



Protokoll zum Versuch

Trägheitsmoment

(Versuch 12)

Autor: Finn Zeumer (hz334)
Versuchspartnerin: Annika Künstle
Versuchsbegleiter: Marius Huy
Datum der Ausführung: 05.09.2025
Abgabedatum: 12.09.2025

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung	3
1.1. Aufgabe/Motivation	3
1.2. Physikalische Grundlagen	3
1.3. Versuchsanordnung	4
Messdaten	6
II. Durchführung	8
2.1. Versuchsaufbau	8
2.2. Messverfahren	9
III. Auswertung	10
3.1. Graphische Bestimmung des Richtmomentes	11
3.2. Rechnerische Bestimmung des Richtmomentes	11
3.3. Stein'scher Satz	13
IV. Zusammenfassung, Diskussion und Kritik	16
4.1. Graphische oder rechnerische Auswertung?	16
4.2. Bestimmung des Schwerpunktes	17
4.3. Gültigkeit des Stein'schen Satzes	17

I. Einleitung

1.1. Aufgabe/Motivation

Ziel des Versuchs ist die Bestimmung des Richtmoments D eines Drehpendels sowie die Untersuchung des Trägheitsmoments J eines unregelmäßig geformten Körpers für verschiedene Lagen der Drehachse. Dazu wird einerseits das Richtmoment über die Auslenkung des Pendels durch ein angreifendes Drehmoment bestimmt, andererseits über die Periodendauer einer Schwingung mit aufgesetzten Körpern bekannter Geometrie. Mit Hilfe des Steiner'schen Satzes lässt sich schließlich das Trägheitsmoment für verschiedene Achsen berechnen und mit den experimentell gewonnenen Werten vergleichen.

1.2. Physikalische Grundlagen

Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegung

Die Bewegungsgleichungen für Translationen und Rotationen sind formal analog, wenn die entsprechenden Größen ausgetauscht werden. Dabei gilt für das Torsionspendel:

$$0 = J \cdot \ddot{\varphi}(t) + D \cdot \varphi(t) \quad (1)$$

Diese homogene Differentialgleichung 2. Art hat die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \phi). \quad (2)$$

Dabei ist $\omega = \sqrt{\frac{J}{D}}$ und ϕ die Startauslenkung.

Auch Federpendel und Drehpendel stehen in direkter Analogie:

$$F = -kx \quad \Leftrightarrow \quad M = -D\varphi \quad (3)$$

Translation	Rotation
Ort x	Winkel φ
Ges. $v = \frac{dx}{dt}$	Winkelges. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Bes. $a = \frac{d^2x}{dt^2}$	Winkelbes. $\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Masse m	Trägheitsmoment J
Kraft F	Drehmoment M
Impuls $p = mv$	Drehimpuls $L = J\omega$
Trans.En. $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	Rot.En. $E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$
$E_{ges} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$	$E_{ges} = \frac{1}{2}D\phi^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$
Schwingdauer $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Schwingdauer $2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$

Tabelle I.1.: Vergleich der Größen in der Translation und Rotation

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Leftrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad (4)$$

Das Richtmoment D spielt dabei die Rolle der Federkonstante k .

Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment J eines Körpers bezüglich einer gegebenen Drehachse ergibt sich aus dem Volumenintegral:

$$J = \int_V \rho(\vec{r}) r^2 dV, \quad (5)$$

wobei $\rho(\vec{r})$ die Massendichte und r der Abstand des Volumenelements zur Achse ist. Für

einfache Körper ergeben sich bekannte Spezialfälle, etwa für eine homogene Scheibe mit Masse m und Radius r_s :

$$J_S = \frac{1}{2}mr_s^2 \quad (6)$$

Hierbei ist J_S das Trägheitsmoment der Scheibe, m ihre Masse und r_s ihr Radius.

Steiner'scher Satz

Für eine Achse, die parallel zur Symmetrieachse im Abstand d verläuft, gilt:

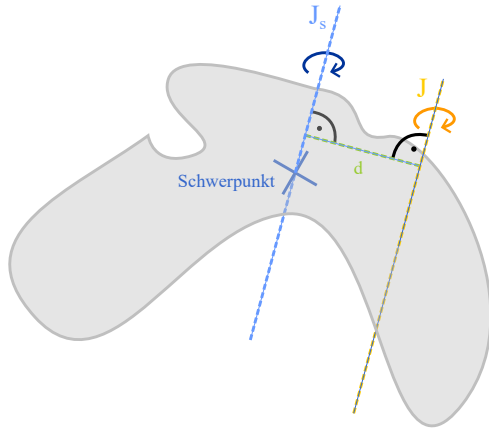


Abbildung I.1.: Visualisierung des Stein'schen Satzes

$$J = J_S + md^2 \quad (7)$$

mit J_S als Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse, m als Masse des Körpers und d als Abstand der Achsen.

Bestimmung des Richtmoments

Das Richtmoment D des Drehpendels kann auf zwei Weisen bestimmt werden:

1. Über das Kraftgesetz:

$$M = r \cdot F = -D\varphi, \quad (8)$$

wobei M das Drehmoment, r der Radius der Aluminiumscheibe, $F = mg$ die Gewichtskraft

eines tangential angreifenden Massestücks und φ der Auslenkwinkel ist.

2. Über die Schwingungsdauer T mit bekannter Massescheibe:

$$D = \frac{4\pi^2 J_S}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{2\pi^2 m r_s^2}{T_2^2 - T_1^2}, \quad (9)$$

wobei T_1 die Periodendauer des Tisches allein, T_2 die Periodendauer mit aufgesetzter Scheibe, J_S das Trägheitsmoment der Scheibe, m ihre Masse und r_s ihr Radius ist. Mathematisch werden die zwei einzelnen Periodendauern also via:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T}{D}}, \quad (10)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T + J_S}{D}} \quad (11)$$

bestimmt. Wir können nun die Gleichung für T_1 (Gleichung 10) und T_2 (Gleichung 11) quadrieren und jeweils nach J_T umstellen:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{J_T}{D} \Rightarrow J_T = \frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2} \quad (12)$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{J_T + J_S}{D} \Rightarrow J_T = \frac{T_2^2 \cdot D}{4\pi^2} - J_S. \quad (13)$$

Logischerweise können wir die Gleichung gleichsetzen und kommen damit auf

$$\frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2} = \frac{T_2^2 \cdot D}{4\pi^2} - J_S. \quad (14)$$

Formt man diese Gleichung nach D um, so kommt man wieder zu Gleichung 9

1.3. Versuchsanordnung

Der Versuch wird mit einem Drehpendel mit senkrechter Achse durchgeführt. Zum Aufbau gehören eine Drehgabel mit Drehtisch, eine Aluminiumscheibe mit Winkelteilung und Schnurnut, eine runde sowie eine unregelmäßig geformte Messingscheibe, ein Gewichtsteller mit Zugschnur, sechs Auflegegewichte zu

je 50g, eine Waage, eine Handstoppuhr, ein Messschieber sowie eine Balancierschneide. Mit diesem Aufbau lassen sich die notwendigen Messungen zur Bestimmung des Richtmoments und der Trägheitsmomente der untersuchten Körper durchführen.

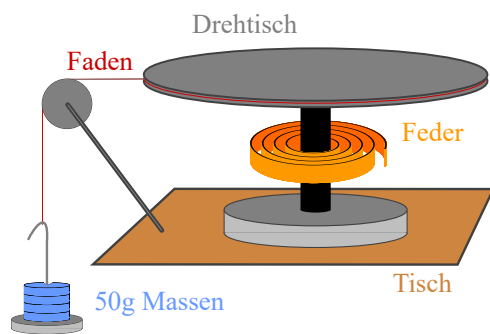


Abbildung I.2.: Versuchsskizze

12 - Trägheitsmoment

Aufgabe 1)

Tabelle 1) Scheibendrehung
Winkel der Scheibendrehung [deg] ^{noch besser?}

	Masse [g]	
1	50	60
2	100	122
3	150	180
4	200	242
5	250	302 + 60 311
6	300	366 + 124 353

Spezifische Winkel der Scheibendrehung
verschiedener Massen.

Ab diesen Messungen haben wir Probleme bekommen:
Teller war "ausgedreht". Wir haben den Drehtisch gedreht (200g + Teller)
und den Zeiger auf 0 gestellt und erneut die letzten
zwei Massen hinzugefügt.

Aufgabe 2)

Tabelle 2)

Index	Scheibe	Schwingungsdauer	
1	Alu	23,09	π_1
2		23,31	
3		23,28	
4	Messing (regelmäßig)	34,98	π_2
5		34,75	
6		34,78	

Vergleich der Aluminiumplatte und der
Messingplatte, je 3 Messungen der Schwing-
dauer bei 20 Umdrehungen.

Material

- Drehtisch
- Drehtisch + Markierung
- Waage, Stoppuhr, Messlehre
- Balancierschneide
- 6 x 50g Massen $\pm 0,1g$

Messingscheibe:

Durchmesser der Scheibe: 110 mm

Masse der Scheibe: 646 g

Equipment

Stoppuhr Modell: TFA Dostman UAT. Nr. 38.2016

Präzision: 0,01 s Ungenauigkeit:

Waage Modell: Ohaus CS2000

Präzision: 1 g Ungenauigkeit:

Schieblehre Modell: Mitutoyo J. HD 3.

Genauigkeit: 0,05 mm Ungenauigkeit:

Aluminiumscheibe Präzision: 2 deg

Aufgabe 3)

Foto machen!

Aufgabe 4)

Tabelle 3) Trägheitsmoment Messingplatte (unregelmäßig)

Achse	Schwingungsdauer [s]
a_0	44,42

Schwingungsdauer einer unregelmäßigen
Messingplatte unter 20 Schwingungen.

Aufgabe 5)

Tabelle 4) Parallelachsen

Achse	Abstand zum Schwerpunkt [mm]	Schwingdauer [s]
a_1	0,5	44,58
a_2	1,0	44,73
a_3	1,5	45,10
a_4	2,0	45,30
a_5	2,5	47,67

Geodreieck: 0,1 cm

Trägheitsmomente 5 weiterer Achsen - parallel zur
Schwerpunktachse. Alle liegen auf einer Geraden.
Berechnung über den Steiner'schen Satz.



II. Durchführung

2.1. Versuchsaufbau

Genauigkeit der Messgeräte

Gerät	Präzision	Ungenauigkeit
Stoppuhr	0,01s	0,005s
Waage	1g	1g
Schieblehre	1mm	0,05mm
Al-Teller	2 Grad	1 Grad

Tabelle II.1.: Genauigkeit der benutzten Geräte
[TFA, Oha25]

Der Versuch bestand aus 5 Unteraufgaben. Alle dienen der Bestimmung rotatorischer Eigenschaften. Darunter die Bestimmung des Richtmoments und später des Stein'schen Satzes.

Aufgabe 1) Bestimmung des Richtmomentes

Wir benutzen den Drehtisch und legen die Aluminiumscheibe mit der Grad-Skala drauf. Diese hat eine Befestigung für die Schnurnut. Diese hängt über eine Rolle vom Tisch herunter. An dieser Schnurnut hängt der Massenteller, seine Auslenkung wurde auf 0 Grad gestellt. Danach wurden die 6 verschiedenen 50g Massen an den Teller gehängt und die jeweilige Auslenkung bzw. Rotation dokumentiert. Da die Scheibe jedoch mehr als 360 Grad gedreht wird, muss nach Messung vier der Drehtisch selbst wieder gedreht werden, damit die Auslenkung normal möglich ist. Hierfür wurde dann die 200g + Massenteller als 0 Grad gesetzt.

Dabei machen wir vor allem Gebrauch von dem Zusammenhang, dass die Gewichtskraft der Massen im Equilibrium, Betragsgleich zur

Kraft aus dem Drehmoment ist:

$$F_g \cdot r = m \cdot g \cdot r = -D \cdot \varphi = M. \quad (1)$$

Dabei ist F_g die Gewichtskraft, die auf die Masse m wirkt, D das Richtmoment der Torsionsfeder, φ den Auslenkungswinkel der Aluminiumscheibe und M das Drehmoment.

Aufgabe 2) Bestimmung des Richtmoments via bekanntem Trägheitsmoment

In der zweiten Aufgabe wurde der Aluminiumteller mit der regelmäßigen/symmetrischen Messingplatte ausgetauscht. Ihr Drehmoment lässt sich leicht berechnen, da die Formel zur Berechnung bekannt ist; benötigt werden jedoch sein Radius und seine Masse, diese werden gemessen. Anschließend wird der Drehtisch dreimal ohne Messingplatte und drei Mal mit Messingplatte gleichweit ausgelenkt und seine Schwindauer für 20 Schwingungen per Hand gestoppt.

Aufgabe 3) Schwerpunkt-Bestimmung

In dieser Aufgabe musste lediglich der Schwerpunkt einer unregelmäßigen Messingscheibe bestimmt werden. Dafür haben wir eine Schneide, auf der die Messingplatte balanciert wird, da wo die Platte (annähernd) im Gleichgewicht ist, wird die Schneide auf des Schwerpunktes sein. Hier wird eine Linie gezogen. Dies wiederholt man aus einem anderen Winkel ein zweites Mal. Es wird sich ein gezeichnetes Kreuz bilden, an dessen Mittelpunkt zugleich der Schwerpunkt der unregelmäßigen Messingplatte ist.

Aufgabe 4 + 5) Steinsch'er Satz

Die letzten zwei Aufgaben dienen dazu, den Stein'schen Satz zu zeigen. Dafür werden auf den unregelmäßigen Messingkörper 5 weitere Markierungen gesetzt, die auf einer der Geraden auf der Messingplatte liegen. Sie werden alle im Abstand von 0,5cm gesetzt, startend vom Schwerpunkt. Es sind nun insgesamt 6 Markierungen auf dem unregelmäßigen Messingkörper.

Nun wird die Messingplatte auf den Drehtisch fixiert. Das Ziel ist es, für alle Markierungen wieder die Schwingdauer für 20 Schwingungen zu bestimmen. Die Werte für alle Schwingdauern werden dokumentiert und dann die jeweiligen Trägheitsmomente bestimmt.

2.2. Messverfahren

Bei den unterschiedlichen Aufgaben sind verschiedene Messmethoden genutzt wurden. Gehen wir die daher Schritt für Schritt durch.

Aufgabe 1

In der ersten Aufgabe ist das Richtmoment graphisch zu bestimmen. Dafür sind die Werte der statischen Auslenkung zu notieren. Dies ist gut zu beobachten, da sich hier Zeit gelassen werden kann, um die Werte genau zu bestimmen. Da wir jedoch eine zu große Auslenkung bei den letzten Massen hatten, mussten wir den Drehtisch wieder zurecht drehen, damit die Auslenkung weiter so passieren kann. Jedoch können dadurch Ungenauigkeiten aufgetreten sein. Die Massen wurden alle mit der Waage nochmal gewogen; alle hatten eine Masse von 50g, wir sind von einer Ungenauigkeit der Massen von $\Delta m = 0,1g$, ausgegangen. Eine Markierung des Aluminiumtellers sind 2 Grad, wir haben die Ungenauigkeit daher auf $\Delta \varphi = 2[deg]$ geschätzt, also 50% der Skala. Zuletzt wurde hier die Ausgleichsgerade zur Bestimmung eines Wertes verwendet, diese ist jedoch nicht ge-

fittet, sondern im Zuge des PAP1 zu approximieren. Dies ermöglicht viele Ungenauigkeiten.

Aufgabe 2

In der zweiten Aufgabe musste eine dynamische Bewegung beobachtet werden und die Zeit gestoppt werden. Die Ungenauigkeit der Uhr ist nicht in der Anleitung gegeben, daher hatten wir die Ungenauigkeit auf die Hälfte der Skalengröße geschätzt, haben diese Ungenauigkeit jedoch später vernachlässigt, da die Reaktionszeit um einen Faktor von mindestens 20 mal so hoch ist. Die Messingscheibe wurde mit der Schieblehre vermessen und die Genauigkeit der Schieblehre wurde angenommen.

Aufgabe 3

Die dritte Aufgabe war lediglich das Balancieren des unregelmäßigen Messingkörpers. Dabei wurde der Schwerpunkt sinnvoll genährt, kann jedoch nicht als genau angenommen werden. Hier gibt es keine großartigen Fehlerquellen, lediglich die Dicke der Schneide und das nicht perfekte Balancieren der Scheibe sind zu nennen, aber deren Fehler zu bestimmen ist quantitativ schwierig umsetzbar und wurde daher vernachlässigt.

Aufgabe 4+5

In den letzten zwei Aufgaben wurden keine weiteren fehleranfälligen Methoden verwendet, sondern bestehende Werte und deren Ungenauigkeiten übernommen. Nur die Messung der Abstände und die Messung der Zeit musste erneut vorgenommen werden.

III. Auswertung

Fehlerrechnung

Für die statistische Auswertung von n Messwerten x_i werden folgende Größen definiert [Wag25]:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{Arithmetisches Mittel} \quad (1)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{Variation} \quad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{Standardabweichung} \quad (3)$$

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} \quad \text{Fehler des Mittelwerts} \quad (4)$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2} \quad \text{Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz für } f(x, y) \quad (5)$$

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{Fehler für } f = x + y \quad (6)$$

$$\Delta f = |a| \Delta x \quad \text{Fehler für } f = ax \quad (7)$$

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad \text{relativer Fehler für } f = xy \text{ oder } f = x/y \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{|a_{lit} - a_{gem}|}{\sqrt{\Delta a_{lit}^2 + \Delta a_{gem}^2}} \quad \text{Berechnung der signifikanten Abweichung} \quad (9)$$

3.1. Graphische Bestimmung des Richtmomentes

Kommen wir also nun zur Auswertung der Aufgaben. Dafür Beginnen wir damit, die Werte der Tabelle 1 aus dem [Protokoll](#). Dabei ist x die Winkelauslenkung der Aluminiumscheibe, m hängende Masse, F die Gewichtskraft mit $|g| = 9,81 \frac{m}{s^2}$, die auf die Masse wirkt M das berechnete Drehmoment nach [Gleichung 2.1](#) und ΔM seine Ungenauigkeit nach der [Gauß'schen Fehlerfortpflanzung](#):

$$\Delta M = |m| \cdot |g| \cdot \Delta r \quad (10)$$

Dabei definieren die 0g den Startpunkt. 0g ist physikalisch in dem Kontext natürlich unsinnig und meint eigentlich die Startmasse, die hier nur aus dem Massenteller besteht, aber keine zusätzliche Masse. Der Radius der Aluminiumplatte entspricht dabei $r = 10,000 \pm 0,005 \cdot 10^{-2}m$, also ist $\Delta r = 0,005 \cdot 10^{-2}m$, was der Ungenauigkeit der Schieblehre entspricht.

$m[g]$	$\varphi[^\circ]$	$M [10^{-2}Nm]$	$\Delta M [10^{-2}Nm]$
0	0	—	—
50	60	4,9050	0,0024525
100	122	9,8100	0,0049050
150	180	14,4150	0,0073575
200	242	19,6200	0,0098100
250	302	24,5250	0,0012263
300	366	29,4300	0,0014715

Tabelle III.1.: Messungen der Rotationsauslenkung der Aluminumscheibe und die berechneten Drehmomente.

Stellen wir nun [Gleichung 1.3](#) um, so kommen wir auf:

$$D_G = -\frac{M}{\varphi} \quad (11)$$

Daher plotten wir als nächstes das Drehmoment M gegen den Auslenkungswinkel φ und berechnen seine Steigung m , welche dem Drehmoment entspricht, nach

$$m = \frac{\Delta M}{\Delta \varphi} \quad (12)$$

Dies kann der [Abbildung zur Bestimmung des Richtmomentes](#) entnommen werden. Dabei rechnen wir Gradmaß in Radiant um. Es gilt:

$$x^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = y \text{ rad} \quad (13)$$

Somit kommen wir auf Steigungen von:

$$m_A = \frac{0,230Nm}{5,4105rad} = 0,043 \frac{Nm}{rad} = D_{G,A} \quad (14)$$

$$m_F = \frac{0,259Nm}{5,4105rad} = 0,048 \frac{Nm}{rad} \quad (15)$$

Dabei ist m_A die Steigung der Ausgleichsgeraden und m_F die Steigung der Fehlergeraden, welche über das Min.-Max.-Verfahren bestimmt wurde. $\Delta \varphi$ sind dabei 2° .

Zieht man nun deren Differenz, so kommt man auf einen Fehler variation

$$\Delta D_G = |m_F - m_A| \quad (16)$$

$$= |0,048 - 0,043| = 0,005 \left[\frac{Nm}{rad} \right] \quad (17)$$

Damit können wir D_G über $D_G = D_{G,A} \pm \Delta D_G$ bestimmen:

$$\underline{\underline{D_G = (4,3 \pm 0,5) 10^{-2} \frac{Nm}{rad}}} \quad (18)$$

3.2. Rechnerische Bestimmung des Richtmomentes

Wir entnehmen die Werte aus dem [Protokoll](#) und schauen uns Tabelle 2 an. Wir haben die Schwingdauer t für 20 Schwingungen, woraus sich auch die Periodendauer T bestimmt. Der Durchschnitt der Periodendauer ohne Scheibe ist \bar{T}_1 , und der mit der Scheibe \bar{T}_2 . Den Fehler der der Periodendauer $\Delta \bar{T}$ wurde über eine Reaktionszeit von $0,2s$ über [Gauß'sche Fehlerfortpflanzung](#) berechnet sich der Fehler zu:

$$\Delta \bar{T}_{reak} = 0,20s \cdot \frac{1}{20} = 0,01s \quad (19)$$

Die Berechnung der **Ungenauigkeit des Mittelwertes** wird zusätzlich vorgenommen:

$$\Delta \bar{T}_{1,stat} = 0,003 \text{ s} \quad (20)$$

$$\Delta \bar{T}_{2,stat} = 0,002 \text{ s.} \quad (21)$$

Nun müssen beide Fehler über **Gauß'sche Fehlerfortpflanzung** zu einem zusammengeführt werden:

$$\Delta \bar{T}_i = \sqrt{(\Delta \bar{T}_{reak})^2 + (\Delta \bar{T}_{i,stat})^2} \quad (22)$$

Wir kommen dabei auf Werte von:

$$\Delta \bar{T}_1 = 0,010 \quad (23)$$

$$\Delta \bar{T}_2 = 0,010. \quad (24)$$

Wir merken also: die Berechnete statistische Ungenauigkeit war hier nicht von Relevanz.

Scheibe	t [s]	T [s]	\bar{T} [s]	$\Delta \bar{T}$ [s]
Keine	23,09	1,155	1,162	0,010
	23,31	1,166	$= \bar{T}_1$	
	23,28	1,164		
Messing-Platte	34,89	1,745	1,741	0,010
	34,75	1,738	$= \bar{T}_2$	
	34,78	1,739		

Tabelle III.2.: Messungen der Schwingdauer einer regelmäßigen Messingplatte unter 20 Schwingungen.

Damit stehen unsere zwei Periodendauern fest, die wir für die Bestimmung des Richtmomentes D_R brauchen:

$$T_1 = (1,162 \pm 0,010) \text{ s} \quad (25)$$

$$T_2 = (1,741 \pm 0,010) \text{ s.} \quad (26)$$

Für die weitere Berechnung brauchen wir außerdem die Werte der Messingscheibe:

$$\text{Durchmesser: } d_M = 110 \text{ mm} \quad \pm 0,005 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \text{Radius: } r_M = 55 \text{ mm} \quad \pm 0,0025 \text{ mm}$$

$$\text{Masse: } m_M = 646 \text{ g} \quad \pm 1 \text{ g}$$

Wir transferieren diese erstmal in typische SI-Einheiten:

$$\text{Durchmesser: } d_M = (0,110 \pm 0,000005) \text{ m}$$

$$\Rightarrow \text{Radius: } r_M = (0,055 \pm 0,0000025) \text{ m}$$

$$\text{Masse: } m_M = (0,646 \pm 0,001) \text{ kg}$$

Damit greifen wir auf **Gleichung 1.9** zurück, um das Richtmoment zu bestimmen:

$$D_R = \frac{2\pi^2 \cdot m_M \cdot r_M^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (27)$$

Nur noch bekannte Werte einsetzen:

$$D_R = \frac{2\pi^2 \cdot 0,646 \text{ kg} \cdot (0,055 \text{ m})^2}{(1,741 \text{ s})^2 - (1,162 \text{ s})^2} \quad (28)$$

$$D_R = 0,022948 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \quad (29)$$

Somit brauchen wir für den Aufgabenteil nur noch den Fehler des Richtmomentes ΔD_R . Wir greifen erneut auf die **Gauß'sche Fehlerfortpflanzung** zurück:

$$\Delta D_R = \left[\left(\frac{\Delta m_M}{m_M} \right)^2 + \left(\frac{\Delta r_M}{r_M} \right)^2 + \left(\frac{2T_2 \Delta T_2}{T_2^2 - T_1^2} \right)^2 + \left(\frac{2T_1 \Delta T_1}{T_2^2 - T_1^2} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot D_R \quad (30)$$

Setzen wir alle Werte ein, so kommen wir in unserem Fall auf eine Ungenauigkeit von:

$$\Delta D_R = 0,00057265 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \quad (31)$$

Fassen wir **Gleichung 3.29** und **Gleichung 3.31** zusammen und runden alles sinnvoll, so kommen wir auf:

$$\underline{\underline{D_R = (2,29 \pm 0,06) \cdot 10^{-2} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}}} \quad (32)$$

3.3. Stein'scher Satz

Die Aufgaben 3 bis 5 beschäftigen sich alle mit dem [Stein'schen Satz](#). Es wurde wieder die Schwingdauer t für 20 Schwingungen gemessen.

Zunächst nehmen wir die Gleichung zur [Berechnung der Periodendauer \(1.10\)](#) und stellen diese nach J_T um:

$$J_T = \frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2} \quad (33)$$

Wir definieren die Periodendauer T_P für die unregelmäßige Messingplatte, die das Trägheitsmoment J_P hat. Diese benutzt die Formel zur [Berechnung der Periodendauer \(1.11\)](#):

$$T_P = 2\pi \sqrt{\frac{J_T + J_P}{D}}. \quad (34)$$

Nur noch nach J_P umformen:

$$J_P = \frac{T_P^2 \cdot D}{4\pi^2} - J_T. \quad (35)$$

Nun setzen wir J_T noch ein und erhalten:

$$J_P = \frac{T_P^2 \cdot D}{4\pi^2} - \frac{T_1^2 \cdot D}{4\pi^2}. \quad (36)$$

Nur noch vereinfachen:

$$J_P = \frac{D}{4\pi^2} (T_P^2 - T_1^2). \quad (37)$$

Zudem wird die Ungenauigkeit nach [Gauß'schen Fehlerfortpflanzung](#) berechnet zu:

$$\Delta J_P = \left[\left(\frac{T_P^2 - T_1^2}{4\pi^2} \Delta D \right)^2 + \left(\frac{DT_P}{2\pi^2} \Delta T_P \right)^2 + \left(\frac{DT_1}{2\pi^2} \Delta T_1 \right)^2 \right]^{1/2} \cdot J_P \quad (38)$$

Dies sind die Formeln, die wir für die weitere Berechnung benötigen. Wir rechnen mit einer Periodendauer von $T_P = (2,221 \pm 0,010)$ s. Genau so machen wir gebrauch von $T_1 = (1,162 \pm 0,010)$ s.

Wir werden zwei Rechnungen durchführen, einmal für $D_G = (4,3 \pm 0,5) 10^{-2} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$ und einmal für $D_R = (2,29 \pm 0,06) 10^{-2} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$. Wir werden dann in der Diskussion die Graphische und die rechnerische Methode vergleichen.

Wir berechnen zunächst die Drehmomente und anschließend ihre Ungenauigkeiten:

$$J_{P,G} = 3,9021744120 [10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (39)$$

$$J_{P,R} = 2,631699022 [10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (40)$$

Nun müssen wir noch deren Ungenauigkeiten bestimmen:

$$\Delta J_{P,G} = 0,017833522 [10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (41)$$

$$\Delta J_{P,R} = 0,0017299 [10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (42)$$

Nun Fassen wir alle Ergebnisse sinnvoll zusammen und runden entsprechend:

$$\underline{\underline{J_{P,G} = (39,022 \pm 0,018) 10^{-4} \text{kg m}^2}} \quad (43)$$

$$\underline{\underline{J_{P,R} = (26,3170 \pm 0,0017) 10^{-4} \text{kg m}^2}} \quad (44)$$

Nun haben wir für die Schwerpunktschwerachse a_0 das Trägheitsmoment bestimmt. Nun stellt sich noch die Frage nach den anderen Achsen. Erstmal suchen wir uns alle interessanten Größen wieder zusammen: Dabei fassen wir die Tabellen 3 und 4 des [Protokolls](#) zusammen und berechnen die Periodendauer, das Trägheitsmoment J_{a_i} analog zu [Aufgabe 3.3 \(37\)](#), und darüber das Trägheitsmoment J_{S_i} über den [Stein'schen Satz \(1.7\)](#). Die Abstände sind mit einem Millimetergeodreieck bestimmt wurden, dessen Ungenauigkeit lässt sich auf

$$\Delta d = 0,5 \text{mm} = 50\% \cdot 1 \text{mm} \quad (45)$$

abschätzen. Für die Ungenauigkeit der ΔT berufen wir uns auf die Werte aus [Aufgabe 3.2 \(23\)](#):

$$\Delta T = 0,010 \text{s}. \quad (46)$$

Zudem sind die Werte in der Tabelle bereits auf signifikante Stellen gerundet. Der Abstand d wir im Stein'schen Satz quadriert, somit müssen wir seinen Fehler via [Gleichung 3.7](#) berechnen:

$$\Delta d^2 = 2d\Delta d. \quad (47)$$

Die gesamte Ungenauigkeit wird sich nach [Gleichung 3.6](#) auf

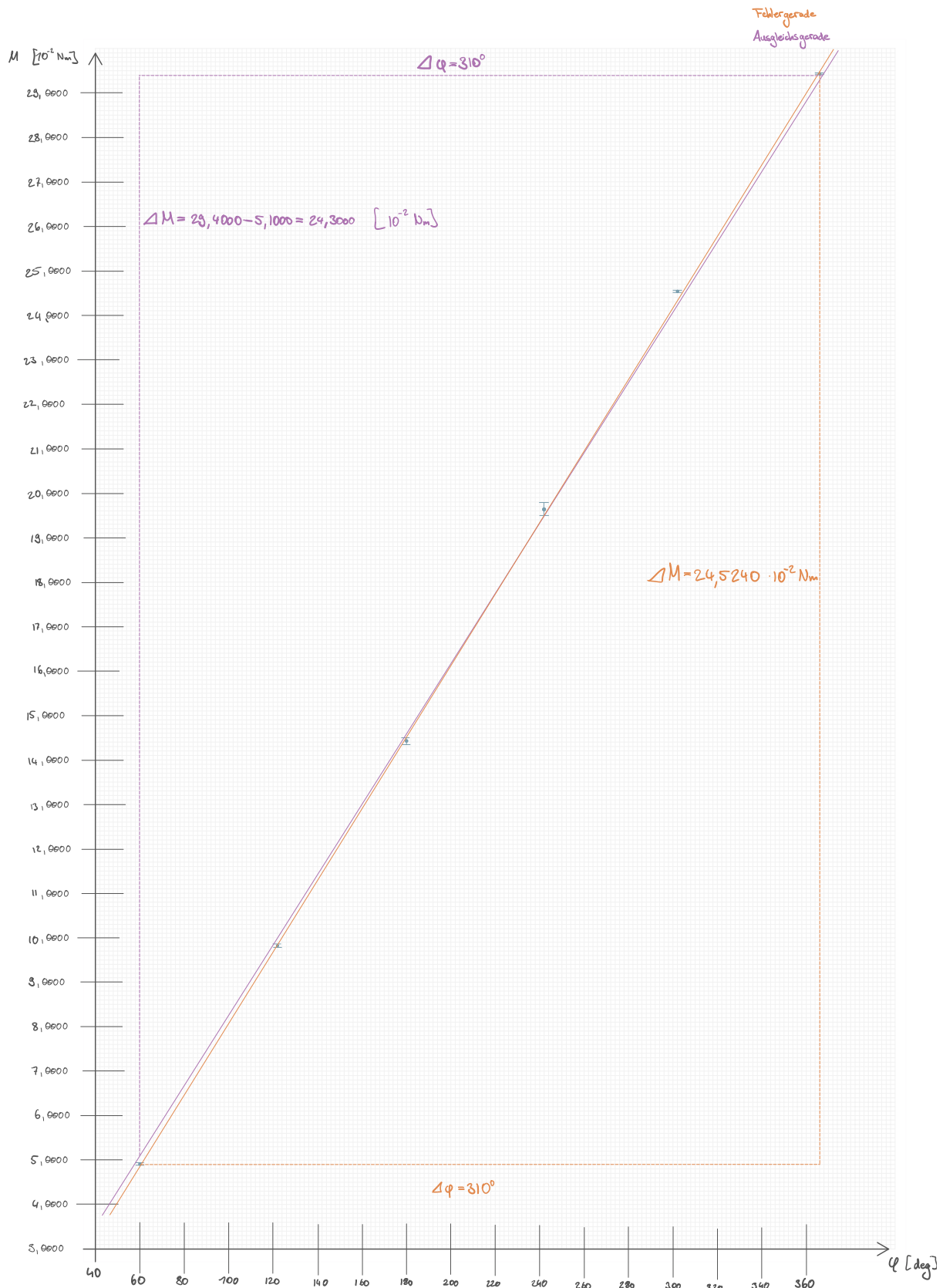
$$\Delta J_{S_i} = \sqrt{(\Delta J_{a_i})^2 + (d_i^2 \Delta m)^2 + (m \Delta d_i^2)^2} \quad (48)$$

belaufen. Dabei nutzen wir $\Delta m = 1g$.

Zuletzt werden noch für jedes Trägheitsmoment die [\$\sigma\$ -Abweichung](#) von J_{a_i} zu den Trägheitsmomenten nach der Berechnung mit dem [Stein'schen Satz \(1.7\)](#) J_{S_i} .

Achse	$d^2 [10^{-4}\text{m}^2]$	$T [\text{s}]$	$J_{a_i}(D_G) [10^{-4}\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	$J_{S_i}(D_G) [10^{-4}\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	σ_{a_G}
a_0	0 ± 0	$2,221 \pm 0,010$	$39,022 \pm 0,018$	—	—
a_1	$0,25 \pm 0,05$	$2,229 \pm 0,010$	$39,410 \pm 0,018$	$39,183 \pm 0,018$	$0,089\sigma$
a_2	$1,0 \pm 0,1$	$2,237 \pm 0,010$	$39,799 \pm 0,019$	$39,668 \pm 0,019$	$0,049\sigma$
a_3	$2,25 \pm 0,15$	$2,255 \pm 0,010$	$40,679 \pm 0,019$	$40,475 \pm 0,019$	$0,076\sigma$
a_4	$4,0 \pm 0,2$	$2,295 \pm 0,010$	$42,6617 \pm 0,0213$	$41,60574 \pm 0,02130$	$0,351\sigma$
a_5	$6,25 \pm 0,25$	$2,384 \pm 0,010$	$47,197 \pm 0,026$	$43,059 \pm 0,026$	$1,125\sigma$
Achse	$d^2 [10^{-4}\text{m}^2]$	$T [\text{s}]$	$J_{a_i}(D_R) [10^{-4}\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	$J_{S_i}(D_R) [10^{-4}\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	σ_{a_R}
a_0	0 ± 0	$2,221 \pm 0,010$	$26,3170 \pm 0,0017$	—	—
a_1	$0,25 \pm 0,05$	$2,229 \pm 0,010$	$26,5785 \pm 0,0018$	$26,478 \pm 0,018$	$0,056\sigma$
a_2	$1,0 \pm 0,1$	$2,237 \pm 0,010$	$26,8410 \pm 0,0018$	$26,963 \pm 0,019$	$0,064\sigma$
a_3	$2,25 \pm 0,15$	$2,255 \pm 0,010$	$27,4350 \pm 0,0019$	$27,770 \pm 0,019$	$0,175\sigma$
a_4	$4,0 \pm 0,2$	$2,295 \pm 0,010$	$28,771834 \pm 0,002029$	$28,90010 \pm 0,02130$	$0,060\sigma$
a_5	$6,25 \pm 0,25$	$2,384 \pm 0,010$	$31,8308 \pm 0,0024$	$30,354 \pm 0,026$	$0,566\sigma$

Tabelle III.3.: Messwerte und berechnete Trägheitsmomente für D_G vs. D_R .



IV. Zusammenfassung, Diskussion und Kritik

Im letzten Teil dieser Auswertung wollen wir nochmal alles auf den Punkt gebracht zusammenfassen, die Ergebnisse diskutieren und Kritik, bzw. Fehlerquellen analysieren und Verbesserungen überlegen. Dafür teilen wir die Auswertung verschiedene Teile ein, einmal einen, der die bestimmten Richtmomente D_G und D_R vergleicht, wie gut die Bestimmung des Schwerpunktes lief und zuletzt, wie nah wir an den Satz von Stein gekommen sind.

4.1. Graphische oder rechnerische Auswertung?

Wir mussten in den Aufgaben 1 und 2 das Richtmoment der Torsionsfeder bestimmen. In Aufgabe 1 wurde dies graphisch gemacht, über eine statische Auslenkung, in der zweiten dann rechnerisch über die Schwingdauer. Dabei kamen wir auf Ergebnisse für D_G (3.18) und D_R (3.32):

$$D_G = (4,3 \pm 0,5) \quad 10^{-2} \frac{Nm}{rad} \quad (1)$$

$$D_R = (2,29 \pm 0,06) \quad 10^{-2} \frac{Nm}{rad}. \quad (2)$$

Mit beiden wurde in den Folge Aufgaben gerechnet, um die Ergebnisse auch dort zu vergleichen. Denn welcher Wert tatsächlich den »Literaturwert« der Feder annimmt, ist anhand der Methoden nicht zu bestimmen. Jedoch können wir schauen, ob sich nicht beiden Werte in einer $1\text{-}\sigma$ -Umgebung befinden und somit beide »gleich richtig« sind. Daher nutzen

wir die Berechnung der signifikanten Abweichung:

$$\sigma = \frac{|0,043 - 0,0229|}{\sqrt{(0,005)^2 + (0,0006)^2}} = 3,99\sigma. \quad (3)$$

Diese Abweichung ist gigantisch und scheint fast zwei verschiedene Federn zu beschreiben. Von statistischer Signifikanz darf man hier wirklich nicht sprechen. Aber wie kann das sein? Vermutlich ist die plausibelste Begründung, dass der Fehler bei der graphischen Berechnung liegt. Sowohl wird die Ausgleichsgerade nicht optimal liegen, zudem ist die Skala in ihrer Präzision sehr limitiert, wodurch sich hier viele enorme Ungenauigkeiten eingebunden haben könnten. Also ist die Ungenauigkeit nicht nur auf die Messgenauigkeit bezogen, sondern sogar auf die Auswertungsmethode selbst. Das unterscheidet die graphische von der rechnerischen Methode, welche alleiniger Messungenauigkeiten unterliegt. Jedoch wurden zwei verschiedene Messmethoden verwendet, wodurch es nicht klar ausgeschlossen werden kann, dass nicht dennoch der graphische Wert der akkuratere ist. Es lässt sich nur sagen, dass der rechnerische Wert in sich selbst genauer ist, da seine Ungenauigkeit um ca. einen Faktor 10 kleiner ist.

Wie erwähnt, wurden beide Werte zur Bestimmung der Trägheitsmomente in den letzten Aufgaben verwendet. Der Fehler hat sich logischerweise durchgezogen. Wir vergleichen nochmal die Ergebnisse (43 und 44) der Träg-

heitsmomente:

$$J_{P,G} = (39,022 \pm 0,018) \cdot 10^{-4} \text{kg m}^2 \quad (4)$$

$$J_{P,R} = (26,3170 \pm 0,0017) \cdot 10^{-4} \text{kg m}^2. \quad (5)$$

Wir schauen uns hier wieder [die Berechnung der signifikanten Abweichung](#) an:

$$\sigma = \frac{|0,0039022 - 0,0026317|}{\sqrt{(0,0000018)^2 + (0,0000017)^2}} = 702,71\sigma. \quad (6)$$

Diese Abweichung ist unglaublich groß. Dies liegt insbesondere daran, dass wir enorm kleine Ungenauigkeiten haben. Es zeigt sich damit insbesondere aber, dass es wichtig gewesen wäre, das Richtmoment D exakter zuvor bestimmt zu haben, damit sich die Ungenauigkeit in weiteren Berechnungen nicht durch zieht.

Zum Schluss wollen wir zum Vergleich der beiden Methoden nochmal den Steinischen Satz schauen und hier wird sich etwas bemerkenswertes herausstellen. Zunächst nutzen wir [das arithmetische Mittel](#), um die durchschnittlichen Abweichungen der berechneten Trägheitsmomente mit und ohne den Stein'schen Satz und tun dies für die graphische und die rechnerische Methode:

$$\bar{\sigma}_G = 0,338\sigma \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}_R = 0,1842\sigma. \quad (8)$$

In beiden Fällen ist der Stein'sche Satz im Mittel statistisch signifikant, jedoch ist der Wert der Rechnerischen Methode definitiv näher am Satz von Stein. Bei beiden Methoden ist der Trend zu beobachten, dass die Werte für größere Abstände eine größere σ -Abweichung aufweisen, was vermutlich auf das quadrieren des Radius zurückzuführen ist, da der Fehler dadurch immer größer wird. Jedoch befinden sich alle Werte der rechnerischen Methode im $1\text{-}\sigma$ -Bereich, während der letzte Wert der graphischen Methode um über $1,1\text{-}\sigma$ abweicht und somit nicht mehr als pauschal statistisch signifikant angenommen werden sollte.

Als Fazit lässt sich sagen, dass die rechnerische Ermittlung des Richtmomentes die vermutlich akkuratere ist, denn der Fehler ist kleiner, und physikalische Gesetze lassen sich akkurater damit reproduzieren. Jedoch ist dies keine Garantie, dass der rechnerische Wert der tatsächlich akkuratere ist.

4.2. Bestimmung des Schwerpunktes

Diese Aufgabe war keine besonders große. Es ist eine sehr ungenaue Bestimmung des Schwerpunktes, denn dieser wurde über eine sehr grobe Methode bestimmt. Man hätte das Vorgehen auch anders machen können: hätte man den Messingkörper zweimal in verschiedenen Ausrichtungen über einen Faden an die Wand gehängt und an dem selben Punkt, wo der Faden an der Wand befestigt ist einen dünnen Faden genommen und den über den Messingkörper gehängt, so hätte man wieder zwei Geraden ziehen können (entlang des dünnen Fadens) und deren Schnittpunkt als Schwerpunkt approximieren können. Diese Methode wäre vermutlich genauer, da sie nicht auf menschliche Feinmotorik setzt, sondern auf die Gravitation der Erde, welche frei von menschlichem Versagen ist. Wir haben hier jedoch keinen Wert zum kritisieren und auswerten, da wir den Schwerpunkt rein qualitativ approximiert haben.

4.3. Gültigkeit des Stein'schen Satzes

Im letzten Teil wollen wir nochmal die Aussage Kraft des Stein'schen Satzes begutachten, auch wenn das meiste im Teil »Graphische oder rechnerische Auswertung?« bereits besprochen wurde. Wir werden uns daher auch nur auf die Werte berufen, die über das rechnerisch bestimmte Richtmoment berechnet wurden. Denn wie bereits erwähnt, wurden die Wer-

te der rechnerischen Methode immer ungenauer, wobei nur die Achse a_4 eine Ausnahme stellt, dieser Wert wurde wieder genauer. Dies liegt vermutlich an den Messmethoden, die durch menschliche Ungenauigkeiten hervorgerufen wurden. Insbesondere hat der quadratische Abstand einen enormen Einfluss und wird die Werte nach hinten hinaus immer ungenauer machen. In einem simplen Pthon-code habe ich die Wetre in einem Balkendiagramm dargestellt und deren prozentuale Entwicklung berechnet:

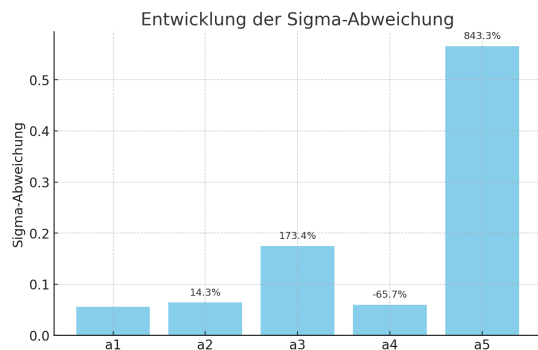


Abbildung IV.1.: Prozentuale Entwicklung der σ -Abweichungen.

Unschwer zu erkennen ist ein Wachstum, dass vermutlich quadratisch ist. Jedoch sind es zu wenig Werte, um die Aussage dessen Experimentell klar behaupten zukönnen. Aus den mathematischen Gleichungen heraus jedoch, lässt sich dies ablesen. Der Wert a_4 stellt eine Ausnahme da, welcher nur über genauere und mehr Messwerte bereinigt werden könnte. Besonders wichtig ist aber vor allem, dass alle Werte sich in der 1σ Umgebung befinden und damit als statistisch signifikant gelten und den steinischen Satz genau genug nähren.

Abbildungsverzeichnis

I.1. Visualisierung des Stein'schen Satzes	4
I.2. Versuchsskizze	5
III.1. Richtmoment M in Abhängigkeit des Auslenkungswinkel φ . Eingezeichnet Fehlergerade (F) und Ausgleichsgerade (A).	15
IV.1. Prozentuale Entwicklung der σ -Abweichungen.	18

Tabellenverzeichnis

I.1. Vergleich der Größen in der Translation und Rotation	3
I.1. Scheibendrehung	8
I.2. Trägheitsmoment der regelmäßigen Messingplatte	8
I.3. Trägheitsmoment der unregelmäßigen Messingplatte	8
I.4. Schein'scher Satz	8
II.1. Genauigkeit der benutzten Geräte [TFA, Oha25]	8
III.1. Messungen der Rotationsauslenkung der Aluminumscheibe und die berechneten Drehmomente.	11
III.2. Messungen der Schwingdauer einer regelmäßigen Messingplatte unter 20 Schwin- gungen.	12
III.3. Messwerte und berechnete Trägheitsmomente für D_G vs. D_R	14

Literaturverzeichnis

- [Oha25] Ohaus. Ohaus cs200, 2025. Zugriff am 5. September 2025.
- [TFA] TFA. Tfa dostmann westheim stoppuhr (kat:nr. 38.2026). Zugriff am 27. August 2025.
- [Wag25] Dr. J. Wagner. *Physikalisches Praktikum PAP 1 für Studierende der Physik*, pages 4–28. Universität Heidelberg, 2025.