

Die $P \neq NP$ -Vermutung

6. Mai 2015

Adrian Hein, Florian Weber

Einführung

Turingmaschine

- Mathematische Abstraktion eines Computers
- Besteht aus:
 - Steuerwerk
 - unendlich langes Steuerband
 - Lese- und Schreibkopf

Turingmaschine

- Pro Schritt wird:
 - ein Zeichen gelesen
 - ein Zeichen geschrieben
 - eine Bewegung ausgeführt
- Jeder Schritt ist nur abhängig von:
 - aktuellem Zeichen auf dem Band
 - aktuellem Zustand der TM
- Eine TM hat endlich viele Zustände
- Man kann Zustände als Endzustände definieren

Turingmaschine

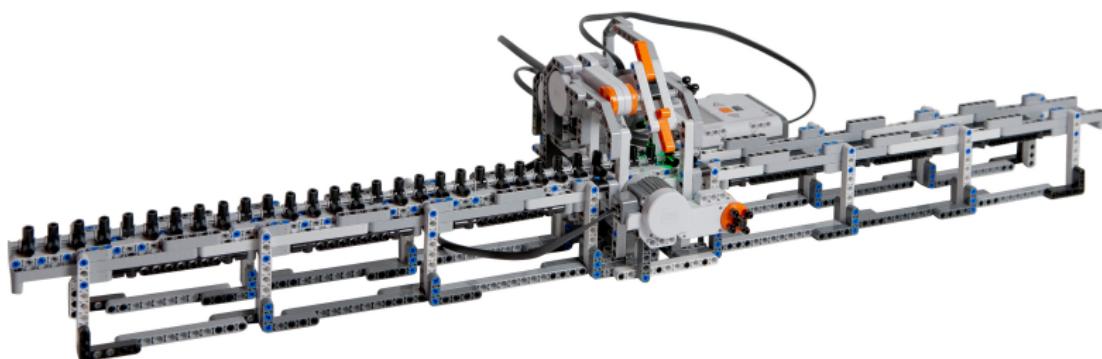


Abbildung 1:<http://www.legoturingmachine.org>

Turingmaschine formal

- Formal besteht eine TM aus:
 - Q , die endlichen Zustandsmenge
 - Σ , das endlichen Eingabealphabet
 - Γ , das endliche Bandalphabet und es gilt $\Sigma \subset \Gamma$
 - $\delta: (Q \setminus \{q_f\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, 0, R\}$ ist die (partielle) Überführungsfunktion
 - $q_0 \in Q$ ist der Anfangszustand
 - $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ steht für das leere Feld
 - $q_{accept} \in Q$ ist der akzeptierende Zustand

Turingmaschine (nichtdeterministisch)

- Ähnlich der deterministischen TM
- NDTM hat allerdings zwei Übergangsfunktionen δ_0 und δ_1
- Endet eine Sequenz von Entscheidungen in q_{accept} gilt die Eingabe als akzeptiert
- Im Gegensatz zur deterministischen TM nicht ohne Weiteres realisierbar

Turingmaschine (Mehrband)

- Hat anstatt einem Band mehrere mit jeweils einem Lese- und Schreibkopf
- Kann durch eine TM mit einem Band simuliert werden
- Aus k Bändern werden $2k$ Spuren auf dem einen Band der TM:
 - Spur 1 enthält Band 1, Spur 2 die Position auf Band 1, Spur 3 enthält Band 2, ...
- Alternativ werden aus k Bändern $k + 1$ Spuren:
 - auf den ersten k Spuren stehen die k Bänder
 - auf der Spur $k + 1$ wird die Kopfposition markiert
 - bewegen sich die einzelnen Köpfe in unterschiedliche Richtungen werden die Symbole auf den entsprechenden Spuren verschoben
- Mehrband TMs sind genauso mächtig wie normale TMs aber evt. anschaulicher

Die Klasse P

- Enthält alle Entscheidungsprobleme die in Polynomialzeit von einer TM lösbar sind
- Probleme in P gelten als praktisch lösbar
- Ist unter Komplementbildung abgeschlossen
- Beispiele sind:
 - Lineare Programmierung/Optimierung
 - PRIMES (AKS-Primzahltest)
 - HORNSAT

Die Klasse NP (formal)

- Eine Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ liegt in NP, wenn es:
 - ein Polynom $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 - sowie eine in Polynomialzeit laufende TM M , den sogenannten Verifizierer für L , gibt
 - sodass für jedes $x \in \{0, 1\}^*$ gilt:
 - $x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0, 1\}^{p(|x|)}$ sodass $M(x, u) = 1$
- In diesem Fall nennt man u ein Zertifikat für x .

Die Klasse NP (alternativ)

- Alle Entscheidungsprobleme die von einer NDTM M in Polynomialzeit gelöst werden
- x ist eine Lösung, wenn es eine Sequenz von Entscheidungen gibt, sodass M in q_{accept} hält.
 - es gilt in diesem Fall $M(x) = 1$
- Gibt es keine Sequenz für die M in q_{accept} hält, gilt $M(x) = 0$
- Ursprüngliche Definition, deswegen auch NP (nondeterministic polynomial time)
- Beide Definitionen äquivalent, da die Sequenz von Entscheidungen die zu q_{accept} führt als Verifizierer betrachtet werden kann

Die Klasse coNP

- Alle Sprachen, deren Komplement in NP liegt
- NICHT das Komplement zu NP
- Beispiel: Kontradiktion

Reduktion

- A heißt reduzierbar auf B , wenn es einen Algorithmus gibt, der aus jedem Problem aus A in Polynomialzeit ein Problem aus B macht
- Gibt es einen Algorithmus zur Lösung von B und gilt $A \preceq B$, so kann dieser auch A lösen
- Man sagt B ist mindestens so schwer wie A

NP-Vollständigkeit

- Gilt $L \preceq L'$, $\forall L \in \text{NP}$, so nennt man L' NP-schwer
- Liegt L' selber auch in NP nennt man L' NP-vollständig
- Um NP-schwere für L' zu zeigen genügt es $L \preceq L'$ für ein NP-schweres L zu zeigen
- Ist ein Problem A NP-schwer, so ist das entsprechende Problem A' logischerweise coNP-schwer

Cook-Levin Theorem

Stephen Cook und Leonid Levin

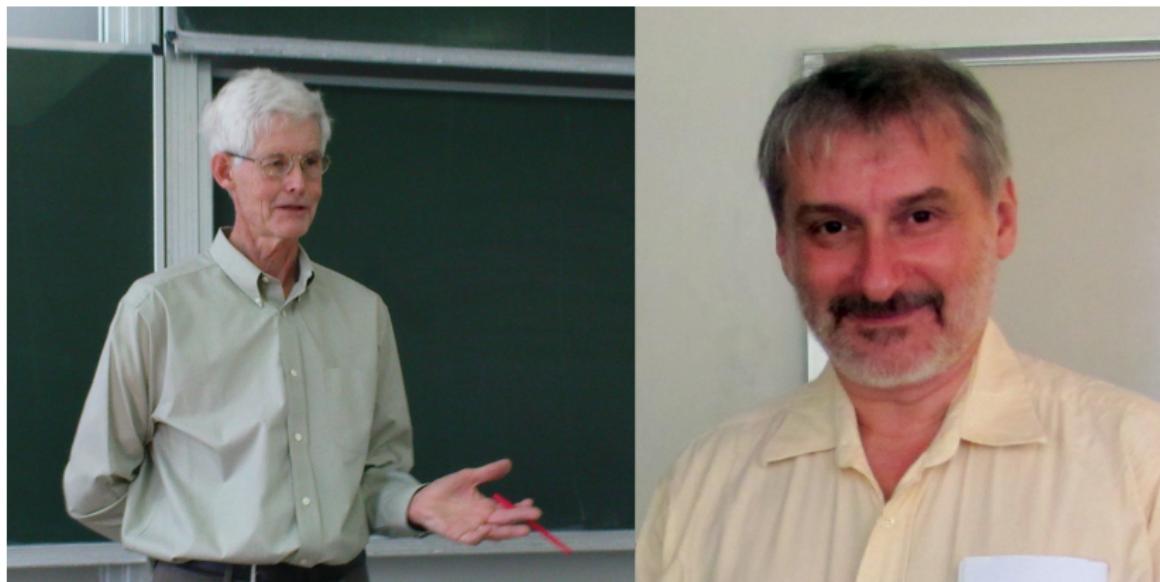


Abbildung 2:Stephen Cook (CC-BY-SA 3.0, Jiří Janíček), Leonid Levin (CC-BY-SA 3.0, Sergio01)

konjunktive Normalform

- Jede boolsche Funktion lässt sich in konjunktiver Normalform darstellen
- TMs die Sprachen entscheiden, sind boolsche Funktionen
- Die Größe einer KNF für n Variablen liegt in $O(n \cdot 2^n)$ o.B.
- Siehe auch: TI1 (Digitaltechnik)

Reduktion * auf SAT

- $O(n \cdot 2^n)$ offensichtlich zu groß.
- Sei M eine TM die eine NP-vollständige Sprache entscheidet und die
 - ein Eingabe- und ein Ausgabe/Arbeitsband habe
 - bei der die Position des Kopfes in Schritt i nur von der Länge der Eingabe abhängt
 - gültige Annahme, da in $O(f(n)^2)$ simulierbar
- Sei Q die Menge der Zustände von M
- Sei Γ das Bandalphabet von M
- Sei $\langle a, b, q \rangle_i \in Q \times Q \times \Gamma$ der Snapshot der TM in Schritt i

Reduktion * auf SAT

- Snapshots können offensichtlich als Zeichenketten konstanter Länge kodiert werden.
- Ein Snapshot S_i hängt ab von:
 - S_{i-1}
 - einem Zeichen fester Position der Eingabe
 - dem letzten Snapshot an der selben Stelle
- Es gibt für jedes i genau einen korrekten Snapshot
- Daraus folgt: Es gibt eine Funktion f , die zwei Snapshots und eine Position auf dem Eingabeband auf einen neuen Snapshot abbilden:

$$S_i = f(S_{i-1}, S_{\text{prev}(i)}, E_{\text{inputpos}(i)})$$

Reduktion * auf SAT

- Um eine Lösung für die betrachtete Sprache zu finden, muss man eine Abfolge von TM-Schritten finden, die zum Ergebnis führt.
- Die einzelnen Schritte (und damit die Snapshotkette) kodieren eine Lösung, sind aber zunächst unbekannt.
- Die Snapshotkette lässt sich aber als polinomiale KNF schreiben.
- Angenommen, es gäbe einen Polyzeit-Entscheider für SAT, so könnte dieser damit auch die Kette von Snapshots für andere Probleme finden, und damit diese in Polyzeit entscheiden!

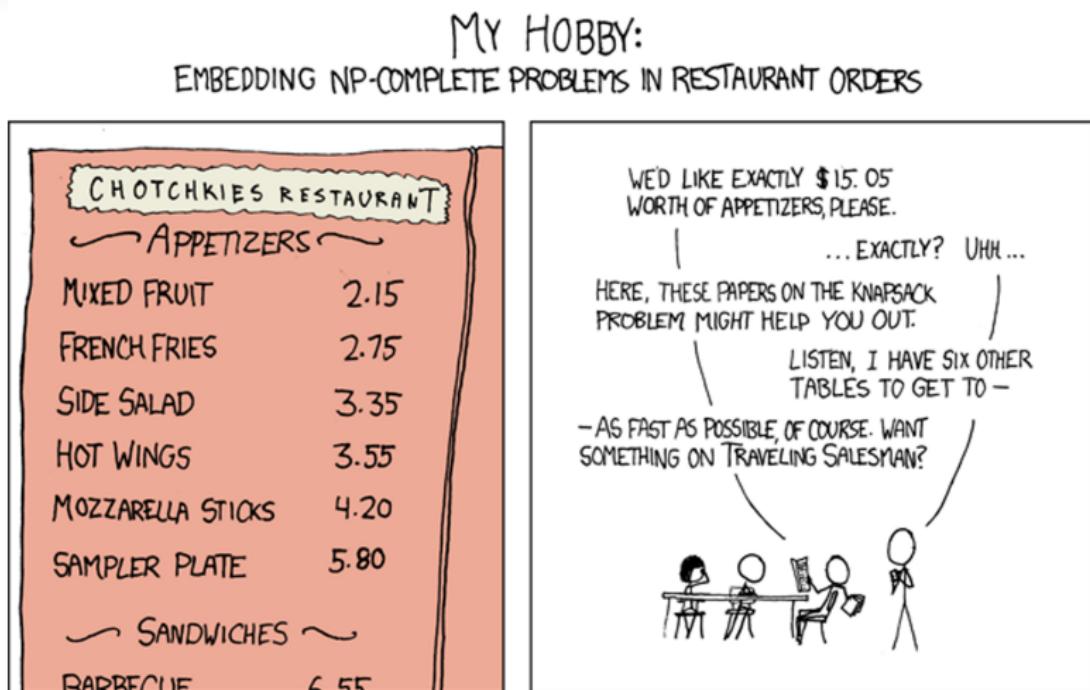
Reduktion SAT auf 3SAT

Um eine SAT-Klausel $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)$ nach 3SAT zu konvertieren, genügt es, sie wie folgt zu schreiben:

$$(a_1 \vee a_2 \vee h_1) \wedge (\overline{h_1} \vee a_3 \vee h_2) \wedge \dots \wedge (\overline{h_{n-2}} \vee a_{n-1} \vee a_n)$$

Hierbei sind $h_1 \dots h_{n-2}$ neu eingeführte Hilfsvariablen.

Wichtige NP-vollständige Probleme

Abbildung 3:CC-BY-NC 2.5, Randall Munroe, <https://xkcd.com/287/>

INDSET

Besitzt ein Graph G mindestens n paarweise nicht über eine Kante verbundene Knoten?

INDSET ist NP-vollständig. Hierzu definieren wir eine Transformation beliebiger 3SAT-Instanzen zu Graphen:

- Erzeuge für jede Klausel eine Clique, deren Knoten jeweils eine gültige Belegung repräsentieren.
- Verbinde alle nicht verbundenen Knoten, die gemeinsam zu einer widersprüchlichen Belegung führen würden.
- Bestimme nun eine stabile Menge der Größe n . Deren Knoten kodieren nun eine gültige Belegung für die 3SAT-Instanz.

0/1 IPROG

- Gegeben: m lineare Ungleichungen über n Variablen
- Gesucht: eine Lösung für das System wobei die Variablen nur 0 oder 1 annehmen können
- In NP: die Belegung der Variablen kann als Zertifikat gesehen werden
- NP-vollständig: SAT \preceq 0/1 IPROG, da jede Klausel als Ungleichung aufgefasst werden kann
 - $u_1 \vee \overline{u_2} \vee \overline{u_3}$ kann ausgedrückt werden durch
$$u_1 + (1 - u_2) + (1 - u_3) \geq 1$$

Traveling Salesman (TSP)

Gibt es zu n Städten einen Rundweg der kürzer ist als b ?

- In NP: die Reihenfolge der Städte kann als Zertifikat betrachtet werden
- NP-Vollständig: HAMILTON \preceq TSP, indem man jede Kante des Graphs mit 1 gewichtet
 - Gibt es einen Pfad der Länge $l = |V|$ so hat der Graph einen Hamiltonkreis

Andere Klassen

EXP und NEXP

- Probleme deren Zertifikat in exponentieller Zeit verifiziert bzw. gefunden werden kann.
- In vieler Hinsicht analog zu P und NP, aber in der Praxis weniger interessant.

Platzbasierte

- $L \subseteq NL$
 - logarithmischer Platz
- $PSPACE = NPSPACE$
 - polynomieller Platz
- $EXPSPACE = NEXPSPACE$
 - exponentieller Platz

Es gilt:

- $L \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE$
- $NL \subset PSPACE$

Sonstige

- NPI (NP-Intermediate)
 - NP-Probleme, weder in P, noch NP-vollständig
 - Existenz unbewiesen
- BQP, QMA, ...
 - Analoge Klassen für Quantencomputer

Indizien

P \neq NP

- Unüberschaubar viele Probleme in P und NP. Trotz enormem Aufwand nicht eine einzige Reduktion.
- Reduktionen oft um ein ϵ nicht polynomiell. Warum, wenn P = NP?
- Existenzbeweise meist leichter als Nichtexistenzbeweise. Deswegen schwer?
- NL \subset PSPACE, eine der Untermengenrelationen dazwischen **muss** also echt sein.

coNP \neq NP

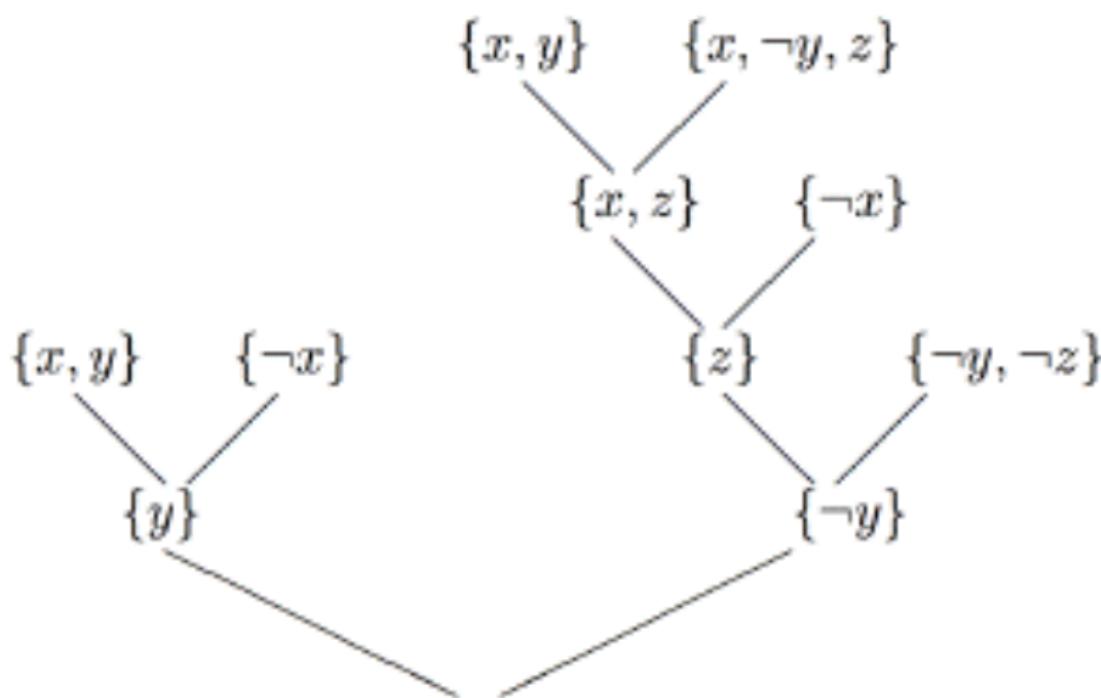
- Bisher wurde noch für kein coNP-schweres Problem ein polynomielles Zertifikat gefunden
- Es konnte noch für kein NP-schweres Problem nachgewiesen werden, dass es in coNP liegt
- Es konnte noch für kein Problem aus $NP \cap coNP$ NP-schwere bzw. coNP-schwere nachgewiesen werden

Resolution als Indiz für $\text{coNP} \neq \text{NP}$

- Resolution prüft ob eine KNF eine Kontradiktion ist
- Wähle 2 Klauseln C_1, C_2 , sodass ein Literal u in C_1 und seine Negierung \bar{u} in C_2 vorkommen
- Bilde eine neue Klausel $C_3 = C_1 \setminus \{u\} \vee C_2 \setminus \{\bar{u}\}$
- $C_1 = (x \vee \bar{y} \vee z)$ und $C_2 = (y \vee z)$ werden zu $C_3 = (x \vee z)$
- Es gilt $C_3 = \text{false} \Rightarrow C_1 \wedge C_2 = \text{false}$
- Kann man eine leere Klausel herleiten ist die Formel eine Kontradiktion

Resolution Beispiel

$$F_3 = \{\{x, y\}, \{x, \neg y, z\}, \{\neg x\}, \{\neg y, \neg z\}\}$$



Resolution als Indiz für $\text{coNP} \neq \text{NP}$

- 1985 bewies Haken eine untere Schranke für die Größe des Resolutionsbeweises für das Pidgeonhole Principle
- Diese ist $(1.49^{0.01})^n$ und unabhängig vom gewählten Algorithmus
- Aufbauend auf Hakens Beweis wurden exponentielle untere Schranken auch für andere Probleme gezeigt
 - mittels Resolution ist $\text{coNP} = \text{NP}$ nicht beweisbar
 - \Rightarrow Indiz für $\text{coNP} \neq \text{NP}$

Implikationen

Philosophisch

- In den Naturwissenschaften wären Hypothesen mit vergleichbarer Faktenlage als Theorien anerkannt.
 - „nur“ ein Problem weil Informatik eine Strukturwissenschaft ist
- Folgen oft völlig unintuitiv:
 - Warum sollte es keine Suchprobleme geben, die sich nicht besser als mit brute-force lösen lassen?
 - Insbesondere bei nichtdeterministischen TMs: Polyzeitreduktion praktisch nicht vorstellbar.

Kryptographisch

- Nicht **zwingend** katastrophal
 - Feste aber große Exponenten reichen vermutlich auch:
 $2^{512} \ll 512^{100}$
 - Heutige Krypto meist nicht NP-vollständig (Faktorisierung in NPI vermutet)
 - Quantencomputer sind hier eine **viel** realere Bedrohung. (\rightarrow Shor-Algorithmus)
- Andererseits: Passwort raten, leicht gemacht?
 - Gibt es ein Passphrase der Länge $\leq n$ die diese Datei entschlüsselt? $\in \text{NP}$

P = NP

- Es gäbe keine Klasse NPI

coNP ?= NP

- Aus $P = NP$ folgt automatisch $coNP = NP$
 - Umkehrung gilt nicht automatisch
- Allerdings folgt aus $coNP \neq NP$ automatisch $P \neq NP$:
 - man wählt ein NP-vollständiges Problem L
 - das Komplement \bar{L} von L liegt laut Definition in $coNP$
 - würde $P = NP$ gelten, gilt $L \in P$
 - da P unter Komplementbildung abgeschlossen ist gilt $\bar{L} \in P$
 - da gilt $P = NP$ gilt $\bar{L} \in NP$
 - daraus würde folgen $coNP = NP$ was ein Widerspruch ist

Probleme zwischen P und NP-Vollständig

- Gilt $P \neq NP$ so gibt es eine Klasse NPI für die gilt:
 - $A \in NPI$ gdw. $A \notin P$ und A ist nicht NP-Schwer
- Wurde von Richard Ladner 1975 bewiesen
- Er konstruierte ein künstliches Problem welches unter der Annahme $P \neq NP$ in NPI liegt
- Es ist nicht sicher ob es “natürliche” Probleme in NPI gibt

Vermutete Probleme in NPI

- Man vermutet, dass die Primfaktorzerlegung in NPI liegt
- Bisher noch kein Algorithmus in Polynomialzeit gefunden
- Noch kein Beweis für NP-Schwere
- Aktuelle Kryptographie baut darauf auf (RSA)

Umgang mit NP-vollständigen Problemen



Abbildung 5:<http://everfalling.deviantart.com/art/DON-T-PANIC-15975789>

Umgang mit NP-vollständigen Problemen

- Existieren vielleicht gute Näherungslösungen?
- Ist der Worst-Case wirklich wahrscheinlich?
- Gibt es andere Modelierungen in P?
- Ist n wirklich so groß, dass NP-Vollständigkeit ein Problem darstellt?