



# Protokoll zum Versuch *Mathematisches Pendel*

(Versuch 14)

Autor: Finn Zeumer (hz334)  
Versuchspatnerin: Annika Künstle  
Versuchsbegleiter: Tobias Becher  
Datum der Ausführung: 10.09.2025  
Abgabedatum: 27.09.2025

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1. Aufgabe/Motivation . . . . .	3
1.2. Physikalische Grundlage . . . . .	3
1.2.1. Naive Betrachtung des mathematischen Pendels . . . . .	3
1.2.2. Fehlerbetrachtung . . . . .	3
1.2.3. Exaktere Betrachtung des Drehpendels . . . . .	3
1.2.4. Weitere Korrekturen . . . . .	4
<b>Messdaten</b>	<b>5</b>
<b>II. Durchführung</b>	<b>8</b>
2.1. Versuchsaufbau . . . . .	8
2.2. Messverfahren . . . . .	8
<b>III. Auswertung</b>	<b>10</b>
3.1. Aufgabe 1: Pendellänge, Kugelradius und grobe Erdbeschleunigung . . . . .	11
3.2. Aufgabe 2: Berechnung der Korrektursterme . . . . .	13
3.2.1. Fehler durch Materialeigenschaften . . . . .	13
3.2.2. Fehler durch Dämpfung . . . . .	14
3.2.3. Berechnung mit Korrekturstermen . . . . .	17
<b>IV. Diskussion</b>	<b>18</b>
4.1. Zusammenfassung . . . . .	18
4.2. Diskussion . . . . .	18
4.2.1. Aufgabe 1 . . . . .	18
4.2.2. Aufgabe 2 . . . . .	19
4.3. Kritik . . . . .	19

# I. Einleitung

## 1.1. Aufgabe/Motivation

Ziel des Versuchs ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung  $g$  mithilfe eines mathematischen Pendels. Dazu wird die Schwingungsdauer des Pendels in Abhängigkeit von seiner Länge gemessen. Ein mathematisches Pendel besteht idealisiert aus einer Masselosen, nicht dehnbaren Schnur, an deren Ende eine Punktmasse befestigt ist. In der Realität müssen jedoch Korrekturen berücksichtigt werden, da das Pendel nicht ideal ist. Insbesondere spielen Effekte wie Luftreibung, Auftrieb, die endliche Ausdehnung und Masse der Kugel sowie die Masse des Fadens eine Rolle. Die genaue Analyse dieser Einflüsse erlaubt eine verbesserte Bestimmung der Erdbeschleunigung am Versuchsort.

## 1.2. Physikalische Grundlage

[Wag25a, Dem17]

### 1.2.1. Naive Betrachtung des mathematischen Pendels

Für kleine Auslenkungen  $\varphi$  kann die Bewegung des ungedämpften mathematischen Pendels durch die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad (1)$$

beschrieben werden. Hierbei bezeichnet  $l$  die Pendellänge. Die Lösung dieser Gleichung entspricht der eines harmonischen Oszillators. Es ergibt sich für die Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

und daraus

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_0^2}. \quad (3)$$

### 1.2.2. Fehlerbetrachtung

Zur Bestimmung der Genauigkeit wird das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet. Der relative Fehler der Erdbeschleunigung ergibt sich zu

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_0}{T_0}\right)^2}. \quad (4)$$

Für den relativen Fehler der Periodendauer gilt

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta t}{nT_0}, \quad (5)$$

wobei  $\Delta t$  die Stoppgenauigkeit und  $n$  die Anzahl der gemessenen Schwingungen ist. Durch Erhöhung von  $n$  kann der Zeitfehler klein gehalten werden, sodass die Genauigkeit im Wesentlichen durch die Längenmessung begrenzt wird. Praktisch ergibt sich die Bedingung

$$\frac{2\Delta t}{nT_0} \approx 0,3 \frac{\Delta l}{l}. \quad (6)$$

### 1.2.3. Exaktere Betrachtung des Drehpendels

Eine exakte Theorie behandelt das Pendel als drehpendel mit dem Aufhängepunkt als Drehachse. Die allgemeine Schwingungsdauer ergibt sich zu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}, \quad (7)$$

wobei  $J$  das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse und  $D$  die Winkelrichtgröße ist. Das

Gesamtträgheitsmoment setzt sich aus Kugel und Faden zusammen:

$$J = \underbrace{m_K l^2 + \frac{2}{5} m_K r^2}_{J_K} + \underbrace{\frac{1}{3} m_F l'^2}_{J_F}, \quad (8)$$

mit Kugelmasse  $m_K$ , Fadenmasse  $m_F$ , Kugelradius  $r$ , Pendellänge  $l$  und Fadenlänge  $l'$ .

Das rücktreibende Drehmoment lautet

$$M = - \left[ (m_K - \rho_L V_K) g l \sin \varphi + \frac{1}{2} m_F g l' \sin \varphi \right], \quad (9)$$

wobei  $\rho_L$  die Luftdichte und  $V_K$  das Volumen der Kugel ist. Mit der Kleinwinkelnäherung  $\sin \varphi \approx \varphi$  folgt

$$D = m_K g l \left( 1 - \frac{\rho_L}{\rho_K} + \frac{m_F}{2m_K} \right), \quad (10)$$

wobei  $\rho_K$  die Dichte der Kugel ist. Setzt man (8) und (10) in (7) ein und verwendet die Näherung  $1/(1 - \epsilon) \approx 1 + \epsilon$ , so ergibt sich

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g} \left( 1 + \frac{2r^2}{5l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{6m_K} \right). \quad (11)$$

#### 1.2.4. Weitere Korrekturen

Die Schwingungsdauer hängt zusätzlich vom Anfangswinkel  $\varphi_0$  ab:

$$T^2 = T^2 \left( 1 + \frac{\varphi_0^2}{8} \right). \quad (12)$$

Weiterhin beeinflusst die Luftreibung die Bewegung. Mit der Dämpfungskonstanten  $\delta$  gilt

$$T^2 = T^2 \left( 1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right), \quad (13)$$

wobei  $\omega_0$  die ungedämpfte Kreisfrequenz ist.

Unter Berücksichtigung aller Korrekturen ergibt sich schließlich

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g} \left( 1 + \frac{2r^2}{5l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{6m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8} \right). \quad (14)$$

Gleichung (14) bildet die Grundlage für die experimentelle Auswertung und die Bestimmung der Erdbeschleunigung am Versuchsort.

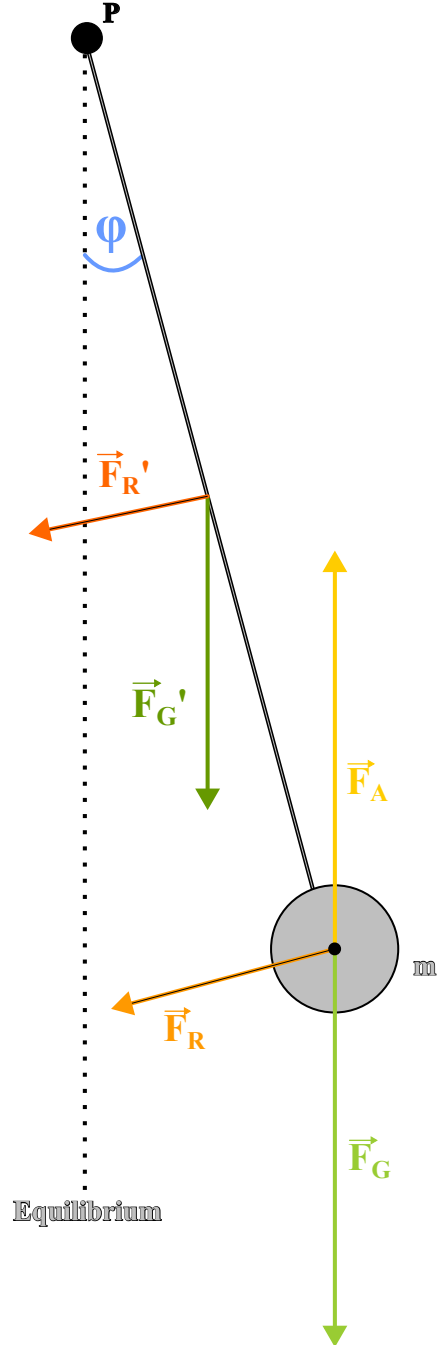


Abbildung I.1.: Wirkende Kräfte auf das Pendel bei Auslenkung.

# 14 - Mathematisches Pendel

## Aufgabe 1)

### Bestimmung der Pendellänge

- Die Skala wird 3 mal justiert und es wird zwei Mal abgelesen, an der unteren und oberen Kante.

→ Koordinaten der oberen Kante:  $\overset{1.}{83,2 \text{ cm}} = l_1$   $\overset{2.}{84,0 \text{ cm}}$   $\overset{3.}{87,0 \text{ cm}}$

### Tabelle 1) Pendellänge

Nr.	1		2		3	
Fadenlänge $l$ [cm]	Obere	Untere	Obere	Untere	Obere	Untere
	88,2	91,3	88,1	91,2	88,2	91,1
Pendellänge $l = l + r$ [cm]	$d = 3,1 \text{ cm}$ 89,75		$d = 3,1 \text{ cm}$ 89,65		$d = 3,3 \text{ cm}$ 89,85	

### Schieblehre:

- Präzision:  $0,1 \text{ cm}$
- Ablesefehler:  $50\% \cdot 0,1 \text{ cm} = 0,05 \text{ cm}$
- Ungenauigkeit:  $0,05 \text{ cm} \hat{=} 0,005 \text{ cm}$

Messwerte der Fadenlänge und berechneten Pendellängen

über den Radius der Kugel mit der ablesenden Schieblehre.

$$\bar{l} = 89,167 \text{ cm} \quad \leftarrow \text{via Länge}$$

Kugel:  $d = 3,0 \text{ cm} \quad \leftarrow \text{gemessen}$

- Radius  $r_k = 1,5 \text{ cm}$  - Ungenauigkeit  
Radius  $\Delta r_k =$

Somit ergeben sich nach dem arithmetischen Mittel:

$$\bar{l} = 89,167 \text{ cm}, \quad \Delta \bar{l} =$$

$$\Rightarrow \bar{l} = 89,75 \text{ cm}, \quad \Delta \bar{l} = 0,0577 \text{ cm} \quad \Rightarrow l = (89,75 \pm 0,06) \text{ cm}$$

## Aufgabe 2)

### Grobe Bestimmung der Schwingdauer

Prozentualer Fehler: 0,000668

Wert über 0,0005  $\Rightarrow$  müssen  $n$  berechnen

### Tabelle 2) (Vorfällige) Schwingdauer

Nr.	$t$ [s]	$\Delta t$ [s]	$T_0$ [s]	$\Delta T_0$ [s]
1	37,80	0,25	1,835	0,0125
2	37,81	0,25	1,8305	0,0125
3	37,88	0,25	1,8345	0,0125
4	37,75	0,25	1,8375	0,0125
5	37,73	0,25	1,8365	0,0125

### Stopperuhr:

- Präzision:  $0,01 \text{ s}$
- Ablesefehler:  $50\% \cdot 0,01 \text{ s} = 0,005 \text{ s}$
- Ungenauigkeit:  $\checkmark$

+ Reaktionszeit:  $0,250 \text{ s}$

Vorläufige Bestimmung der Schwingdauer  $t$  unter

20 Schwingungen und damit berechnete Periodendauer  $T_0$ .

$$\Delta t = 0,250$$

Es stellt sich eine durchschnittliche Periodendauer von  $\bar{T}_0 = 1,8317 \text{ s}$  ein mit einer Ungenauigkeit von  $\Delta \bar{T}_0 =$

### Aufgabe 3)

#### Genauere Bestimmung der Periodendauer

- Wir wollen mit dem Ergebnis aus Aufgabe 2 nutzen, um die optimale Schwinganzahl  $n$  zu bestimmen:

$$\frac{2 \cdot \Delta t}{T_0} \cdot \frac{\bar{l}}{0,3 \cdot \bar{l}} = n = 1318 \quad \text{Wir machen nur 200}$$

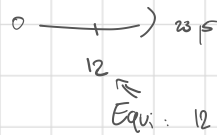
Wir werden somit 200 Schwingungen durchführen, damit die Ungenauigkeit der Periodendauer weniger als 30% der Ungenauigkeit der Fadenlänge.

#### Tabelle 3) Genauere Bestimmung der Periodendauer

Nr.	Zählerstand	Perioden	Messzeit [s]	Periodendauer [s]
1	401	200	378,73	1,89365

# Aufgabe 4)

Bestimmung der Dämpfung.



Zählerstand	Periode	t [s]	Amplitude A [cm]
20	10	18,58	5,4
40	20	18,03	5,5
60	30	18,03	5,7
80	40	18,06	6,0
100	50	18,06	6,0
120	60	18,80	6,3
140	70	18,11	6,5
160	80	18,05	6,7
180	90	18,87	7,0
200	100	18,80	7,1
220	110	18,82	7,5
240	120	18,87	7,8
260	130	18,80	8,2
280	140	18,06	8,4
300	150	18,86	8,7
320	160	18,06	8,9
340	170	18,88	9,1
360	180	18,07	9,1
380	190	18,02	9,2
400	200	18,87	9,2

Start Amplitude: 5

Spiegel Skala:

- Präzision: 0,1 cm

- Ablesfehler: 0,3 cm

- Ungenauigkeit: ✓

*Sehr gut*

## II. Durchführung

### 2.1. Versuchsaufbau

Das mathematische Pendel besteht aus einer Kugel, die an einem dünnen Faden befestigt ist und an einer höhenverstellbaren Aufhängung frei schwingen kann. Zur präzisen Bestimmung der Pendellänge wurde eine vertikale Spiegelskala parallel zum Faden angebracht. Mithilfe von Nivellierschrauben konnte die Skala justiert werden, sodass der Faden in allen Aufhängungspositionen senkrecht verlief. Für die Messung der Auslenkung und zur späteren Bestimmung der Dämpfungskonstanten  $\delta$  kam zusätzlich eine horizontale Spiegelskala zum Einsatz.

Zur Bestimmung langer Periodendauern wurde eine Reflexlichtschranke direkt unterhalb der Gleichgewichtslage der Kugel angebracht. Der Sensor war so eingestellt, dass er bei jedem Durchgang der Kugel ein Signal erzeugte, welches von einem elektronischen Zähler registriert wurde. Da der Zähler bei jedem Durchgang um eins erhöht wurde, entsprach der angezeigte Wert der doppelten Anzahl von Perioden. Dies wurde bei der Auswertung entsprechend berücksichtigt.

Vor Beginn der Messungen wurden außerdem geometrische Größen wie der Kugelradius  $r$  mithilfe eines Messschiebers bestimmt, um die Trägheitsmomente nach [Gleichung 8](#) sowie Korrekturterme in den Formeln für die Schwingungsdauer ([Gleichung 11](#) und [Gleichung 14](#)) berücksichtigen zu können.

### 2.2. Messverfahren

Zunächst wurde die Pendellänge  $l$  bestimmt, die vom Aufhängepunkt bis zur Kugelmitte

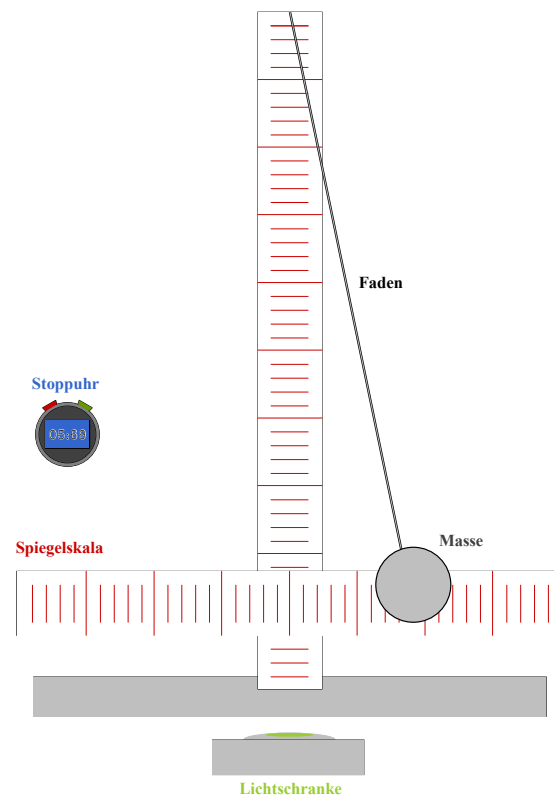


Abbildung II.1.: Schematische Versuchsanordnung und Versuchsequipment.

reicht. Hierfür wurden die Skalenwerte am Aufhängepunkt sowie an der oberen und unteren Kante der Kugel abgelesen. Die Messung wurde für drei verschiedene Höhen der Aufhängung durchgeführt. Aus den Werten konnte die Pendellänge und ihr relativer Fehler berechnet werden.

Die Periodendauer wurde in einem ersten Schritt durch Messung von 20 Schwingungen bestimmt. Diese Messung wurde fünfmal wiederholt, woraus der mittlere Fehler der Einzelmessung  $\sigma_E$  als Stoppgenauigkeit  $\Delta t$  gewonnen wurde. Mit dem so bestimmten mittleren Wert



von  $T_0$  aus [Gleichung 2](#) konnte nach der Bedingung aus [Gleichung 6](#) die notwendige Anzahl  $n$  an zu messenden Perioden berechnet werden. Um den Einfluss von Fehlern möglichst gering zu halten, wurde die Anzahl der Perioden auf Anweisung des Tutors schließlich auf  $n = 200$  festgelegt. Die Zeit für diese 200 Schwingungen wurde notiert und für die weitere Auswertung herangezogen.

Zusätzlich wurde während der Schwingung alle 30 Sekunden die Amplitude mithilfe der horizontalen Spiegelskala abgelesen. Damit konnte im Nachhinein die Abnahme der Amplitude analysiert und die Dämpfungskonstante  $\delta$  aus dem Zusammenhang

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t} \quad (1)$$

bestimmt werden. Diese geht in die Korrektur der Schwingungsdauer nach [Gleichung 13](#) ein. Weiterhin wurde aus der mittleren Schwingungsweite der Anfangswinkel  $\varphi_0$  berechnet, welcher in die Korrektur nach [Gleichung 12](#) eingeht.

Die zur Auswertung notwendigen Größen  $m_K$  und  $m_F$  wurden aus den jeweiligen Volumina und der Dichte des Materials bestimmt. Mit diesen Größen konnten die Korrekturterme für das Trägheitsmoment und die Winkelrichtgröße nach [Gleichung 11](#) berechnet werden. Schließlich lässt sich die Erdbeschleunigung  $g$  am Versuchsort durch Einsetzen der gemessenen Werte in [Gleichung 14](#) bestimmen.

## III. Auswertung

### Fehlerrechnung

Für die statistische Auswertung von  $n$  Messwerten  $x_i$  werden folgende Größen definiert [Wag25b]:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{Arithmetisches Mittel} \quad (1)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{Variation} \quad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{Standardabweichung} \quad (3)$$

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} \quad \text{Fehler des Mittelwerts} \quad (4)$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2} \quad \text{Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz für } f(x, y) \quad (5)$$

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{Fehler für } f = x + y \quad (6)$$

$$\Delta f = |a| \Delta x \quad \text{Fehler für } f = ax \quad (7)$$

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad \text{relativer Fehler für } f = xy \text{ oder } f = x/y \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{|a_{lit} - a_{gem}|}{\sqrt{\Delta a_{lit}^2 + \Delta a_{gem}^2}} \quad \text{Berechnung der signifikanten Abweichung} \quad (9)$$

### 3.1. Aufgabe 1: Pendellänge, Kugelradius und grobe Erdbeschleunigung

#### Pendellänge

Das Pendel wurde im Equilibrium vermessen. Es werden zwei Punkte an der Spiegelskala abgelesen, der obere und der untere Punkt der Kugel. Darüber hinaus wurde die Kugel mit der Schieblehre vermessen. So lässt sich die Fadenlänge und der Kugelradius jeweils auf zwei weissen Messen; je nachdem, welcher Messmethode man mehr vertrauen schenken mag. Genutzt für die Messung wurden einmal die Spiegelskala, diese hat eine Skalapräzision von  $0,10\text{cm}$ , und einen geschätzten Ablesefehler von  $0,3\text{cm}$ , dieser Wert wurde großzügiger angenommen, da durch die Pendelbewegung das menschliche Auge Probleme beim Ablesen hat. Der wird aber für statische Rechnungen auf die Hälfte der Präzision angenommen. Ein systematischer Fehler ist hier nicht vermerkt. Die Gesamtungenauigkeit der Spiegelskala  $\Delta_{s_{ss}}$  wird via [Gauß'scher Fehlerfortpflanzung \(5\)](#) bestimmt:

$$\Delta_{s_{ss}} = \sqrt{0,1^2 + 0,05^2} = 0,1118 [\text{cm}]. \quad (10)$$

Die Ungenauigkeit wurde hier auf signifikante Stellen gerundet.

Die Ungenauigkeit der Schieblehre lässt sich Analog bestimmen. Wir haben eine Präzision von  $0,1\text{cm}$ , aus welcher wir den Ableseungenauigkeit bestimmen, indem wir den Wert zu  $0,05\text{cm}$  halbieren. Zuletzt gibt der Hersteller eine systematische Ungenauigkeit von  $0,005\text{cm}$  an. Über die [Gauß'scher Fehlerfortpflanzung \(5\)](#) berechnet sich der Gesamtfehler der Schieblehre:

$$\Delta_{s_{sl}} = \sqrt{0,1^2 + 0,05^2 + 0,005^2} = 0,1119 [\text{cm}]. \quad (11)$$

Auch dieses Ergebnis ist auf signifikante Stellen gerundet. Im statischen Zustand sind die beiden Methoden also annähernd gleichgenau.

Der Durchmesser der Kugel ist gemessen mit der Schieblehre:

$$D_{k,sl} = (3,0000 \pm 0,1118)\text{cm}. \quad (12)$$

Man kann den Durchmesser jedoch auch über den die Differenz der beiden Fadenlängen bemessen. Wir haben hier drei Messwerte, daher nehmen wir den Mittelwert als Durchmesser der Kugel. Die Gemessenen Werte sind in der Tabelle 1 des [Protokolls](#) zu entnehmen. Die Länge des Fadens ist dabei das [arithmetische Mittel 1](#). Wir entnehmen der Tabelle wieder die Werte und kommen auf eine Fadenlänge  $l'$  von

$$l' = (88,1667 \pm 0,1119)\text{cm}. \quad (13)$$

Das Pendel ist hier definiert als die Fadenlänge und dem Radius der Kugel, da dort der Schwerpunkt der Kugel liegt. Die Fadenlänge inklusive des Durchmessers der Kugel  $l_D$  ist das arithmetische Mittel der unteren Punkte:

$$l_D = (91,2000 \pm 0,118)\text{cm}. \quad (14)$$

Aus diesen beiden Werten können die den Durchmesser der Kugel erneut bestimmen, indem wir die Differenzen nehmen und kommen somit auf den Durchmesser

$$D_{k,ss} = (3,17 \pm 0,16)\text{cm}. \quad (15)$$

Der Fehler wurde über die [Gauß'scher Fehlerfortpflanzung \(5\)](#) bestimmt, denn hier wurde die Differenz zweier fehlerbehafteten Werte gezogen:

$$\Delta D_{k,ss} = \sqrt{2 \cdot 0,1118^2} = 0,16 [\text{cm}] \quad (16)$$

Die Radien sind sehr ähnlich, jedoch haben sie eine recht große Abweichung. Berechnen wir die signifikante Abweichung der beiden Radien nach [Gleichung 9](#):

$$\frac{|D_{k,ss} - D_{k,sl}|}{\sqrt{(\Delta_{s_{ss}})^2 + (\Delta_{s_{sl}})^2}} = 0,85\sigma. \quad (17)$$

Wir sehen, dass die Werte sich grundlegend decken, jedoch spürbare Unterschiede haben. Wir wollen das Ergebnis in der [Diskussion](#) diskutieren. Wir werden mit dem bestimmten Radius der Schieblehre weiter rechnen, da der Wert »satischer« ist und sich hier weniger Bewegungsungenauigkeiten vermuten lassen.

Unser Kugelradius ist somit

$$r_K = (1,50 \pm 0,06) \text{ cm}. \quad (18)$$

Das Pendel hat somit eine Länge  $l$  der Summe der Fadenlänge und des Kugelradiuses. Der der Pendellänge ist dabei:

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta r_K)^2 + (\Delta s_{ss})^2} = 0,13 \text{ [cm]}. \quad (19)$$

Das Pendel hat also eine Länge von

$$l = (89,67 \pm 0,13) \text{ cm} \quad (20)$$

### Grobe Bestimmung der Erdbeschleunigung

Im Aufgabenteil 2 wird eine Zeit gemessen. Wir wollen zunächst die Ungenauigkeit der Stoppuhr  $\Delta t_{su}$  bestimmen. Wir haben eine Präzision von 0,01 s, sein Ablesefehler wird auf 50% der Präzision geschätzt und liegt somit bei 0,005 s. Die Ungenauigkeit der Stoppuhr ist somit nach der [Gauß'scher Fehlerfortpflanzung \(5\)](#):

$$\Delta t_{su} = \sqrt{(0,010^2 + 0,0005^2)} = 0,01118 \text{ [s]} \quad (21)$$

Da wir mehrere Einzelmessungen haben, müssen wir den [Fehler des Mittelwerts \(4\)](#) berechnen. Dies ist dann die statistische Ungenauigkeit:

$$\bar{\delta}t = 0,0019 \text{ [s]} \quad (22)$$

Zusätzlich wollen wir eine durchschnittliche menschliche Reaktionszeit von  $\Delta t_{reak} 0,250 \text{ s}$  annehmen. Der gesamte Zeitfehler einer Zeitmessung liegt somit bei:

$$\Delta t = \sqrt{(\Delta t_{su})^2 + (\Delta t_{reak})^2 + (\bar{\delta}t)^2} \quad (23)$$

Setzen wir alles ein, so ist unser Fehler somit

$$\Delta t = 0,25 \text{ s}. \quad (24)$$

Wie zu erwarten dominiert die Reaktionszeit hier.

Wir wollen die durchschnittliche Periodendauer aus 5 Messungen bestimmen. Die Messwerte sind in der Tabelle 2 des [Protokolls](#) zu entnehmen. Es wurden für jede Messung die Zeit für 20 Schwingung bestimmt, dadurch wird der Zeitfehler minimiert. Dividiert man die gemessene Zeit mit 20, so kommen wir auf 5 Perioden dauern. Es wird wieder das [arithmetische Mittel \(1\)](#) gebildet. Alle Messwerte haben denselben Fehler  $\Delta t$ , dieser wird für die Ungenauigkeit der Periodendauer auch mit 20 dividiert. Das Ergebnis ist somit:

$$\bar{T}_0 = (1,8917 \pm 0,0125) \text{ s} \quad (25)$$

Mit diesem Wert haben wir alles, was wir nach [Gleichung 3](#) brauchen, um die Erdbeschleunigung  $g$  zu bestimmen. Die Ungenauigkeit wird via [Gleichung 4](#) berechnet. Für  $g$  kommen wir auf ein (nicht signifikant gerundetes) Ergebnis von:

$$g = 9,8924 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (26)$$

Die Ungenauigkeit berechnet sich zu

$$\Delta g = 0,13 \quad (27)$$

Es wird zusammengefasst und auf signifikante Stellen gerundet:

$$g = (9,89 \pm 0,13) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (28)$$

Es wird nun die [signifikante Abweichung \(9\)](#) mit Literaturwert der Erdbeschleunigung für Heidelberg von  $g_{lit} = 9,80984 \pm 2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  berechnet:

$$\frac{|g_{lit} - g|}{\sqrt{(\Delta g)^2 + (\Delta g_{lit})^2}} = 0,62\sigma. \quad (29)$$

Das Ergebnis ist also schon statistisch signifikant und bestätigt die heidelberger Ortskonstante  $g_{lit}$ .

Wir wollen nun jedoch vor allem schauen, ob wir diesen Wert noch weiter präzisieren können, indem wir genauere Messungen unternehmen.

### Bestimmung der Erdbeschleunigung über 200 Schwingungen

Nach [Gleichung 6](#) hätten wir 1318 Schwingungen machen müssen. Dies wäre jedoch kaum bewerkstelligbar gewesen, weshalb wir nach Absprache 200 Perioden gemacht haben. Der Tabelle 3 des [Protokolls](#) ist die Messzeit zu entnehmen. Diese beträgt:

$$t_{200} = (378,73 \pm 0,25)s, \quad (30)$$

woraus wir direkt die Periodendauer bestimmen können:

$$T_{200} = (1,89365 \pm 0,00125)s. \quad (31)$$

Wir bestimmen also nochmal die Erdbeschleunigung und kommen somit nach [Gleichung 3](#) und [Gleichung 4](#) zu einem Ergebnis von

$$g_{200} = (9,812 \pm 0,019). \quad (32)$$

Wir schauen, ob dieser Wert genauer am Literatur Wert  $g_{lit}$  von Heidelberg liegt:

$$\frac{|g_{lit} - g_{200}|}{\sqrt{(\Delta g_{200})^2 + (\Delta g_{lit})^2}} = 0,11\sigma. \quad (33)$$

Das Ergebnis ist somit weitaus genauer als das, mit fünf Messwerten.

## 3.2. Aufgabe 2: Berechnung der Korrekturtherme

Wir wollen jedoch noch genauere Ergebnisse bekommen und werden daher weitere Eigenschaften untersuchen. Zunächst nehmen wir

[Gleichung 14](#) und stellen sie nach  $g$  (unserer Ortskonstanten) um:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \left( 1 + \frac{2r^2}{5l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{m_F}{6m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8} \right). \quad (34)$$

Damit lässt sich schön einsehen, welche Werte alles gebraucht werden. Dazu wollen wir erstmal die Terme berücksichtigen, die auf Materialeigenschaften basieren und zum anderen die Dämpfung.

### 3.2.1. Fehler durch Materialeigenschaften

In der [Gleichung 34](#) stehen verschiedene Terme, die aus Materialgegebenheiten folgen. Wir haben dabei die Dichte der Luft  $\rho_L$ , die Dichte der Kugel  $\rho_K$  und die daraus folgende Masse  $m_K$ . Außerdem brauchen wir die Masse des Fadens  $m_l$ . Für die dichten werden die Literaturwerte benutzt und als »ideal« angenommen. Das Material der Kugel ist mit Eisen angegeben.

$$\rho_L = 1,2 \cdot 10^{-3} \frac{g}{cm^3} \quad (35)$$

$$\rho_K = 7,86 \frac{g}{cm^3}. \quad (36)$$

Für die Masse der Kugel müssen wir ihr Volumen bestimmen. Für eine ideale Kugel gilt:

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_K^3, \quad (37)$$

mit einer Ungenauigkeit von

$$\Delta V_K = 4 \cdot \pi \cdot r_K^2 \cdot \Delta r_K, \quad (38)$$

Somit hat unsere Kugel ein Volumen von

$$V_K = (14,1 \pm 1,7)cm^3. \quad (39)$$

Damit können wir die Masse zu

$$m_k = (111 \pm 13)g. \quad (40)$$

Wir müssen zudem die Fadenmasse  $m_f$  bestimmen. Die Fadenlänge  $l'$  wurde bereits bestimmt. Wir nehmen für die Fadendichte die-selebe wie für die Kugel  $\rho_f = \rho_K$ . Der Radius ist im Skript mir  $r_f = 0,01\text{cm}$  angegeben [Wag25a]. Die Masse des Fadens berechnet sich via

$$m_f = \pi \cdot r_f^2 \cdot l' \cdot \rho_f, \quad (41)$$

mit einer Ungenauigkeit von

$$\Delta m_f = \pi \cdot r_f^2 \cdot \rho_f \cdot \Delta l'. \quad (42)$$

Wir setzen besagte Werte ein und kommen auf eine Fadenmasse von

$$m_f = (0,21771 \pm 0,00028) \text{ g}. \quad (43)$$

### 3.2.2. Fehler durch Dämpfung

Nun soll die Werte für  $\varphi_0$  und für  $\delta$  aus [Gleichung 34](#). Die Bestimmung von  $\delta$  erfolgt graphisch, via der Werte aus Aufgabe 4 des [Protokolls](#). Das Equilibrium des Pendles ist auf der horizontalen Skala bei 12cm. Die in der Tabelle eingetragenen Amplituden sind nicht die Auslenkungen, sondern der tatsächliche Skalenwert. Über die differenz des Equilibriums und der Auslenkung, bekommen wir die (ungefähre) Auslenkung. Die benutzte Spiegelskala hat eine Präzision von 0,1cm, wir haben den Fehler jedoch höher geschätzt, da durch die Bewegung ein genaues Ablesen kaum möglich ist. Der Graph ist auf semilogarithmischen Papier gezeichnet. Die Ungenauigkeit der Zeit wurde auf die Reaktionszeit des Menschen von circa  $\Delta s_{reak} = 0,3\text{s}$  geschätzt und ist somit zu klein, um diese sinnvoll einzuzeichnen. Der Plot ist in [Abbildung III.1](#) zu finden.

Es handelt sich um eine exponentielle Abnahme. Die allgemeine Gleichung ist:

$$a(t) = a_0 \cdot e^{-\delta t} \quad (44)$$

Diese Gleichung soll nach *delta* aufgelöst werden. Hierzu wird der deaktische Logarithmus

(lg) genutzt:

$$\lg(a(t)) = \lg(a_0) + \lg(e^{-\delta t}) \quad (45)$$

$$\iff$$

$$\delta = \frac{\lg(a_0) - \lg(a(t))}{\lg(e) \cdot t}. \quad (46)$$

Nun wird  $\delta$  für die Ausgleichsgerade (blau) und die Fehlergerade (orange) bestimmt.

$$\delta_A = \frac{\lg(7,1) - \lg(3,4)}{\lg(e) \cdot 325,6\text{s}} = 0,001920\text{s}^{-1} \quad (47)$$

$$\delta_F = \frac{\lg(7,3) - \lg(4,4)}{\lg(e) \cdot 360,92\text{s}} = 0,0014027\text{s}^{-1} \quad (48)$$

Die finale Dämpfung ergibt sich somit zu

$$\delta = (1,9 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}. \quad (49)$$

Weitergehend geht es um die Berechnung von  $\varphi_0$ . Zur Berechnung dieses Winkels wird die Pendellänge  $l$ , sowie die mittlere Auslenkung genutzt. Porblematisch ist hier, dass bei Ablesen der Skala das obere Ende der Kugel und nicht der Mittelpunkt genutzt wurde. Jedoch wird dies mitunter durch den großen Ablesefehler von  $\Delta = 0,3\text{cm}$  kompensiert. Die mittlere Auslenkung berechnet sich über das [Arithmetische Mittel \(1\)](#):

$$\bar{A} = (4,59 \pm 0,30)\text{cm}. \quad (50)$$

Die Ungenauigkeit ist dabei der [Fehler des Mittelwerts \(4\)](#).

Über den Zusammenhang

$$\sin \varphi_0 = \frac{\bar{x}}{l} \quad (51)$$

können wir den Winkel zu

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\bar{x}}{l} \quad (52)$$

bestimmen. Über die [Gauß'sche Fehlerfortpflanzung \(5\)](#) lässt sich zudem die Ungenauigkeit berechnen:

$$\Delta \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\bar{x}/l)^2}} \sqrt{\left(\frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x} \Delta l}{l^2}\right)^2}. \quad (53)$$

Der berechnete Winkel liegt somit bei

$$\boxed{\varphi_0 = (0,051 \pm 0,003)rad}. \quad (54)$$

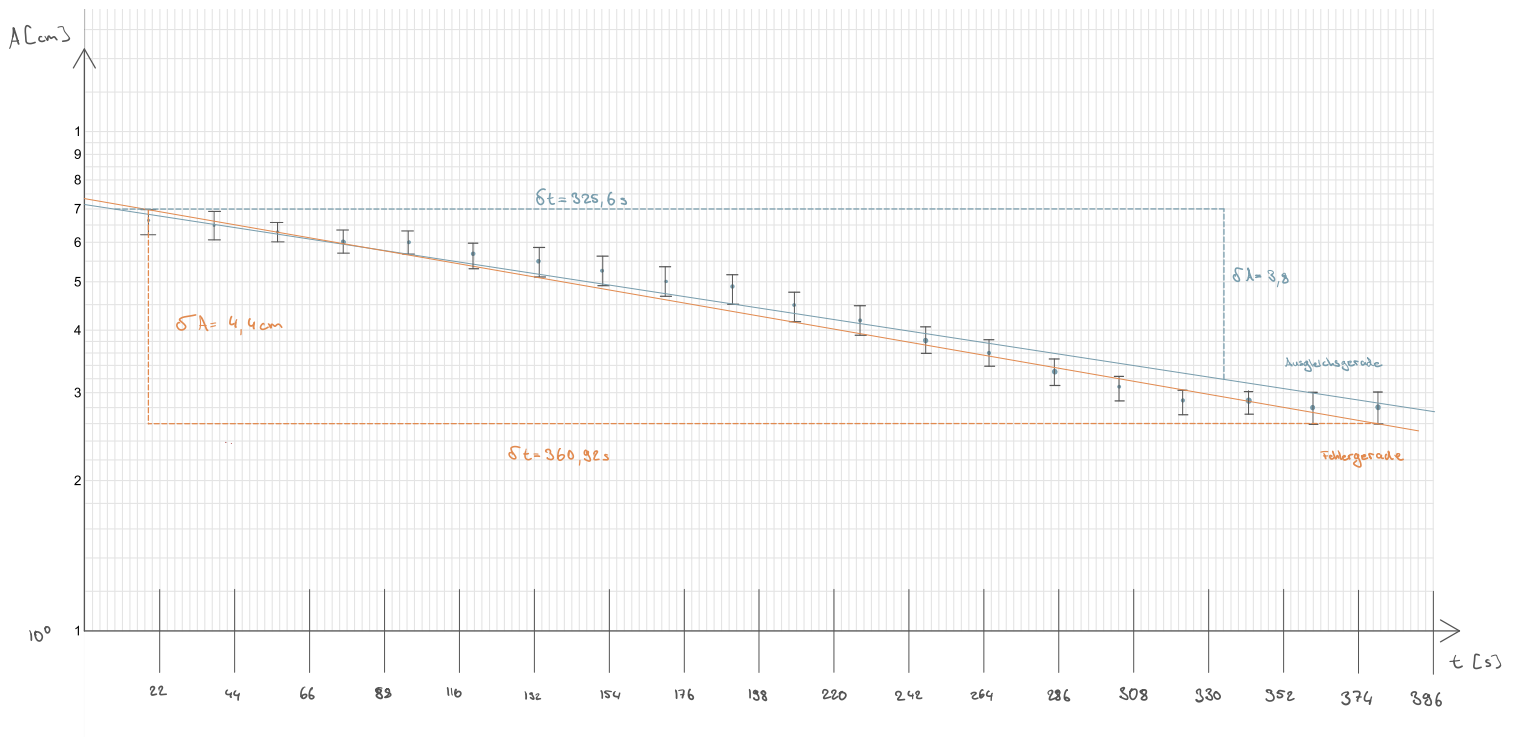


Abbildung III.1.: Amplitudenablenkung des Pendels gegen die Zeit. Bleu ist die Ausgleichsgerade und orange die Fehlergerade.  $\delta$  bedeutet hier die Differenz. Dies ist nicht dasselbe Delta, das gesucht ist.



### 3.2.3. Berechnung mit Korrekturthermen

Nun sind alle Terme für [Gleichung 34](#) bestimmt. Den Fehler für  $g$  bestimmen wir über die [Gauß'sche Fehlerfortpflanzung \(5\)](#):

$$\Delta g = \left[ \left( \left( \frac{g}{l} - \frac{16\pi^2 r^2}{5T^2 l^2} \right) \Delta l \right)^2 + \left( \frac{2g}{T} \Delta T \right)^2 + \left( \frac{16\pi^2 r}{5T^2 l} \Delta r \right)^2 + \left( \frac{4\pi^2 l}{6T^2 m_K} \Delta m_F \right)^2 + \left( \frac{4\pi^2 l m_F}{6T^2 m_K^2} \Delta m_K \right)^2 + \left( \frac{8\pi^2 l \delta}{T^2 \omega_0^2} \Delta \delta \right)^2 + \left( \frac{8\pi^2 l \delta^2}{T^2 \omega_0^3} \Delta \omega_0 \right)^2 + \left( \frac{\pi^2 l \varphi_0}{T^2} \Delta \varphi_0 \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Wir setzen alle unsere berechneten Werte in die Gleichungen ein und kommen auf ein korrigiertes Ergebnis:

$$g_K = (9,809 \pm 0,019) \frac{m}{s^2} \quad (55)$$

Für diese Rechnung wurde die durchschnittliche Periode erneut über die Werte aus Aufgabe 4 bestimmt und der Fehler über die [Unge nauigkeit des Mittelwerts \(4\)](#). Dieser Wert soll zunächst mit dem heidelberger Literaturwert verglichen werden ([9](#)):

$$\frac{|g_K - g_{lit}|}{\sqrt{(\Delta g_K)^2 + (\Delta g_{lit})^2}} = 0,04\sigma. \quad (56)$$

Dieser Wert soll auch mit dem  $g_{200}$ -Wert verglichen werden:

$$\frac{|g_{200} - g_K|}{\sqrt{(\delta g_{200})^2 + (\Delta g_K)^2}} = 0,11\sigma \quad (57)$$

## IV. Diskussion

### 4.1. Zusammenfassung

#### Aufgabe 1

In der ersten Aufgabe wurden das Pendel vermessen, die durchschnittliche Periodendauer bestimmt und ein erster Wert für die Erdbeschleunigung  $g$  bestimmt. Die Ergebnisse sind gelistet:

Fadenlänge:

$$l' = (88,1667 \pm 0,1118) \text{ cm}. \quad (1)$$

Deise wurde über die Spiegelskala und drei Messungen bestimmt.

Den Radius der Kugel hat man über den Durchmesser der Kugel bestimmt. Für die Rechnungen wurde der Wert

$$r_K = (1,50 \pm 0,06) \text{ cm} \quad (2)$$

verwendet.

Somit wurde das Pendel auf eine Länge von

$$l = (89,67 \pm 0,13) \text{ cm} \quad (3)$$

bestimmt.

Die Periode für 400 Schwinungen belief sich auf

$$T_{200} = (1,89365 \pm 0,00125) \text{ s}. \quad (4)$$

#### Aufgabe 2

In dieser Aufgabe wurden die Korrekturstherme bestimmt. Dazu wurden zunächst die Materialeigenschaften bestimmt und zum anderen der Auslenkungswinkel und die Dämpfung. Für das Material kamen die wichtigen Ergebnisse: Dichten (Literaturwerte)

$$\rho_L = 1,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (5)$$

$$\rho_K = 7,86 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad (6)$$

masse der Kugel:

$$m_k = (111 \pm 13) \text{ g}, \quad (7)$$

und Masse des Fadens

$$m_f = (0,21771 \pm 0,00028) \text{ g}. \quad (8)$$

Diese wurden über das Volumen idealer Körper aus den Werten der Aufgabe 1 bestimmt wurden. Die Dämpfung wurde über einen Graphen bestimmt:

$$\delta = (1,9 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}. \quad (9)$$

Der Winkel belief sich auf einfache Trigonometrie:

$$\varphi_0 = (0,051 \pm 0,003) \text{ rad}. \quad (10)$$

### 4.2. Diskussion

#### 4.2.1. Aufgabe 1

In der Aufgabe ein wurde der Durchmesser der Kugel auf zwei Methoden bestimmt, einmal über die Spiegelskala und einmal über die Schieblehre. Für die Endberechnung war der unterschied nicht relevant, das Ergebnis bleibt identisch. Dennoch soll einmal geklärt werden, welche Argumente für welchen Wert sprechen.

**Schieblehre.** Der Vorteil an der Schieblehre ist, dass die Kugel still an einem Ort gehalten werden kann, wodurch keine Ungenauigkeit durch ungewollte Bewegungen entstanden ist. Zudem war die Ungenauigkeit kleiner.

**Spiegelskala.** Für die Spiegelskala spricht, dass hier mehr Messdaten aufgenommen wurden, wodurch der statistische Fehler etwas kleiner wird. Jedoch sind 3 Messungen hier nicht besonders ausschlaggebend.

Diese Argumente wurden berücksichtigt und somit wurde sich für die Schieblehre entschieden. Beide Werte sind sowieso statistisch signifikant:

$$\frac{|D_{k,ss} - D_{k,sl}|}{\sqrt{(\Delta s_{ss})^2 + (\Delta s_{sl})^2}} = 0,85\sigma. \quad (11)$$

#### 4.2.2. Aufgabe 2

In der Diskussion ist nicht besonders viel zu nennen, denn die Ergebnisse sind allesamt wie man es erwartet hätte. Dies ist besonders gut daran zu erkennen, wie sich die signifikante Abweichung vom heidelberger Literaturwert entwickelt:

Über 20 Perioden:

$$g = (9,89 \pm 0,13) \frac{m}{s^2} \quad (12)$$

woraus sich die Abweichung von

$$\frac{|g_{lit} - g|}{\sqrt{(\Delta g)^2 + (\Delta g_{lit})^2}} = 0,62\sigma. \quad (13)$$

ergeben hat.

Über 200 Perioden:

$$g_{200} = (9,812 \pm 0,019) \quad (14)$$

woraus sich die Abweichung von

$$\frac{|g_{lit} - g_{200}|}{\sqrt{(\Delta g_{200})^2 + (\Delta g_{lit})^2}} = 0,11\sigma \quad (15)$$

ergeben hat.

Über 200 Perioden und die Korrekturstherme:

$$g_K = (9,809 \pm 0,019) \frac{m}{s^2} \quad (16)$$

woraus sich die Abweichung von

$$\frac{|g_K - g_{lit}|}{\sqrt{(\Delta g_K)^2 + (\Delta g_{lit})^2}} = 0,04\sigma. \quad (17)$$

ergeben hat.

Dies zeigt wunderbar, wie jede Stufe die Genauigkeit an den Literaturwert vergrößert hat.

#### 4.3. Kritik

Dieser Versuch hat besonders schön illustriert, wie Bemühungen für Präzision den Wert immer weiter verfeinern. Die Hauptfehlerquellen sind hier Menschliche Fehler gewesen, so wäre eine automatische Zeitmessung ein guter Verbesserungs Schritt. Auch das Auslenken per Hand hat zur Folge gehabt, dass die Schwinung nicht planar gewesen ist. Zuletzt war der vermutlich größte Fehler die Auslenkung des Pendels nicht automatisch gemessen zu haben. Auch das graphische Auswerten war eine enorme Fehlerquelle, die viel Spielraum für Verbesserung lässt. Trotz alledem ist das Ergebnis sehr zufriedenstellend, da eine Abweichung von  $0,04\sigma$  unglaublich gut ist.

## Abbildungsverzeichnis

I.1. Wirkende Kräfte auf das Pendel bei Auslenkung. . . . .	4
II.1. Schematische Versuchsanordnung und Versuchsequipment. . . . .	8
III.1. Amplitudenauslenkung des Pendels gegen die Zeit. Bleu ist die Ausgleichsgerade und orange die Fehler gerade. $\delta$ bedeutet hier die Differenz. Dies ist nicht dasselbe Delta, das gesucht ist. . . . .	16

## Tabellenverzeichnis

I.1.	Pendellänge . . . . .	8
I.2.	(Vorläufige) Schwingdauer . . . . .	8
I.3.	GENaue Bestimmung der Periodendauer . . . . .	8
I.4.	Bestimmung der Dämpfung . . . . .	8

## Literaturverzeichnis

- [Dem17] Jochen Demtröder. *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 7 edition, 2017.
- [Wag25a] Dr. J. Wagner. *Physikalisches Praktikum PAP 1 für Studierende der Physik*, chapter 14. Universität Heidelberg, 2025.
- [Wag25b] Dr. J. Wagner. *Physikalisches Praktikum PAP 1 für Studierende der Physik*, pages 4–28. Universität Heidelberg, 2025.