

— 第 22 章 —

Fama-French 三因子模型

22.1 | Fama-French 三因子模型的基本思想

自 CAPM 模型提出以後，不斷有學者對其進行實證驗證和應用。有證據表明，市場風險溢酬因子無法充分解釋個別風險資產的收益率，學者們不斷探尋影響資產定價的其他因子。Banz (1981)¹² 指出企業股票的市值 (Market Equity，股票價格×在外流通股數) 會影響到股票的收益率，投資市值小的企業之績效表現優於投資市值大的企業。Banz 把市值與股票收益率相關的現象稱為規模效應 (Size Effect)。Basu (1977)¹³ 發現低本益比 (Price to Earnings Ratio, P/E Ratio) 的股票之收益率會有比較高的 Alpha 值；他在 1983 年¹⁴ 綜合考慮規模效應後，依舊發現投資低本益比的股票回報更高。Bhandari (1988)¹⁵ 在考慮了市場風險和規模效應後，發現槓桿比例 (Leverage) 高的企業收益率較大。也有很多學者¹⁶ 發現股票的收益率與股票的淨值市價比 (Book to Market Equity Ratio, B/M Ratio) 有關，高 B/M Ratio 的股票會得到更高的報酬，學者們這種現象稱為價值效應 (Value Effect)。從這些實證結果來看，CAPM 模型並不足以充分解釋資產的收益率，很多因子可能都可以用在資產定價模型中。

¹² Banz, Rolf W. "The relationship between return and market value of common stocks." *Journal of financial economics* 9.1 (1981): 3-18.

¹³ Basu, Sanjoy. "Investment performance of common stocks in relation to their price-earnings ratios: A test of the efficient market hypothesis." *The journal of Finance* 32.3 (1977): 663-682.

¹⁴ Basu, Sanjoy. "The relationship between earnings' yield, market value and return for NYSE common stocks: Further evidence." *Journal of financial economics* 12.1 (1983): 129-156.

¹⁵ Bhandari, Laxmi Chand. "Debt/equity ratio and expected common stock returns: Empirical evidence." *Journal of finance* (1988): 507-528.

¹⁶ 比如 (1) Stattman, Dennis. "Book values and stock returns." *The Chicago MBA: A Journal of Selected Papers* 4, 25-45. (2) Rosenberg, Barr, Kenneth Reid, and Ronald Lanstein. "Persuasive evidence of market inefficiency." *The Journal of Portfolio Management* 11.3 (1985): 9-16. (3) Chan, Louis KC, Yasushi Hamao, and Josef Lakonishok. "Fundamentals and stock returns in Japan." *The Journal of Finance* 46.5 (1991): 1739-1764.

Fama 和 French 於 1992¹⁷、1993 年¹⁸ 對美國股票市場中股票收益率的決定因素進行全面性地研究分析，他們發現單獨使用 Beta 或者和分別與市值、P/E 比、槓桿比例、B/M 比結合在一起來解釋股票收益率時，Beta 的解釋能力很弱。而市值、P/E 比、槓桿比例、B/M 比各因子單獨用來解釋收益率時，每個因子的解釋能力都很強，當把這些因子組合起來時，市值、B/M 比會弱化槓桿比例、P/E 比的解釋能力。因此，Fama 和 French 從可以解釋股票收益率的眾多因素中提取出 3 個重要的影響因子，即市場風險溢酬因子、規模因子和淨值市價比因子，仿照 CAPM 模型用這三個因子建立起線性模型來解釋股票的收益率，這就是著名的三因子模型 (Fama-French Three Factor Model)。

三因子模型中的三個因子均為投資組合的收益率：市場風險溢酬因子對應的是市場投資組合的收益率，規模因子對應的做多市值較小企業、做空市值較大企業的投資組合之收益率，淨值市價比因子對應的是做多高 B/M 比企業、做空低 B/M 比企業的投資組合之收益率。三因子模型的具體形式如下：

$$E(R_{it}) - R_{ft} = b_i [E(R_{mt}) - R_{ft}] + s_i E(SMB_t) + h_i E(HML_t)$$

其中 SMB (Small Minus Big) 為規模因子，也就是小企業比大企業高出的收益率；HML (High Minus Low) 代表淨值市價比因子，用高 B/M 比股票收益率減去 B/M 比企業的收益率得到； b_i 、 s_i 和 h_i 分別為投資組合 (或單支股票) 的收益率對三個因子的敏感係數。實證上常常用：

$$R_{it} - R_{ft} = \alpha_i + b_i (R_{mt} - R_{ft}) + s_i SMB_t + h_i HML_t + \varepsilon_{it}$$

來做回歸檢驗，式中 α_i 為超額收益率。實證研究應用時，投資組合 (或個股) 收益率 R_{it} 、無風險收益率 R_{ft} 、市場投資組合 R_{mt} 、規模因子組合 SMB_t 和淨值市價比因子組合 HML_t 的資料都是已知的，透過線性回歸擬合最小化殘差平方和，我們可以得到參數 α_i 、 b_i 、 s_i 和 h_i 的估計值，檢驗超額收益及三個因子的係數是否顯著地異於 0，也就是檢驗三個因子是否能夠解釋收益率。

¹⁷ Fama, Eugene F., and Kenneth R. French. "The cross-section of expected stock returns." *the Journal of Finance* 47.2 (1992): 427-465.

¹⁸ Fama, Eugene F., and Kenneth R. French. "Common risk factors in the returns on stocks and bonds." *Journal of financial economics* 33.1 (1993): 3-56.

三因子的具體分組過程與計算

SMB_t 和 HML_t 的計算（參照 Fama 和 French (1993)）：

SMB_t 對應的是做多市值較小企業、做空市值較大企業的投資組合之收益率，因此我們需要確定什麼是「市值較小」和「市值較大」企業。這裡的市值對應的是企業股票的市值（之後稱為 Size），等於股票價格 P 乘以在外流通股數 Q 。上市企業 k 在時點 t 的市值即為 $ME_{kt} = P_{kt} \times Q_{kt}$ 。將所有上市企業的 Size 計算出來後，按照從小到大的順序排序，找出 Size 的中位數，將 Size 低於中位數的企業定義為 Small 組、Size 高於中位數的企業定義為 Big 組。

HML_t 對應的是做多高 B/M 比企業、做空低 B/M 比企業的投資組合之收益率，所以也是要確定「B/M 比高低」的企業。首先，上市企業 k 在時點 t 的 B/M Ratio_{kt} = BE_{kt} / ME_{kt} ，其中 BE_{kt} 為企業 k 在時點 t 股權的賬面價值（Book Common Equity），可以從財務報表相關資料程式庫獲得。計算出所有上市企業的 B/M 比之後，按照從小到大的順序排序，然後將排在前 30% 的企業劃為 Low 組、將後 30% 的企業劃為 High 組、將中間 40% 定義為 Medium 組。

我們根據 Size 和 B/M 比劃分的組別可以得到 6 組投資組合，分別是 S/L、S/M、S/H、B/L、B/M、B/H，其中兩個字母代表同時屬於兩個組別，比如 S/L 是指由 Size 上屬於 Small 組、B/M 比上屬於 Low 組的上市企業組成的投資組合。得到 6 個投資組合後，我們用按市值比例加權平均的方式來計算每組的平均收益率，具體做法為：用每個投資組合中每支股票的市值除以整個組內所有企業的市值總和得到個股權重，再對整個組內所有個股收益率加權平均即可以得到該組的收益率。比如 B/M 組由 K 個企業組成， t 時點時每個企業的市值分別為 $M_{1t}, M_{2t}, \dots, M_{Kt}$ ，各企業的股票收益率分別為 $R_{1t}, R_{2t}, \dots, R_{Kt}$ ，那麼 B/M 投資組合的收益率為：

$$\begin{aligned} BM_t &= \frac{M_{1t}}{\sum_K M_{kt}} R_{1t} + \frac{M_{2t}}{\sum_K M_{kt}} R_{2t} + \dots + \frac{M_{Kt}}{\sum_K M_{kt}} R_{Kt} \\ &= \sum_K M_{kt} R_{kt} / \sum_K M_{kt} \end{aligned}$$

我們將 6 個投資組合的收益率識別為：SL, SM, SH, BL, BM, BH。

根據 Fama 和 French (1993) 的設定，

$$\begin{aligned} SMB_t &= \frac{1}{3}(SL_t + SM_t + SH_t) - \frac{1}{3}(BL_t + BM_t + BH_t) \\ HML_t &= \frac{1}{2}(SL_t + BL_t) - \frac{1}{2}(SH_t + BH_t) \end{aligned}$$

從整個過程來看， SMB_t 和 HML_t 的計算稍稍有些複雜。不過，現在的數據商提供計算好這三個因子數據給使用者。在接下來的例子中，為了重點突出三因子模型的實證應用，直接使用數據商提供的因子資料。

22.2 | 三因子模型之 Python 實作

以個股「統一」股票為例來說明三因子模型中參數的估計過程。第一步，獲取統一股票的收益率資料。

```
1. >>> import pandas as pd
2. >>> stock=pd.read_csv('retdata.csv',sep='\t')
3. >>> stock.head(n=3)
4.          Date  Hon Hai Precision  TSMC  Uni-President
5. 0  2014-01-02          0.3745    -0.9479         0.5587
6. 1  2014-01-03         -1.2438    -1.9139        -0.9259
7. 2  2014-01-06         -0.5038     0.0000         0.0000
8. >>> stock.index = pd.to_datetime(stock.Date)
9. >>> UniPresident = stock.iloc[:,3]
10. >>> UniPresident.head(n=3)
11. Date
12. 2014-01-02    0.5587
13. 2014-01-03   -0.9259
14. 2014-01-06    0.0000
15. Name: Uni-President, dtype: float64
```

接下來，我們讀取因子資料。

```

1. # 獲取三因子資料
2. >>> factors=pd.read_csv('factors.csv',sep='\t')
3. >>> factors.head(n=3)
4.      YY/MM/DD  Market Risk Premium  Size Factor (3 Factor) \
5. 0   2015-01-05                -0.3523                0.3276
6. 1   2015-01-06                -2.4461                1.2977
7. 2   2015-01-07                 0.3387                0.1506
8.
9.      Book to Market Factor  Risk-free Interest Rate
10. 0                1.2267                1.355
11. 1                0.4697                1.355
12. 2                0.4279                1.355
13. >>> factors.index =pd.to_datetime(factors['YY/MM/DD'])
14. >>> factors.columns
15. Index(['YY/MM/DD', 'Market Risk Premium', 'Size Factor (3 Factor)',
16.        'Book to Market Factor', 'Risk-free Interest Rate'],
17.        dtype='object')
18.
19. # 將年度無風險利率轉化成日度無風險收益率
20. >>> factors['Risk-free Interest Rate']=(factors['Risk-free Interest
21. Rate']**(1/360)-1)*100
22. >>> factors.head(n=3)
23.      YY/MM/DD  Market Risk Premium  Size Factor (3 Factor) \
24. YY/MM/DD
25. 2015-01-05  2015-01-05                -0.3523                0.3276
26. 2015-01-06  2015-01-06                -2.4461                1.2977
27. 2015-01-07  2015-01-07                 0.3387                0.1506
28.
29.      Book to Market Factor  Risk-free Interest Rate
30. YY/MM/DD
31. 2015-01-05                1.2267                0.084425
32. 2015-01-06                0.4697                0.084425
33. 2015-01-07                0.4279                0.084425

```

合併個股收益率數據與因子收益率數據，並計算統一股票的超額收益率。

```

1. >>> data=pd.concat([UniPresident,factors.iloc[:,1:]],axis=1).dropna()
2. >>> data.tail(n=3)
3.      Uni-President  Market Risk Premium  Size Factor (3 Factor) \

```

```

4. 2016-12-28                -0.1887                1.0107                -0.5229
5. 2016-12-29                -0.1890                -0.5283                0.5857
6. 2016-12-30                 1.1364                1.0978                -0.3802
7.
8.      Book to Market Factor  Risk-free Interest Rate
9. 2016-12-28                -0.0066                0.012228
10. 2016-12-29                 0.3557                0.012228
11. 2016-12-30                -0.1910                0.012228
12. >>> data['Uni-President'] = data['Uni-President'] - data['Risk-
13. free Interest Rate']

```

接下來，我們將統一的股票收益率與三個因子變數建立多元回歸模型。

```

1. >>> import statsmodels.api as sm
2. >>> regThrFac=sm.OLS(data['Uni-President'],sm.add_constant(data.
3. iloc[:,1:4]))
4. >>> result=regThrFac.fit()
5. >>> result.summary()
6. <class 'statsmodels.iolib.summary.Summary'>
7. """
8.
9. OLS Regression Results
10. Dep. Variable:      Uni-President      R-squared:      0.254
11. Model:              OLS              Adj. R-squared:  0.250
12. Method:             Least Squares     F-statistic:     54.98
13. Date:               Fri, 22 Sep 2017   Prob (F-statistic): 1.34e-30
14. Time:               08:45:56          Log-Likelihood:  -790.79
15. No. Observations:   488              AIC:            1590.
16. Df Residuals:        484              BIC:            1606.
17. Df Model:            3
18. Covariance Type:    nonrobust
19.
20.      coef      std err      t      P>|t|      [0.025
21. 0.975]
22. -----
23. const          -0.0262      0.056   -0.471    0.638    -0.136
24. 0.083
25. Market Risk Premium    0.6878      0.066   10.426    0.000    0.558
26. 0.817
27. Size Factor (3 Factor) -0.2314      0.101   -2.293    0.022   -0.430
28. -0.033
29. Book to Market Factor  -0.1779      0.145   -1.223    0.222   -0.464
30. 0.108
31. Omnibus:           26.649   Durbin-Watson:   2.287

```



```

30. Prob(Omnibus):      0.000   Jarque-Bera (JB):      44.427
31. Skew:               0.383   Prob(JB):        2.25e-10
32. Kurtosis:          4.264   Cond. No.       2.64
33. Warnings:
34. [1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors
35. is correctly specified.
36. ""

```

從回歸結果來看，統一股票 2015 年 1 月至 2016 年 12 月的收益率對三因子模型中的市場投資組合風險溢酬因子（Market Risk Premium）、規模因子（Size Factor (3 Factor)）是敏感的，也就是說這兩個因子可以部分地解釋統一的收益率變動，而淨值市價比因子（Book to Market Factor）的係數不顯著地異於 0，解釋能力不夠強。

我們可以用 `params` 屬性提取模型的係數。

```

1. >>> result.params
2. const                -0.026219 # 百分比
3. Market Risk Premium   0.687815
4. Size Factor (3 Factor) -0.231406
5. Book to Market Factor -0.177857
6. dtype: float64

```

22.3 | 三因子模型的評價

在建模時，我們一般把資料分成兩組，即歷史建模資料和預測資料。

以 2012 年為例，我們可以把 2001 年到 2012 年每年的 6 月份月資料作為歷史建模資料，透過把某投資組合（包括單支股票）的預期收益率與無風險收益率的差值 $R_i - R_f$ 、市場投資組合因子 $R_M - R_f$ 、規模因子 R_{SMB} 和淨值市價比因子 R_{HML} 資料帶入三因子模型公式，求出係數 b_i 、 s_i 、 h_i 和截距項 α_i 。

再用這些係數和 2013 年與 2014 年每年的 6 月份市場投資組合因子 $R_M - R_f$ 、規模因子 R_{SMB} 和淨值市價比因子 R_{HML} 資料求出 2013 年和 2014 年 6 月份的某投資組合（包括單支股票）的預期收益率與無風險收益率的差值 $R_i - R_f$ ，進而可以預測該投資組合（包括單支股票）的預期收益率 R_i 。

在預測投資組合收益方面，CAPM 模型只考慮了市場風險，三因子模型除了市場風險以外，還考慮了不同企業本身的運營情況和在市場中的價值等因素，更加多方面考慮了股票收益率的影響因素。在投資界和學術研究中，三因子模型建模穩定，預測股票的收益率一般會相對準確，Fama-French 三因子模型受到很多投資者和學者青睞。

習題

- 找出一個你認為會影響股票價格的因素，並以台積電為例，建立單因子模型。並用 Python 進行分析，驗證這一假設的真虛假。
- 簡述資本資產定價模型與三因子模型的異同。
- 假設某市場各組股票的收益率為：

	High	Medium	Low
Small	6	4.7	5.4
Big	5	5.4	5.8

計算 R_{SMB} 與 R_{HML} 。

- 假設某股票的三因子模型為：

$$R_i - R_f = 0.01 + 1.2(R_M - R_f) + 0.5SMB + 0.1HML$$

- 該股票的異常報酬率為多少？
 - 當 R_f 為 0.5% 且 R_M 、 R_{SMB} 、 R_{HML} 分別為 2%、2.4%、1.8% 時，該股票的預期收益率為多少？
- 讀取 problem 21.txt 檔案中的個股收益率以及 ThreeFactors.txt 檔案中的三因子資料，運用 2016 年數據，按照文中的步驟建立三因子模型。
 - 讀取宏達電 (2498) 的 2014 年資料以及三因子資料：
 - 利用 2014 年度的數據建立 CAPM 模型；

- (b) 利用 2014 年度的數據建立三因子模型；
 - (c) 分別使用建構的 CAPM 模型和三因子模型估計宏達電 2015 年 1 月的收益率，比較兩者的結果。
7. 檔案 Bank.csv 中包含了金融類各支股票的 2014 年股價資料，讀取這些資料以及 ThreeFactors.txt 檔案中的 2014 年三因子資料：
- (a) 對各支股票建立 CAPM 模型並根據 Alpha 值選出三支股票；
 - (b) 對各支股票建立三因子模型並根據 Alpha 值選出三支股票；
 - (c) 比較兩種模型選股的結果。

4

• P A R T •

時間序列簡介 與配對交易

