Die P $\neq$ NP-Vermutung

6. Mai 2015

Adrian Hein, Florian Weber

Einführung

Turingmaschine

- mathematische Abstraktion eines Computers
- besteht aus
  - Steuerwerk
  - unendlich langes Steuerband
  - Lese- und Schreibkopf

Turingmaschine

- pro Schritt wird
  - ein Zeichen gelesen
  - ein Zeichen geschrieben
  - eine Bewegung ausgeführt
- jeder Schritt ist nur abhängig von
  - aktuellem Zeichen auf dem Band
  - aktuellem Zustand der TM
- eine TM hat endlich viele Zustände
- man kann Zustände als Endzustände definieren

Turingmaschine formal

- formal besteht eine TM aus
  - Q, die endlichen Zustandsmenge
  - Σ, das endlichen Eingabealphabet
  - Γ, das endliche Bandalphabet und es gilt $\Sigma \subset \Gamma$
  - $\delta\colon (Q \setminus \{q_f\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, 0, R\}$ ist die (partielle) Überführungsfunktion
  - $q_0 \in Q$ ist der Anfangszustand
  - $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ steht für das leere Feld
  - $q_{accept} \in Q$ ist der akzeptierende Zustand

Turingmaschine (nichtdeterministisch)

- ähnlich der deterministischen TM
- NDTM hat allerdings zwei Übergangsfunktionen δ_0 und δ_1
- endet eine Sequenz von Entscheidungen in q_{accept} gilt die Eingabe als akzeptiert
- im Gegensatz zur deterministischen TM nicht ohne Weiteres realisierbar

Die Klasse P

- enthält alle Entscheidungsprobleme die in Polynomialzeit von einer TM lösbar sind
- Probleme in P gelten als praktisch lösbar
- Beispiele sind:
  - Lineare Programmierung/Optimierung
  - PRIMES (AKS-Primzahltest)
  - HORNSAT

Die Klasse NP (formal)

Eine Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ liegt in NP, wenn es ein Polynom $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sowie eine in Polynomialzeit laufende TM M, den sogenannten Verifizierer für L, gibt, sodass für jedes $x \in \{0,1\}^*$ gilt:
$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0,1\}^{p(|x|)}$ sodass $M(x,u) = 1$
In diesem Fall nennt man u ein Zertifikat für x.

Die Klasse NP (alternativ)

- alle Entscheidungsprobleme die von einer NDTM M in Polynomialzeit gelöst werden
- x ist eine Lösung, wenn es eine Sequenz von Entscheidungen gibt, sodass M in q_{accept} hält.
  - es gilt in diesem Fall $M(x) = 1$
- gibt es keine Sequenz für die M in q_{accept} gilt $M(x) = 0$
- ursprüngliche Definition, deswegen auch NP (nondeterministic polynomial time)
- beide Definitionen äquivalent, da die Sequenz von Entscheidungen die zu q_{accept} führt als Verifizierer betrachtet werden kann

Die Klasse coNP

- alle Sprachen, deren Komplement in NP liegt
- NICHT das Komplement zu NP
- Beispiel: Kontradiktion

Reduktion

- A heißt reduzierbar auf B, wenn es einen Algorithmus gibt, der aus jedem Problem aus A in Polynomialzeit ein Problem aus B macht
- gibt es einen Algorithmus zur Lösung von B und gilt $A \preceq B$, so kann dieser auch A lösen
- man sagt B ist mindestens so schwer wie A

NP-Vollständigkeit

- gilt $L \preceq L'$, $\forall L \in \mathrm{NP}$, so nennt man L' NP-schwer
- liegt L' selber auch in NP nennt man L' NP-vollständig
- um NP-schwere für L' zu zeigen genügt es $L \preceq L'$ für ein NP-schweres L zu zeigen
- ist ein Problem A NP-schwer, so ist das entsprechende Problem A' logischerweise coNP-schwer

Cook-Levin Theorem

Reduktion * auf SAT

Reduktion SAT auf 3SAT

Wichtige NP-vollständige Probleme

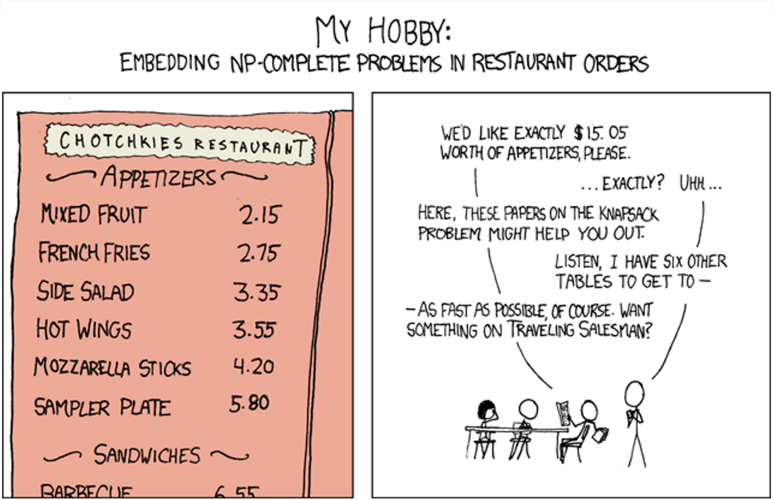


Abbildung 1:CC-BY-NC 2.5, Randall Munroe, https://xkcd.com/287/

INDSET

0/1 IPROG

- gegeben: m lineare Ungleichungen über n Variablen
- gesucht: eine Lösung für das System wobei die Variablen nur 0 oder 1 annehmen können
- in NP: die Belegung der Variablen kann als Zertifikat gesehen werden
- NP-vollständig: SAT $\preceq$ 0/1 IPROG, da jede Klausel als Ungleichung aufgefasst werden kann
  - $u_1 \vee \overline{u_2} \vee \overline{u_3}$ kann ausgedrückt werden durch $u_1 + (1 - u_2) + (1 - u_3) \geq 1$

Andere Klassen

EXP und NEXP

Sonstige

Indizien

$P \neq NP$

coNP $\neq$ NP

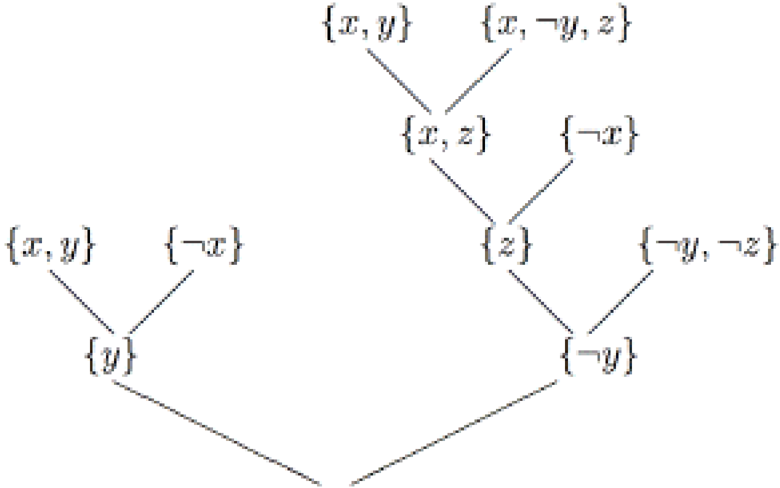
- bisher wurde noch für kein coNP-schweres Problem ein polynomielles Zertifikat gefunden
- es konnte noch für kein NP-schweres Problem nachgewiesen werden, dass es in coNP liegt
- es konnte noch für kein Problem aus NP $\cap$ coNP NP-schwere bzw. coNP-schwere nachgewiesen werden

Resolution als Indiz für coNP $\neq$ NP

- Resolution prüft ob eine CNF eine Kontradiktion ist
- wähle 2 Klauseln C_1, C_2, sodass ein Literal u in C_1 und seine Negierung $\overline{u}$ in C_2 vorkommen
- bild eine neue Klausel $C_3 = C_1 \backslash \{u\} \vee C_1 \backslash \{\overline{u}\}$
- $C_1 = (x \vee \overline{y} \vee z)$ und $C_2 = (y \vee z)$ werden zu $C_3 = (x \vee z)$
- es gilt $C_3 = \mathit{false} \Rightarrow C_1 \wedge C_2 = \mathit{false}$
- kann man eine leere Klausel herleiten ist die Formel eine Kontradiktion

Resolution Beispiel

$$F_3 = \{\{x, y\}, \{x, \neg y, z\}, \{\neg x\}, \{\neg y, \neg z\}\}$$



Resolution als Indiz für coNP $\neq$ NP

Implikationen von

Philosophisch

Mathematische Beweise

$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$

coNP = NP

Probleme zwischen P und NP

Umgang mit NP-vollständigen Problemen

Abbildung 3:http://everfalling.deviantart.com/art/DON-T-PANIC-15975789

Umgang mit NP-vollständigen Problemen

- Exisitieren vielleicht gute Näherungslösungen?
- Ist der Worst-Case wirklich wahrscheinlich?
- Gibt es andere Modelierungen in P?
- Ist n wirklich so groß, dass NP-Vollständigkeit ein Problem darstellt?