Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen **4**
1.1 Definition . . . 4
1.2 Veranschaulichung . . . 4
1.3 Rechenregeln in $\mathbb{C}$ . . . 4
1.4 Definition Absolutbetrag . . . 5
1.5 Rechenreglen für den Absolutbetrag . . . 6
1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten . . . 6
1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie . . . 7
1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation . . . 7
1.9 Bemerkung und Definition . . . 8
1.10 Satz: Komplexe Wurzeln . . . 9
1.11 Beispiel . . . 9
1.12 Bemerkung . . . 9

2 Folgen und Reihen **10**
2.1 Definition . . . 10
2.2 Beispiel . . . 10
2.3 Definition . . . 11
2.4 Definition . . . 11
2.5 Beispiele . . . 12
2.6 Satz: Beschränktheit und Konvergenz . . . 13
2.7 Bemerkung . . . 13
2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen) . . . 13
2.9 Satz: Kriterien für Nullfolgen . . . 14
2.10 Bemerkung . . . 16
2.11 Definition . . . 16
2.12 Satz: Landausymbole bei Polynomen . . . 17
2.13 Bemerkung . . . 17
2.14 Definition . . . 17
2.15 Beispiel . . . 17
2.16 Satz: Monotonie und Konvergenz . . . 18
2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium) . . . 18
2.18 Definition . . . 18
2.19 Satz: Reihenkonvergenz . . . 19
2.20 Beispiele . . . 20
2.21 Satz (Leibniz-Kriterium) . . . 22
2.22 Satz (Majoranten-Kriterium) . . . 22
2.23 Beispiel . . . 22
2.24 Definition . . . 23

2.25 Korollar 23
2.26 Satz: Wurzel- und Quotientenkriterium 23
2.27 Bemerkung 25
2.28 Beispiel 25
2.29 Bemerkung 25
2.30 Definition 25
2.31 Satz: Konvergenz im Cauchy Produkt 26

3 Potenzreihen **26**
3.1 Definition 26
3.2 Beispiel 26
3.3 Satz 26
3.4 Bemerkung 28
3.5 Die Exponentialreihe 28

4 Funktionen und Grenzwerte **31**
4.1 Definition 31
4.2 Beispiel 31
4.3 Definition 33
4.4 Beispiel 34
4.5 Definition 35
4.6 Beispiel 35
4.7 Satz $(\varepsilon - \delta)$-Kriterium 37
4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte) 39
4.9 Beispiel 40
4.10 Bemerkung 40
4.11 Beispiel 40
4.12 Definition 41
4.13 Beispiel 41
4.14 Bemerkung 42
4.15 Definition 42
4.16 Satz: Grenzwerte gegen unendlich 43
4.17 Beispiel 44

5 Stetigkeit **44**
5.1 Definition 45
5.2 Satz 45
5.3 Beispiel 45
5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit) 47
5.5 Satz: Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen 47
5.6 Beispiel 47

5.7 Satz: Stetigkeit von Potenzreihen . . . 47
5.8 Korollar . . . 48
5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen) . . . 48
5.10 Korollar (Zwischenwertsatz) . . . 49

Abbildungsverzeichnis

1 Veranschaulichung Komplexe Zahlen . . . 4
2 Absolutbetrag . . . 5
3 Imaginäre Zahlen im Koordinatensystem durch Polarkoordinaten . . . 6
4 Winkel im Bogenmaß . . . 7
5 Multiplizieren komplexer Zahlen . . . 8
6 Multiplikation mit i . . . 8
7 Beschränktheit von Folgen . . . 11
8 Beschränkte aber nicht konvergente Folge . . . 13
9 Cauchy'sches Konvergenzkriterium . . . 19
10 Monotonie . . . 21
11 Konvergenzradien . . . 27
12 Die Exponentialreihe . . . 29
13 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ . . . 31
14 e^x . . . 32
15 Bogenmaß . . . 33
16 Sinus und Cosinus . . . 33
17 Tangens und Kotangens . . . 34
18 x^2 . . . 35
19 x+1 . . . 36
20 Abschnittsweise definierte Funktion . . . 36
21 $\sin(\frac{1}{x})$ . . . 37
22 $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ . . . 38
23 geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums . . . 38
24 Abschnittsweise definierte Funktion . . . 39
25 Grenzwerte gegen einen Festen Wert . . . 41
26 Funktionen $\lim\limits_{x \to \infty} = \infty$ . . . 42
27 $sin(\frac{1}{x})$ . . . 43
28 $\frac{e^x}{x^n}$ . . . 45
29 Abschnittsweise definierte Funktion . . . 46

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

Addition: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplikation: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

(Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ beachten)

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$a \in \mathbb{R} : a + 0 \cdot i = a$

Rein imaginäre Zahlen : $bi, b \in \mathbb{R}, (0 + bi)$

i imaginäre Einheit

$z = a + bi \in \mathbb{C}$

$a = \Re(z)$ Realteil von $z(Re(z))$

$b = \Im(z)$ Imaginärteil von $z(Im(z))$

$\bar{z} = a - bi(= a + (-b)i)$

Die zu z konjugiert komplexe Zahl

1.2 Veranschaulichung

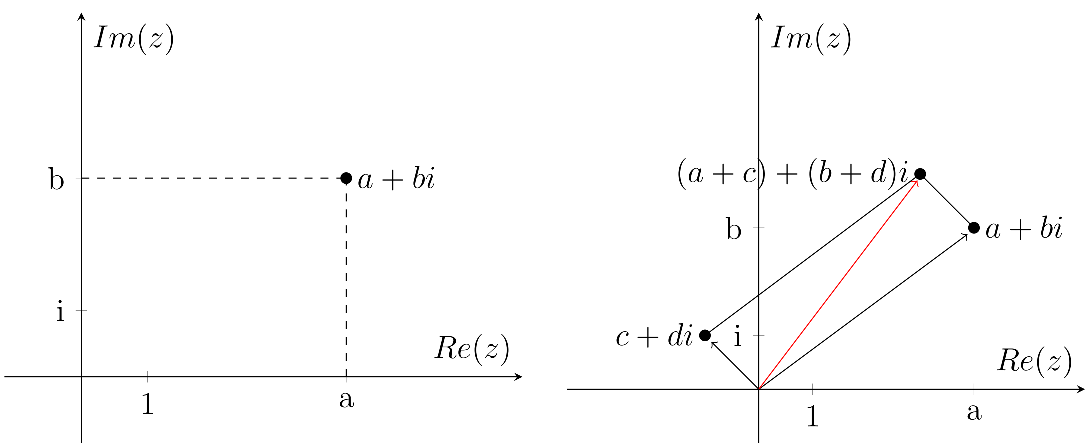


Abbildung 1: Addition entspricht Vektoraddition

1.3 Rechenregeln in $\mathbb{C}$

a) Es gelten alle Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$.
   (z.B Kommutativität bzgl. $+, \cdot$: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$)
   Inversenbildung bzgl. $\cdot$:
   $z = a + bi \neq 0$, d.h $a \neq 0$ oder $b \neq 0$
   $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

$z \cdot z^{-1} = 1$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{5-7i}{3+2i} &= (5-7i)\cdot(3+2i)^{-1}\\ &= (5-7i)\cdot(\tfrac{3}{13}-\tfrac{2}{13}i)\\ &= (\tfrac{15}{13}-\tfrac{14}{13})+(-\tfrac{10}{13}-\tfrac{21}{13})i\\ &= \tfrac{1}{13}-\tfrac{31}{13}i\end{aligned}$$

Speziell: $(bi)^{-1} = \frac{1}{bi} = -\frac{1}{b}i$; insbesondere: $\frac{1}{i} = -i$

b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{z}} &= z\\ \overline{z_1+z_2} &= \bar{z}_1+\bar{z}_2\\ \overline{z_1\cdot z_2} &= \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\end{aligned}$$

1.4 Definition Absolutbetrag

a) Absolutbetrag von $z = a + bi\mathbb{C}$:

$|z| = +\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R},\geq 0}$

$\boxed{a^2+b^2 = z\cdot\bar{z}}$

$|z| = +\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

$(a+bi)\cdot(a-bi) = (a^2+b^2)+0i = a^2+b^2$

$$\begin{aligned}|z| &= \text{Abstand von } z \text{ zu } 0\\ &= \text{Länge des Vektors, der } z \text{ entspricht}\end{aligned}$$

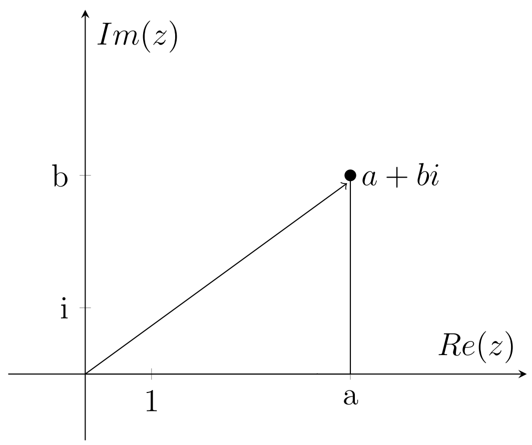


Abbildung 2: Graphische Definition des Absolutbetrages

b) Abstand von $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$d(z_1, z_2) := | z_1 - z_2 |$

1.5 Rechenreglen für den Absolutbetrag

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

a) $\mid z \mid= 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $\mid z_1 \cdot z_2 \mid= |z_1| \cdot |z_2|$

c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$|-z| = |z|$

1.6 Darstellung durch Polarkoordinaten

a) Jeder Punkt $\neq (0, 0)$ lässt sich durch seine Polarkoordinaten (r, φ) beschreiben:
$-r \geq 0, r \in \mathbb{R}$

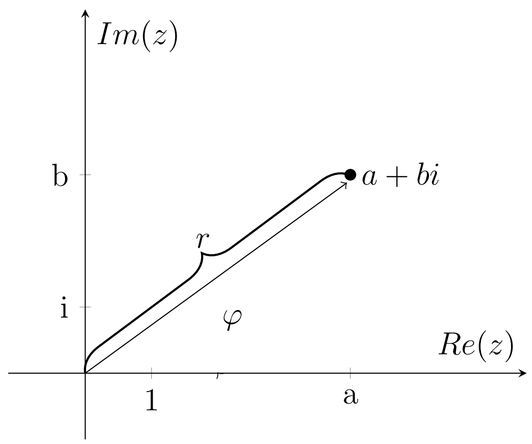
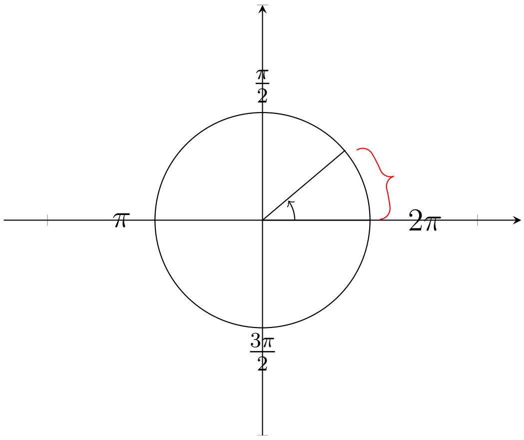


Abbildung 3: Polarkoordinaten

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, wird gemessen von der positiven x-Achse entgegen des Uhrzeigersinnes
Umfang:2π
φ in Grad $\widehat{=} \frac{2\pi \cdot \varphi}{360}$ im Bogenmaß
Für Punkte mit kartesischen Koordinaten $\neq$ (0,0) werden als Polarkoordinate (r, φ) verwendet.

b) komplexe Zahl $z = a + ib$

Abbildung 4: Umrechnung Grad zu Bogenmaß



$$
\begin{aligned}
r &= |z| = +\sqrt{a^2+b^2} \\
a &= |z| \cdot \cos(\varphi) \\
b &= |z| \cdot \sin(\varphi) \\
z &= |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi) \\
z &= |z|(\cdot \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))
\end{aligned}
$$

Darstellung von z durch Polarkoordinate

Beispiel:

a) $z_1 = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
$= 2 \cdot (0,5\sqrt{2} + i \cdot 0.5\sqrt{2})$

b) $z_2 = 2 + i$
$|z_2| = \sqrt{5}$
$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}} i)$ Suche φ mit $0 \leq 2\pi$ mit $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\frac{1}{\sqrt{5}} z_2 \approx$
$\sqrt{5} \cdot (\cos(0,46) + i \cdot \sin(0,46))$

c) Die komplexen Zahlen von Betrag 1 entsprechen den Punkten auf Einheitskreis:$\cos(\varphi) +$
$i \sin(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

1.7 Additionstheoreme der Trigonometrie

a) $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

b) $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$

1.8 geometrische Interpretation der Multiplikation

a) $w = |w| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
$z = |z| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$

$w \cdot z = |w| \cdot |z| \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + i(\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi))$
$w \cdot z = |w \cdot z|(\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$

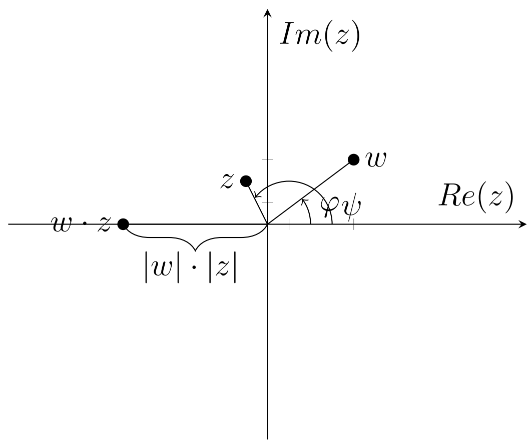


Abbildung 5: Multiplizieren komplexer Zahlen

b) $z = i, w = a + ib$
$i \cdot w = -b \cdot ia$
Multiplikation mit i $\widehat{=}$ Drehung um 90°

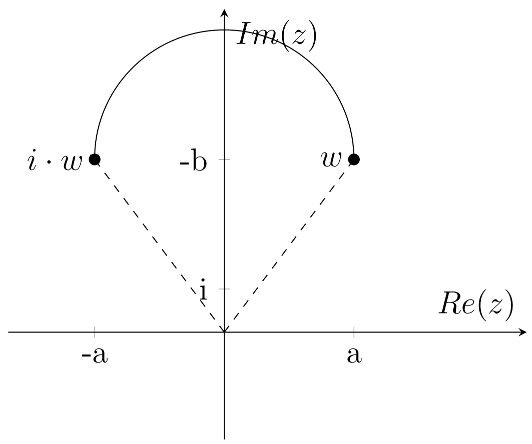


Abbildung 6: Multiplikation mit i

1.9 Bemerkung und Definition

Wir werden später die komplexe Exponentialfunktion einführen.
e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ e = Euler‘sche Zahl $\approx 2,718718\ldots$

$e^{z_1} = cde^{z_2} = e^{z_1+z_2}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
Es gilt: $t \in \mathbb{R} : e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$
Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}, r = |z|, \varphi$ Winkel
$r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ ist Polarform von z.
$z = a + bi$ ist kartesische Form von z. $\bullet(r, \varphi)$ Polarkoordinaten
$|e^{i\varphi}| = +\sqrt{cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$
$e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Punkte auf dem Einheitskreis.
$e^{i\pi} = -1$
$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ Euler'sche Gleichung

1.10 Satz

Sei $w =| w | \cdot(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

a) Ist $m \in \mathbb{Z}$, so ist $w^m =| w |^m \cdot(\cos(m \cdot \varphi) + i \cdot \sin(m \cdot \varphi))$
$(m < 0 : w^m = \frac{1}{w^{|m|}}), w \neq 0$

b) Quadratwurzeln

c) Ist $n \in \mathbb{N}, w \neq 0$, so gibt es genau n n-te Wurzeln von $w :$
$\sqrt[n]{w} = +\sqrt[n]{| w |} \cdot (\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cdot k}{n})), n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Beweis. a) richtig, wenn $m = 0, 1$
$m \geq 2$. Folgt aus $(\star)$
$m = -a :$
$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))} \cdot | w | \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$
$= \frac{1}{w} = \frac{1}{midw| \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + i \cdot \sin^2(\varphi))}_{=1}} \cdot | w | \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$
$= \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\varphi + i \cdot \sin(-\varphi)) =| w |^{-1} \cdot(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi))$

□

1.11 Beispiel

Quadratwurzel aus $i :$
$|i| = 1$

$$\text{Nach 1.10 b):} \quad \sqrt{i} = \pm(\cos(\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})) = \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)$$

1.12 Bemerkung

Nach 1.10 hat jedes Polynom
$x^n - w \ (w \in \mathbb{C})$

eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ (sogar n verschiedene wenn $w \neq 0$)
Es gilt sogar : Fundamentalsatz der Algebra
(C. F. Gauß 1777-1855)
Jedes Polynom $a_n x^n + \ldots + a_0$
mit irgendwelchen Koeffizienten: $a_n \ldots a_0 \in \mathbb{C}$ hat Nullstelle in $\mathbb{C}$

2 Folgen und Reihen

2.1 Definition

Sei k $\in \mathbb{Z}$, $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : m > k\}$
$(k = 0 A_0 \in \mathbb{N}_0, k = 1, A_n \in \mathbb{N})$
Abbildung a : $A \Rightarrow \mathbb{R}$(oder $\mathbb{C}$)

$$m \Rightarrow a_n$$

heißt Folge reeller Zahlen

$$(a_k, a_{k-1} \ldots)$$

Schreibweise:
$(a_m)_{m>k}$ oder einfach (a_m)
a_m heißt m-tes Glied der Folge, m Index

2.2 Beispiel

a) $a_n = 5$ für alle $n > 1$
$(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$

b) $a_n = n$ für alle $n > 1$
(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...)

c) $a_n = \frac{1}{n}$
$(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

d) $a_n \frac{(n+1)^2}{2^n}$
$(2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \ldots)$

e) $a_n = (-1)^n$
$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$

f) $a_n = \frac{1}{2}a_{n_1} = \frac{1}{a_{n-1}}$für $n \geq 2, a_1 = 1$
$(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \ldots)$

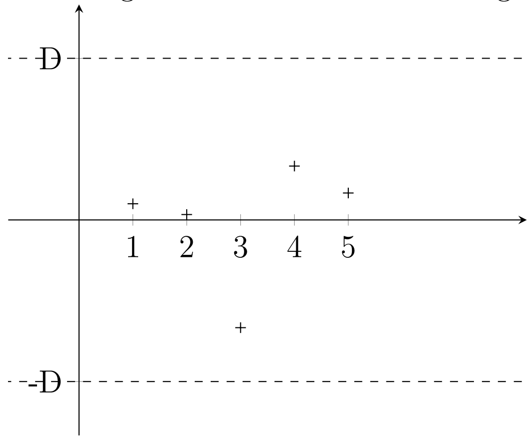
g) $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
$(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \ldots)$

h) $a_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \cdot \frac{1}{i}$
$(-1, \frac{-1}{2}, -\frac{-5}{6}, \ldots)$

2.3 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n>k}$ heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.
D.h. $\exists D > 0 : -D \leq a_n \leq D$ für alle $n > k$.

Abbildung 7: Beschränktheit von Folgen



2.4 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt konvergent gegen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (konvergent gegen ε), falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) :\mid a_n - c \mid < \varepsilon$
$c = \lim_{n \Rightarrow \infty} a_n$ (oder einfach $c = \lim a_n$)
c heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge (a_n)
(Grenzwert hängt nicht von endlich vielen Anfangsgliedern ab (der Folge))
Eine Folge die gegen 0 konvertiert, heißt Nullfolge

2.5 Beispiele

a) $r \in \mathbb{R} : a_n = r$ für alle $n \geq 1$
$(r, r, \ldots)$
$\lim_{n \Rightarrow \infty} = r$
$| a_n - r |= 0$ für alle n
Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man $n(\varepsilon) = 1$ wählen

b) $a_n = n$ für alle $n \ \geq 1$
Folge ist nicht beschränkt, konvergiert nicht.

c) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$
(a_n) ist Nullfolge.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Suche Index $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - o| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$
D.s. es muss gelten.
$\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$
Ich brauche : $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$
Ich brauche $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$
Aus Mathe I folgt, dass solch ein $n(\varepsilon)$ existiert.
z.B $n(\varepsilon) - \lceil \frac{1}{2} \rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$
Dann:
$|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$

d) $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1}$ für lle $n \geq 1$
Behauptung: $\lim_{n \Rightarrow \infty} a_n = 3$

$$\begin{aligned} |a - 3| &= |\frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3| &&= |\frac{3n^2+1-3(n^2+n+1)}{n^2+n+1}| \\ &= |\frac{-3n-2}{n^2+n+1}| &&= \frac{3n+2}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Benötigt wird $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ für alle $n > n(\varepsilon)$.
$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$
Wähle $n(\varepsilon)$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$
Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$.
$|a_n - 3| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n(\varepsilon)} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$
Für alle $n \geq n(\varepsilon)$

e) $a_n = (-1)^n$ beschränkte Folge $-1 \leq a_{\leq} 1$ konvergiert nicht.
Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - c| + |c - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{1}$ ↯

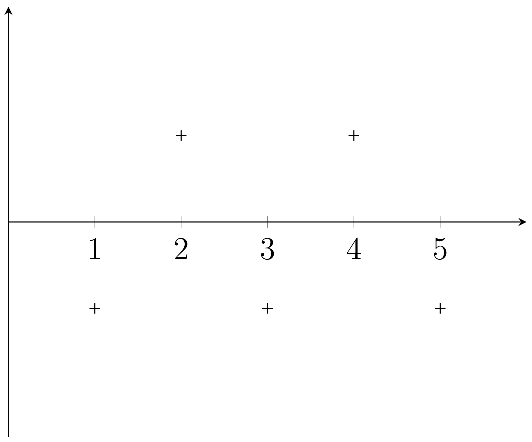


Abbildung 8: $(-1)^n$ ist beschränkt aber konvergiert nicht

2.6 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt. (Umkehrung nicht: $2.5_{e)}$)

Beweis. Sei $c = \lim a_n$, wähle $\varepsilon = 1$,
Es existiert $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - c| < 1$ für alle $n \geq n(1)$
Dann ist
$|a_n| = |a_n - c + c| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c|$ für alle $n \geq n(1)$
$M = max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \ldots, |a_{n(1)-1}), 1 + |c|\}$
Dann: $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq k$
$- M \leq a_n \leq M$ □

2.7 Bemerkung

a) $(a_n)_{n\geq 1}$ Nullfolge $\Leftrightarrow$ $(|a_n|)_{n\geq 1}$ Nullfolge $(|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0||$

b) $\lim_{n\Rightarrow\infty} a_n = c \Leftrightarrow (a_n - c)_{n\geq k}$ ist Nullfolge $\Leftrightarrow (|a_n - c|)_{n\geq k}$ ist Nullfolge

2.8 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien $(a_n)_{n\geq k}$ und $(b_n)_{n\geq k}$ konvergente Folgen, $\lim a_n = c, \lim b_n = d$.

a) $\lim|a_n| = |c|$

b) $\lim(a_n \pm b_n) = c \pm d$

c) $\lim(a_n \cdot b_n) = c \cdot d$
insbesondere $\lim(r \cdot b_N) = r \cdot \lim b_n = r \cdot d$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.

d) Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$ und ist $d \neq 0$, so $\lim(\frac{a_n}{k_n}) = \frac{c}{d}$

e) Ist (b_n) Nullfolge, $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$, so konvergiert $(\frac{1}{b_n}$ nicht!.

f) Existiert $m \geq k$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$, so ist $c \leq d$.

g) Ist $(c_n)_{n \geq k}$ Folge und existiert $m \geq k$ mit $0 \leq c_n \leq a_n$ für alle $n \geq m$ und ist (a_n) eine Nullfolge, so ist auch (c_n) eine Nullfolge.

h) Ist $(c_n)_{n \geq l}$ beschränkte Folge und ist $(a_n)_{n \geq k}$ Nullfolge, so ist auch $(c_n \cdot a_n)_{n \geq k}$ Nullfolge.
$\boxed{c_n \text{ muss nicht konvergieren!}}$

Beweis. Exemplarisch:

b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_1(\frac{\varepsilon}{2})$ und $n_2(\frac{\varepsilon}{2})$ und $|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1(\frac{\varepsilon}{2})$
$|b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2(\frac{\varepsilon}{2})$
Suche $n(\varepsilon) = max(n_1(\frac{\varepsilon}{2}, n_2(\frac{\varepsilon}{2}))$
Dann gilt für alle $n > n(\varepsilon)$:
$|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

f) Angenommen $c > d$. Setze $\delta = c - d > 0$
Es existiert $\tilde{m} \geq m$ mit $|c - a_n| < \frac{\delta}{2}$
und $|b_n - d| < \frac{\delta}{2}$ für alle $n \geq \tilde{m}$.
Für diese n gilt:
$0 < \delta \leq \delta + b_n - a_n = c - d + b_n - a_n \geq 0$ nach Voraussetzung
$= |c - a_n - d + b_n| \leq |c - a_n| + |d - b_n|$
$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ ↯

□

2.9 Satz

a) $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge

b) Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $((\frac{1}{n^m})_{n \geq 1}$ Nullfolge.

c) Sei $0 \leq q < 1, m \in \mathbb{N}$
Dann ist $(n^m \cdot q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge

d) Ist $r > 1, m \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{n^m}{r^n}{}_{r \geq 1}$ eine Nullfolge

e) $P(x) = a_m \cdot x^m + \dots a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0$
$Q(x) = b_e \cdot x^e + \dots b_0, b_i \in \mathbb{R}, b_e \neq 0$
Sei $Q(n) \neq 0$ für alle $n \geq k$.

- Ist $m > e$, so ist $\frac{P(n)}{Q(n)}$ nicht konvergent
- Ist $m = e$, so ist $\lim_{n \Rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_e} = \frac{a_m}{b_m}$
- Ist $m < l$, so ist$(\frac{P(n)}{Q(n)})$ ein Nullfolge

a) Sei $0 \leq q \leq 1$ Dann ist $(q^n)_{n \geq}$ eine Nullfolge

Beweis. a) Richtig für $q > 0$. Sei jetzt $q > 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Mathe I: Es gibt ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $q^{n(\varepsilon} < \varepsilon$.
Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt: $|q^n - o| = q^n < q^{n(\varepsilon)} < \varepsilon$.

□

b) 2.5.c): $\frac{1}{n}_{n \geq 1}$ Nullfolge Beh. folgt mit 2.8.c)

c) Richtig für $q = 0$. Sei jetzt $q > 0$.
<u>1.Fall</u>: m= 1
$\frac{1}{q} = 1 + t, t > 0$.
$(t+1)^n \underbrace{=}_{Binomialsatz} 1 + nt + \frac{n(n+1)}{2} t^2 > \frac{n(n-1)}{2} t^2$ für alle $n \geq 2$
$q^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{2}{n(n-1)t^2}$
$0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1)t^2} \Leftarrow$ Nullfolge 2.5e),2.8e)
Nach 2.9g) ist $(n \cdot q^n)_{n \geq q}$ Nullfolge, also auch $(n \cdot q^n)_{n \geq 1}$.
<u>2.Fall</u>: $m > 1$.
Setze $0 < q' = \sqrt[m]{q} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} n^m \cdot q^n &= n^m \cdot (q')^n)^m)^n \\ &= (n \cdot (q')^n)^m)^n)m = 1 \text{anwenden} \end{aligned}$$

$0 < q' < 1$
$(n^m + q^n)_{n \geq 1}$ Nullfolge noch Fall $m = 1$ und 2.8e)

d) Folgt aus c) und $q = \frac{1}{r}$

e) Ist $m \leq l$, so ist $\frac{P(n(}{Q(n)} = \frac{n^m (a_m + a_{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^m})}{n^l (b_l + b_{l-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^l})} = \frac{1}{n^{l-m}} \cdot \frac{I}{II}$
$(I) \longrightarrow a_m, (II) \longrightarrow b_l \ \frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{a_m}{b_l}$

$n < l$, $\frac{1}{n^{l-m}}$ Nullfolge
$\frac{P(n)}{Q(n)} \Rightarrow 0 \cdot \frac{a_m}{b_l}$
$m > l$:
Beh. folgt aus Fall $m < l$ und 2.8e).

2.10 Bemerkung

Betrachte Bijektionsverfahren, die Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.
$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$
$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$
$a_n \leq x \leq b_n$
$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$
$0 \leq |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_n}{2} \Leftarrow$ Nullfolge (2.9b)
$2.8e)(|x - a_n|)$ Nullfolge.
2.7e): $\lim_{n\to\infty} a_n = x$
Analog: $\lim_{n\to\infty} b_n = x$
2.9 d) e) sind Beispiele für asymptotischen Vergleich von Folgen

2.11 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt strikt positiv, falls $a_n > 0$ für alle $n \geq k$.
Sei im Folgenden $(a_n)_{n \geq k}$ eine strikt positive Folge.

b)
$$\begin{aligned} \mathbb{O}(a_n) &= \{(b_n)_{n\geq k} : \text{ist beschränkt}\} \\ &= \{(b_n)_{n\geq k} \exists C > 0 \text{ mit } |b_n| \leq C \cdot a_n\} \end{aligned}$$

c) $O(a_n) = \{(b_n)_{n \geq k} : (\frac{b_n}{a_n} \text{ist Nullfolge}\}$
$(b_n) \in o(a_n)$ heißt Folge (a_n) wächst wesentlich schneller als die Folge (b_n).
Klar: $o(a_n) \subset O(a_n)$
$O, o($ „groß Oh“, „klein Oh“)
Landau-Symbole

$$\begin{array}{llll} \text{z.B} & (n^2) & \in & o(n^3) \\ & (n^2 + n + 1) & \in & O(n^2) \quad\quad n^2 + n + 1 \leq 3n^2 \\ & (n^2) & \in & O(n^2 + n + 1) \quad n^2 \leq n^2 + n + 1 \end{array}$$

$O(1)$ = Menge der beschränkten Folgen
$o(1)$ = Menge aller Nullfolgen
Häufig gewählte Schreibweise:
$n^2 \underbrace{=}_{\text{eig. falsch!}} o(n^2)$ statt $(n^2) \in o(n^3)$
$n^2 + n + 1 = O(n^2)$ statt $(n^2 + n + 1)$

2.12 Satz

Sei $P(x) = a_m \cdot x^m + \ldots + a_1 \cdot x + a_o, m \geq 0, a_m \neq 0$.

a) $(P(n)) \in o(n!)$ für alle $l > m$ und
$(P(n)) \in O(n')$ für alle $l \geq m$.

b) ist $r > 1$, so ist $(P(n)) \in o(r^n)$.
[(r^n) wächst deutlich schneller als $(P(n))$]

Beweis. a) folgt aus 2.9e).
$m = l$ (2.6)
b) folgt aus 2.9d) und 2.8 b)c) □

2.13 Bemerkung

Algorithmus:
Sei t_n = maximale Anzahl von Reihenschritten des Algorithmus' bei Input der Länge n (binär codiert).
Worst-Case-Komplexität:
Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $(t_n) \in O(n^l)$. (gutartig)
Algorithmus hat polynomielle Zeitkomplexität, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mindestens exponentielle Zeitkomplexität, falls $r > 1$ exestiert mit $(r^n) \in O(b_n)$ (bösartig)

2.14 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt monoton wachsend (steigend), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$. Sie heißt steng monoton wachsend (steigend), wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq k$

b) $(a_n)_{n \geq k}$ heißt monoton fallend, falls $a \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq k$

2.15 Beispiel

a) $a_n = 1$ für alle $n > 1 (a_n)$ ist monoton steigend und monoton fallend.

b) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$.
(a_n) streng monoton fallend.

c) $a_n = \sqrt{n}$ (positive Wuzel)
$(a_n) n \geq 1$ streng monoton steigend.

d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$
$(a_n)_{n \geq 1}$ streng monoton steigend.

e) $a_n = (-1)^n, n \geq 1$
(a_n) ist weder monoton steigend noch monoton fallend.

2.16 Satz

a) Ist $(a_n)_{n \geq k}$ monoton steigend und nach oben beschränkt (d.h es existiert $D \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq D$ für alle $n \geq k$), so konvergiert $(a_n)'$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$

b) $(a_n)_{n \geq k}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n \geq k}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$.

Beweis. a)
$c \sup\{a_n : n \geq k\}$. existiert (Mathe I). Zeige: $\lim\limits_{a_n} = c$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n(\varepsilon)$ mit $c - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq c$
Denn sonst $a_n \leq c - \varepsilon$ für alle $n \geq k$ und $c - \varepsilon$ wäre obere Schranke für $\{a_n : n \geq k\}$ Widerspruch dazu, dass c kleinste obere Schranke. Für alle $n \geq n(\varepsilon)$
$c - \varepsilon \leq a_{n(\varepsilon)} \leq a_n \leq c$
$|a_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$.
b) analog □

2.17 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

(Cauchy, 1789 - 1859)

Sei $(a_n)_{n \geq k}$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

(1) $(a_n)_{n \geq k}$ konvergent

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists\ N - M(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$ (Cauchyfolge)
Grenzwert muss nicht bekannt sein!

2.18 Definition

a) Sei $(a_i)_{i \geq k}$ eine Folge, $s_n \sum\limits_{i=k}^{n} a_i, n \geq k$ (Partialsummen der Folge)
Dann heißt $(s_n)_{n \geq k}$ eine <u>unendliche Reihe</u>
$(k - 1 : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_2, \ldots)$
Schreibweise : $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$

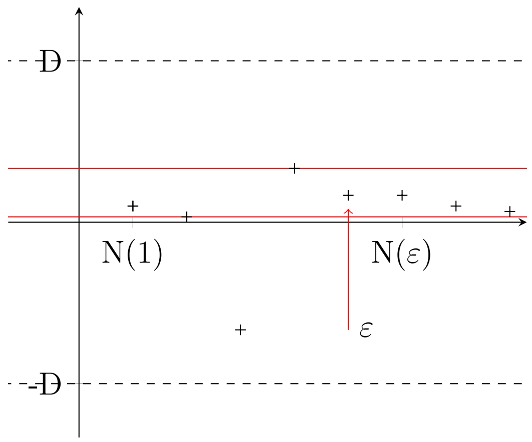


Abbildung 9: Cauchy'sches Konvergenzkriterium

b) Ist die Folge $(s_n)_{n\geq k}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = c$,

so schreibt man $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = c$. Reihe <u>konvergiert</u>.

Wenn (s_n) nicht konvergiert, so heißt die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ <u>divergent.</u>

(Zwei Bedeutungen von $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$:

- Folge der Partialsummen

- Grenzwert von (s_n), falls dieser existiert

$\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n = (s_m)_{m\geq k}$

2.19 Satz

a) Ist die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_1$ konvergent, so ist $(a_1)_{i\geq k}$ eine Nullfolge.

b) Ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ beschränkt und ist $a_i \geq 0$ für alle i, so ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis. a)
Sei $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = c$.

Sei $\varepsilon > 0$ Dann existiert $n(\frac{\varepsilon}{2}) \geq k$ mit $|\sum\limits_{i=k}^{\infty} 2a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n(\frac{\varepsilon}{2})$

Dann gilt $|a_{n+1} - o| = |an + 1| = |\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i + \sum\limits_{i=k}^{n} a_i| =$

$|\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i + c - \sum\limits_{i=k}^{n} a_i + c| \leq |\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i + c| + |\sum\limits_{i=k}^{n} a_i - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

(a_n) ist Nullfolge

b) folgt aus 2.16a), denn (s_n) ist monoton steigend □

2.20 Beispiele

a) Sei $q \in \mathbb{R}$.

Ist $q \neq 1$, so ist $\sum\limits_{i=k}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$\big[(\sum\limits_{i=k}^{n} q^i) \cdot (q-1)\big]$

Sei $|q| < 1$, d.h $-1 < q < 1$.

Dann ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ (konvergiert)

$s_n = \sum\limits_{i=k}^{n} q^1 = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to} \frac{q^{n+1}=1}{q-1}$

(q^n) Nullfolge $(2.9_{a)}$ für $q \geq 0, 2.8_{e)} + 2.9_{a)}$ für $q < 0, q = -|q|)$

<u>Geometrische Reihe</u>

Sei $|q| \geq 1$. Dann ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} q^i$ divergent, da dann (q^i) keine Nullfolge $(2.18_{a)})$

b) $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert

<u>harmonische Reihe</u>

$\sum\limits_{i=k}^{n} \frac{1}{n}$

$n = 2^0 = 1 \ : s_1 = 1$

$n = 2^1 = 2 \ : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$

...

$n = 2^3 = 8 \ : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_7 > s_6 \ldots$

Per Induktion zu beweisen!

c) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Folge der Partialsummen ist monoton steigend.

2.16a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen nach aber beschränkt ist.

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^n-1} &= 1 + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{7^2}) + \ldots + (\tfrac{1}{(2^{n-1})^2} + \ldots \tfrac{1}{(2^n-1)^2}) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \tfrac{2}{2^2} + 4 \cdot \tfrac{1}{4^4} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \tfrac{1}{(2^{n-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^i} = \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

2.16a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ Kgt., Grenzwert≤ 2. (später: Grenzwert ist $\frac{\pi^2}{6}$)

Es gilt allgemeiner:

$s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert.

Allgemeiner: $s \in \mathbb{R}, s > 1 \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{i}{i^2}$ konvergiert

d) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ konvergiert:

$$s_{2n} = \underbrace{(-1 + \frac{1}{2})}_{<0} + \underbrace{(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}_{<0} + \ldots \underbrace{(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n})}_{<0}$$

$s_{2n} \leq s2(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(s_{2n}) ist monoton fallend. $s_{2n-1} = -1 + \underbrace{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})}_{>0} + \ldots + \underbrace{(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1})}_{>0}$

(s_{2n-1}) ist monoton wachsend

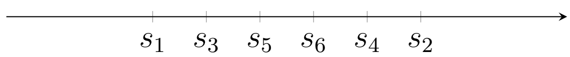
Ist k ungerade, so ist $s_k < s_l$: Wähle n so, dass $2n - a \geq k, 2n \geq l$

$s_k \underset{(2)}{\leq} s_{2n-1} \underset{\uparrow}{<} s_{2n} \underset{(1)}{\leq} s_l$

$s_{2n} = s_{2n-1} + \frac{1}{2n}$

Abstand $s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n}$ geht gegen 0.

Abbildung 10: Monotonie



$\sup\{s_{2n-1} : n \geq 1\}$

$\inf\{s_{2n} : n \geq 1\}$

$= \lim\limits_{i \leftarrow \infty} (-1^i)\frac{1}{i} \in]-1, -\frac{1}{2}[$ (Es gilt $limes = -\ln 2$)

Bemerkung

Was bedeutet $0.\bar{8} = 0.88888888\ldots$? (Dezimalsystem)

$0.\bar{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \ldots = 8 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = 8 \cdot (\frac{10}{9} - 1) = \frac{8}{9}$

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^i = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$

2.21 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist $(a_i)_{i \geq k}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere $a_i \geq 0$ falls $i \geq k$), so ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent.

2.22 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_i)_{i \geq k}$, $(b_i)_{i \geq k}$ Folgen, wobei $b_i \geq 0$ für alle $i \geq k$ und $|a_i| \leq b_i$ für alle $i \geq k$. Dann gilt
Ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent, so auch $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ und $\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$. Für die Grenzwerte gilt:
$|\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i| \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$

Beweis. Konvergenz
von $\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ folgt aus 2.16 a).
$\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$ folgt aus 2.8 f).
Sei $m > n$:
$|\sum\limits_{i=k}^{m} a_i - \sum\limits_{i=k}^{n} b_i| = \sum\limits_{i=n+1}^{m} a_i \leq \sum\limits_{i=n+1}^{m} |a_i| = |\sum\limits_{i=k}^{m} |a_i| - \sum\limits_{i=k}^{n} |a_i||$
Mit Cauchy-Kriterium 2.17 folgt daher aus der Konvergenz von $\sum\limits_{i=k}^{m} |a_i|$ auch die von $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$.

□

2.23 Beispiel

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$
$\sqrt{i} \leq i$ für alle $i \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
Ang. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{+\sqrt{i}}$ konvergiert. $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ konvergiert. ↯
Widerspruch zu 2.20 b)

$a_i = (-1)^i \frac{1}{i}$

2.20d): $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, aber $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert nicht. $(\star)$

2.24 Definition

$\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt absolut konvergent, falls $\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.
(Falls alle $a_i \geq 0$: Konvergent = absolut Konvergent)

2.25 Korollar

Ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, sp ist auch konvergiert. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.
Beweis: 1.Behauptung 2.22 mit $b_i = |a_i|$
Umkehrung siehe $(\star)$

Bermerkung

Was bedeutet $0, a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$
$a_i \in \{0 \ldots 9\}$ (Dezimalsystem)
$a_1 \cdot \frac{1}{10} a_2 \cdot \frac{1}{100} \ldots a_n \cdot \frac{1}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10} 9 \cdot \frac{1}{100} \ldots 9 \cdot \cdot \frac{1}{10^n}$
$a_i \frac{1}{10} \leq 9 \frac{1}{10}$
$\sum\limits_{i=k}^{\infty} 9 \frac{1}{10} = 9 \cdot (\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1) = 1 \Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i \frac{1}{10}$ konvergiert

2.26 Satz

Sei $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ eine Reihe.

a) Wurzelkriterium
Existiert $q < 1$ und ein Index i_0, so dass $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ für alle $i \geq i_0$.
so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.
Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i so divergiert $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$.

b) Quotientenkriterium
Existiert $q > 1$ und ein Index i_0, so dass $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \leq$ für alle $i \geq i_0$,
so konvergiert $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

Beweis.

a) $|a_i| \leq q^i$ für alle $i \geq i_0$

$\sum\limits_{i=i_0}^{\infty} q^i$ konvergiert (2.20 a))

$\underset{2.22}{\Rightarrow} \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert

$\Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i

$\Rightarrow |a_i| \geq 1$ für unendlich viele i

$\Rightarrow (a_i)$ sind keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ divergiert.

b) Sei $i \geq i_0$.

$|\frac{a_i}{a_{i0}}| = |\frac{a_i}{a_{i-1}}| \cdot |\frac{a_i}{a_{i-2}}| \cdot \ldots \cdot |\frac{a_{io+1}}{a_{i0}}| \leq q \cdot q \cdot \ldots \leq = q^{i-i0} = \frac{q^i}{q^{i0}}$

$\uparrow$ Voraussetzung:

jeder dieser Quotienten ist $\leq q$

$|a_i| \leq \underbrace{\frac{|a_i 0|}{q^{i0}}}_{=:c} \cdot q^i$ $\qquad \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} c \cdot q^i$ konvergent

$\underset{2.22}{\Rightarrow} \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

$\Rightarrow \sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert

$\square$

2.27 Bemerkung

a) Es reicht <u>nicht</u> in 2.26 nur vorauszusetzen, dass $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für alle $i \geq i_o$ bzw. $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$ für alle $i \geq i_0$.

z.B. harmonische Reihen : $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert.

<u>Aber</u>: $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} > 1$ für alle i.

$\frac{i}{i+1} < 1$ für alle i

b) Es gibt Beispiele von absolut konvergenten Reihen mit $|\frac{a_{i+1}}{a_i}|$ für unendlich viele i.

2.28 Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ absolut $(0^0 = 1, 0! = 1)$:
Quotientenkriterium:
$|\frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i}| = |fracxi + 1| = \frac{|x|}{i+1}$ Wähle i_o, so dass $i_0 + 1 > 2 \cdot |x|$
Für alle $i \geq i_0$:
$\frac{|x|}{(i+1)} \leq \frac{|x|}{(i_0+1)} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q.$

2.29 Bemerkung

Gegeben seien zwei endliche Summen
$\sum\limits_{a_n}^{k} n = 0, \sum\limits_{b_n}^{l} n = 0.$
$(\sum\limits_{a_n}^{k} n = 0)(\sum\limits_{b_n}^{l} n = 0) \quad (\star)$
Distributivgesetz: Multipliziere a_i mit jedem b_i und addiere diese Produkte.

$$(\star) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Indexsumme 0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Indexsumme 2}} + \ldots + \underbrace{a_k b_l}_{\text{Indexsumme k+l}}$$

2.30 Definition

Seien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n$ unendliche Reihen.

Das <u>Cauchy-Produkt</u>(<u>Faltungsprodukt</u>) der beiden Reihen ist die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_n$, wobei $c_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_{n-1} = a_0 b_n + a b_{n-1} + \ldots a_n b_0$

2.31 Satz

Sind $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent Reihen mit Grenzwert c, d, so ist das Cauchy Produkt auch absolut konvergent mit Grenzwert $c \cdot d$.

Beweis: [1]

3 Potenzreihen

3.1 Definition

Sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge, $a \in \Re$

Dann heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$ eine Potenzreihe (mit Entwicklungspunkt a)) Speziell:

$a = 0$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$

(Potenzreihe im engeren Sinne)

Hauptfolge: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konv. die Potenzreihe (absolut)?

Suche für $x = a$

Dann Grenzwert b_0 (da $0^0 = 1$)

Ob Potenzreihe für andere x konvergiert, hängt von b_n ab!

3.2 Beispiel

a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^n (b_n = 1 \text{ für alle } n)$

geometrische Reihe, konvergiert für alle $x \in \,]-1, 1[$

b) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n (b_n = 2^n) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$ konvergiert genau dann nach a), wenn $|2x| < 1$, d.h $|x| < \frac{1}{2}$ d.h. $x \in]-0.5, 0.5[$

c) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n})$

konvergiert für alle x, $x \in]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

3.3 Satz

Sei $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ eine Potenzreihe (um 0). Dann gibt es $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, R \geq 0$, so dass gilt.

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < R$ konvergiert Potenzreihe absolut (d.h. $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert, dann auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$)
   Falls $R = \infty$, so heißt das, dass Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ divergiert $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
   ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$) (Für $|x| = R$ lassen sich keine allgemeine

Abbildung 11: Konvergenzradien und ihre Aussagen

   Aussagen treffen).
   R heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
   Konvergenzintervall $< -R, R >$
   besteht aus allen x für die $\sum_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ konvergiert.
   $<$ kann [oder] bedeuten.
   $>$ kann] oder [bedeuten.

Beweis. $|x_1, x_2|\mathbb{R}, |x_1| \leq |x_2|$
Dann: Falls $\sum_{i=0}^{\infty}|b_n| \cdot |x_n|^n$ konvergiert, so auch $\sum_{i=0}^{\infty}|b_n| \cdot |x_n|^n$ (2.22) $(\star)$
Falls $\sum b_n \cdot x_n$ für alle x absolut konvergiert, so setze $R = \infty$
Wenn nicht, so setze $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{\infty}|b_n| \cdot |x_n| \text{ konvergiert}\} < \infty$ Nach $(\star)$ gilt: $|x| < R \Rightarrow \sum b_n x^n$ konvergiert absolut.
Für $|x| > R$ konvergiert $\sum b_n x^n$ nicht absolut.
Sie konvergiert sogar selbst nicht. ([?])

$$\sqrt[n]{|b_n| \cdot |x|^n} \leq q < 1 \text{ für alle } n \geq n_0$$

$\Leftrightarrow |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 < 1$ für alle $n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} < 1$

$\uparrow$ (setze $\varepsilon = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|b_n|} > 0$)

$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$

$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : s - \frac{\varepsilon}{2} < |x| \cdot \sqrt[n]{b_n} \leq s + \frac{\varepsilon}{2} =: q < 1$

$\square$

3.4 Bemerkung

Konvergenz von Potenzreihen der Form $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$:
gleichen Konvergenzradius R wie $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$
konvergiert absolut für $|x-a| < R$, d.h $x \in]a-R, a+R[$ Divergiert für $|x-a| > R$.
Keine Aussage für $|x-a| = R$, d.h $x = a - R$ oder $x = a + R$
Konvergenzintervall $< a - R, a + R >$

3.5 Die Exponentialreihe

a) Exponentialreihe

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b_n = \frac{1}{n!})$

2.28 Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setze für $x \in \mathbb{R} : \exp(x) := \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
Exponentialfunktion $\exp(0) = \frac{0^n}{0!} = 1$

b) Serien $x, y \in \mathbb{R}$
$\exp(x) \cdot \exp(y) \underset{2.31}{=}$ Limes des Cauchy Produkts der beiden Reihen.

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!})$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot x^i \cdot y^{n-i})$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \cdot x \cdot y^{n-i})$

$= \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n}! \cdot (x+y)^n = \exp(\text{x+y})$

$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \text{ für alle x,y} \in \mathbb{R}}$

Daraus folgt: $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \text{ für alle x} \in \mathbb{R}} (\star)$

Für alle x $\geq 0 : \exp(x) > 0$. Dann auch wegen $(\star)$

$\boxed{\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}}$

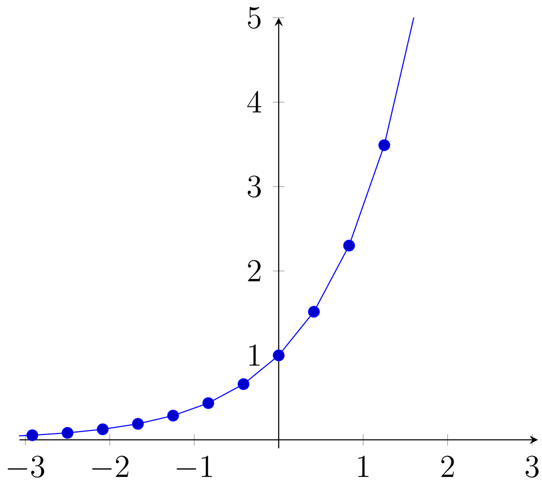


Abbildung 12: Die Exponentialreihe

c) $\exp(1) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Euler'sche Zahl

$$\text{Approximation } e \text{ durch } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \begin{array}{lll} m = 2 & 1 + 1 + \frac{1}{2} & = 2,5 \\ m = 3 & 2,5 + \frac{1}{6} & = 2,\overline{6} \\ ...m = 6 & \frac{326}{126} + \frac{1}{720} & = 2,7180\overline{5} \end{array}$$

Es ist: $e \approx 2,71828\ldots$ (irrationale Zahl)

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert schnell

$m \in \mathbb{N}$

$\exp(m) = \exp(\underset{\leftarrow m \rightarrow}{1 + \ldots + 1})$
$\exp(1)^m = e^m$
$e^0 = 1$ $\exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = e^{-m}$
$n \neq 0, n \in \mathbb{N}:$
$e = \exp(1) = \exp(\frac{n}{n}) = \exp(\frac{1}{n}^n)$
$\exp(\frac{1}{n}) = +\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$
$\exp(\frac{m}{n}) = e^{\frac{m}{n}}$.
Für alle $x \in \mathbb{Q}$ stimmt $\exp(x)$ mit der 'normalen' Potenz e^x überein.
Dann definiert man für beliebige $x \in R$:
$\boxed{e^x := \exp(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$
In kürze: Definition a^x für $a > 0, x \in \mathbb{R}$

d) Bei komplexen Zahlen kam e^{it} ($i^2 = -1, t \in \mathbb{R}$) vor als Abkürzung für $\cos(t) + i\sin(t)$
Tatsächlich kann auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ definieren $e^z = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
Dabei: Konvergenz von Folgen/Reihen in $\mathbb{C}$ wie in $\mathbb{R}$ mit komplexem Absolutbetrag.
Man kann dann zeigen:
$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
Dass tatsächlich dann gilt:
$e^{it} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + \sin(t)$. zeigen wir später

2.718...) Man kann zeigen.
$\underline{e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + (\frac{1}{n})^n)}$
Bedeutung:

- Angelegtes Guthaben G wird in einem Jahr mit 100% verzinst. Guthaben am Ende eines Jahres $2G(= G(1 + 1)$

- Angelegtes Geld wird jedes halbe Jahr mit 50% verzinst. Am Ende eines Jahres (mit Zinsenzinsen)
$G(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) = 2,25G$
n- mal pro Jahr mit $\frac{100}{n}$% verzinsen. Am Ende desx Jahres $G(1 + \frac{1}{n})^n$.
$\lim\limits_{n\to\infty} G(1 + \frac{1}{n})^n = e \cdot G \approx 2.718 \ldots \cdot G$ (stetige Verzinsung)
a% statt 100% $\cdot Ge^{\frac{a}{100}}$

4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

4.1 Definition

Reelle Funktionen f in einer Variable ist Abbildung
$f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ (D = Definitionsbereich).
Typisch: $D = \mathbb{R}$, Intervall, Verschachtelung von Intervallen

4.2 Beispiel

a) Polynomfunktionen (ganzrationale Funktion, Polynome)

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to a_n \cdot x^n + \dots a_1 x + a_0 \end{cases}$$

$f(x) = a_n \cdot x^n + \dots a_1 \cdot x + q$
$a_n \neq 0 : n =$ Grad (f) f = 0 (Nullfunktion), Grad$(f) = \infty$
Grad 0: konstante Funktionen $\neq 0$
Graph von f:

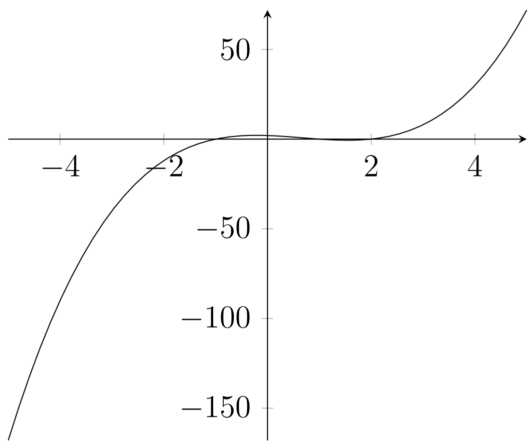
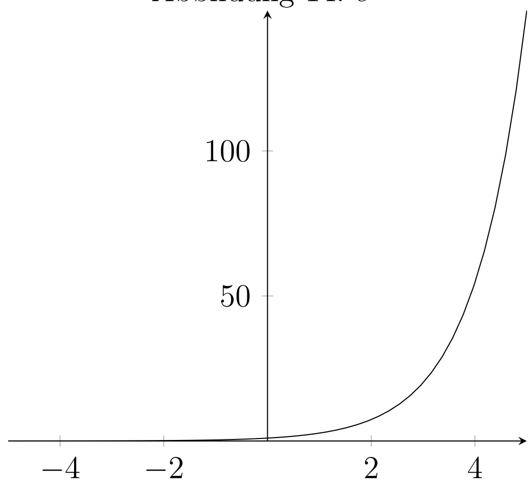


Abbildung 13: $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f, g : D \to R$ $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ für alle $x \in D$
Summe: Differenz, Produkt von f und g.
Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so Quotient. $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$,
Quotient von Polynomen = (gebrochen-)rationalen Funktionen
$|f|(x) := |f(x)|$ Betrag von f.

c) Potenzreihe definiert Funktion auf ihrem Konvergenzintervall.
z.B : $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
Fkt. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Abbildung 14: e^x



d) Hintereinanderausführung von Funktionen:
$f : D_1 \to \mathbb{R}, g : D_2 \to \mathbb{R} f(D_1) \subset f(D_2)$, dann $g \circ f$:
$\begin{cases} D_1 \Rightarrow & \mathbb{R} \\ x \to & g(f(x)) \end{cases}$

e) $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = g(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^2 x + 1$
$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = e^{x^2+1}$

f) <u>Trigonometrische Funktionen: Sinus- und Cosinusfunktion (vgl. $\mathbb{C}$)</u>
$0 \geq x \geq 2\pi$ x = Bogenmaß von φ in Grad, so $x = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi$
$\sin(x) = s, \cos(x) = c$ Für beliebig $x \in \mathbb{R}$:
Periodische Fortsetzung, d.h. $x \in \mathbb{R}. x = x' + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}, x' \in [0, 2\pi[$
$\sin(x) := \sin(x')$
$\cos(x) := \cos(x')$
$|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

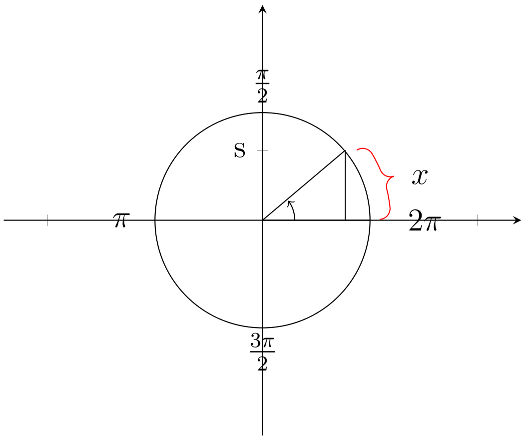


Abbildung 15: Bogenmaß

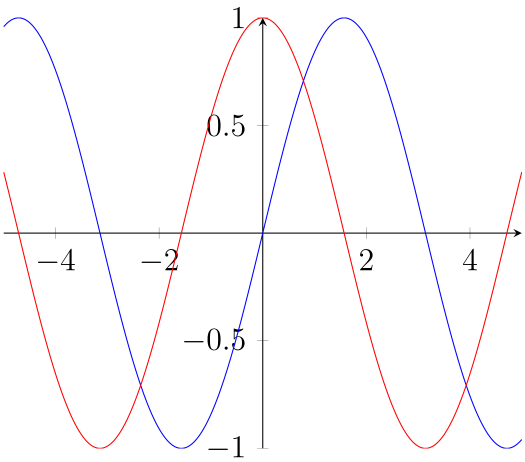


Abbildung 16: sin(x) und cos(x)

$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Tangens und Cotangensfunktion
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) \neq 0$

4.3 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ heißt Adharenzpunkt von D, falls es eine Folge $(a_n)_n, a_n \in D$, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ gibt.
$\bar{D}$ = Menge der Adharenzpunkte von D

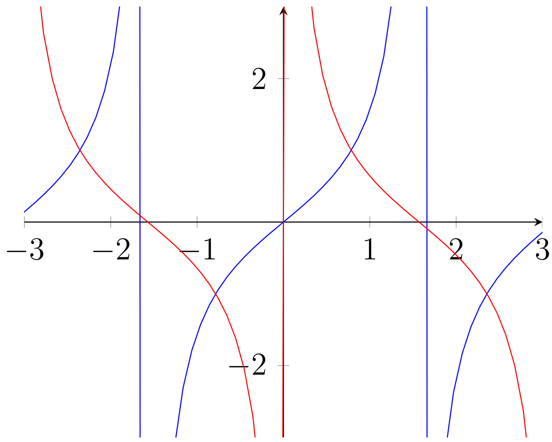
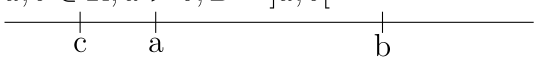


Abbildung 17: tan(x) and cot(x)

$= \underline{\text{Abschluss}}$ von D
klar: $D \subset \bar{D}$.
$d \in D$. konstante Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = d$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} d = d$.
Also: $d \in \bar{D}$.

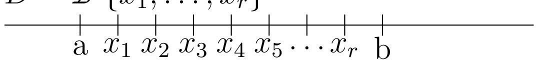
4.4 Beispiel:

a) $a, b \in \mathbb{R}, a > b, D =]a, b[$



$\bar{D} = [a, b] D \in \bar{D}$
$a \in \bar{D}$
$a_n = a + \frac{b-a}{n} \in D, n \geq 2$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Also $[a, b] \subset \bar{D}$.
Ist $c \notin [a, b]$,etwa $c < a$, dann ist $|a_n - c| \geq a - c > 0$ für alle $a_n \in]a, b[$ Also: $\lim\limits_{a_n} \neq c$

b) $\mathcal{I}$ Intervall in $\mathbb{R}, x_1, \ldots, x_r \in \mathcal{I}$,
$D = \mathcal{I}\ \{x_1, \ldots, x_r\}$



$\bar{D} = \bar{\mathcal{I}} = [a, b]$,
falls $\mathcal{I} =< a, b >$.

c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

4.5 Definition

$f : D \rightarrow, c \in \bar{D}$.
$d \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f(x) für x gegen c, $d = \lim\limits_{x \to c}$, wenn für jede Folge $(a_n) \in D$, die gegen c konvergiert, die Bildfolge $(f(a_n))_n$ gegen d konvergiert.

4.6 Beispiel:

a) Sei $f(x) = b_k x^k + \ldots + b_1 x + b_0$, eine Polynomfunktion, $c \in \mathbb{R}$. Sei (a_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} b_k x^k + \ldots + b_1 x + b_0 \\ &= b_k (\lim_{n\to\infty} a_n)^k + b_{k-1} \cdot (\lim_{n\to\infty} a_n)^{k-1} + \ldots + b_0 \qquad \text{Rechenregeln für Folgen, 2.8} \\ &= b_k \cdot c^k + b_{k-1} \cdot c^{k-1} + \ldots + b_1 \cdot c + b_0 = f(c). \end{aligned}$$

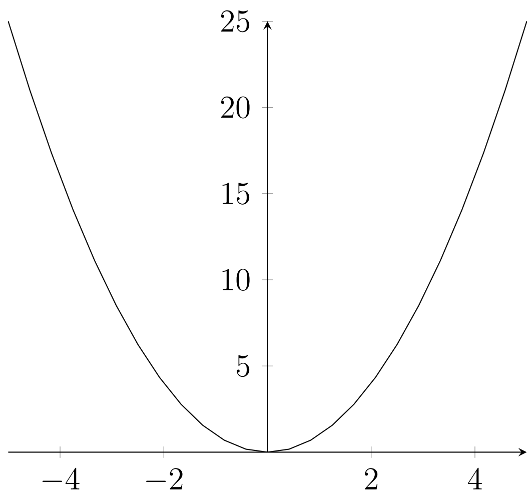


Abbildung 18: x^2

b) Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,
$D = R \backslash \{1\}$
Auf D ist $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1)$ $\bar{D} = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ?$

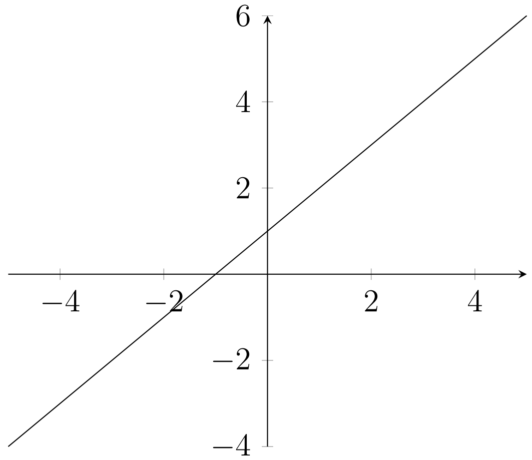


Abbildung 19: x+1

Sei (a_n) Folge mit $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
$f(a_n) = a_n + 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + 1) = 1 + 1 + 2. \lim\limits_{x\to 1} = 2.$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} D = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

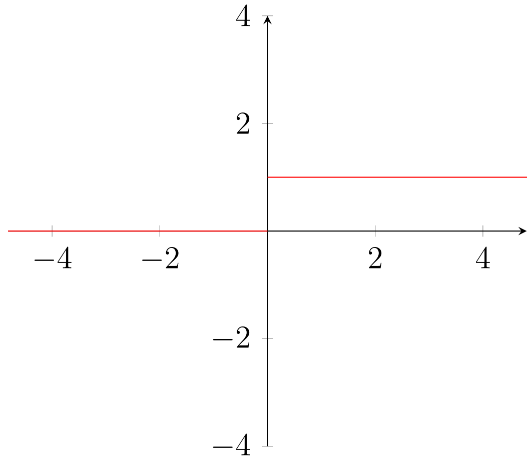


Abbildung 20: Abschnittsweise definierte Funktion

$a_n = \frac{1}{n}. \lim a_n = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = \underline{1}$
$a_n = -\frac{1}{n}, \lim a_n = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = \underline{0}.$
$\lim\limits_{x\to 0}$ existiert nicht.

d) $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $a_n = \frac{1}{n\pi}, f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$

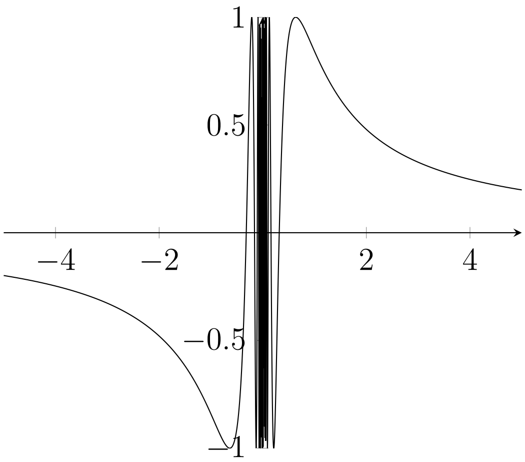


Abbildung 21: $\sin(\frac{1}{x})$

$a'_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2}\pi)} \to 0, f(a'n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$
$\lim(a_n) = 0$
$\lim(f(a_n)) = \lim 0 = 0 \lim(f(a'_n)) = \lim 1 = 1$
$\lim(f(x))_{x\to 0}$ existiert nicht

e) $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x}), D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ dann:
$(a_n) \to 0, a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \sin(\frac{1}{a_n}) \underset{2.8g)}{=} 0$

4.7 Satz $(\varepsilon - \delta)$-Kriterium

$f : D \to \mathbb{R}, c \in \bar{D}$. Dann gilt: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta\forall x \in D : |x - c| \leq \delta \to |f(x) - d| \leq \varepsilon$

Beweis. $\to$: Angenommen falsch.
Dass heißt $\exists\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ (z.B $\delta = \frac{1}{n}$) ein $x_n \in D$ existiert mit $|x_n - c| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - d| > \varepsilon$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Aber:

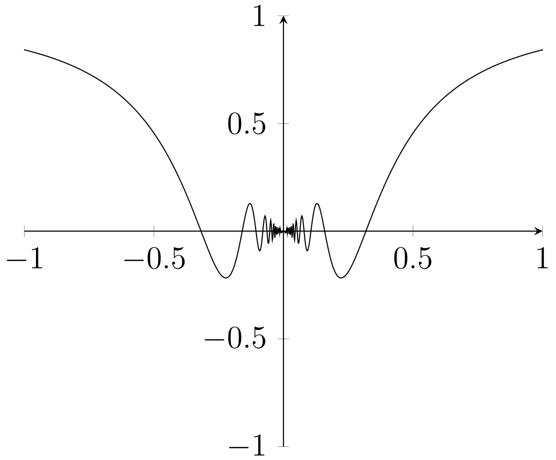
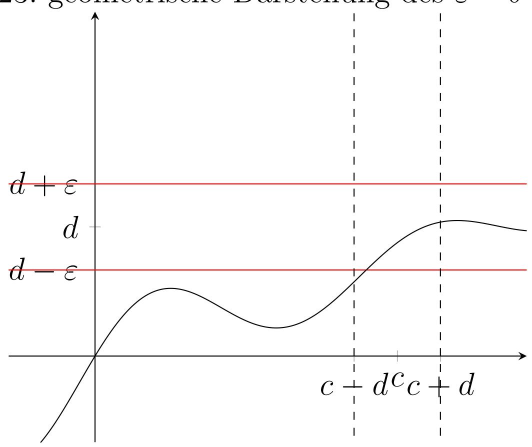


Abbildung 22: $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

Abbildung 23: geometrische Darstellung des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums



$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq d$ ↯
$\Leftarrow$: Sei (a_n) Folge, $a_n \in D$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.
Zu zeigen : $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = d$, d.h $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall n \geq n(\varepsilon) : |f(a_n) - d| < \varepsilon$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, ex. $d > 0$:

$$(\star)$$

Für alle $x \in D$ mit $\underline{|x - c| \leq \delta}$ gilt $|f(x) - d| < \varepsilon$.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, existiert n_0 mit $|a_n - c| \geq \delta$ für alle $n \geq n_0$
Nach $(\star)$ gilt: $|f(a_n) - d| < \varepsilon \forall n \geq n_0$.✓ $\square$

Bemerkung

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = d \Leftrightarrow$ Für alle Folgen $(a_n), a_n \in D$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = e$
Wenn man zeigen will, dass $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ nicht existiert, gibt es 2 Möglichkeiten:

- Suche eine bestimmte Folge (a_n), $\lim\limits_{n\Rightarrow\infty} a_n = c$, so dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(a_n)$ nicht existiert.

- Suche zwei Folgen $(a_n), (b_n)$, $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = c$, $\lim\limits_{x\to\infty} b_n = c$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{x\to\infty} f(b_n)$

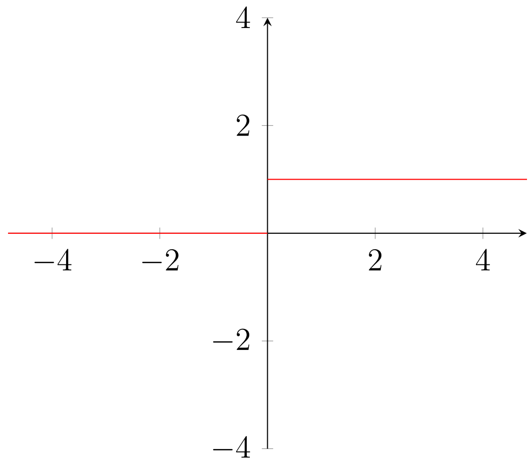


Abbildung 24: Abschnittsweise definierte Funktion

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
$f(a_n) = (101010\ldots)$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ existiert nicht.
Oder:
$a_n = \frac{1}{n} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
$b_n = -\frac{1}{n} \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
Aber: $\lim\limits_{x\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{x\to\infty} f(b_n)$

4.8 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

$f, g, D \to \mathbb{R}, c \in \bar{D}$, Existieren die Grenzwerte auf der rechten Seite der folgenden Gleichungen, so auch die auf der linken (und es gilt Gleichheit)

a) $\lim\limits_{x\to c}(f \pm / \cdot g) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm / \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x)$.

b) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$, so

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$$

c) $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = |\lim\limits_{x\to c} f(x)|$

Beweis. Folgt aus den entsprechenden Regeln für Folgen. □

4.9 Beispiel:

$f(x) = \frac{x^3+3x+1}{2x^2+1}, D = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 2} \underset{4.2b)}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+3x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+1)}$

$\underset{4.6a)}{=} \frac{4+6+1}{8+1} = \frac{11}{9}$

4.10 Bemerkung

Rechts- und linksseitige Grenzwerte:
Rechtsseitiger Grenzwert:
$\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = d \Rightarrow \forall (a_n)_n, a_n \in D, a_n \geq c$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = d$.
Analog: linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = d$
$(a_n \leq c)$.

4.11 Beispiel:

$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, c = 0 \in \bar{D}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.
Falls $\lim\limits_{x\to c^+}$ und $\lim\limits_{x\to c^-}$ existieren
<u>und</u> $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} = d$
so exisitiert $\lim\limits_{x\to c} f(x) = d$. Grenzwert: $d \in \mathbb{R}$

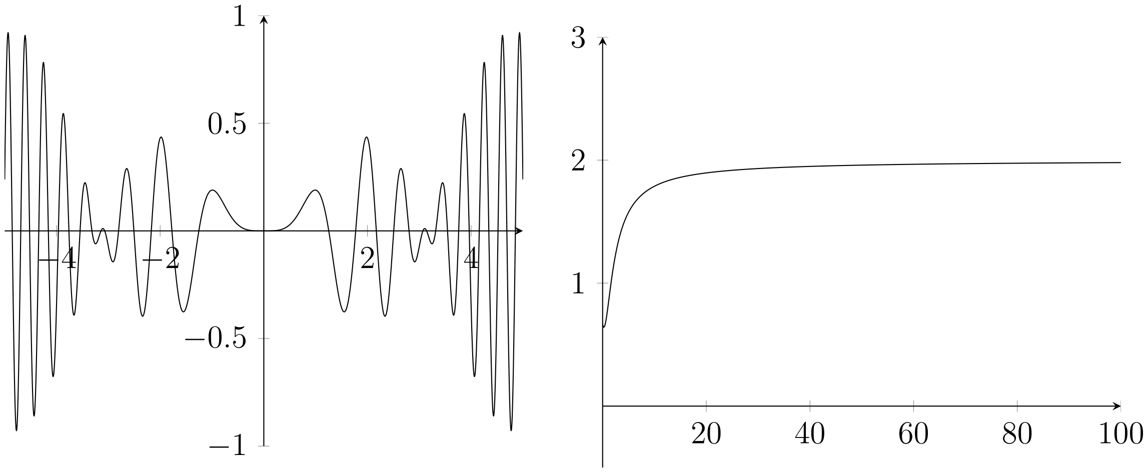


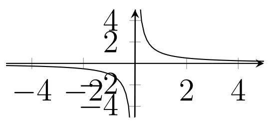
Abbildung 25: Grenzwerte gegen einen Festen Wert

4.12 Definition

$D =< b, \infty[, f : D \to \mathbb{R}$ (z.B $D = \mathbb{R}$)
f konvergiert gegen $d \in \mathbb{R}$ für x gegen unendlich,
$\lim\limits_{f(x)} = d$,falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x \geq M : |f(x) - d| < \varepsilon.$
(Analog : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = d$)

4.13 Beispiel

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$



Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $x \geq M$:
$|f(x) - 0| = |\frac{1}{x}| \leq \frac{1}{m} = \varepsilon.$

b) Allgemein gilt:
P, Q Polynome vom Grad k bzw. l $l \geq k$
$P(x) = a_k \cdot x^k + \ldots, Q(x) = b_i \cdot x^i + \ldots, a_k \neq 0, b_i \neq 0 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l \geq k \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{für } l = k \end{cases}$
(Beweis wie für Folgen $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$)
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^5 + 205x^3 + x^2 + 17}{14x^5 + 0{,}5} = \frac{1}{2}$

4.14 Bemerkung

Die Rechenregeln aus 4.8 gelten auch für $x \to \infty / -\infty$

4.15 Definition

a) $f : D \to \mathbb{R}, c \in \bar{D}$
f geht gegen ∞ für x gegen c,
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, falls gilt:
$\forall L > 0 \exists \underset{=\delta(L)}{\delta >} 0 \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq L.$

b) $< b, \infty[\supset D, f : D \to \mathbb{R}$, f geht gegen ∞, für x gegen ∞: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$,
falls gilt:
$\forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D, x \geq M, f(x) \geq L.$

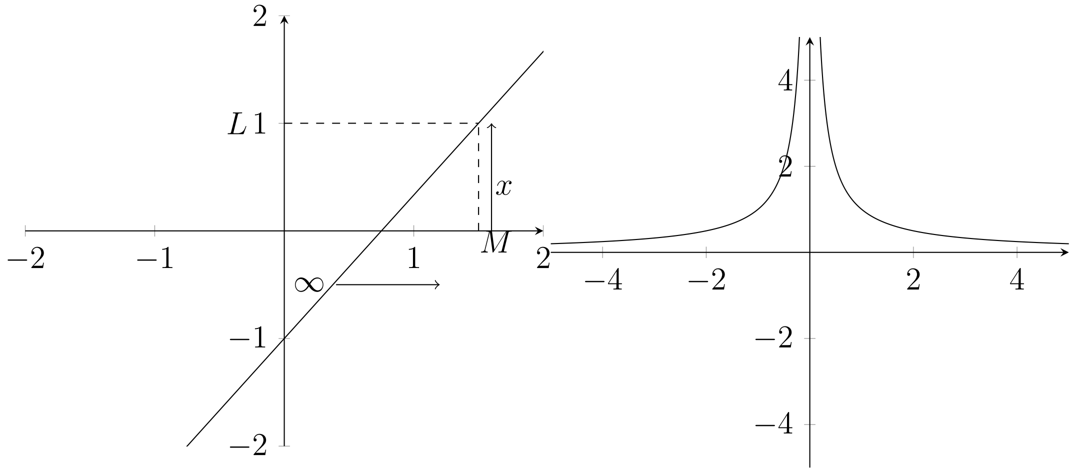
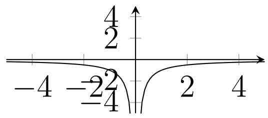
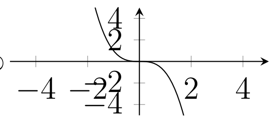
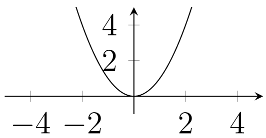


Abbildung 26: Funktionen $\lim\limits_{x \to \infty} = \infty$

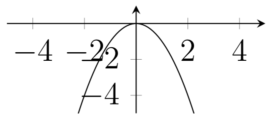
(Entsprechend: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ 

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ 

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



4.16 Satz

$f : D \to \mathbb{R}$.

a) Sei $c \in \bar{D}$, oder c $= \infty, -\infty$
falls $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ oder $-\infty$, so ist $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0$.

b) $c \in \bar{D} \supset \mathbb{R}$.
Falls $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ und falls $s > 0$
existiert mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [c-s, c+s], (f(x) < 0)$
dann ist $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$

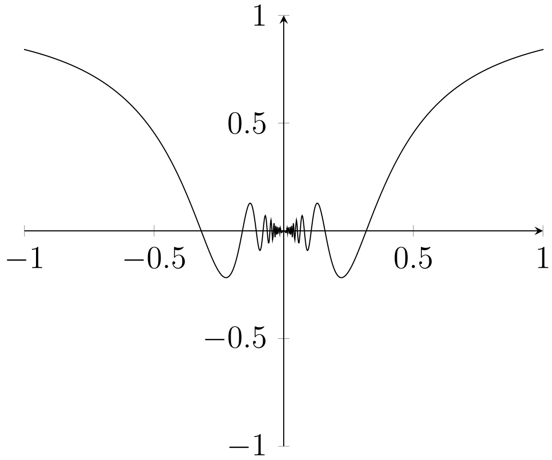
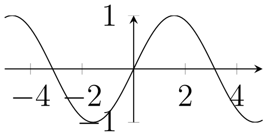


Abbildung 27: $sin(\frac{1}{x})$

c) Falls $\lim\limits_{x\to\infty} = 0$ und falls $T > 0$ existiert mit $f(x) > 0 f.a x \geq T$, so $(f(x) < 0)$
ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$
(Entsprechend für $\lim\limits_{x\to-\infty}$)

4.17 Beispiel

a)
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]-\infty, 0[$
  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x}, D =]0, \infty[$
  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} sin(x)$ existiert nicht 

c) $P(x) = ak_x^k + \ldots + a_0$.

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \begin{cases} \infty, \text{falls} & a_k > 0 \\ -\infty, \text{falls} & a_k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, \text{falls} & a_k > 0 \text{k gerade oder} a_k < 0 \text{ k ungerade} \\ -\infty, \text{falls} & a_k < 0 \text{k gerade oder} a_k > 0 \text{ k ungerade} \end{cases}$$

d) $P(x)$ wie in c)
$Q(x) = b_l^l + \ldots + b_0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ gleiche Vorzeichen} \\ -\infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_k \text{ verschiedene Vorzeichen} \end{cases}$$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \ \forall L > 0 \exists \ M \forall \ x \gg M : f(x) \gg L$
Sei L $\geq 0, x > 0$.
$e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$
Ist $x \geq (n+1)!L =: M$, so ist $\frac{e^x}{x^n} > L$.

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$. Folgt aus e) und **??**a)

5 Stetigkeit

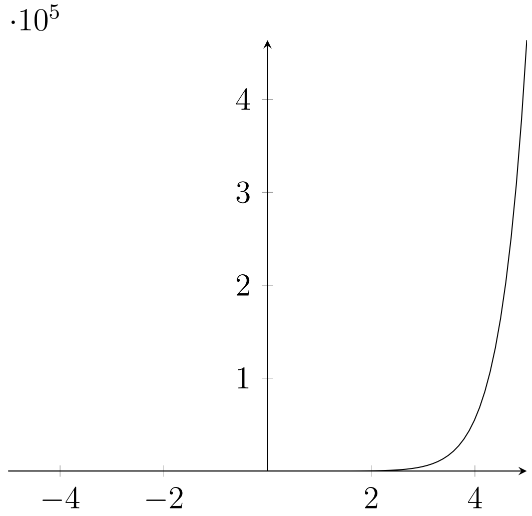


Abbildung 28: $\frac{e^x}{x^n}$

5.1 Definition

$f : D \to \mathbb{R}$.

a) f ist stetig an $c \in D$, fallse $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

b) f heißt (absolut) stetig, falls f an allen $c \in D$ stetig ist.

5.2 Satz

$f : D \to \mathbb{R}, c \in D$.
Existiert KOnstante $\mathbf{K} > 0$ mit $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c|$ für alle $x \in D$, dann ist f stetig in c.

Beweis.
Sei $\varepsilon > 0$.
Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbf{K}}$. Ist $|x - c| \leq \delta$, so ist $|f(x) - f(c)| \leq \mathbf{K} \cdot |x - c| \leq \mathbf{K} \cdot \delta - \varepsilon$.
4.7 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. □

5.3 Beispiel

a) Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

b) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{falls} & , x \neq 0 \\ 1, \text{falls} & , x = 0 \end{cases}$ f ist nicht steig in 0.

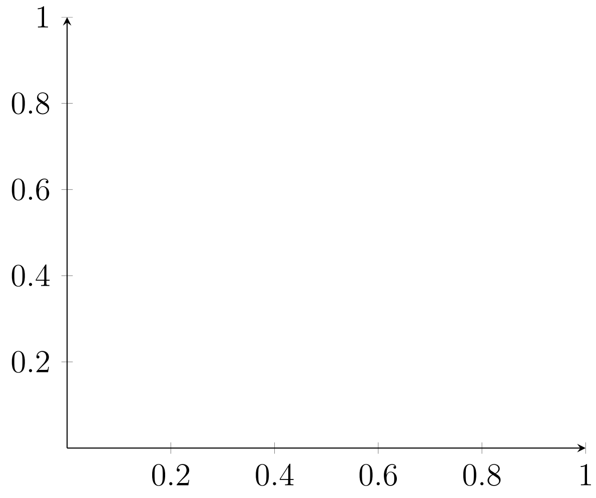
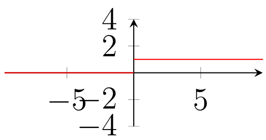


Abbildung 29: Abschnittsweise definierte Funktion

$a_n = \frac{1}{n}, a_n \to 0$
$f(a_n) = 0$
$(f(f(a_n)) \to 0 \neq f(0)$

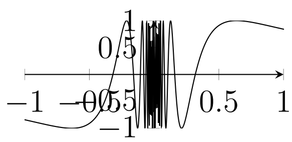
c) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{falls} & , x > 0 \\ 1, \text{falls} & , x < 0 \end{cases}$

f ist nicht stetig in 0.



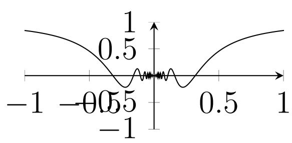
d) $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), \text{falls} & , x \neq 0 \\ 0, \text{falls} & , x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x} \to 0 \sin(\frac{1}{x})$ ex. nicht.

f ist nicht stetig in 0.



e) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), \text{falls} & , x \neq 0 \\ 0, \text{falls} & , x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$

f ist stetig in 0.



f) $f(x) = \sin(x)$
$g(x) = \sin(x)$ Sind stetig auf $\mathbb{R}$: TODO: Halbkreis plotten.
Fúr alle $x, c \in \mathbb{R}$ gilt:
$|\sin(x) - \sin(c)| \leq |x - c|$.
$\sin(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ (5.2, $\mathbf{K}$ =1)

5.4 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit)

$f, g : D \to \mathbb{R}, c \in D$,
sind f und g stetig in c, dann auch $f \pm / \cdot$ und $|f|$. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in c.

Beweis. Folgt aus 4.8 □

5.5 Satz

$D, D' \subseteq \mathbb{R}, F : D \to \mathbb{R}$,
$g : D' \to \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'$.. Ist f stetig in $c \in D$ und ist g stetig in $f(c) \in D'$, so ist $g \circ f$ stetig in c,

Beweis. $(a_n) \to c, a_n \in D$.
f stetig: $f(a_n) \to f(c)$
g stetig in f(c): $(g \circ f)(a_n)(a_n)$ $(g \circ f)(c)$ □

5.6 Beispiel

a) $f(x) = \sin(\frac{1}{|x^2-1|}), D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}. f$ ist stetig auf D. Folgt aus $5.3_{\text{a),f und 5.4,5.5}}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ stetig auf $\mathbb{R}$, 5.3e) für $c = 0$ für $c \neq 0$. 5.3,5.4,5.5

c) $f(x) = \tan(x)(= \frac{sin(x)}{cos(x)})$
$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} f$ stetig auf D

5.7 Satz

Sei $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i(x - a)^i$
eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist f stetig $m]a - R[=: D$
$c \in D \lim\limits_{x \to c} f(x)$

$$= \lim_{x\to c} f(x) \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i \qquad [3]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i = f(c)$$

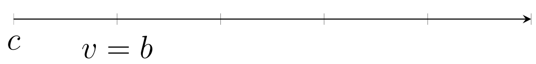
5.8 Korollar

$f(x = \exp(x) = e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

5.9 Satz (Nullstellensatz für stetige Funktionen)

$f : D \to$ stetig, $[u,v] \subset D, u < v$
Es gelte $f(v) \cdot f(v) < 0$
(d.h $f(u) > 0, f(v) > 0$, oder $f(u) > 0, f(v) < 0$) Dann existiert $w \in]u,v[$ mit $f(v) = 0$

Beweis. O.B.d.A., $f(n) < 0 < f(v)$.
Bijektionsverfahren:



Falls $f(c) < 0$, so $a = c$, sonst $b = c$. Liefert Folgen $(a_n), (b_n)$ und eindeutig bestimmte $w \in [u,v]$ mit $a_n \leq a_{n+1} w \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle n
$f(a_n) < 0$
$f(b_n) \geq 0$
für alle n. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = wf$ ist stetig in w $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(b_n) = f(w)$.

$f(a_n) < 0 \forall n \to \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0.$
$f(b_n) \geq 0 \forall n \to \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$
$\Rightarrow 0 = \lim(a_n) = \lim(b_n) = f(w).$ □

5.10 Korollar (Zwischenwertsatz)

$f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $[u, v] \subseteq D$
Dann nimmt f in $[u, v]$ jeden Wert zwischen $f(u)$ und $f(v)$ an (und evtl. weitere)
TODO: Funktion Plotten mit Zwischenwerten. + Funktion nicht stetig

Beweis. O.B.d.A $f(u) < f(v)$
Sei $f(u) < b < f(w) b$ beliebig, aber dann fest.
Definiere $g(x) = f(x) - b$ stetig
$g(u) = f(u) - bg(v) = f(v) - b$
5.9 (angewandt auf g): Ex. $w \in]u, v[$ mit $g(w) = 0$,d.h $f(w) = b$. □

Literatur

[1] Kreußler, Phister Satz 33.16

[2] WHK 5.37

[3] WHK 6.21