Capítulo 6

Decomposição em Soma diretas invariantes

Se W_1, $W_2 \subseteq V$ subespaços, já discutimos a soma $W = W_1 + W_2$, i.é, o subespaço de todos os $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ com $\alpha_i \in W_i$. Uma situação particularmente agradável ocorre quando W_1 e W_2 são disjuntos. De fato, neste caso, um dado vetor $\alpha \in W$ pode ser escrito sob a forma $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_i \in W_i$, de uma única maneira. Isto resulta do fato de que se também temos $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ com $\beta_i \in W_i$, então:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$$

de modo que

$$\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2$$

e como $\alpha_1 - \beta_1 \in W_1$ e $\beta_2 - \alpha_2 \in W_2$, devemos ter $\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2 = 0$, i.é, $\alpha_1 = \beta_1$ e $\alpha_2 = \beta_2$. Quando W_1 e W_2 forem disjuntos diremos que a soma $W = W_1 + W_2$ é direta, ou que W é **soma direta** de W_1 e W_2. A importância das somas diretas está no fato de que se $W = W_1 \bigoplus W_2$, podemos estudar W através dos pares de vetores (α_1, α_2) com $\alpha_i \in W_i$.

Desejamos considerar "somas diretas"de vários subespaços. Para isso precisaremos de um conceito de independência de subespaços.

Definição 6.1. *Sejam $W_1, W_2, \cdots, W_k$ subespaços do espaço vetorial V. Dizemos que $W_1, \cdots, W_i$ são **independentes** se*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 0, \text{ com } \alpha_i \in W_i$$

implica que cada α_i é nulo.

Teorema 6.2. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo F. Sejam $W_1, \cdots, W_k$ subespaços de V e seja $W = W_1 + \cdots + W_k$. As seguintes condições são equivalentes.*

1. *$W_1, \cdots, W_k$ são independentes.*
2. *Cada vetor $\alpha \in W$ pode ser escrito de uma única maneira sob a forma*

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$$

com $\alpha_i \in W_i, i \in 1, \cdots, k$

3. *Para cada j, $2 \leq j \leq k$, o subespaço W_j é disjunto da soma $(W_1 + \cdots + W_{j-1})$.*

Demonstração. (1) $\implies$ (2). Suponhamos que $W_1, \cdots, W_k$ sejam independentes. Pela definição de W, cada vetor $\alpha \in W$ pode ser escrito como $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ com $\alpha_i \in W_i$. Suponhamos também que $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_k$ com $\beta_i \in W_i$. Então

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \beta_1 + \cdots + \beta_k$$

portanto

$$(\alpha_1 - \beta_1) + \cdots + (\alpha_k - \beta_k) = 0$$

e como $(\alpha_i - \beta_i) \in W_i$, a independência dos W_i implica que $\alpha_i - \beta_i = 0, \forall i \in 1, \ldots, k$. Isto mostra que os α_i são determinados de modo único por α.

(2) $\implies$ (3). Seja α um vetor na interseção

$$W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1})$$

Então existem vetores $\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1} \in W_i$ tais que $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1}$. Mas como $\alpha \in W_j$ a única maneira de escrever α como soma de vetores em W_i, deve ser

$$\alpha = 0 + \cdots + 0 + \alpha + 0 + \cdots + 0$$

$\square$