ICPC Teilnehmervortrag: Graphenalgorithmen II

Markus Schneckenburger, Moritz Uehling, Florian Weber, Cora Weidner

KIT
ICPC-Teilnehmervortrag

28.05.15

Übersicht

- Minimum Spanning Tree (MST)
  - Problem
  - Lösung: Kruskal
- SSSP (Single Source Shortest Path)
  - Dijkstra
  - Bellman-Ford
- All Pairs Shortest Paths (APSP)
  - Idee
  - Code
  - Beurteilung
- Zusammenfassung

Code und mehr

Den kompletten Code (inklusive dem der Folien) findet ihr unter:
`https://github.com/Florianjw/ICPC-Graphen`

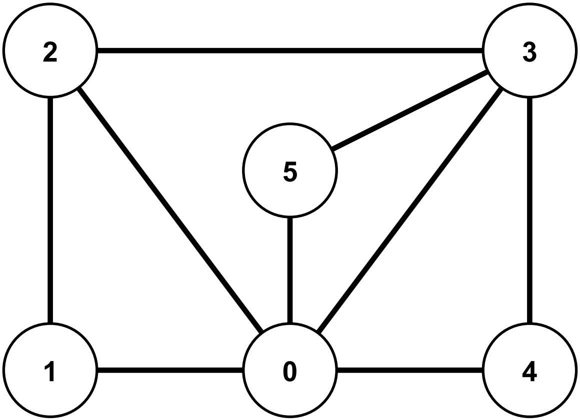
Minimum Spanning Tree (MST)

Minimum Spanning Tree (MST)

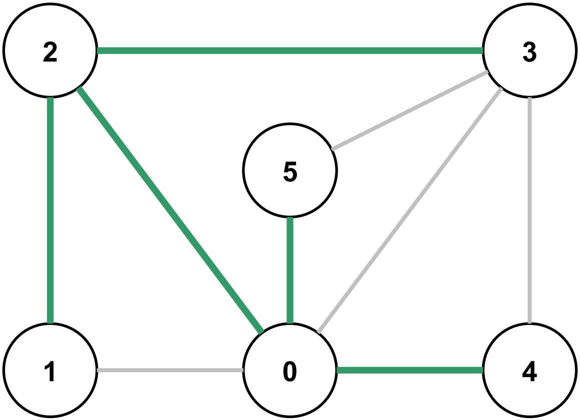
Problemstellung

- „finde das billigste Netzwerk“
- genau:
  Gegeben sei ein zusammenhängender ungerichteter gewichteter Graph, gesucht ist ein Spannbaum mit geringstem Gesamtgewicht.

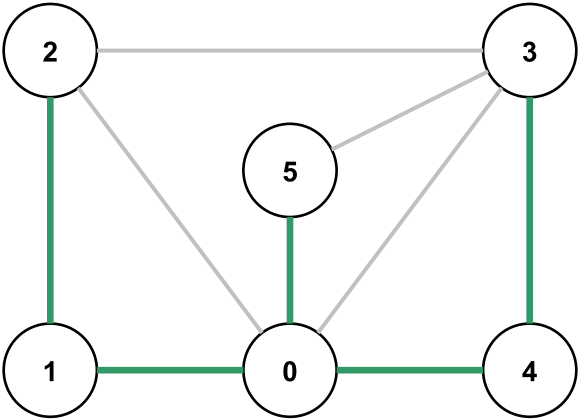
Minimum Spanning Tree (MST)



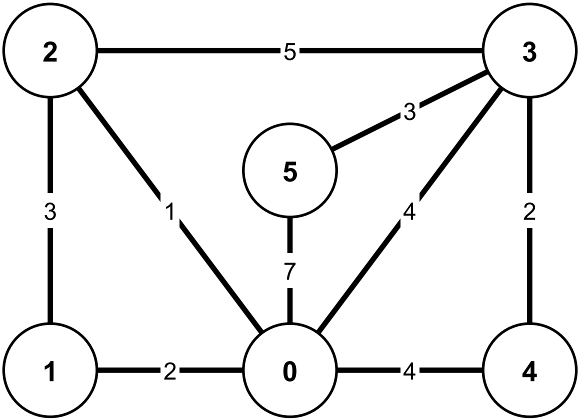
Minimum Spanning Tree (MST)



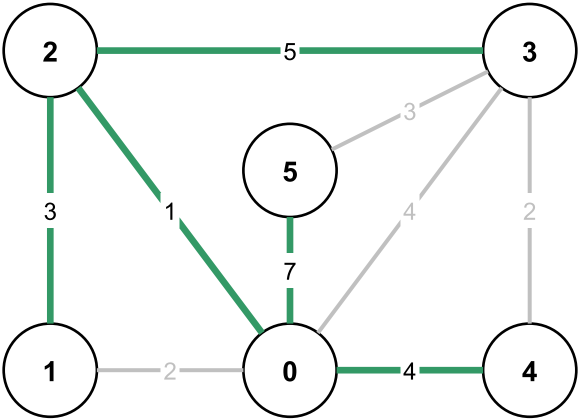
Minimum Spanning Tree (MST)



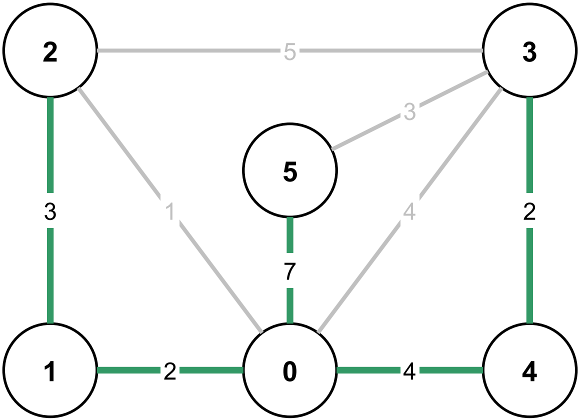
Minimum Spanning Tree (MST)



Minimum Spanning Tree (MST)



Minimum Spanning Tree (MST)

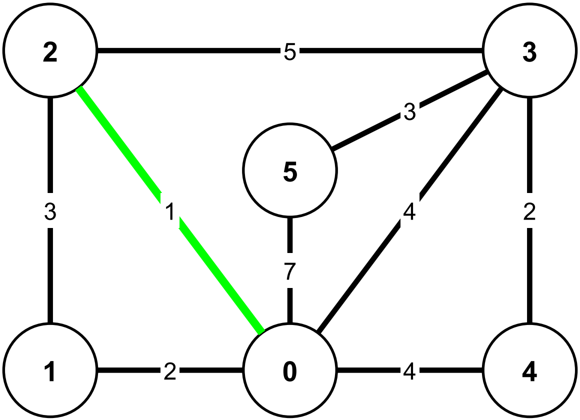


Minimum Spanning Tree (MST)

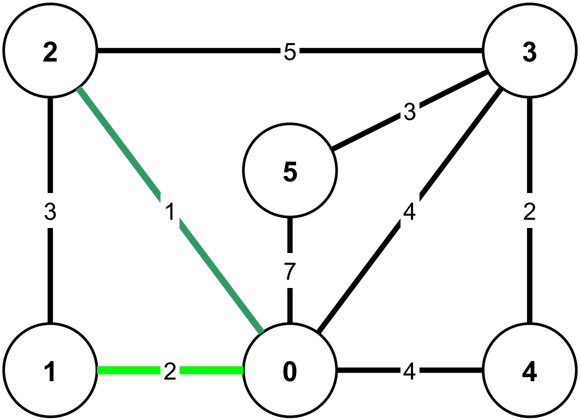
Lösung

- Ansatz: baue einen Baum mit greedy Algorithmus:
    1. betrachte Kante mit niedrigstem Gewicht
    2. untersuche: führt hinzufügen der Kante zu einem Zyklus?
        - Ja: verwerfe Kante
        - Nein: füge Kante zum Baum hinzu
    3. starte bei 1. mit restlichen Kanten bis alle abgearbeitet sind
    4. $\Longrightarrow$ Baum ist ein MST

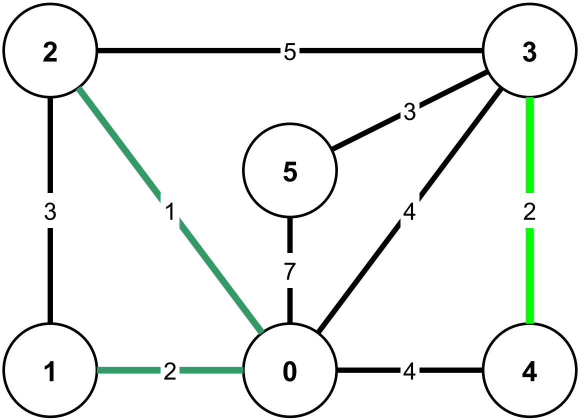
Lösung



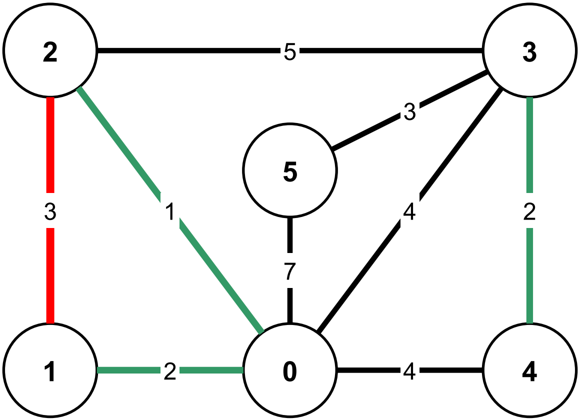
Lösung



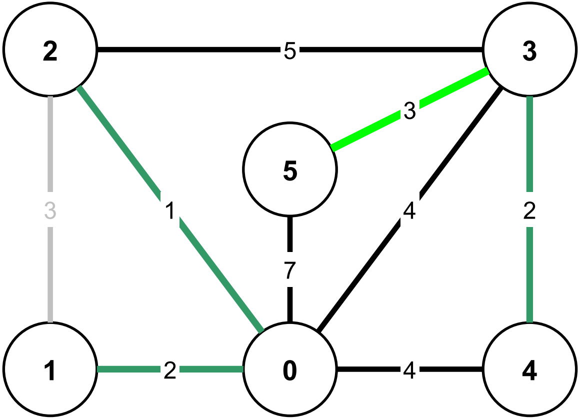
Lösung



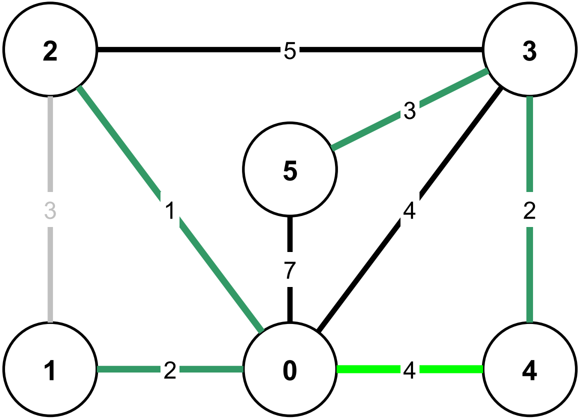
Lösung



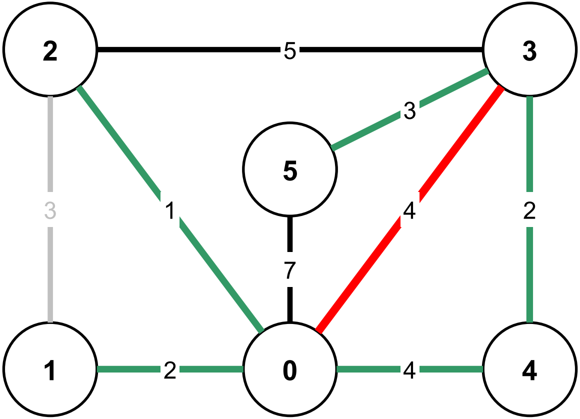
Lösung



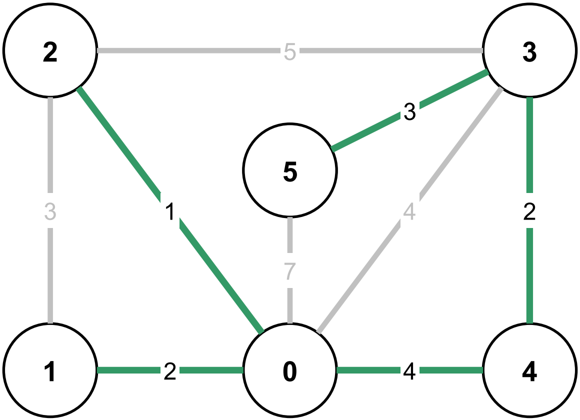
Lösung



Lösung



Lösung



Kruskal

Implementierung - Algorithmus von Kruskal

- sortiere Kanten nach Gewicht
- benutze Union-Find um Zyklen zu detektieren

Kruskal

```cpp
int kruskal(std::vector<edge>& edges, int maxnode) {
    int fullweight = 0;
    UnionFind ufind(maxnode + 1);
    std::sort(edges.begin(), edges.end());
    for (const auto& e : edges) {
        if(!ufind.sameSet(e.from, e.to)) {
            ufind.unify(e.from, e.to);
            fullweight += e.weight;
        }
    }
    return fullweight;
}
```

Kruskal

Für Laufzeiten: $n := |V|$, $m := |E|$

Laufzeit

$$O(m \log(m) + m \cdot \alpha(n)) = O(m \log(m))$$
$$= O(m \log(n^2)) = O(2m \log(n)) = O(m \log(n))$$

Kruskal

Weitere lösbare Probleme

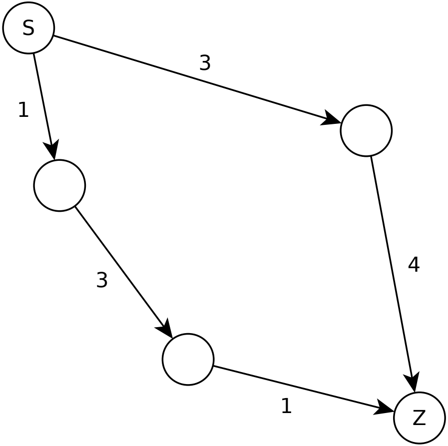
- Maximum Spanning Tree
- „MST" finden, wenn Kanten vorgegeben sind
- Minimum Spanning Forest: mehrere getrennte Bäume
- Minimax-Problem:
  - Finden des Pfades zwischen zwei Knoten mit dem kleinsten Maximalgewicht einer Kante

SSSP (Single Source Shortest Path)

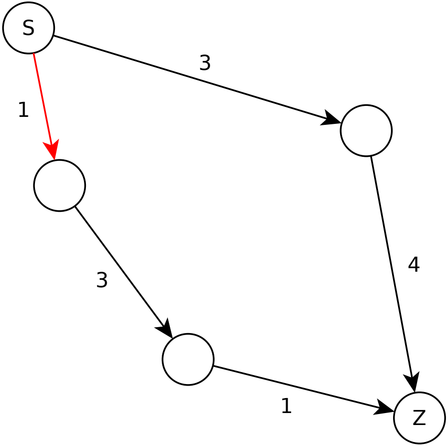
Das Problem

Breitensuche schlägt bei gewichteten Graphen fehl.

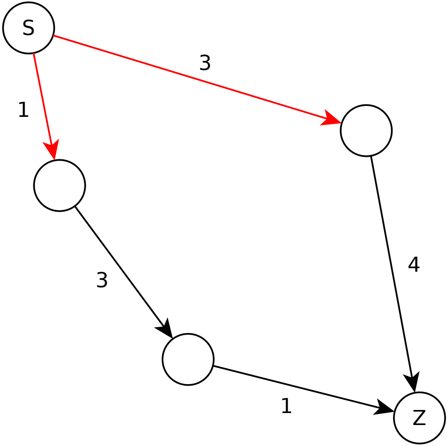
Das Problem



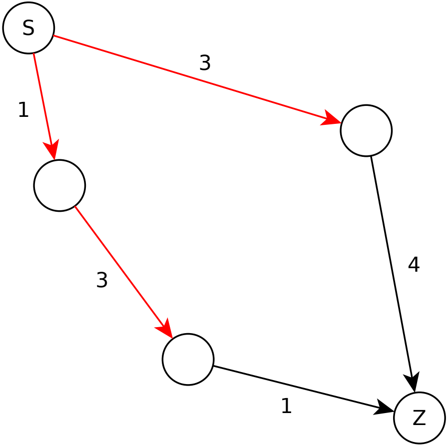
Das Problem



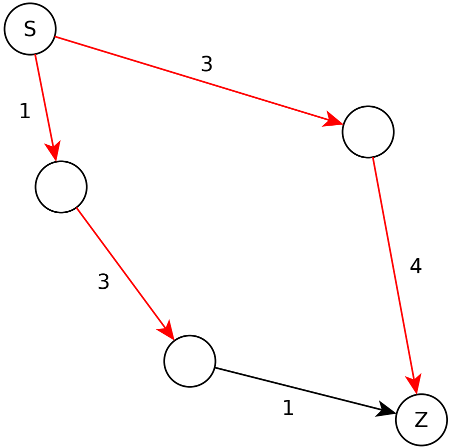
Das Problem



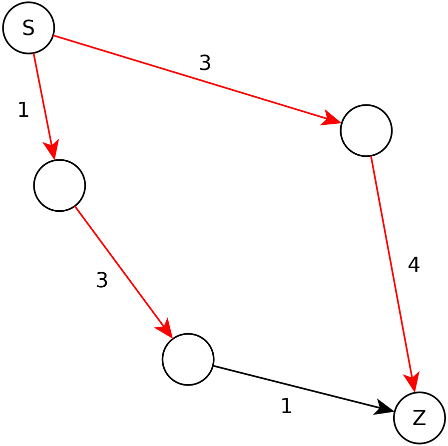
Das Problem



Das Problem



Das Problem



$\Longrightarrow$ Es wird ein Weg der Länge 7 gefunden, obwohl 5 das Optimum ist

Djikstras Algorithmus

- Grundsätzliche Idee: Breitensuche mit Priortiy-Queue (so dass "nähere" Knoten zuerst behandelt werden)
- std :: priority_queue verwendet binären Heap
- $\implies$ Laufzeit von Dijkstra ist $\Theta((n+m)\log n)$
- Nachteil: Funktioniert nicht bei negativen Kantengewichten

Code

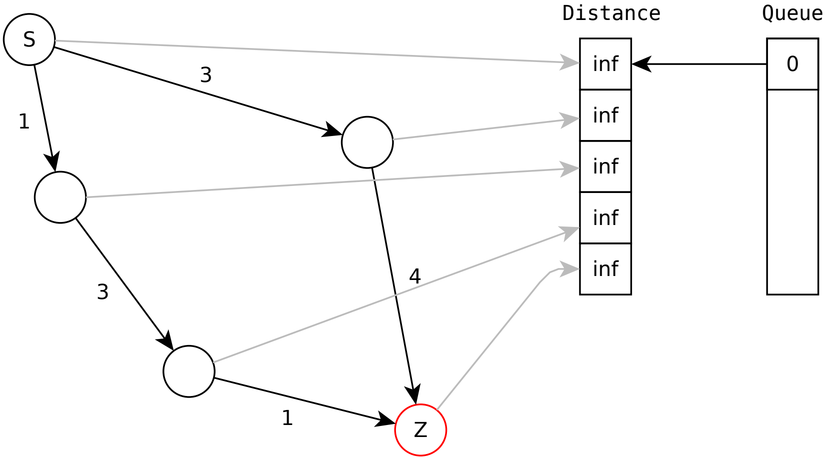
Header:

```
#include<vector>
#include<algorithm>
#include<queue> // not priority_queue!
#include<iostream>

using namespace std;

struct arrival_event {
  int to;
  int weight;
};


bool operator < (const arrival_event& e1, const arrival_event& e2) {
           // inversed
    return e1.weight > e2.weight;
}
```

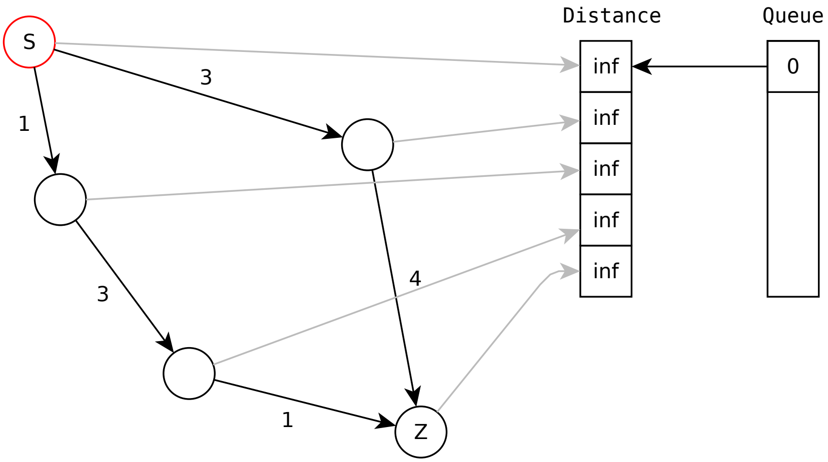
Code

```
vector<int> dijkstra(vector<vector<arrival_event>>& nodes, int startnode) {
  vector<int> distances (nodes.size(), 2000000000);

  priority_queue<arrival_event> todo;

  todo.push({startnode, 0});

  while(!todo.empty()) {
    auto current = todo.top();
    todo.pop();

    if(current.weight < distances[current.to]) {
      distances[current.to] = current.weight;

      for(int i = 0; i < nodes[current.to].size(); i++) {
        arrival_event next = nodes[current.to][i];
        next.weight += current.weight;

        todo.push(next);
      }
    }
  }

  return distances;
}
```

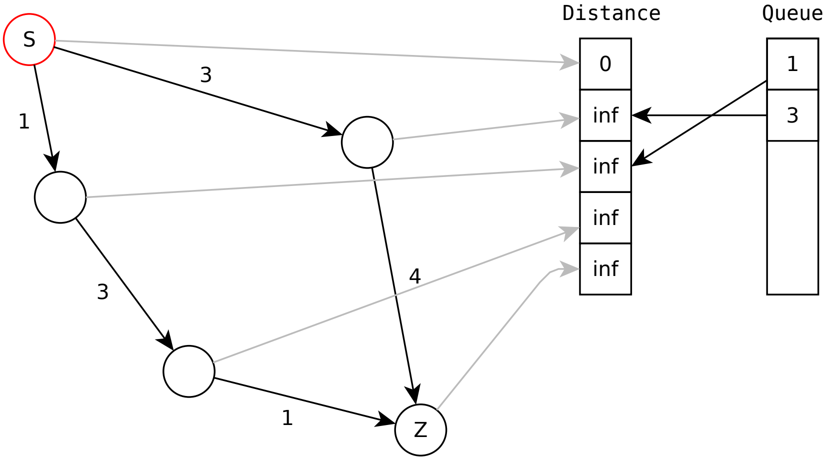
Beispiel



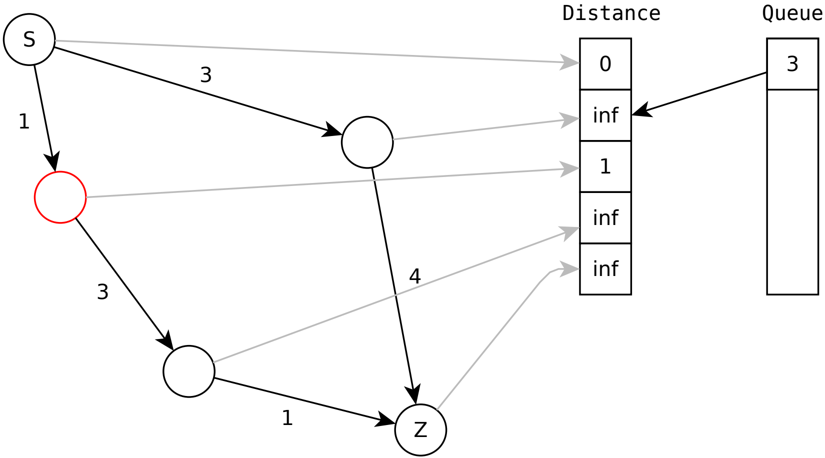
Beispiel



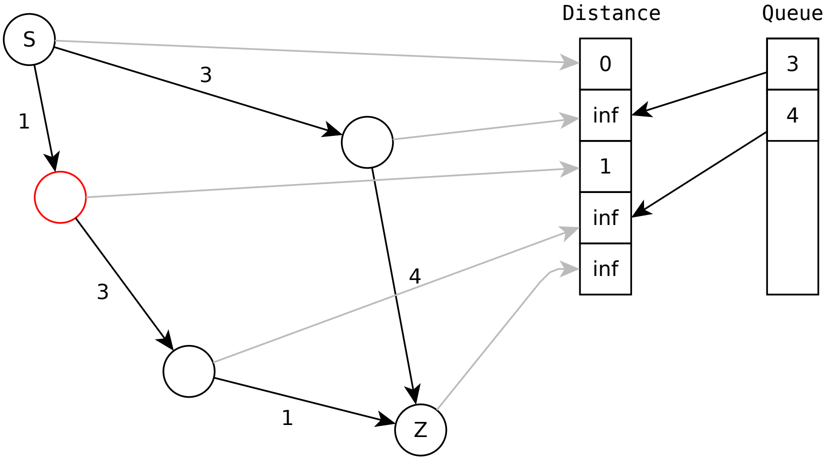
Beispiel



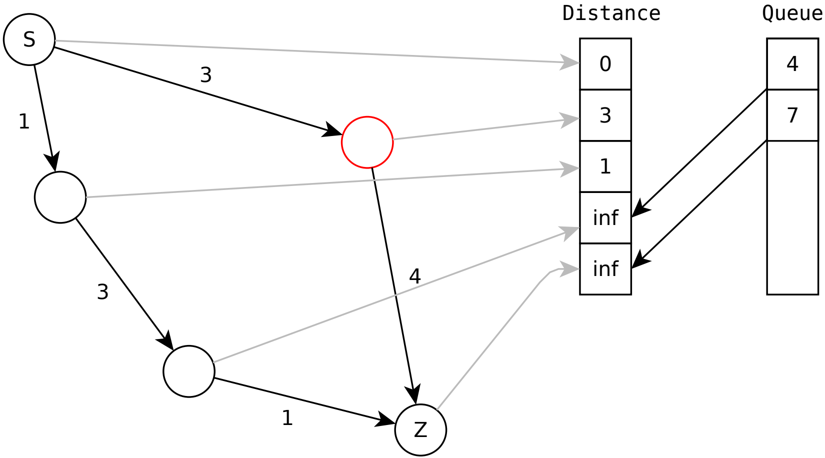
Beispiel



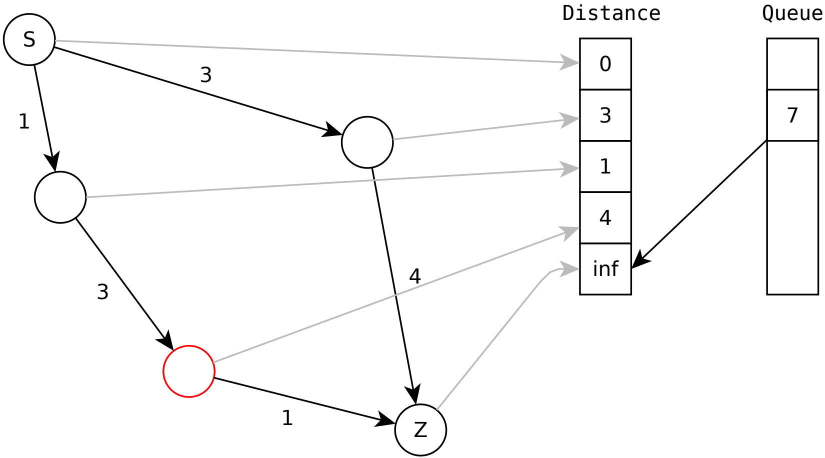
Beispiel



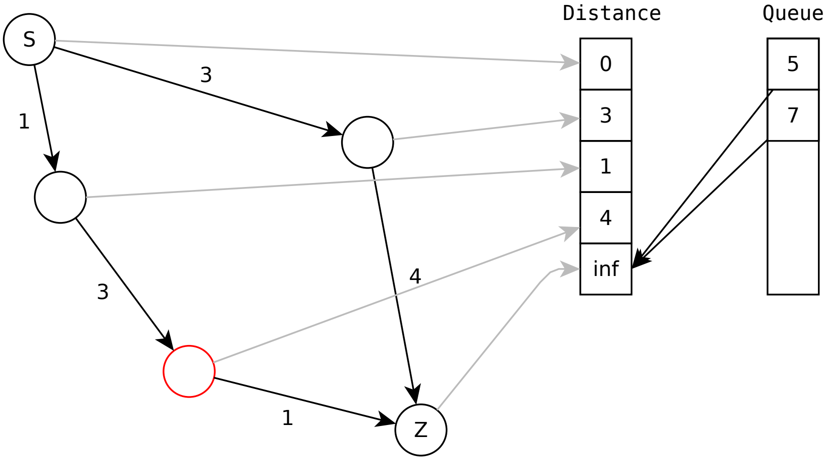
Beispiel



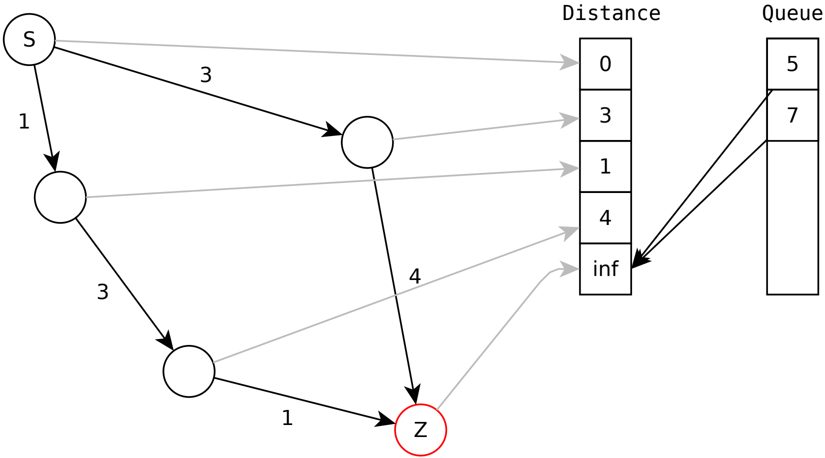
Beispiel



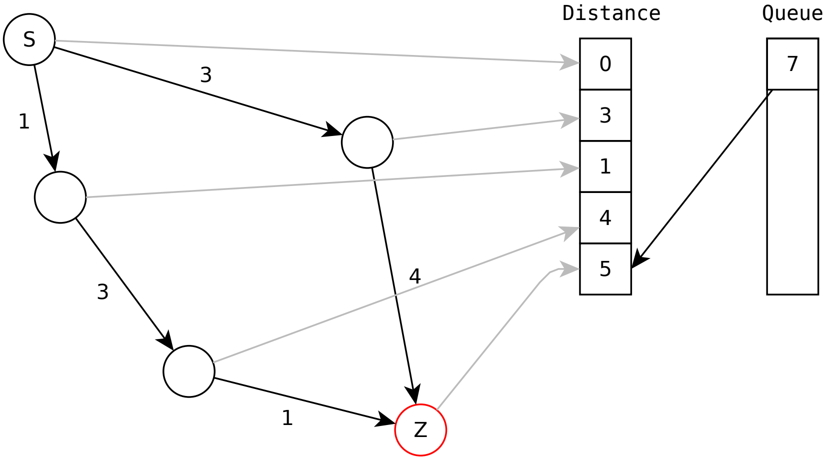
Beispiel



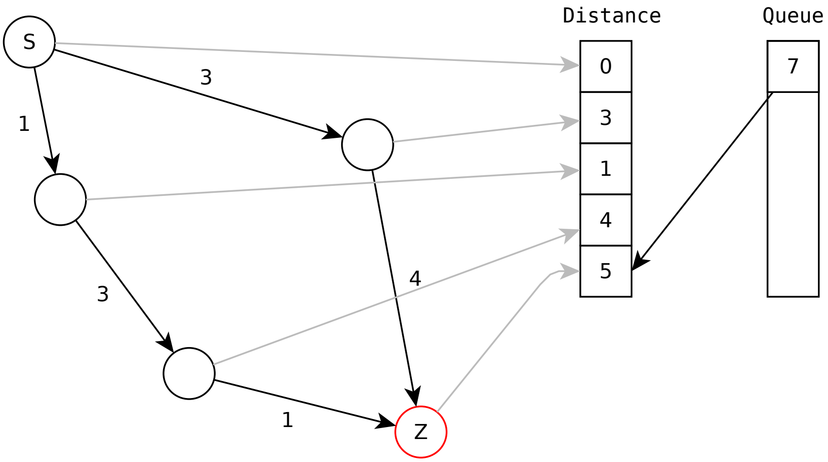
Beispiel



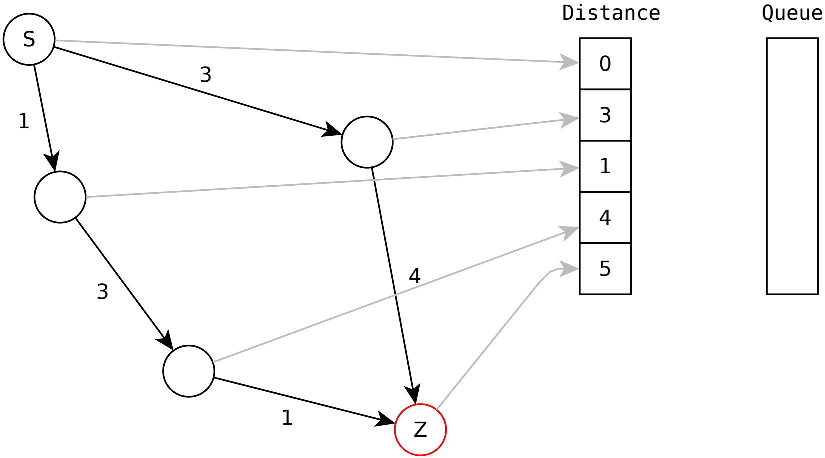
Beispiel



Beispiel

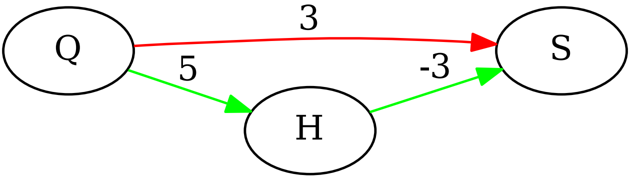


Beispiel



Übersicht

- Problem: Dijkstra kommt nicht mit negativen Kanten zurecht



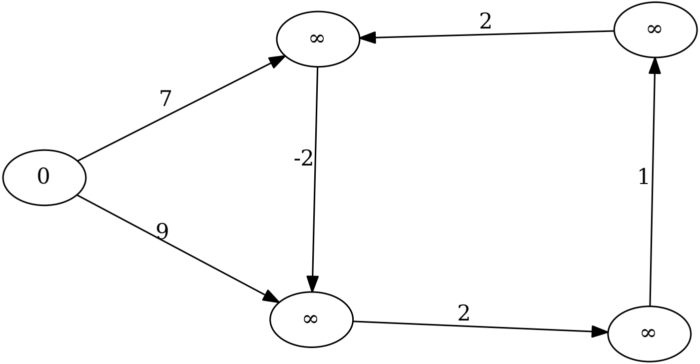
Ansätze

- Lösung: rohe Rechenleistung
- Wichtige Einschränkung: negative Kreise auf irgendeinem Pfad von `Q` zu `S` bedeuten Nichtexistenz eines kürzesten Pfades
- Idee 1: vollständige Tiefensuche.
  - selbst für Brute-Force-Verhältnisse zu langsam (exponentielle Laufzeit)

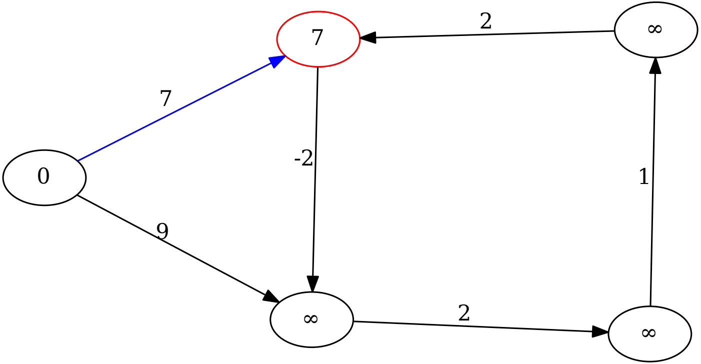
Ansätze

- Idee 2:
  - kürzester Pfad enthält maximal $|V| - 1$ Kanten
  - Enthalte der kürzeste Pfad i Kanten. Falls wir alle kürzesten Pfade mit bis zu $i - 1$ Knoten kennen:
    - Zu den kürzesten Pfaden mit bis zu i Kanten fehlt höchstens eine Kante.
    - Probiere für alle Kanten, ob sie irgendwo einen kürzeren Pfad erzeugen
  - Für $i = 0$ ist die Distanz der Quelle zu sich selbst 0, und die zu allen anderen Knoten inf
- Idee 2 ist offensichtlich vielversprechender, sie führt zum Algorithmus von Bellman und Ford.

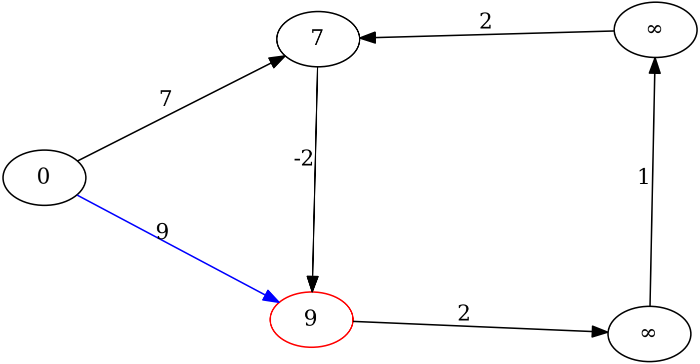
Initialisierung



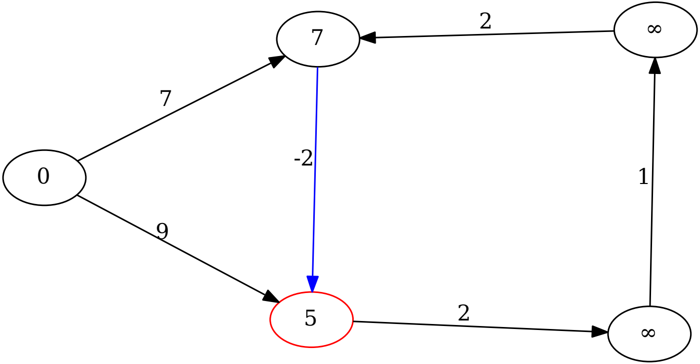
Runde 1



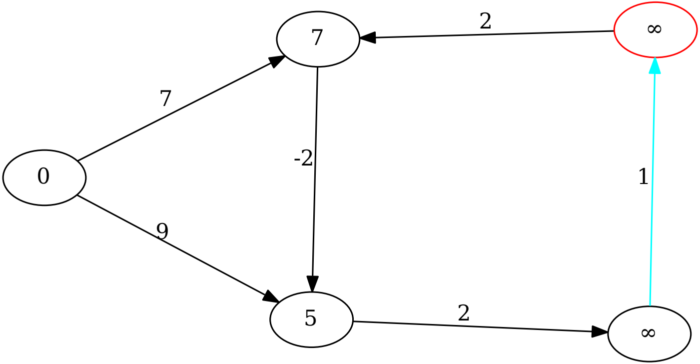
Runde 1



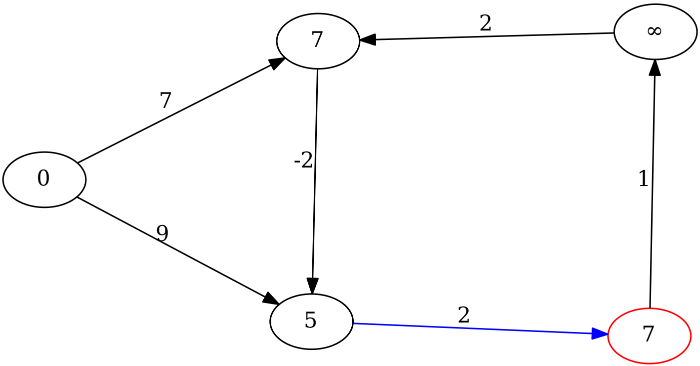
Runde 1



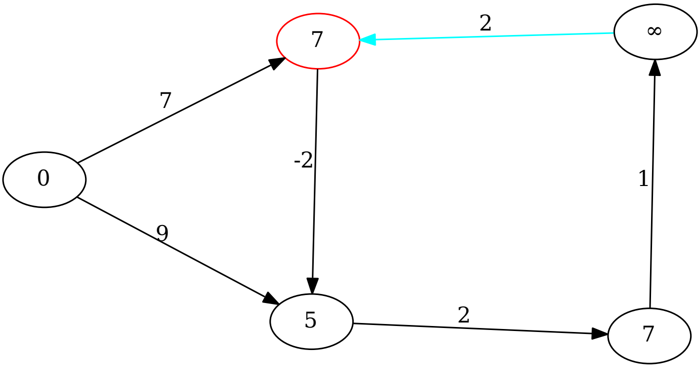
Runde 1



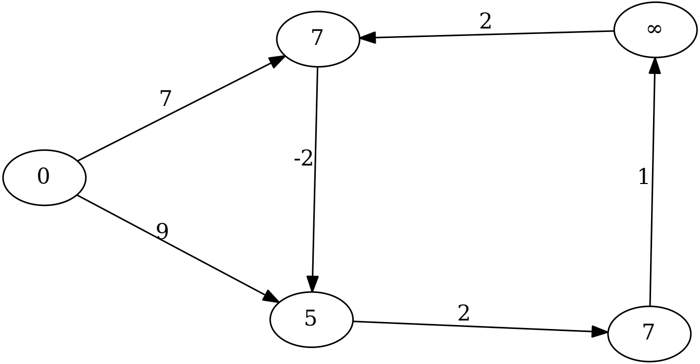
Runde 1



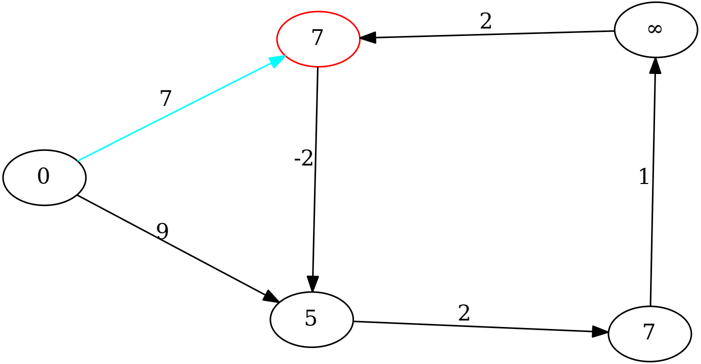
Runde 1



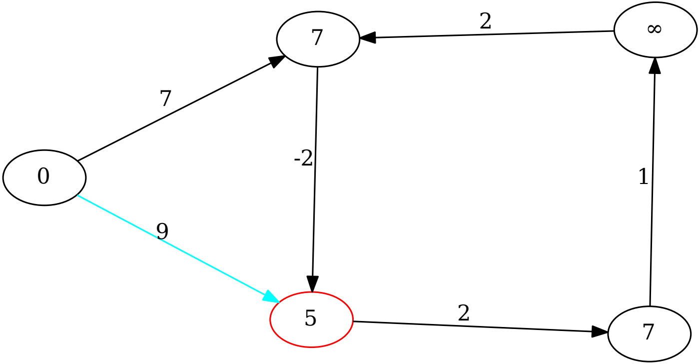
Runde 2



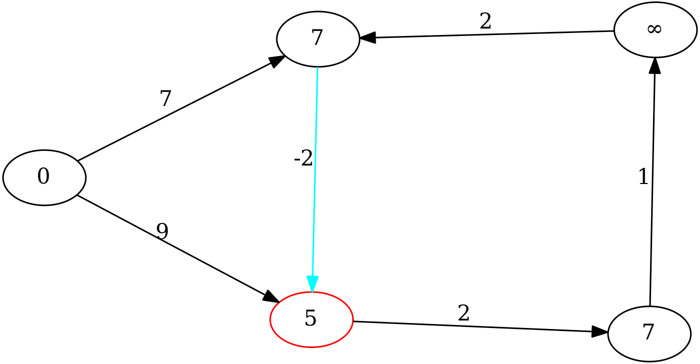
Runde 2



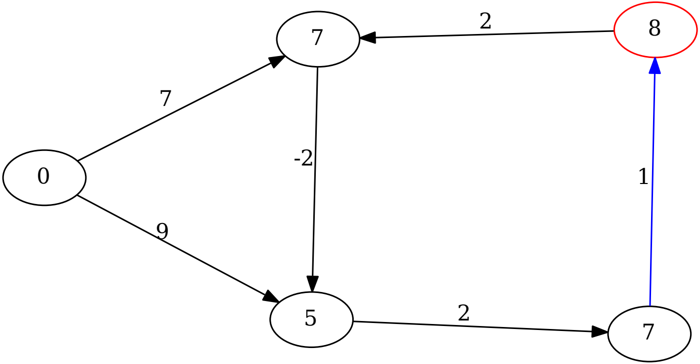
Runde 2



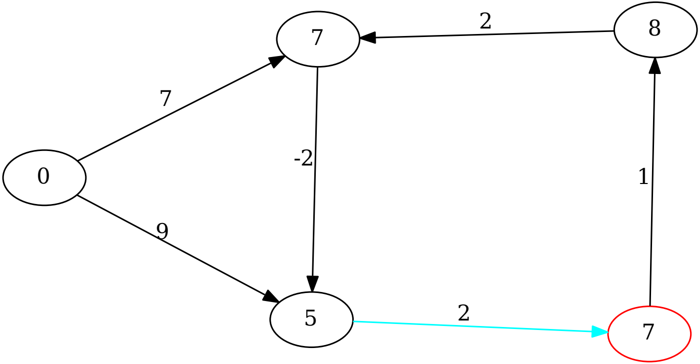
Runde 2



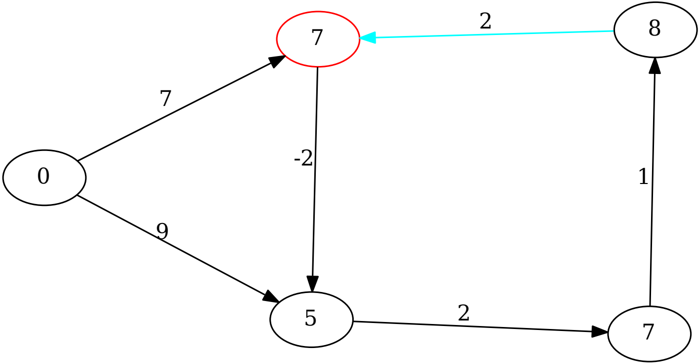
Runde 2



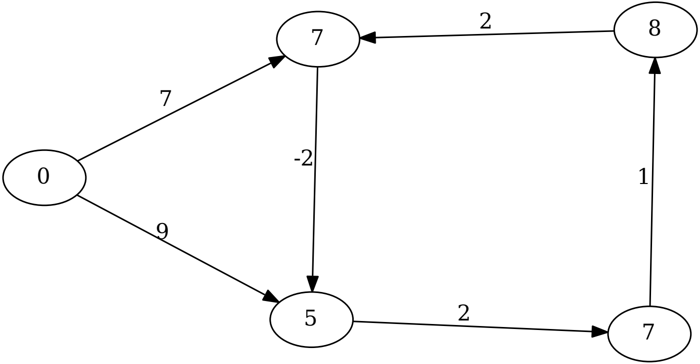
Runde 2



Runde 2



Runde 3 (keine Änderungen → fertig)



Code

```
using node = std::size_t;

struct edge {
    node from;
    node to;
    double dist;
};

const auto infinity = std::numeric_limits<double>::infinity();
```

Code

```cpp
std::vector<dist> bellman_ford(const std::size_t        node_count,
                               const std::vector<edge>& edges,
                               node                     source
) {
    std::vector<double> min_dists(node_count, infinity);
    min_dists[source] = 0;
    for (std::size_t i = 0; i < node_count + 1; ++i) {
        bool changes = false;
        for(const auto& e: edges) {
            const double old_dist = min_dists[e.to];
            const double new_dist = min_dists[e.from] + e.dist;
            if (new_dist < old_dist) {
                min_dists[e.to] = new_dist;
                changes = true;
            }
        }
        if (!changes) { break; }
        if (i == node_count) {
            throw std::runtime_error{"negative cycle"};
        }
    }
    return min_dists;
}
```

Weitere Eigenschaften

- Negative Kreise lassen sich durch eine weitere Anwendung detektieren
- Die Entfernung von nicht über negative Kreise erreichbare Knoten wird immer korrekt ermittelt.
- In jedem negativen Kreis ändert sich im $n + 1$-ten Schritt mindestens eine Entfernung, die Detektion aller Knoten ohne Minimaldistanz ist somit leicht per Breitensuche möglich.

Beurteilung

- Assymptotische Komplexität $\in O(n \cdot m)$
- Profitiert nicht von kurzen Distanzen zwischen Quelle und Senke
- Relativ leicht zu implementieren

Fazit

Kann man schon so machen, meistens will man das aber nicht

All Pairs Shortest Paths (APSP)

Problemstellung

Man hat einen Graphen gegeben, der gewichtet ist. Nun möchte man den kürzesten Pfad zwischen allen Knoten i zu allen Knoten j herausfinden.

APSP - Erster Ansatz

Lösungsansatz

Man verwendet den bereits bekannten SSSP-Algorithmus, und führe diesen nach bedarf aus, d.h. in diesem Fall n-mal.

Laufzeit

$$
\begin{aligned}
& n \cdot O(m + n \cdot log(n)) \\
& = n \cdot O(n^2 + n \cdot log(n)) \\
& = n \cdot O(n^2 + n^2) \\
& = O(n^3)
\end{aligned}
$$

$\implies$ geht es einfacher in etwa der selben Zeit?

APSP - Zweiter Ansatz

Lösungsansatz

Wir wissen: jeder Pfad zwischen zwei Knoten ist entweder bereits der kürzeste, oder es gibt einen Kürzeren Pfad als zwei Verknüpfung anderer Pfade über mindestens einen dritten Knoten.

Genauer

Systematisch in einer Adjazenzmatrix A: Nehme für jeden Pfad $A[i][j] = \min(A[i][j], A[i][k] + A[i][k])$, d.h. entweder der Pfad ist bereits minimal, oder ein Pfad über Knoten k ist kürzer und wird als neues Minimum übernommen. Wenn man nun richtig iteriert, erhält man alle minimalen Pfade.

Code

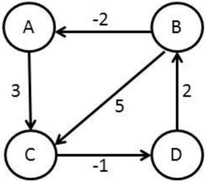
```
for (int k = 0; k < V; k++)
    for (int i = 0; i < V; i++)
        for (int j = 0; j < V; j++)
            A[i][j] = min(
              A[i][j],
              A[i][k] + A[k][j]
            );
```

$\Longrightarrow$ der Aufwand liegt in $O(n^3)$

Beispiel - Urzustand

Anfang

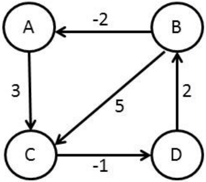
ij	A	B	C	D
A	∞	∞	3	∞
B	-2	∞	5	∞
C	∞	∞	∞	-1
D	∞	2	∞	∞



Beispiel - Über Knoten A

K = A (i über A nach j)

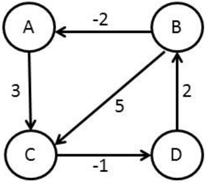
ij	A	B	C	D
A	∞	∞	3	∞
B	-2	∞	1	∞
C	∞	∞	∞	-1
D	∞	2	∞	∞



Beispiel - Über Knoten B

K = B (i über B nach j)

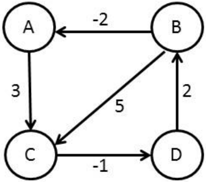
ij	A	B	C	D
A	∞	∞	3	∞
B	-2	∞	1	∞
C	∞	∞	∞	-1
D	0	2	3	∞



Beispiel - Über Knoten C

K = C (i über C nach j)

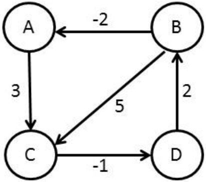
ij	A	B	C	D
A	∞	∞	3	2
B	-2	∞	1	0
C	∞	∞	∞	-1
D	0	2	3	2



Beispiel - Über Knoten D (1)

(1) K = D (i über D nach j)

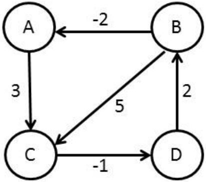
ij	A	B	C	D
A	2	∞	3	2
B	-2	∞	1	0
C	∞	∞	∞	-1
D	0	2	3	2



Beispiel - Über Knoten D (2)

(2) K = D (i über D nach j)

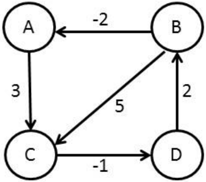
ij	A	B	C	D
A	2	4	3	2
B	-2	∞	1	0
C	∞	∞	∞	-1
D	0	2	3	2



Beispiel - Über Knoten D (3)

(3) K = D (i über D nach j)

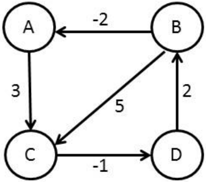
ij	A	B	C	D
A	2	4	3	2
B	-2	2	1	0
C	∞	∞	∞	-1
D	0	2	3	2



Beispiel - Über Knoten D (4)

(4) K = D (i über D nach j)

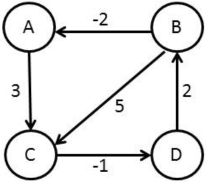
ij	A	B	C	D
A	2	4	3	2
B	-2	2	1	0
C	-1	∞	∞	-1
D	0	2	3	2



Beispiel - Über Knoten D (5)

(5) K = D (i über D nach j)

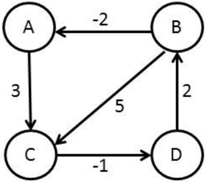
ij	A	B	C	D
A	2	4	3	2
B	-2	2	1	0
C	-1	1	∞	-1
D	0	2	3	2



Beispiel - Über Knoten D (6)

(6) K = D (i über D nach j)

ij	A	B	C	D
A	2	4	3	2
B	-2	2	1	0
C	-1	1	2	-1
D	0	2	3	2



Weitere Anwendungen

- Auch für SSSP - Probleme anwendbar (wenn $|V| < 400$)
- Detektion von negativen oder günstigsten Zyklen möglich $\implies$ ein negativer Zyklus existiert genau dann, wenn ein Diagonaleintrag negativ ist
- Finden des Durchmessers eines Graphen (der längste der kürzesten Pfade)
- Minimax, Maximin

Beurteilung

- \+ Asymptotische Komplexität $\in O(n^3)$ und mit Speicher $\in O(n^2)$
- \+ Sehr leicht zu implementieren (Vierzeiler)
- \+ Für andere Probleme günstig anzuwenden, wenn $|V| < 400$
- – – Für andere Probleme **nur** günstig anzuwenden, wenn $|V| < 400$

$\Longrightarrow$ Gut für das ursprüngliche Problem

$\Longrightarrow$ Auch nützlich für andere Probleme, solange $|V| < 400$

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Kriterium	**Dijkstra**	**Bellman Ford**	**Floyd Warshall**
Laufzeit	$O(n+m)\log(n)$	$O(n \cdot m)$	$O(n^3)$
Max. Größe	$n, m \leq 300K$	$n \cdot m \leq 10M$	$n \leq 400$
Ungewichtet	Ok	Schlecht	I.A. Schlecht
Gewichtet	Bestes	Ok	I.A. Schlecht
Neg. Gewichte	Ok	Ok	I.A. Schlecht
Neg. Zyklen	Nein	Aufspürbar	Aufspürbar
Kleine Graphen	Overkill	Overkill	Bestes

Tabelle: Übersicht

Erinnerung: $n := |V|$ und $m := |E|$