I. Physikalisches Anfängerpraktikum

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Protokoll zum Versuch

Trägheitsmoment

(Versuch 12)

Autor: Finn Zeumer (hz334)
Versuchspatnerin Annika Künstle
Versuchsbegleiter: Marius Huy

Datum der Ausführung: 05.09.2025
Abgabedatum: 12.09.2025

FEZ

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

1.1. Aufgabe/Motivation

Ziel des Versuchs ist die Bestimmung des Richtmoments D eines Drehpendels sowie die Untersuchung des Trägheitsmoments J eines unregelmäßig geformten Körpers für verschiedene Lagen der Drehachse. Dazu wird einerseits das Richtmoment über die Auslenkung des Pendels durch ein angreifendes Drehmoment bestimmt, andererseits über die Periodendauer einer Schwingung mit aufgesetzten Körpern bekannter Geometrie. Mit Hilfe des Steiner'schen Satzes lässt sich schließlich das Trägheitsmoment für verschiedene Achsen berechnen und mit den experimentell gewonnenen Werten vergleichen.

1.2. Physikalische Grundlagen

Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegung

Die Bewegungsgleichungen für Translationen und Rotationen sind formal analog, wenn die entsprechenden Größen ausgetauscht werden. Dabei gilt für das Torsionspendel:

$$0 = J \cdot \ddot{\varphi}(t) + D \cdot \varphi(t) \tag{1}$$

Diese homogene Differentialgleichung 2. Art hat die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \phi). \tag{2}$$

Dabei ist $\omega = \sqrt{\frac{J}{D}}$ und ϕ die Startauslenkung.

Auch Federpendel und Drehpendel stehen in direkter Analogie:

$$F = -kx \quad \Leftrightarrow \quad M = -D\varphi \tag{3}$$

Translation	**Rotation**
Ort x	Winkel φ
Ges. $v = \frac{dx}{dt}$	Winkelges. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Bes. $a = \frac{d^2x}{dt^2}$	Winkelbes. $\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Masse m	Trägheitsmoment J
Kraft F	Drehmoment M
Impuls $p = mv$	Drehimpuls $L = J\omega$
Trans.En. $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	Rot.En. $E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$
$E_{ges} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$	$E_{ges} = \frac{1}{2}D\phi^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$
Schwingdauer $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Schwingdauer $2\pi\sqrt{\frac{D}{J}}$

Tabelle I.1.: Vergleich der Größen in der Translation und Rotation

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Leftrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \tag{4}$$

Das Richtmoment D spielt dabei die Rolle der Federkonstante k.

Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment J eines Körpers bezüglich einer gegebenen Drehachse ergibt sich aus dem Volumenintegral:

$$J = \int_V \rho(\vec{r}) r^2 \, dV, \tag{5}$$

wobei $\rho(\vec{r})$ die Massendichte und r der Abstand des Volumenelements zur Achse ist. Für einfache Körper ergeben sich bekannte Spezialfälle, etwa für eine homogene Scheibe mit Masse m und Radius r_s:

$$J_S = \tfrac{1}{2} m r_s^2 \tag{6}$$

Hierbei ist J_S das Trägheitsmoment der Scheibe, m ihre Masse und r_s ihr Radius.

Steiner'scher Satz

Für eine Achse, die parallel zur Symmetrieachse im Abstand d verläuft, gilt:

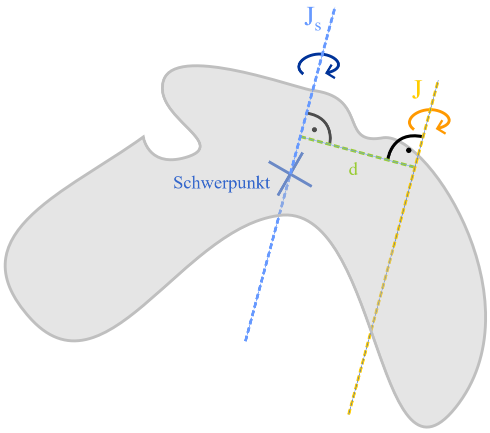

Abbildung I.1.: Visualisierung des Stein'schen Satzes

$$J = J_S + md^2 \tag{7}$$

mit J_S als Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse, m als Masse des Körpers und d als Abstand der Achsen.

Bestimmung des Richtmoments

Das Richtmoment D des Drehpendels kann auf zwei Weisen bestimmt werden:

1. Über das Kraftgesetz:

$$M = r \cdot F = -D\varphi, \tag{8}$$

wobei M das Drehmoment, r der Radius der Aluminiumscheibe, $F = mg$ die Gewichtskraft eines tangential angreifenden Massestücks und φ der Auslenkwinkel ist.

2. Über die Schwingungsdauer T mit bekannter Massescheibe:

$$D = \frac{4\pi^2 J_S}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{2\pi^2 m r_s^2}{T_2^2 - T_1^2}, \tag{9}$$

wobei T_1 die Periodendauer des Tisches allein, T_2 die Periodendauer mit aufgesetzter Scheibe, J_S das Trägheitsmoment der Scheibe, m ihre Masse und r_s ihr Radius ist. Mathematisch werden die zwei einzelnen Periodendauern also via:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_T}{D}}, \tag{10}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_T + J_S}{D}} \tag{11}$$

bestimmt. Wir können nun die Gleichung für T_1 (Gleichung 10) und T_2 (Gleichung 11) quadrieren und jeweils nach J_T umstellen:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{J_T}{D} \qquad \Rightarrow J_T = \frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2} \tag{12}$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{J_T + J_S}{D} \qquad \Rightarrow J_T = \frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2} - J_S. \tag{13}$$

Logischer weise können wir die Gleichung gleichsetzen und kommen damit auf

$$\frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2} = \frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2} - J_S. \tag{14}$$

Formt man diese Gleichung nach D um, so kommt man wieder zu Gleichung 9

1.3. Versuchsanordnung

Der Versuch wird mit einem Drehpendel mit senkrechter Achse durchgeführt. Zum Aufbau gehören eine Drehgabel mit Drehtisch, eine Aluminiumscheibe mit Winkelteilung und Schnurnut, eine runde sowie eine unregelmäßig geformte Messingscheibe, ein Gewichtsteller mit Zugschnur, sechs Auflegegewichte zu je 50g, eine Waage, eine Handstoppuhr, ein Messschieber sowie eine Balancierschneide. Mit diesem Aufbau lassen sich die notwendigen Messungen zur Bestimmung des Richtmoments und der Trägheitsmomente der untersuchten Körper durchführen.

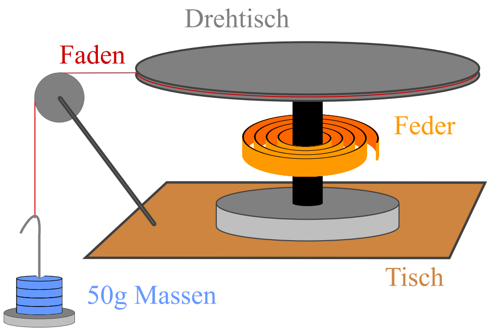

Abbildung I.2.: Versuchsskizze

05.05.2025

Finn Zeumer, Annika Künstle

12 – Trägheitsmoment

Skizze machen

Material

- Drehpendel
- Drehtisch + Makierung
- Waage, Stoppuhr, Messlehre
- Balancierschneide
- 6×50g Massen
  ±0,1g

Aufgabe 1)

Tabelle 1) Scheibendrehung

rad besser?

	Masse [g]	Winkel der Scheibendrehung [deg]	
1	50	60	
2	100	122	
3	150	180	
4	200	242	
5	250	302 + 60	~~311~~
6	300	366 + 124	~~353~~ Alte Werte

Spezifische Winkel der Scheibendrehung verschiedener Massen.

Ab diesen Messungen haben wir Probleme bekommen: Teller war "ausgedreht". Wir haben den Drehtisch gedreht (200g + Teller) und den Zeiger auf 0 gestellt und erneut die letzten zwei Massen hinzugefügt.

Aufgabe 2)

Tabelle 2)

Index	Scheibe	Schwingungsdauer	
1	kleine	23,09	T_1
2		23,31	
3		23,28	
4	Messing (regelmäßig)	34,98	T_2
5		34,75	
6		34,78	

Vergleich der Aluminiumplatte und der Messingplatte, je 3 Messungen der Schwingdauer bei 20 Umdrehungen.

Messingscheibe:

Durchmesser der Scheibe: 110 mm

Masse der Scheibe: 646 g

Equipment

Stoppuhr Modell: TFA Dostman KAT. NR 38.2016
Präzision: 0,01 s Ungenauigkeit:

Waage Modell: Ohaus CS 2000
Präzision: 1 g Ungenauigkeit:

Schieblehre Modell: Mitutoyo J. HD S.
Genauigkeit: 0,05 mm Ungenauigkeit:

Aluminiumscheibe Präzision: 2 deg

Aufgabe 3)

Foto machen!

Aufgabe 4)

Tabelle 3) Trägheitsmoment Messingplatt (unregelmäßig)

Achse	Schwinungsdauer [s]
a_0	44,42

Schwinungsdauer einer unregelmäßigen Messingplatte unter 20 Schwinungen.

Aufgabe 5)

Tabelle 4) Parallelachsen

Achse	Abstand zum Schwerpunkt [mm]	Schwingdauer [s]
a_1	0,5	44,58
a_2	1,0	44,73
a_3	1,5	45,10
a_4	2,0	45,90
a_5	2,5	47,67

Geodreieck : 0,1 cm

Trägheitsmomente 5 weiterer Achsen – parallel zur Schwerpunktachse. Alle liegen auf einer Geraden. Berechnung über den Steiner'schen Satz.

II. Durchführung

2.1. Versuchsaufbau

Genauigkeit der Messgeräte

Gerät	Präzision	Ungenauigkeit
Stoppuhr	0,01s	/ / /
Waage	1g	1g
Schieblehre	1mm	0,05mm
Al-Teller	2 Grad	/ / /

Tabelle II.1.: Genauigkeit der benutzen Geräte [TFA, Oha25]

Der Versuch bestand aus 5 Unteraufgaben. Alle diesen der Bestimmung rotatorischer Eigenschaften. Darunter die Bestimmung des Richtmoments und später des Stein'schen Satzes.

Aufgabe 1) Bestimmung des Richtmomentes

Wir benutzen den Drehtisch und legen die Aluminiumscheibe mit der Grad-Skala drauf. Diese hat eine Befestigung für die Schnurnut. Diese hängt über eine Rolle vom Tisch herunter. An dieser Schnurnut hängt der Massenteller, seine Auslemkung wurde auf 0 Grad gestellt. Danach wurden die 6 50g Massen an den Teller gehängt und die jeweilige Auslenkung bzw. Rotation dokumentiert. Da die scheibe jedcoh mehr als 360 Grad gedreht wird, muss nach Messung vier der Drehtisch selbst wieder gedreht werden, damit die Auslenkung normal möglich ist. Hierfür wurde dann die 200g + Massenteller als 0 Grad gesetzt.

Dabei machen wir vor allem gebrauch von dem Zusammenhang, dass die Gewichtskraft der Massen im Equilibrium, Betragsgleich zur Kraft aus dem Drehmoment ist:

$$F_g \cdot r = m \cdot g \cdot r = -D \cdot \varphi = M. \qquad (1)$$

Dabei ist F_g die Gewichtskraft, die auf die Masse m wirkt, D das Richtmoment der Torsionsfeder, *varphi* den Auslenkungswinkel der Aluminiumscheibe und M das Drehmoment.

Aufgabe 2) Bestimmung des Richtmpments via bekanntem Trägheitsmoment

In der zweiten Aufgabe wurde der Alluminumteller mit der regelmäßigen/symmetrischen Messingplatte ausgetauscht. Ihr Drehmoment lässt sich leicht berechnen, da die Formel zur Berechnung bekannt ist; benötigt werden jedoch sein Radius und seine Masse, diese werden gemessen. Anschließend wird der Drehtisch dreimal ohne Messingplatte und drei Mal mit Messingplatte gleichweit ausgelengt und seine Schwindauer für 20 Schwinungen per Hand gestoppt.

Aufgabe 3) Schwerpunkt-Bestimmung

In dieser Aufgabe musste ledeglich der Schwerpunkt einer unregelmäßigen Messingscheibe bestimmt werden. Dafür haben wir eine Schneide, auf der die Messingplatte balancierd wird, da wo die Platte (annährend) im Gleichgewicht ist, wird die Schneide auf des Schwerpunktes sein. Hier wird eine Line gezogen. Dies wiederholt man aus einem anderen Winkel ein zweites Mal. Es wird sich ein gezeichnetes Kreuz bilden, an desssen Mittelpunkt zugleich der Schwerpunkt der unregelmäßigen Messingplatte ist.

Aufgabe 4 + 5) Steinsch'er Satz

Die letzen zwei Aufgaben dienen dazu, den Stein'schen Satz zu zeigen. Dafür werden auf den unregelmäßigen Messingkörßer 5 weitere Makierungen gesetzt, die auf einer der Geraden auf der Messingplatte liegen. Sie werden all im Abstand von 0,5cm gesetzt, startend vom Schwerpunkt. Es sind nun insgesamt 6 Makierungen auf dem unregelmäßigen Messingkörper.

Nun wird die Messingpaltte auf den Drehtisch fixiert. Das Ziel ist es, für alle Makierungen wieder die Schwingdauer für 20 Schwingungen zu bestimmen. Die Werte für alle Schwingdauern werden dokumentiert und dann die jeweiligen Trägheitsmomente bestimmt.

2.2. Messverfahren

III. Auswertung

Fehlerrechnung

Für die statistische Auswertung von n Messwerten x_i werden folgende Größen definiert [Wag25]:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{Arithmetisches Mittel} \tag{1}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{Variation} \tag{2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{Standardabweichung} \tag{3}$$

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2} \qquad \text{Fehler des Mittelwerts} \tag{4}$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2} \qquad \text{Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz für } f(x,y) \tag{5}$$

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad \text{Fehler für } f = x + y \tag{6}$$

$$\Delta f = |a|\Delta x \qquad \text{Fehler für } f = ax \tag{7}$$

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \qquad \text{relativer Fehler für } f = xy \text{ oder } f = x/y \tag{8}$$

$$\sigma = \frac{|a_{lit} - a_{gem}|}{\sqrt{\Delta a_{lit}^2 + \Delta a_{gem}^2}} \qquad \text{Berechnung der signifikanten Abweichung} \tag{9}$$

3.1. Graphische Bestimmung des Richtmomentes

Kommen wir also nun zur Auswertung der Aufgaben. Dafür Beginnen wir damit, die Werte der Tabelle 1 aus dem Protokoll. Dabei ist x die Winkelauslenkung der Aluminiumscheibe, m hängende Masse, F die Gewichtskraft mit $|g| = 9,81\frac{m}{s^2}$, die auf die Masse wirkt M das berechnete Drehmoment nach Gleichung 2.1 und ΔM seine Ungenauigkeit nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta M = |m| \cdot |g| \cdot \Delta r \tag{10}$$

Dabei definieren die 0g den Startpunkt. 0g ist physikalisch in dem Kontest natürlich unsinnig und meint eigentlich die Startmasse, die hier nur aus dem Massenteller besteht, aber keine zusätzliche Masse. Der Radius der Aliminumplatte entspricht dabei $r = 10,000 \pm 0,005\,10^{-2}m$, also ist $\Delta r = 0,005\,10^{-2}m$, was der Ungenauigkeit der Schieblehre entspricht.

$m[g]$	$\varphi[°]$	$M\,[10^{-2}Nm]$	$\Delta M\,[10^{-2}Nm]$
0	0	—	—
50	60	4,9050	0,0024525
100	122	9,8100	0,0049050
150	180	14,4150	0,0073575
200	242	19,6200	0,0098100
250	302	24,5250	0,0012263
300	366	29,4300	0,0014715

Tabelle III.1.: Messungen der Rotationsauslenkung der Aluminumscheibe und die berechneten Drehmomente.

Stellen wir nun Gleichung 1.3 um, so kommen wir auf:

$$D_G = -\frac{M}{\varphi} \tag{11}$$

Daher plotten wir als nächstes das Drehmoment M gegen den Auslenkungswinkel φ und berechnen seine Steigung m, welche dem Drehmoment entspricht, nach

$$m = \frac{\Delta M}{\Delta\varphi} \tag{12}$$

Dies kann der Abbildung zur Bestimmung des Richtmomentes entnommen werden. Dabei rechnen wir Gradmaß in Radiant um. Es gilt:

$$x^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = y\,rad \tag{13}$$

Somit kommen wir auf Steigungen von:

$$m_A = \frac{0,230Nm}{5,4105rad} = 0,043\,\frac{Nm}{rad} = D_{G,A} \tag{14}$$

$$m_F = \frac{0,259Nm}{5,4105rad} = 0,048\,\frac{Nm}{rad} \tag{15}$$

Dabei ist m_A die Steigung der Ausgleichsgeraden und m_F die Steigung der Fehlergeraden, welche über das Min.-Max.-Verfahren bestimmt wurde. $\Delta\varphi$ sind dabei 2°.

Zieht man nun deren Differenz, so kommt man auf einen Fehler variation

$$\Delta D_G = |m_F - m_A| \tag{16}$$

$$= |0,048 - 0,043| = \underline{0,005}\left[\frac{Nm}{rad}\right] \tag{17}$$

Damit können wir D_G über $D_G = D_{G,A} \pm \Delta D_G$ bestimmen:

$$\underline{\underline{D_G = (4,3 \pm 0,5)\,10^{-2}\frac{Nm}{rad}}} \tag{18}$$

3.2. Rechnerische Bestimmung des Richtmomentrs

Wir entnehmen die Werte aus dem Protokoll und schauen uns Tabelle 2 an. Wir haben die Schwingdauer t für 20 Schwingungen, woraus sich auch die Periodendauer T bestimmt. Der Durchschnitt der Periodendauer ohne Scheibe ist $\bar{T}_1$, und der mit der Scheibe $\bar{T}_2$. Den Fehler der der Periodendauer $\Delta\bar{T}$ wurde über eine Reaktionszeit von $0,2s$ über Gauß'sche Fehlfortpflanzung berechnet sich der Fehler zu:

$$\Delta\bar{T}_{reak} = 0,20\,\mathrm{s} \cdot \frac{1}{20} = 0,01\,\mathrm{s} \tag{19}$$

Die Berechnung der Ungenauigkeit des Mittelwertes wird zusätzlich vorgenommen:

$$\Delta\bar{T}_{1,stat} = 0,003\,\mathrm{s} \quad (20)$$
$$\Delta\bar{T}_{2,stat} = 0,002\,\mathrm{s}. \quad (21)$$

Nun müssen beide Fehler über Gauß'sche Fehlerfortpflanzung zu einem zusammengeführt werden:

$$\Delta\bar{T}_i = \sqrt{(\Delta\bar{T}_{reak})^2 + (\Delta\bar{T}_{i,stat})^2} \quad (22)$$

Wir kommen dabei auf Werte von:

$$\Delta\bar{T}_1 = 0,010 \quad (23)$$
$$\Delta\bar{T}_2 = 0,010. \quad (24)$$

Wir merken also: die Berechnete statistische Ungenauigkeit war hier nicht von Relevanz.

Scheibe	$t\,[s]$	$T\,[s]$	$\bar{T}\,[s]$	$\Delta\bar{T}[s]$
Keine	23,09	1,155	1,162	0,010
	23,31	1,166	$=\bar{T}_1$	
	23,28	1,164		
Messing-	34,89	1,745	1,741	0,010
Platte	34,75	1,738	$=\bar{T}_2$	
	34,78	1,739		

Tabelle III.2.: Messungen der Schwingdauer einer regelmäßigen Messingplatte unter 20 Schwingungen.

Damit stehen unsere zwei Periodendauern fest, die wir für die Bestimmung des Richtmomentes D_R brauchen:

$$T_1 = (1,162 \pm 0,010)\,\mathrm{s} \quad (25)$$
$$T_2 = (1,741 \pm 0,010)\,\mathrm{s}. \quad (26)$$

Für die weitere Berechnung brauchen wir außerdem die Werte der Messingscheibe:

$$\begin{aligned} \text{Durchmesser: } d_M &= 110\,\mathrm{mm} && \pm 0,005\,\mathrm{mm} \\ \Rightarrow \text{Radius: } r_M &= 55\,\mathrm{mm} && \pm 0,0025\,\mathrm{mm} \\ \text{Masse: } m_M &= 646\,\mathrm{g} && \pm 1\,\mathrm{g} \end{aligned}$$

Wir transferieren diese erstmal in typische SI-Einheiten:

$$\begin{aligned} \text{Durchmesser: } d_M &= (0,110 \pm 0,000005)\,\mathrm{m} \\ \Rightarrow \text{Radius: } r_M &= (0,055 \pm 0,0000025)\,\mathrm{m} \\ \text{Masse: } m_M &= (0,646 \pm 0,001)\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Damit greifen wir auf Gleichung 1.9 zurück, um das Richtmoment zu bestimmen:

$$D_R = \frac{2\pi^2 \cdot m_M \cdot r_M^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (27)$$

Nur noch bekannte Werte einsetzen:

$$D_R = \frac{2\pi^2 \cdot 0,646\,\mathrm{kg} \cdot (0,055\,\mathrm{m})^2}{(1,741\,\mathrm{s})^2 - (1,162\,\mathrm{s})^2} \quad (28)$$
$$\underline{D_R = 0,022948\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{rad}}} \quad (29)$$

Somit brauchen wir für den Aufgabenteil nur noch den Fehler des Richtmomentes ΔD_R. Wir greifen erneut auf die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung zurück:

$$\Delta D_R = \left[\left(\frac{\Delta m_M}{m_M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r_M}{r_M}\right)^2 + \left(\frac{2T_2\Delta T_2}{T_2^2 - T_1^2}\right)^2 + \left(\frac{2T_1\Delta T_1}{T_2^2 - T_1^2}\right)^2\right]^{1/2} \cdot D_R \quad (30)$$

Setzen wir alle Werte ein, so kommen wir in unserem Fall auf eine Ungenauigkeit von:

$$\underline{\Delta D_R = 0,00057265\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{rad}}} \quad (31)$$

Fassen wir Gleichung 3.29 und Gleichung 3.31 zusammen und runden alles sinnvoll, so kommen wir auf:

$$\underline{\underline{D_R = (2,29 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{rad}}}} \quad (32)$$

3.3. Stein'scher Satz

Die Aufgaben 3 bis 5 beschäftigen sich alle mit dem Stein'schen Satz. Es wurde wieder die Schwingdauer t für 20 Schwingungen gemessen.

Zunächst nehmen wir die Gleichung zur Berechnung der Periodendauer (1.10) und stellen diese nach J_T um:

$$J_T = \frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2} \tag{33}$$

Wir definieren die Periodendauer T_P für die unregelmäßige Messingplatte, die das Trägheitsmoment J_P hat. Diese benutzt die Formel zur Berechnung der Periodendauer (1.11):

$$T_P = 2\pi\sqrt{\frac{J_T + J_P}{D}}. \tag{34}$$

Nur noch nach J_P umformen:

$$J_P = \frac{T_P^2 \cdot D}{4\pi^2} - J_T. \tag{35}$$

Nun setzen wir J_T noch ein und erhalten:

$$J_P = \frac{T_P^2 \cdot D}{4\pi^2} - \frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2}. \tag{36}$$

Nur noch vereinfachen:

$$J_P = \frac{D}{4\pi^2}(T_P^2 - T_1^2). \tag{37}$$

Zudem wird die Ungenauigkeit nach Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet zu:

$$\Delta J_P = \left[\left(\frac{T_P^2 - T_1^2}{4\pi^2}\,\Delta D\right)^2 + \left(\frac{DT_P}{2\pi^2}\,\Delta T_P\right)^2 + \left(\frac{DT_1}{2\pi^2}\,\Delta T_1\right)^2\right]^{1/2} \cdot J_P \tag{38}$$

Dies sind die Formeln, die wir für die weitere Berechnung benötigen. Wir rechnen mit einer Periodendauer von $T_P = (2,221 \pm 0,010)\,\mathrm{s}$. Genau so machen wir gebrauch von $T_1 = (1,162 \pm 0,010)\,\mathrm{s}$.

Wir werden zwei Rechnungen durchführen, einmal für $D_G = (4,3 \pm 0,5)10^{-2}\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{rad}}$ und einmal für $D_R = (2,29 \pm 0,06)10^{-2}\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{rad}}$. Wir werden dann in der Diskussion die Graphische und die rechnerische Methode vergleichen.

Wir berechnen zunächst die Drehmomente und anschließend ihre Ungenauigkeiten:

$$J_{P,G} = 3,9021744120\,[10^{-3}\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2] \tag{39}$$

$$J_{P,R} = 2,631699022\,[10^{-3}\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2] \tag{40}$$

Nun müssen wir noch deren Ungenauigkeiten bestimmen:

$$\Delta J_{P,G} = 0,017833522\,[10^{-3}\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2] \tag{41}$$

$$\Delta J_{P,R} = 0,0017299\,[10^{-3}\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2] \tag{42}$$

Nun Fassen wir alle Ergebnisse sinnvoll zusammen und runden entsprechend:

$$\underline{\underline{J_{P,G} = (39,022 \pm 0,018)\,10^{-4}\mathrm{kg\,m}^2}} \tag{43}$$

$$\underline{\underline{J_{P,R} = (26,3170 \pm 0,0017)\,10^{-4}\mathrm{kg\,m}^2}} \tag{44}$$

Nun haben wir für die Schwerpuntkachse a_0 das Trägheitsmoment bestimmt. Nun stellt sich noch die Frage nach den anderen Achsen. Erstmal suchen wir uns alle interessanten Größen wieder zusammen: Dabei fassen wir die Tabellen 3 und 4 des Protokolls zusammen und berechnen die Periodendauer, das Trägheitsmoment J_{a_i} analog zu Aufgabe 3.3 (37), und darüber das Trägheitsmoment J_{S_i} über den Stein'schen Satz (1.7). Die Abstäne sind mit einem Millimetergeodreieck bestimmt wurden, dessen Ungenauigkeit lässt sich auf

$$\Delta d = 0,5mm = 50\% \cdot 1mm \tag{45}$$

abschätzen. Für die Ungenauigkeit der ΔT berufen wir uns auf die Werte aus Aufgabe 3.2 (23):

$$\Delta T = 0,010s. \tag{46}$$

Zudem sind die Werte in der Tabelle bereits auf signifikante Stellen gerundet. Der Abstand d wir im Stein'schen Satz quadrietr, somit müssen wir seinen Fehler via Gleichung 3.7 berechnen:

$$\Delta d^2 = 2d\Delta d. \tag{47}$$

Die gesamte Ungenauigkeit wird sich nach Gleichung 3.6 auf

$$\Delta J_{S_i} = \sqrt{(\Delta J_{a_i})^2 + ({d_i}^2 \Delta m)^2 + (m\Delta {d_i}^2)^2} \tag{48}$$

belaufen. Dabei nutzen wir $\Delta m = 1g$.

Zuletzt werden noch für jedes Trägheitsmomentes die σ-Abweichung von J_{a_i} zu den Trägheitsmomenten nach der Berechnung mit dem Stein'schen Satz (1.7) J_{S_i}.

Achse	d^2 $[10^{-4}\text{m}^2]$	T [s]	$J_{a_i}(D_G)$ $[10^{-4}\text{kg}\cdot\text{m}^2]$	$J_{S_i}(D_G)$ $[10^{-4}\text{kg}\cdot\text{m}^2]$	σ_{a_G}
a_0	0 ± 0	2,221 $\pm 0,010$	$39,022 \pm 0,018$	—	—
a_1	$0,25 \pm 0,05$	2,229 $\pm 0,010$	$39,410 \pm 0,018$	$39,183 \pm 0,018$	0,089σ
a_2	$1,0 \pm 0,1$	2,237 $\pm 0,010$	$39,799 \pm 0,019$	$39,668 \pm 0,019$	0,049σ
a_3	$2,25 \pm 0,15$	2,255 $\pm 0,010$	$40,679 \pm 0,019$	$40,475 \pm 0,019$	0,076σ
a_4	$4,0 \pm 0,2$	2,295 $\pm 0,010$	$42,6617 \pm 0,0213$	$41,60574 \pm 0,02130$	0,351σ
a_5	$6,25 \pm 0,25$	2,384 $\pm 0,010$	$47,197 \pm 0,026$	$43,059 \pm 0,026$	1,125σ
Achse	d^2 $[10^{-4}\text{m}^2]$	T [s]	$J_{a_i}(D_R)$ $[10^{-4}\text{kg}\cdot\text{m}^2]$	$J_{S_i}(D_R)$ $[10^{-4}\text{kg}\cdot\text{m}^2]$	σ_{a_R}
a_0	0 ± 0	2,221 $\pm 0,010$	$26,3170 \pm 0,0017$	—	—
a_1	$0,25 \pm 0,05$	2,229 $\pm 0,010$	$26,5785 \pm 0,0018$	$26,478 \pm 0,018$	0,056σ
a_2	$1,0 \pm 0,1$	2,237 $\pm 0,010$	$26,8410 \pm 0,0018$	$26,963 \pm 0,019$	0,064σ
a_3	$2,25 \pm 0,15$	2,255 $\pm 0,010$	$27,4350 \pm 0,0019$	$27,770 \pm 0,019$	0,175σ
a_4	$4,0 \pm 0,2$	2,295 $\pm 0,010$	$28,771834 \pm 0,002029$	$28,90010 \pm 0,02130$	0,060σ
a_5	$6,25 \pm 0,25$	2,384 $\pm 0,010$	$31,8308 \pm 0,0024$	$30,354 \pm 0,026$	0,566σ

Tabelle III.3.: Messwerte und berechnete Trägheitsmomente für D_G vs. D_R.

IV. Disskusion

4.1. Zusammenfassung

4.2. Disskusion

4.3. Kritik

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Oha25] Ohaus. Ohaus cs200, 2025. Zugriff am 5. September 2025.

[TFA] TFA. Tfa dostmann westheim stoppuhr (kat:nr. 38.2026). Zugriff am 27. August 2025.

[Wag25] Dr. J. Wagner. *Physikalisches Praktikum PAP 1 für Studierende der Physik*, pages 4–28. Universität Heidelberg, 2025.