht konstant  $h(a) = h(b)$  O.B.d.A

$x_{\max} \in ]a, b[$ . 6.18 :  $h'(x_{\max}) = 0$

□

## 6.20 Korollar

$\mathcal{J} = [a, b]$ ,  $a < b$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, diffbar in  $]a, b[$ . (auch  $\mathcal{J} = \mathbb{R}$  oder  $[a, \infty[$ ,  $] - \infty, b]$  erlaubt)

a) Ist  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , so ist  $f$  konstant auf  $[a, b]$ ,

b) Ist  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , so ist  $f$  (streng) monoton wachsend auf  $\mathcal{J}$

c) Ist  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$  so ist  $f$  (streng) monoton fallend auf  $\mathcal{J}$ .

*Beweis.*

Wähle  $u < v$ ,  $u, v \in [a, b]$  beliebig.

Wende 6.19 auf  $[u, v]$  an.  $\exists c \in ]u, v[$  mit

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

Daraus folgt im Fall

a)  $f(v) = f(u)$

b)  $f(v) \geq f(u)$

c)  $f(v) \leq f(u)$

Bedingung für strenge Monotonie nur hinreichend, nicht notwendig  $f(x) = x^3$   
streng monoton steigend  $f'(0) = 0$

□

## 6.21 Korollar

$\mathcal{J} = [a, b]$ ,  $a < b$  wie in 6.20.

$c \in ]a, b[$ .  $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig in  $\mathcal{J}$ .

$f$  auf  $\mathcal{J}_0 = ]a, b[ \setminus \{c\}$  diffbar

Existiert  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$  auf  $\mathcal{J}_0$ , so existiert  $f'(c)$  und  $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ .

## 6.22 Satz (Regeln von L'Hôpital)

a)  $\mathcal{J}$  Intervall,  $c \in \mathcal{J}$ ,  $f, g : \mathcal{J} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar.

Es gelte  $g'(x) > 0$  für alle  $x \in \mathcal{J} \setminus \{c\}$

Oder :  $g'(x) < 0$  für alle  $x \in \mathcal{J} \setminus \{c\}$

Es gelte  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$  oder  $\infty$

Existiert  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , so ist  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

b)  $f, g: [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar.

Es gelte  $g'(x) > 0$  für alle  $x \in [a, \infty[$

oder  $g'(x) < 0$  für alle  $x \in [a, \infty[$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  oder  $\infty$

Existiert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , so ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

## 6.23 Beispiel

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+ax)}{x} = ?$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) Zähler definiert für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $1+ax > 0$  6.22a):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+ax}}{1} = a$$

b)  $\lim_{x \cdot \ln(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{6.22}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x \cdot \ln(x))$   
 $\stackrel{\text{exp stetig}}{=} \exp(\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x)) \stackrel{b)}{=} \exp(0) = 1.$

(Deshalb definiert man  $0^0 = 1$ )

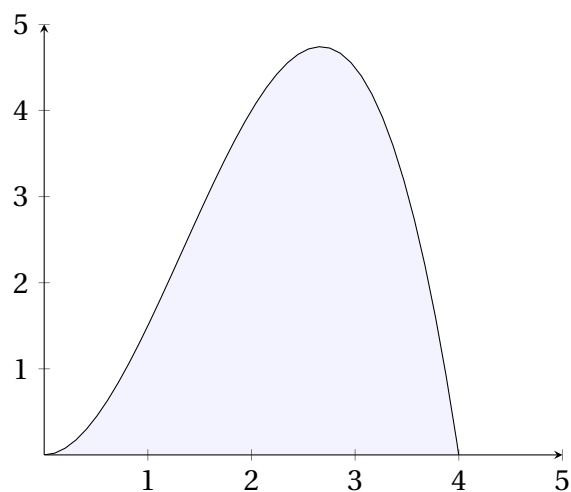
d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{6.22}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ (schon in 5.17)}$$

## 7 Das bestimmte Integral

Ziel: Bestimmung des Flächeninhalts zwischen Graph einer Funktion und x-Achse zwischen zwei Grenzen a und b (sofern möglich).

Abbildung 41: Flächeninhalt unter einer Funktion  $f$ 

## 7.1 Definition

- a)  $a, b \in \mathbb{R}, a < b. f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Treppenfunktion*, falls es  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  gibt, so dass  $f$  auf jedem offenem Intervall  $]a_i, a_{i+1}[$ ,  $i = 0 \dots, n - 1$ , konstant ist. (Wert an den  $a_i$  beliebig.)

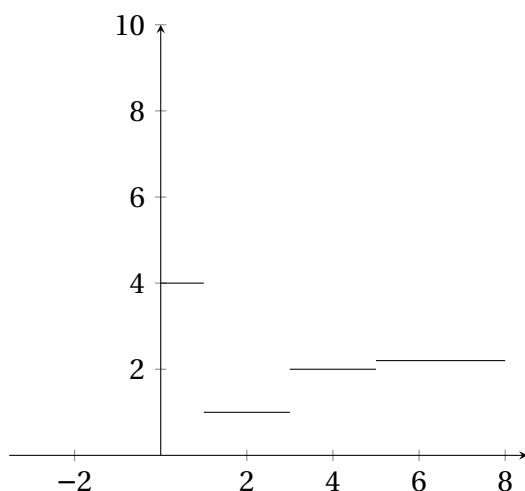


Abbildung 42: Treppenfunktion

b)  $f$  wie in a).

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f(x) dx := \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)$$

wobei  $f(x) = c_i$  auf  $]a_i, a_{i+1}[$ .

Integral von  $f$  über  $[a, b]$  (Integral kann negativ sein)

## 7.2 Definition

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$ .

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Regelfunktion* (oder integrierbare Funktion)  $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$  Treppenfunktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (abh. von  $\varepsilon$ ):  $|f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$  für alle  $x \in [a, b]$ .

Bedeutung:

Gleichmäßige Approximierbarkeit durch Treppenfunktion.

## 7.3 Satz

$\mathcal{J} = [a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$ .

a) Jede Regelfunktion  $f$  auf  $\mathcal{J}$  ist beschränkt d.h.  $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M$  für alle  $x \in [a, b]$ .

b) Summe, Produkt und Betrag von Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion

*Beweisidee* für a), b):

Man beweist 7.3 zunächst für Treppenfunktionen. Für b): Bestimme gemeinsame Verfeinerung der Intervallunterteilung der beiden Treppenfunktionen. Dann auf Regelfunktionen übertragen.

## 7.4 Satz

Jede stetige Funktion auf  $[a, b]$  ist Regelfunktion *Beweis*: [8]

7.4 gilt auch für sogenannte *stückweise stetige* Funktionen auf  $[a, b]$ .  $[a, b]$  ist Vereinigung *endlicher* Teilintervalle, auf denen Funktion stetig ist.

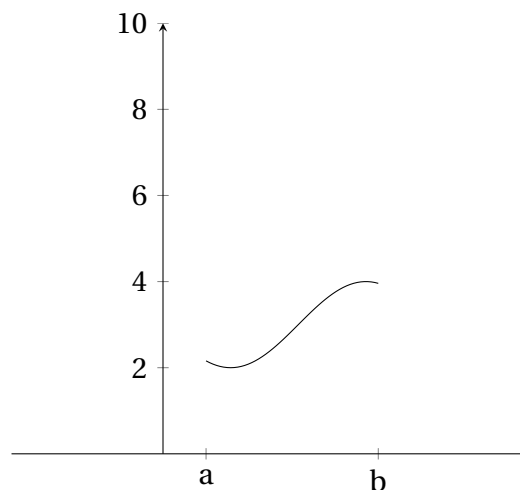


Abbildung 43: Treppenfunktion

## 7.5 Beispiel

a)  $f(x) = x^2$ ,  $\mathcal{J} = [0, t]$

Definition für  $x \in \mathbb{N}$  Treppenfunktion.

$$f_n : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$$

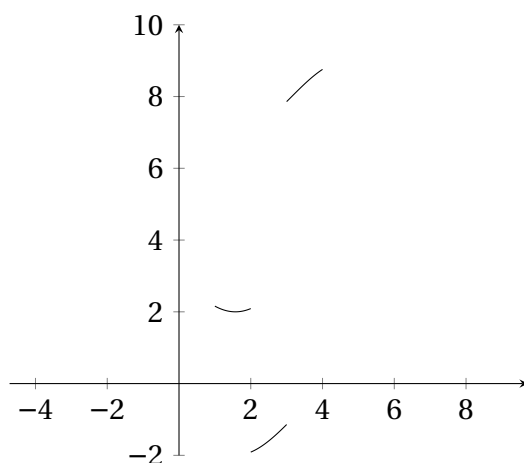
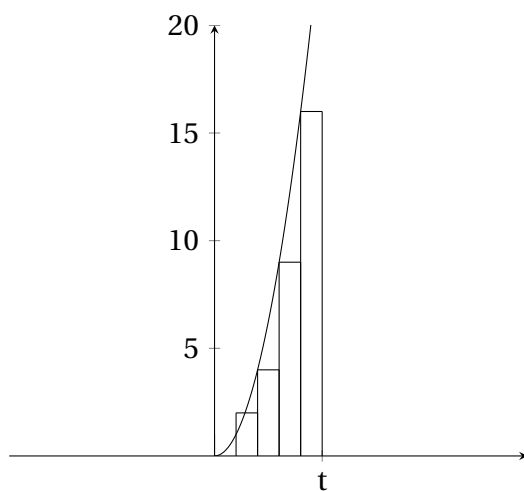


Abbildung 44: Abschnittsweise stetige Funktion

Abbildung 45: Treppenfunktion (Untersumme) von  $x^2$ 

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{it^2}{n}\right) & \text{falls } x \in \left[\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}\right] \text{ für ein } i \in \{0, \dots, n-1\} \\ t^2 & \text{falls } x = t \end{cases}$$

$$x \in [0, t]: |f(x) - f_n(x)| = ?$$

$$x = t: |f(t) - f_n(x)| = 0.$$

$$0 \leq x < t: \text{Dann } x \in \left[\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}\right] \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|x^2 - \left(\frac{it}{n}\right)^2\right| \leq \left(\frac{(i+1)t}{n}\right)^2 - \left(\frac{it}{n}\right)^2 = \frac{2it + t^2}{n^2} \leq \frac{2t}{n} + \frac{t^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

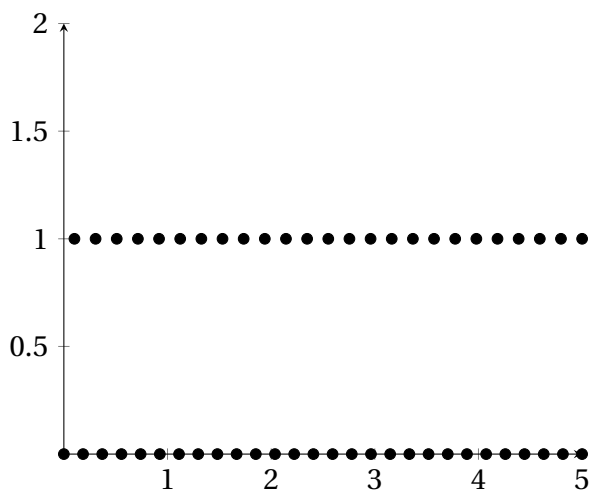


Abbildung 46: Nicht integrierbare Funktion

## 7.6 Lemma

$f$  Regelfunktion auf  $[a, b]$

- a)  $(f_n)_n$  Folge von Treppenfunktion, die *gleichmäßig* gegen  $f$  konvergiert, dass heißt es existiert Nullfolge  $(a_n)_n$ ,  $a \geq 0$ , und  $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$  für alle  $x \in [a, b]$ .

Dann konvergiert die Folge

$$\underbrace{\left( \int_a^b f_n(x) dx \right)}_{\in \mathbb{R}}_n$$

- b) Sind  $(f_n)_n$  und  $(g_n)_n$  zwei Folgen von Treppenfunktionen die gegen  $f$  gleichmäßig konvergieren, so :

$$(\text{WHK, 7.20}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx$$



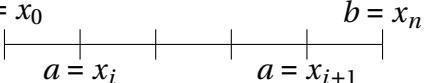
## 7.7 Definition

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Regelfunktion,  $(f_n)_n$  Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert (wie in 7.6 a).

Definition (*bestimmtes*) Integral:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Treppenfunktion:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)$$


## 7.8 Beispiel

$f(x) = x^2$  auf  $[0, t]$

$f_n$  wie in 7.5.

$$\int_a^b f_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{it}{n}\right)^2 \cdot \frac{t}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \cdot \frac{t^3}{n^3} = \frac{t^3}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Per Induktion nach  $n$  kann man zeigen:  $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$$\text{Also: } \int_0^t f_n(x) dx = \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(x) dx = \frac{t^3}{6} \cdot 2 = \frac{t^3}{3} \text{ Falls } t > 0 - \frac{t^3}{3}$$

## 7.9 Satz (Rechenregeln für Integrale)

$f, g$  Regelfunktionen auf  $[a, b]$ .

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$(a) \quad \int_a^b a \cdot f(x)dx = a \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$(b) \quad f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$(c) \quad \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Sei  $m \leq f(x) \leq M$  für alle  $x \in [a, b]$ :

$$(d) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$(e) \quad a < c < b, \text{ so } \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

## 7.10 Beispiel

$$a < b. \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$(0 < a < b:) 7.9e \int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Analog für die Fälle  $a \leq 0 < b$  und  $a < b \leq 0$

## 7.11 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Dann existiert  $c \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$

*Beweis.*  $f$  ist stetig nimmt also das Maximum von  $m$  an Stelle  $x_{min}$  und Maximum  $M$  an der Stelle  $x_{max}$  an. (5.11)

$$7.9d) : m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx$$

$$f(x_{min}) = m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M = f(x_{max})$$

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen 5.10:  $\exists c$  zwischen  $x_{min}$  und  $x_{max}$  (d.h.  $c \in$

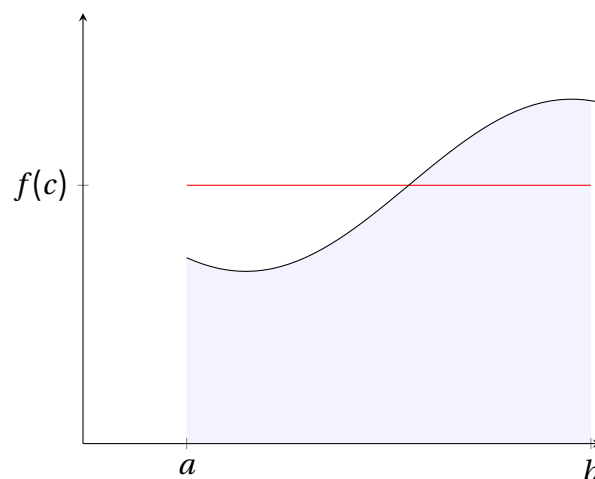


Abbildung 47: Mittelwertsatz der Integralrechnung

$[a, b]$ ) mit  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

□

## 8 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

### 8.1 Definition

- a) Sei  $[a, b]$  abgeschlossenes, beschränktes (d.h.  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ) Intervall.  
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar,

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

- b)

$$\int_a^a f(t) dt = 0$$

### 8.2 Definition

Sei  $\mathcal{I}$  beliebiges Intervall ( $-\infty$  bzw.  $\infty$  als linke/rechte Grenze erlaubt).

$$7.8 \quad x > 0$$

$$x > 0 \quad \int_0^x t^2 dt = \boxed{\frac{x^3}{3}}$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

Kein Zufall

$$x \leq 0$$

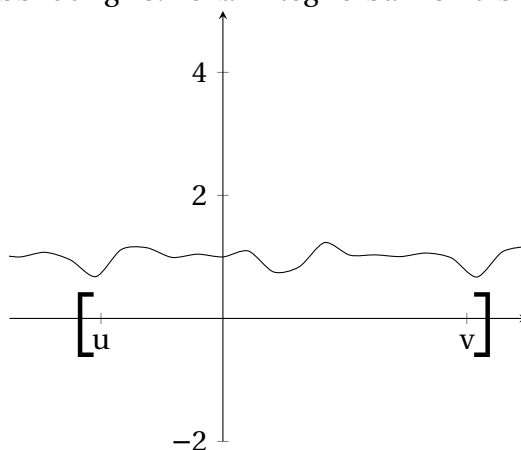
$$\int_0^x t^2 dt = -\int_x^0 t^2 dt = -\left(-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_a^b t^2 dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \text{ gilt für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

a)  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *lokal integrierbar*, wenn  $f$  auf jedem abgeschlossenem beschränkten Teilintervall  $[u, v]$  von  $\mathcal{I}$  integrierbar ist.

(Ist  $\mathcal{I}$  selbst abgeschlossen und beschränkt, so „lokal integrierbar“ = „integrierbar“.)

Abbildung 48: Lokal Integrierbar von u bis v



bar „)

b)  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Stammfunktion* der lokal Integrierbaren Funktion  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn gilt

$$\int_a^v f(t) dt = F(v) - F(u)$$

für alle  $u, v \in \mathcal{I}$ .

Eine Stammfunktion von  $f$  wird auch als *unbestimmtes Integral* von  $f$  bezeichnet

$$F = \int f(t) dt$$

### 8.3 Bemerkung

Ist  $f$  lokal integrierbar auf  $\mathcal{I}$ , so gilt

$$\int_u^v f(t) dt + \int_v^w f(t) dt = \int_u^w f(t) dt$$

Folgt aus 7.9 + 8.1

für alle  $u, v, w \in \mathcal{I}$  (nicht notwendig  $u < v < w$ )

### 8.4 Beispiel

a)  $f(x) = x^2$  lokal integrierbar auf  $\mathbb{R}$ .

Stammfunktion von  $f$ .

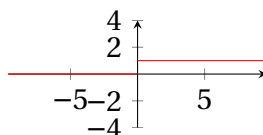
$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

b)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

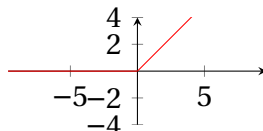
Heaviside - Funktion

$f$  ist lokal integrierbar auf  $\mathbb{R}$



Stammfunktion von  $f$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



Zeige:  $\forall u, v \in \mathbb{R}$ :

$$\int_u^v f(t) dt = F(v) - F(u)$$

$$\begin{aligned}
(u < v < 0) \quad & \int_u^v f(t) dt = 0F(v) - F(u) \\
(u < 0 < v) \quad & \int_u^v f(t) dt = 0 = \int_0^v f(t) dt = 1 \cdot v = F(v) - F(u) \\
(0 < u < v) \quad & \int_u^v f(t) dt = 1 \cdot (v - u)F(v) - F(u) \\
(u \geq 0) \quad & \int_u^v f(t) dt = -(F(u) - F(v)) = F(v) - F(u)
\end{aligned}$$

### 8.5 Satz

Sei  $\mathcal{J} \neq \emptyset$  Intervall,  $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  lokal „Integrierbar“

- a) Ist  $F$  Stammfunktion von  $f$ , so auch  $G(x) = F(x) + c$  für jedes  $c \in \mathbb{R}$ .
- b) Sind  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $f$ , so ist  $F(x) = G(x) + c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$
- c) Sei  $x_0 \in \mathcal{J}$  beliebig, aber fest gewählt. Dann ist  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$  eine Stammfunktion von  $f$ .

(Beachte

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x'_0}^x f(t) dt + \int_{x'_0}^{x_0} f(t) dt$$

)

*Beweis.* a), b)

$F$  Stammfunktion,  $c \in \mathbb{R}$   $G(x) = F(x) + c$  ist Stammfunktion von  $f$ :

$$G(v) - G(u) = F(v) - F(u) = \int_u^v f(t) dt$$

Umgekehrt: Seien  $F, G$  zwei Stammfunktionen von  $f$ . Sei  $x_0 \in \mathcal{J}$  halte es fest.

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0) \text{ für alle } x \in \mathcal{J}$$

$$G(x) = F(x) + \underbrace{G(x_0) - F(x_0)}_{=:c} \text{ für alle } x \in \mathcal{J} \quad \text{c) } u, v \in \mathcal{J}$$

$$F(v) - F(u) = \int_{x_0}^v f(t) dt = \int_{x_0}^u f(t) dt + \int_u^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^v f(t) dt = \int_u^v f(t) dt$$

□

### 8.6 Satz

Jede Stammfunktion einer lokal integrierbaren Funktion ist stetig.

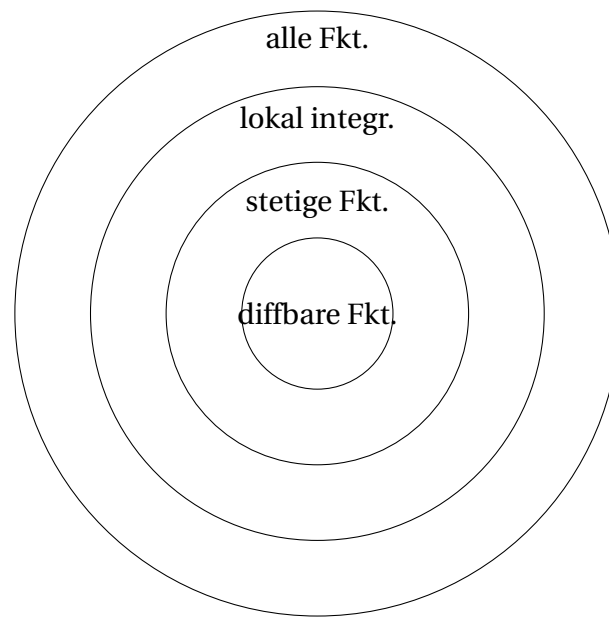


Abbildung 49: Die Welt der Funktionen

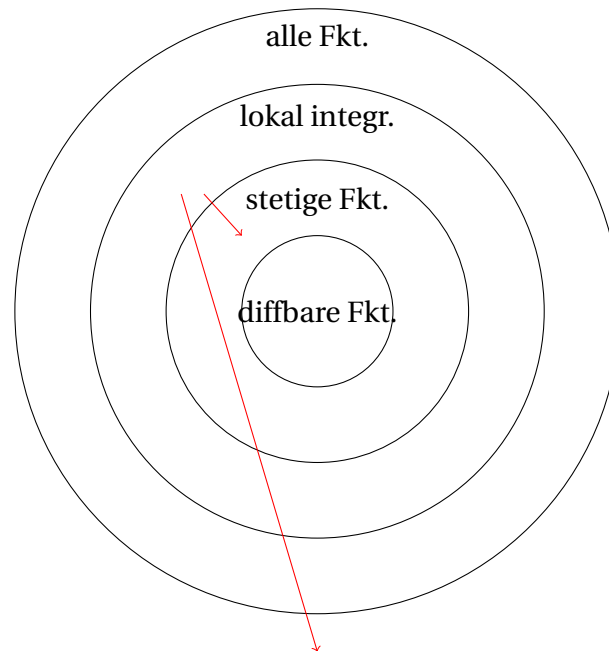


Abbildung 50: Stammfunktionbildung

*Beweis.*  $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  lokal integrierbar

$x_0 \in \mathcal{J}$ . Zeige:  $F$  ist stetig in  $x_0$  (Stammfunktion von  $f$ ).

Betrachte  $f$  auf  $[x_0 - 1, x_0 + 1] \cap \mathcal{J}$

Sei  $|f(x)| \leq M$  für alle  $x \in \mathcal{J}_0$ . (7.3a)

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \underset{7.9c)}{\geq} \int_{x_0}^x |f(t)| dt \underset{7.9d)}{\geq} M \cdot |x - x_0| \text{ für alle } x \in \mathcal{J}_0.$$

$F$  stetig in  $x_0$  nach 5.2

□

## 8.7 Definiton

$f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig differenzierbar*, falls  $f$  differenzierbar ist und die Ableitung  $f'$  stetig ist.

[Beachte: Nicht jede differenzierbare Funktion ist stetig diffbar]

$$\text{Bsp: } f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$f'$  nicht stetig in 0

## 8.8 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$\mathcal{J}$  beliebiges Intervall,  $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) Ist  $f$  stetig, so ist jede Stammfunktion  $F$  von  $f$  differejzierbar auf  $\mathcal{J}$  und es gilt  $F' = f$ .

$$(a) \quad \left( \int f(t) dt \right)' = f$$

$$\text{Dass heißt } F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

b) Ist  $f$  stetig diffbar auf  $\mathcal{J}$ , so ist  $f$  Stammfunktion von  $f'$ , dass heißt.

$$(b) \quad \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0)$$

$\forall u, v \in \mathcal{J} :$

$$\int_u^v f'(t) dt = f(v) - f(u) = f(x) \Big|_u^v$$



$$\begin{array}{ccc}
 \textcircled{I} & \longrightarrow & F = \int f(t) dt \\
 F' = f & \longleftarrow & \\
 \\ 
 f' & \longleftarrow & \textcircled{I} \text{ stetig diffbar} \\
 & \longrightarrow & F = \int f'(t) dt = f + c
 \end{array}$$

*Beweis.* a) Sei  $c \in \mathcal{J}$ .

Zu zeigen:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c), x \neq c, x \in \mathcal{J}$ :

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} \stackrel{\text{F. St.fkt. von } f}{=} \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (7.11). Es existiert  $\Theta(x)$  zwischen  $x$  und  $c$  mit

$$\int_x^c f(t) dt = f(\Theta(x)) \cdot (x - c)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{F(x) - F(c)}{x - c} &= \frac{1}{x - c} \cdot f(\Theta(x)) \cdot (x - c) \\
 &= f(\Theta(x)) \xrightarrow[\Theta(x) \rightarrow c]{x \rightarrow c, \text{ so}} f(c), \text{ da } f \text{ stetig} \quad \text{b) } f' \text{ ist stetig.}
 \end{aligned}$$

Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f'$ . Nach a):  $F' = f'$ .

$$(F - f)' = 0.$$

6.20a)  $F - f = c$  konstant, dass heißt  $F = f + c$

□

## 8.9 Beispiele

Zu 8.8a):

$$\text{a) } g(x) = \int_1^x \underbrace{e^{t^2} \cdot (\sin(t) + \cos(\frac{t}{2}))}_{\text{stetig}} dt \quad \text{8.8a) : } g'(x) = e^{x^2} \cdot (\sin(x) + \cos(\frac{x}{2}))$$

$$\text{b) } g(x) = \int_0^{x^2} e^t \cdot \sin(t) dt$$

$$F(x) = \int_0^x e^t \cdot \sin(t) dt$$

$$h(x) = x^2$$

$$g = F(h(x)) = (F \circ h)(x)$$

$$g'(x) = F'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x^2) \cdot 2x$$

**8.10 Beispiel**

zu 8.8b)

a)  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$\int a x^n dx = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ denn } \left( a \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = a x^n$$

$$\text{d.h.: } \int_a^b a \cdot x^n dx = \frac{a}{n+1} (v^{n+1} - u^{n+1})$$

$$\text{Damit: } \int \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^n a_i \frac{x^{i+1}}{(i+1)}$$

b)  $n \geq -2$ , so

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{x^{1-n}} + c$$

c) Für  $x > 0$  ist  $\ln(x)' = \frac{1}{x}$  (6.14b)

$$\text{Also } \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c \text{ auf } ]0, \infty[$$

$$\text{Auf } ]-\infty, 0[ \text{ gilt } \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$$

d)  $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$  auf  $]0, \infty[$  (6.14d)

$$\text{e) } \int e^x dx = e^x + c$$

$$\text{f) } \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c \quad \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

**8.11 Satz (Partielle Integration)**Seien  $f$  und  $g$  stetig diffbare Funktionen auf Intervall  $\mathcal{J}$ . Dann:

$$\int f g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$$

Für bestimmte Integrale heißt das:

$$\int_u^v f(x) \cdot g'(x) dx = \left. \underbrace{f \cdot g}_{f(v) \cdot g(v) - f(u) \cdot g(u)} \right| - \int_y^u f'(x) g(x) dx$$

Für alle  $u, v \in \mathcal{J}$

*Beweis.* 8.8b)

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

$$\int (f \cdot g' + f' \cdot g) dx = f \cdot g + c$$

$$\int f \cdot g' + \int f' \cdot g = f \cdot g$$

□

## 8.12 Beispiele

$$\text{a) } \int \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} dx \stackrel{8.11}{=} x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c$$

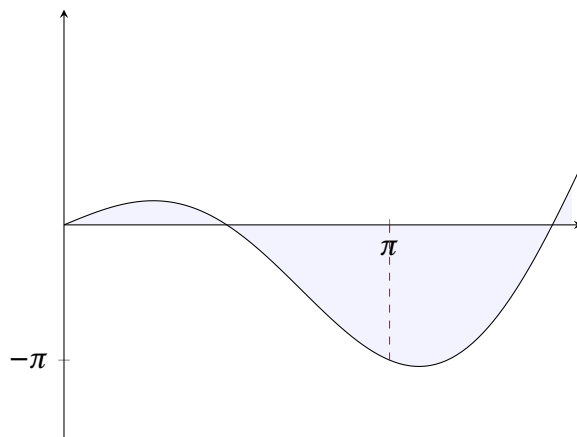


Abbildung 51:  $\int_0^\pi x \cdot \cos(x) dx = 2$

$$\text{b) } \int \ln(x) dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_g dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + c \quad (\text{vgl. 8.10d})$$

$$\text{c) } \int \cos^2(x) dx \stackrel{8.11}{=} \underbrace{\cos(x)}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_g + \int \sin(x) dx \quad (\star)$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) dx &= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1 - \cos^2(x) dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \cos^2(x) dx \\ \Rightarrow 2 \cdot \int \cos^2(x) dx &= \cos(x) \cdot \sin(x) + x + c \end{aligned}$$

**8.13 Satz (Integration durch Substitution)**

$\mathcal{I}, \mathcal{J}$  Intervalle  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$  stetig diffbar,  $g: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Stammfunktion  $G$ . Dann ist:

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(x)) + c$$

Für das bestimmte Integral heißt das:

$$\int_u^v g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(v)) - G(f(u)) = \int_{f(u)}^{f(v)} g(t) dt$$

für alle  $u, v \in \mathcal{I}$

*Beweis.*  $G \circ f$  diffbar: 8.8a)

Kettenregel:

$$\begin{aligned} (G \circ f)'(x) &= G'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &\stackrel{8.8a}{=} \underbrace{g(f(x)) \cdot f'(x)}_{\text{stetig}} \end{aligned}$$

Hauptsatz  $G \circ f$  ist Stammfunktion von  $g(f(x)) \cdot f'(x)$  □

*Bemerkung:* 8.13 kann in 2 Arten angewandt werden:

1.Art: Mann hat ein Integral der Form

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$$

Berechne

$$\int g(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{und ersetze} \\ x \text{ durch } f(x)}}{G(x)}$$

2.Art:

Man will  $\int g(t) dt$  berechnen

Ersetze  $t$  durch  $f(x)$  (Substitution)

$$\left[ \frac{dt}{dx} = f'(x) \rightarrow dt = f'(x) dx \right]$$

und  $dt$  durch  $f'(x) dx$  ersetzen.

$$\rightarrow \int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$$

Hoffnung:  $\uparrow$  ist einfacher zu berechnen.

**8.14 Satz**

$f$  ist stetig diffbar auf  $\mathcal{J}$ ,  $f$  stetig auf  $\mathcal{J}$ .

a) Ist  $f(x) \neq 0$  auf  $\mathcal{J}$ ,

$$\text{so } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c$$

$$\text{dass heißt } \int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|)$$

für alle  $a, b \in \mathcal{J}$

b)  $\int_a^b g(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x) dx$   
für alle  $c$  mit  $a+c, b+c \in \mathcal{J}$ .

c)  $\int_a^b g(c \cdot x) dx = \frac{1}{c} \int_{a \cdot c}^{b \cdot c} g(x) dx$  für alle  $c \neq 0$  mit  $a \cdot c, b \cdot c \in \mathcal{J}$

*Beweis.* a) Setze  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

Also :  $G(x) = \ln(|x|) + c$  für alle  $x \neq 0$ .

$$8.13 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c \quad \text{b) Setze } f(x) = x + c, 8.13$$

$$c) \text{ Setze } f(x) = x \cdot c, 8.13^2$$

□

**8.15 Beispiel**

$$a) \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{-(\cos(x))'}{\cos(x)} dx \stackrel{8.14a)}{=} -\ln(|\cos(x)|) + c^3$$

$$b) \int x \cdot \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) dx \stackrel{8.13}{=} -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$$

$$c) \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx \stackrel{8.14a)}{=} \ln(x^2 + a^2) + c \text{ auf } \mathbb{R} \ (a \neq 0)$$

$$d) \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

Fläche des Halbkreises vom Radius 1.

<sup>2</sup>Beachte  $f'(x) = c$

<sup>3</sup>Gilt auf jedem Intervall  $]k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}[$

Substitution  $t = \sin(x)$

$$\frac{dt}{dx} = \cos(x), dt = \cos(x) dx$$

$$\int_{-1=\sin(-\frac{\pi}{2})}^{1=\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-t^2} \stackrel{8.13}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(x)} \cdot \cos(x) dx = \int \cos^2(x) dx \stackrel{8.11c}{=} \frac{\cos(x) \cdot \sin(x)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\right)$$

# Lineare Algebra

lineare Gleichungssysteme

Geometrie

## 9 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

### 9.1 Definition

$$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

a) Eine  $m \times n$  Matrix  $A$  über  $K$  ist rechteckiges Schema .

$$\text{Spalten} \downarrow A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen}}$$

mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten,  $a_{ij} \in K$ .

(Bezeichnung der Indizes ist Standard! 1.Index : Zeile, 2.Index : Spalte)

$(m,n)$  heißt *Typ* der Matrix.

Schreibweise:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}, A = (a_{ij})$$

b)  $\mathcal{M}_{m,n}(K)$  = Menge aller  $m \times n$ -Matrizen über  $K$  (*quadratische Matrizen*)

c)  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ ..

Definiere  $A^t = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$  mit  $b_{ij} = a_{ji}$  für  $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$

$A^t$  ist die zu  $A$  *transponierte* Matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(Manchmal  $A^T$  statt  $A^t$  oder andere Schreibweise)

$1 \times n$ -Matrix  $(a_1 \ 1, \dots, 1_n)$  *Zeilenvektor*

$$m \times 1\text{-Matrix } \textit{Spaltenvektor} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Alle  $a_{ij} = 0$ :  $A = \begin{Bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{Bmatrix} =: 0\text{Nullmatrix}$  (vom Typ  $(m,n)$ )

$n \times n$ -Matrix  $E_n = \begin{Bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{Bmatrix}$   $n \times n$ -Einheitsmatrix

$E_n = (\delta_{ij})_{i,j=1 \dots n}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j, \\ 0 & , \text{ falls } i \neq j \end{cases} \quad \textit{Kronecker Symbol}$$

## 9.2 Definition

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$  (beide vom gleichen Typ!)  $a \in K$ .

a)  $A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$

*Summe von Matrizen*

b)  $a \cdot A = (a \cdot a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$

(skalares) *Vielfaches von A*.

Für Matrizen unterschiedlichen Typs ist keine Summe definiert.

*Beispiel:*  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 6 \\ \frac{9}{2} & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$A + B^t$  nicht definiert

$$B^t = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + A = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \text{Produkt:}$$

- Produkt von Matrizen gleichen Typs durch komponentenweise Multiplikation (kaum Anwendungen)
- wichtig ist Produkt von  $m \times n$ -Matrizen mit  $n \times p$  Matrizen:

### 9.3 Definition

$$m, n, p \in \mathbb{N}.$$

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

$$B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$$

Das *Produkt*  $A \cdot B$  von  $A$  und  $B = (d_{ik})_{\substack{i=1 \dots m \\ k=1 \dots p}}$

$$\text{mit } d_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$

( $m \times n$  multiplizieren mit  $n \times p \rightarrow m \times p$ )

Beachte : Produkt von  $m \times n$ - mit  $r \times p$ -Matrix ist nicht definiert falls  $n \neq r$

### 9.4 Beispiel

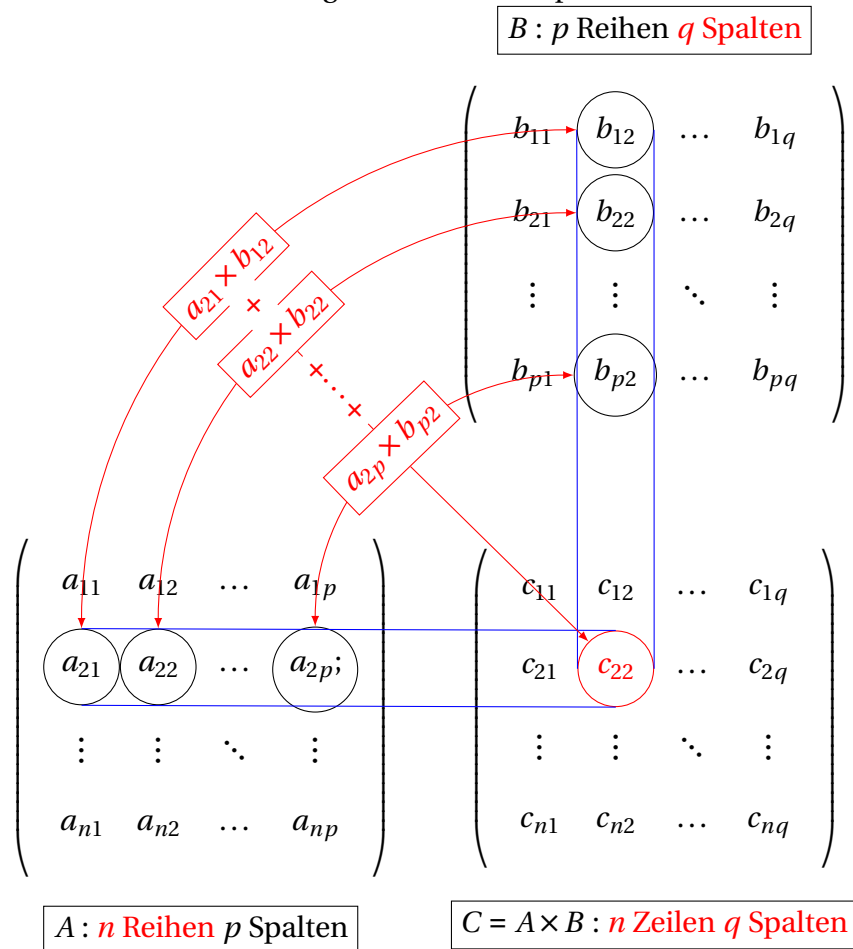
$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$



Abbildung 52: Matrix Multiplikation



$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}, AB \neq BA!$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$  wie in a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^t = B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\infty, \exists}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = (5) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) (= \mathbb{R})$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

$$E_m \cdot A = A$$

$$A \cdot E_n = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & a & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \cdot A$$

## 9.5 Satz (Rechenregeln von Matrizen)

$$A, A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{m,n}(K),$$

$$B, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{n,r}(K),$$

$$C \in \mathcal{M}_{r,s}(K), a \in K.$$

$$\text{(a) } (A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$$

$$\text{(b) } A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$

$$\text{(c) } (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (aB) = a(A \cdot B)$$

$$\text{(d) } \underbrace{(A \cdot B)}_{m \times r} \cdot \underbrace{C}_{r \times s} = \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{n \times s}$$

$$\text{(e) } (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

$$\text{Beweis. Nur d) } A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots r}}$$

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1 \dots r \\ j=1 \dots s}}$$

$$A \cdot B = (d_{ik})_{\substack{i=1 \dots m \\ k=1 \dots r}}$$

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

$$B \cdot C = (e_{jl})_{\substack{j=1 \dots n \\ l=1 \dots s}}$$

$$e_{jl} = \sum_{k=1}^r b_{jk} c_{kl}$$

$$(A \cdot B) \cdot C$$

Eintrag an der Stelle  $(i, l)$ :

$$\sum_{k=1}^r d_{ik} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^r \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl}$$

$A \cdot (B \cdot C)$  Eintrag an Stelle  $(i, l)$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot e_{jl} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \left( \sum_{k=1}^r b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^r a_{ij} b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \cdot c_{kl} \quad \square$$

## 9.6 Definition

Allgemeine Form eines *lineares Gleichungssystem* (LGS) über  $K$ :

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$m$  Gleichungen,  $n$  unbekannte  $x_1, \dots, x_n$

( $n = 2 \parallel 3 : x, y \parallel z$ )

Koeffizienten  $a_{ij} \in K$ , rechte Seite  $b_1 \dots b_m \in K$  (fest).

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_n 1(K) = K^n$$

(Elemente der  $K^n = K \times K \dots \times K$  werden als Spalten geschrieben) heißt Lösung von

(\*) wenn  $x_1 \dots x_n$  sämtliche Gleichungen erfüllen.

Ist  $b_1 = \dots b_m = 0$ , so heißt (\*) *homogenes* LGS, sonst *inhomogenes* LGS.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

Koeffizientenmatrix des LGS  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1} = K^m$  (rechte Seite)

(\*), lässt sich schreiben in *Matrizenform*:  $A \cdot x = b$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sind  $s_1, \dots, s_n$  die Spaltenvektoren von A, d.h.  $s_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ , so lässt sich (\*) schreiben

als  $x_1 \cdot s_1 + \dots + x_n \cdot s_n = b$

$$\begin{pmatrix} x_1 a_{11} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_n a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

*Spaltenform* des LGS Beachte: Homogenes LGS hat immer *mindestens* eine Lösung

(triviale Lösung)  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  Null-Lösung

Fragen:

(1) Wann hat LGS mindestens eine Lösung?

(2) Wenn es Lösungen gibt, wie bestimmt man alle?

Antwort: Gauß Algorithmus (C.F.Gauß 1777-1855)

Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht bei :

- Addition der Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung
- Multiplikation einer Gleichung mit Zahl  $\neq 0$ .
- Vertauschen zweier Gleichungen

Was passiert dann:

Aus  $Ax = b$  wird

$$A'x = b'$$

Die Menge der  $x$ , die  $ax = b$  erfüllen, stimmt mit der überein, die  $A'x = b'$  erfüllen.

Ziel des Gauß Algorithmus: Mit obigen Umformungen einfache Form  $A'$  zu finden.

*Beispiel:*

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 4 \\ x + y & = & -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & -2 \\ 2x + 3y & = & 4 \end{array} \quad (-2) \text{fache 1.Gl. zu 2.Gl. addieren}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & -2 \\ y & = & 8 \end{array} \quad y = 8, \quad x + 8 = -2 \quad x = -10, \text{ eindeutige Lösung}$$

## 9.7 Definition

Unter *elementaren Zeilenumformungen* an einer Matrix versteht man folgende Operationen:

- Addition des skalaren vielfachem einer Zeile zu anderen
- Multiplikation einer Zeile mit Zahl  $\neq 0$
- Vertauschen von zwei Zeilen

Analog: *Elementare Spaltenumformungen*

(wird nicht für :GS benötigt — außer ggf. Spaltenvertauschung)

## 9.8 Definition

Ist  $Ax = b$  ein LGS, so nennt man  $(A, b) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(K)$  die *erweiterte Koeffizientenmatrix*.  $b$  als letzte Spalte an  $A$  anhängen.

## 9.9 Bemerkung

Führt man an  $(A, b)$  elementare Zeilenumformungen durch und erhält man dabei Matrix  $(A', b')$ , so ist  $x \in k^n$  ist Lösung von  $A \cdot x = b$  genau dann wenn  $x$  Lösung von  $A'x = b'$ .

*Beispiel 9.6:*

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (A' b') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Kernstück des Gauß-Algorithmus:

Jede Matrix  $B$  lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf *Zeilenstufenform*

(Treppenform) bringen

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & & \\ & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \\ & & & \overline{0} & \\ & & & & \overline{0} \end{pmatrix}$$

Beispiel:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 9.10 Gauß Algorithmus

Sei  $B$  eine  $(m, n)$ -Matrix über  $K$ , Ist  $B$  Nullmatrix, so fertig.

Sei also im Folgenden  $B$  nicht Nullmatrix.

- (1) Suche erste Spalte  $j_1$ , die nicht nur Nullen enthält.
- (2) Eventuell durch Zeilenvertauschung:  
Eintrag  $a$  am der Stelle  $(i, j_1)$  ist  $\neq 0$
- (3) Multipliziere die 1. Zeile mit  $\frac{1}{a}$ , Jetzt: Eintrag 1 an der Stelle  $(i, j_1)$ .
- (4) Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeilen zu den übrigen Zeilen alle Einträge in der Spalte  $j_1$  unterhalb der ersten Zeile gleich 0 sind. Ab jetzt wird Zeile 1 nicht mehr benutzt. Sie bleibt unverändert.
- (5) Suche erste Spalte  $j_2(> j_1)$ , der unterhalb der ersten Zeile einen Eintrag  $\neq 0$  enthält.
- (6) Wie in (2) imd (3) Eintrag 1 an Stelle  $(2, j_2)$
- (7) Wie in (4) alle Einträge in Spalte  $j_2$  unterhalb der 2. Zeile zu Null machen.  
Ab jetzt wird Zeile 2 nie mehr benutzt.

So fortfahrend erhält man Zeilenstufenform.

## 9.11 Beispiel

$$\begin{aligned}
 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{Vert. 1Z./2.Z.}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1Z..x \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3Z. + (-3) \cdot 1.Z.} \\
 B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -9/2 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{1/6 \cdot 2. Z.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 4 & -9/2 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/6 \cdot 2. Z.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 9.12 Gauß-Algorithmus

Gegeben sei LGS  $A \cdot x = b$   
 $m \times n \quad n \times 1 \quad m \times 1$

Wende Algorithmus 9.10 auf  $(A, b)$  an, bis man Matrix  $(\tilde{A}, b')$  erhält, so dem  $\tilde{A}$  Zeilenstufenform hat (letzte Spalte  $b'$  muss nicht mehr bearbeitet werden).

Man kann noch Spaltenvertauschung am  $\tilde{A}$  vornehmen,

Beachte: Vertauschung von Spalte  $i$  und  $k$  bedeutet vertauschung von  $x_i$  und  $x_k$  (Buch führen). Dann kann Matrix  $(A', b')$  erhalten werden wobei

$$(A', b') = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b'_m \end{pmatrix}$$

Neues LGS  $A'x' = b'$

$x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$  entsteht aus  $x$ . durch Permutation der Einträge entsprechend der durchgeführten Spaltenvertauschungen.

Lösungsmenge des LGS  $A'x' = b'$  ist leicht zu ermitteln:

(1) Ist  $r < m$  und einer der Einträge  $b'_r + a, b'_m$  ungleich 0 ist, so ist LGS nicht lösbar.

$$(2) \text{ Ist } r = m \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & b'_1 \\ 0 & 1 & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b'_m \end{pmatrix}$$

oder  $r < m$  und  $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & b'_1 \\ 0 & 1 & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_m \end{pmatrix}$$

(betrachte dann nur die ersten  $r$  Gleichungen), so gibt es mindestens eine Lösung:

(2a)  $r < n$ :

Wähle  $x_{r+1}, \dots, x'_n$  beliebig aus  $K$ . Dann:

$$x'_r = b'_r - \sum_{j=r+1}^n a'_{rj} x'_j$$

$\vdots$

$$x'_1 = b'_1 - \sum_{j=2}^n a'_{1j} x'_j$$

(rekursive Bestimmung der Lösungsmenge).

(2b)  $r = n$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann sind  $x'_1, \dots, x'_r$  eindeutig bestimmt.

$$x'_n = b'_n$$

$$x'_{n-1} = b'_{n-1} - a'_{n-1} x'_n$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x'_1 = b'_1 - \sum_{j=2}^n a'_{1j} \cdot x'_j$$



**9.13 Beispiel**

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & +2x_2 & -3x_3 = 5 \\
 \text{a) } 2x_1 & -x_2 & +4x_3 = 0 \\
 x_1 & +x_2 & +2x_3 = 1
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2Z.+(-2)\cdot 1.Z \\ 3Z.+(-1)\cdot 1.Z}]{\phantom{0}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\cdot 2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3.Z+2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot 3.Z} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = 2 + 2x_3 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = 5 - \frac{4}{3} - 2 = \frac{5}{3} \text{ eindeutige Lösung: Lösungsmenge } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{b) } x_1 & +2x_2 & x_3 + x_4 = 0 \\
 x_1 & -x_2 & +2x_3 - x_4 = 6 \\
 \begin{pmatrix} 1 & +2 & 1 & +1 & 0 \\ 1 & -1 & +2 & -1 & 6 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & +2 & 1 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix} \\
 \text{(Fall 2a)} & & 
 \end{array}$$

$x_4, x_3$  frei wählbar

$$x_2 = -2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$$

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4$$

$$= -2 \cdot \left(-2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4\right) - x_3 - x_4$$

$$= 4 - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_4$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ -2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in K \right\}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & = 1 \\ \text{c) } 2x_1 & +x_2 & = 2 \end{array}$$

$$x_1 - x_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

LGS nicht lösbar (Fall 1)

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & = 1 \\ \text{d) } 2x_1 & +x_2 & = 2 \end{array}$$

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$$

LGS eindeutig lösbar

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 1 - x_2 = 1$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ (Fall 2b)}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{e) } x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\ -2x_1 & +2x_2 & -2x_3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & =1 \\ -2 & 2 & -2 & =3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & =1 \\ 0 & 0 & 0 & =5 \end{pmatrix}$$

LGS ist nicht lösbar

$$\begin{array}{rcl} \text{f) } x_1 & +x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ Vert. 2./3.Sp.}$$

$x'_3$  frei wählbar

$$x'_2 = -\frac{1}{3} - 0 \cdot x'_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x'_1 = 9 - x'_2 - x'_3 = \frac{1}{3} - x'_3$$

$x_2$  frei wählbar

$$x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} - x_2$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - x_2 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} : x_2 \in K \right\}$$

g) LGS über  $\mathbb{C}$

$$(1+i)x_1 + 2x_2 = 3-i$$

$$ix_1 + (-2+2i)x_2 = 4$$

$$\begin{pmatrix} (1+i) & 2 & 3-i \\ i & (-2+2i) & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ i & (-2+2i) & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ 0 & -3+i & 2-i \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i \end{pmatrix}$$

$$x_2 = -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$x_1 = 1 - 2i - (1-i)x_2 = \frac{8}{5} - \frac{14}{5}i$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{14}{5}i \\ -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i \end{pmatrix} \right\}$$

## Literatur

[1] Kreußler, Phister Satz 33.16

[2] WHK 5.37

[3] WHK 6.21

[4] WHK 6.24

[5] WHK 6.25

[6] WHK 6.25

[7] WHK 7.32

[8] WHK 7.19