Método de Diferencias Finitas para la Ecuación de Calor en 2D

Para resolver la ecuación de calor en dos dimensiones numéricamente, partiremos de la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Vamos a discretizar esta ecuación utilizando el **método de diferencias finitas**. Siguiendo 4 pasos:

Paso 1: Discretización del dominio

El dominio se divide en una malla de puntos con espaciado constante en las direcciones x e y. Definimos:

- Δx como el paso espacial en la dirección x,
- Δy como el paso espacial en la dirección y,
- Δt como el paso temporal.

Los puntos de la malla en el espacio se denotan por $x_i = i\Delta x$ y $y_j = j\Delta y$, donde i y j son enteros que representan las posiciones de los nodos de la malla en las direcciones x e y, respectivamente.

Paso 2: Aproximación de las derivadas

Las derivadas espaciales y temporales se aproximan mediante diferencias finitas. Para la derivada temporal de primer orden y las derivadas espaciales de segundo orden, usamos las siguientes fórmulas de aproximación:

a. **Derivada temporal de primer orden (en t)**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

donde $u_{i,j}^{n+1}$ es la temperatura en el tiempo $n+1$ en la posición (x_i, y_j), y $u_{i,j}^{n}$ es la temperatura en el tiempo n.

b. **Derivada espacial de segundo orden (en x)**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2}$$

c. **Derivada espacial de segundo orden (en y)**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}$$

Paso 3: Esquema en diferencias finitas

Sustituyendo las aproximaciones de las derivadas en la ecuación de calor, obtenemos el siguiente esquema de diferencias finitas:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = c^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \right)$$

Resolviendo para $u_{i,j}^{n+1}$, obtenemos la fórmula para actualizar la temperatura en el próximo paso de tiempo:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \Delta t \cdot c^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \right)$$

Paso 4: Implementación numérica

El proceso iterativo se repite en cada paso de tiempo para todos los puntos de la malla, usando las condiciones iniciales y de frontera del problema.