

## Capítulo 6

# Decomposição em Soma diretas invariantes

Se  $W_1, W_2 \subseteq V$  subespaços, já discutimos a soma  $W = W_1 + W_2$ , i.é, o subespaço de todos os  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  com  $\alpha_i \in W_i$ . Uma situação particularmente agradável ocorre quando  $W_1$  e  $W_2$  são disjuntos. De fato, neste caso, um dado vetor  $\alpha \in W$  pode ser escrito sob a forma  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_i \in W_i$ , de uma única maneira. Isto resulta do fato de que se também temos  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$  com  $\beta_i \in W_i$ , então:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$$

de modo que

$$\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2$$

e como  $\alpha_1 - \beta_1 \in W_1$  e  $\beta_2 - \alpha_2 \in W_2$ , devemos ter  $\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2 = 0$ , i.é,  $\alpha_1 = \beta_1$  e  $\alpha_2 = \beta_2$ . Quando  $W_1$  e  $W_2$  forem disjuntos diremos que a soma  $W = W_1 + W_2$  é direta, ou que  $W$  é **soma direta** de  $W_1$  e  $W_2$ . A importância das somas diretas está no fato de que se  $W = W_1 \oplus W_2$ , podemos estudar  $W$  através dos pares de vetores  $(\alpha_1, \alpha_2)$  com  $\alpha_i \in W_i$ .

Desejamos considerar "somas diretas" de vários subespaços. Para isso precisaremos de um conceito de independência de subespaços.

**Definição 6.1.** *Sejam  $W_1, W_2, \dots, W_k$  subespaços do espaço vetorial  $V$ . Dizemos que  $W_1, \dots, W_i$  são **independentes** se*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 0, \text{ com } \alpha_i \in W_i$$

*implica que cada  $\alpha_i$  é nulo.*

**Teorema 6.2.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $F$ . Sejam  $W_1, \dots, W_k$  subespaços de  $V$  e seja  $W = W_1 + \dots + W_k$ . As seguintes condições são equivalentes.*

1.  $W_1, \dots, W_k$  são independentes.
2. Cada vetor  $\alpha \in W$  pode ser escrito de uma única maneira sob a forma

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$

*com  $\alpha_i \in W_i, i \in 1, \dots, k$*

3. Para cada  $j, 2 \leq j \leq k$ , o subespaço  $W_j$  é disjunto da soma  $(W_1 + \dots + W_{j-1})$ .

*Demonstração.* (1)  $\implies$  (2). Suponhamos que  $W_1, \dots, W_k$  sejam independentes. Pela definição de  $W$ , cada vetor  $\alpha \in W$  pode ser escrito como  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$  com  $\alpha_i \in W_i$ . Suponhamos também que  $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_k$  com  $\beta_i \in W_i$ . Então

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \beta_1 + \dots + \beta_k$$

portanto

$$(\alpha_1 - \beta_1) + \dots + (\alpha_k - \beta_k) = 0$$

e como  $(\alpha_i - \beta_i) \in W_i$ , a independência dos  $W_i$  implica que  $\alpha_i - \beta_i = 0, \forall i \in 1, \dots, k$ . Isto mostra que os  $\alpha_i$  são determinados de modo único por  $\alpha$ .

□