Die P $\neq$ NP-Vermutung

6. Mai 2015

Adrian Hein, Florian Weber

Einführung

Turingmaschine

- mathematische Abstraktion eines Computers
- besteht aus
  - Steuerwerk
  - unendlich langes Steuerband
  - Lese- und Schreibkopf

Turingmaschine

- pro Schritt wird
  - ein Zeichen gelesen
  - ein Zeichen geschrieben
  - eine Bewegung ausgeführt
- jeder Schritt ist nur abhängig von
  - aktuellem Zeichen auf dem Band
  - aktuellem Zustand der TM
- eine TM hat endlich viele Zustände
- man kann Zustände als Endzustände definieren

Turingmaschine formal

- formal besteht eine TM aus
  - Q, die endlichen Zustandsmenge
  - Σ, das endlichen Eingabealphabet
  - Γ, das endliche Bandalphabet und es gilt $\Sigma \subset \Gamma$
  - $\delta\colon (Q \setminus \{q_f\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, 0, R\}$ ist die (partielle) Überführungsfunktion
  - $q_0 \in Q$ ist der Anfangszustand
  - $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ steht für das leere Feld
  - $q_{accept} \in Q$ ist der akzeptierende Zustand

Turingmaschine (nichtdeterministisch)

- ähnlich der deterministischen TM
- NDTM hat allerdings zwei Übergangsfunktionen δ_0 und δ_1
- endet eine Sequenz von Entscheidungen in q_{accept} gilt die Eingabe als akzeptiert
- im Gegensatz zur deterministischen TM nicht ohne Weiteres realisierbar

Turingmaschine (mehrband)

- hat anstatt einem Band mehrere mit jeweils einem Lese- und Schreibkopf
- kann durch eine TM mit einem Band simuliert werden
- aus k Bändern werden $2k$ Spuren auf dem einen Band der TM
  - Spur 1 enthält Band 1, Spur 2 die Position auf Band 1, Spur 3 enthält Band 2, ...
- alternativ werden aus k Bändern $k+1$ Spuren
  - auf den ersten k Spuren stehen die k Bänder
  - auf der Spur $k+1$ wird die Kopfposition markiert
  - bewegen sich die einzelnen Köpfe in unterschiedliche Richtungen werden die Symbole auf den entsprechenden Spuren verschoben
- mehrband TMs sind genauso mächtig wie normale TMs aber evt. anschaulicher

Die Klasse P

- enthält alle Entscheidungsprobleme die in Polynomialzeit von einer TM lösbar sind
- Probleme in P gelten als praktisch lösbar
- ist unter Komplementbildung abgeschlossen
- Beispiele sind:
  - Lineare Programmierung/Optimierung
  - PRIMES (AKS-Primzahltest)
  - HORNSAT

Die Klasse NP (formal)

Eine Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ liegt in NP, wenn es ein Polynom $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sowie eine in Polynomialzeit laufende TM M, den sogenannten Verifizierer für L, gibt, sodass für jedes $x \in \{0,1\}^*$ gilt:
$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0,1\}^{p(|x|)}$ sodass $M(x,u) = 1$
In diesem Fall nennt man u ein Zertifikat für x.

Die Klasse NP (alternativ)

- alle Entscheidungsprobleme die von einer NDTM M in Polynomialzeit gelöst werden
- x ist eine Lösung, wenn es eine Sequenz von Entscheidungen gibt, sodass M in q_{accept} hält.
  - es gilt in diesem Fall $M(x) = 1$
- gibt es keine Sequenz für die M in q_{accept} gilt $M(x) = 0$
- ursprüngliche Definition, deswegen auch NP (nondeterministic polynomial time)
- beide Definitionen äquivalent, da die Sequenz von Entscheidungen die zu q_{accept} führt als Verifizierer betrachtet werden kann

Die Klasse coNP

- alle Sprachen, deren Komplement in NP liegt
- NICHT das Komplement zu NP
- Beispiel: Kontradiktion

Reduktion

- A heißt reduzierbar auf B, wenn es einen Algorithmus gibt, der aus jedem Problem aus A in Polynomialzeit ein Problem aus B macht
- gibt es einen Algorithmus zur Lösung von B und gilt $A \preceq B$, so kann dieser auch A lösen
- man sagt B ist mindestens so schwer wie A

NP-Vollständigkeit

- gilt $L \preceq L', \forall L \in \text{NP}$, so nennt man L' NP-schwer
- liegt L' selber auch in NP nennt man L' NP-vollständig
- um NP-schwere für L' zu zeigen genügt es $L \preceq L'$ für ein NP-schweres L zu zeigen
- ist ein Problem A NP-schwer, so ist das entsprechende Problem A' logischerweise coNP-schwer

Cook-Levin Theorem

konjunktive Normalform

- Jede boolsche Funktion lässt sich in konjunktiver Normalform darstellen
- TMs die Sprachen entscheiden, sind boolsche Funktionen
- Die Größe einer KNF für n Variablen liegt in $O(n \cdot 2^n)$ o.B.
- Siehe auch: TI1 (Digitaltechnik)

Reduktion * auf SAT

- $O(n \cdot 2^n)$ offensichtlich zu groß.
- Sei M eine TM die eine NP-vollständige Sprache entscheidet und die
  - ein Eingabe- und ein Ausgabe/Arbeitsband habe
  - bei der die Position des Kopfes in Schritt i nur von der Länge der Eingabe abhängt
  - gültige Annahme, da in $O(f(n)^2)$ simulierbar
- Sei Q die Menge der Zustände von M
- Sei Γ das Bandalphabet von M
- Sei $\langle a, b, q \rangle_i \in Q \times Q \times \Gamma$ der Snapshot der TM in Schritt i

Reduktion * auf SAT

- Snapshots können offensichtlich als Zeichenketten konstanter Länge kodiert werden.
- Ein Snapshot S_i hängt ab von:
  - S_{i-1}
  - einem Zeichen fester Position der Eingabe
  - dem letzten Snapshot an der selben Stelle
- Es gibt für jedes i genau einen korrekten Snapshot
- Daraus folgt: Es gibt eine Funktion f, die zwei Snapshots und eine Position auf dem Eingabeband auf einen neuen Snapshot abbilden:

$$S_i = f(S_{i-1}, S_{\mathrm{prev}(i)}, E_{\mathrm{inputpos}(i)})$$

Reduktion * auf SAT

- Um eine Lösung für die betrachtete Sprache zu finden, muss man eine Abfolge von TM-Schritten finden, die zum Ergebnis führt.
- Die einzelnen Schritte (und damit die Snapshotkette) kodieren eine Lösung, sind aber zunächst unbekannt.
- Die Snapshotkette lässt sich aber als polinomielle KNF schreiben.
- Angenommen, es gäbe einen Polyzeit-Entscheider für SAT, so könnte dieser damit auch die Kette von Snapshots für andere Probleme finden, und damit diese in Polyzeit entscheiden!

Reduktion SAT auf 3SAT

Um eine SAT-Klausel $(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)$ nach 3SAT zu konvertieren, genügt es, sie wie folgt zu schreiben:

$$(a_1 \vee a_2 \vee h_1) \wedge (\overline{h_1} \vee a_3 \vee h_2) \wedge \cdots \wedge (\overline{h_{n-2}} \vee a_{n-1} \vee a_n)$$

Hierbei sind $h_1 \ldots h_{n-2}$ neu eingeführte Hilfsvariablen.

Wichtige NP-vollständige Probleme

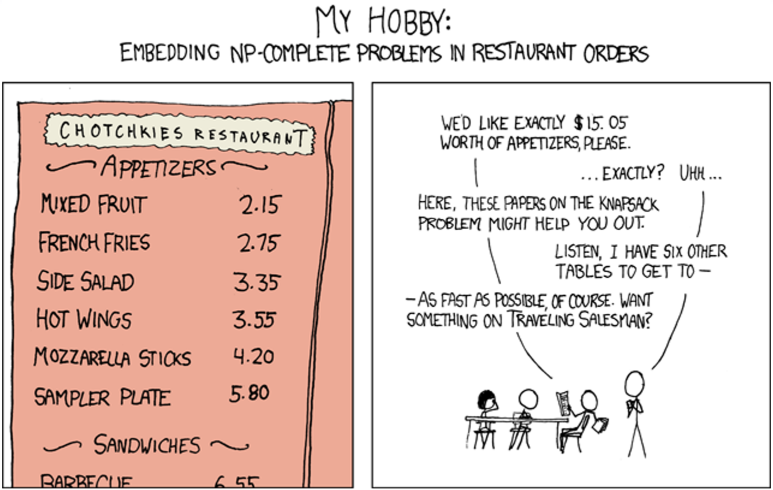


Abbildung 1:CC-BY-NC 2.5, Randall Munroe, https://xkcd.com/287/

INDSET

Besitzt ein Graph G mindestens n paarweise nicht über eine Kante verbundene Knoten?

INDSET ist NP-vollständig. Hierzu definieren wir eine Transformation beliebiger 3SAT-Instanzen zu Graphen:

- Erzeuge für jede Klausel eine Clique, deren Knoten jeweils eine gültige Belegung repräsentieren.
- Verbinde alle nicht verbundenen Knoten, die gemeinsam zu einer widersprüchlichen Belegung führen würden.
- Bestimme nun eine stabile Menge der Größe n. Deren Knoten kodieren nun eine gültige Belegung für die 3SAT-Instanz.

0/1 IPROG

- gegeben: m lineare Ungleichungen über n Variablen
- gesucht: eine Lösung für das System wobei die Variablen nur 0 oder 1 annehmen können
- in NP: die Belegung der Variablen kann als Zertifikat gesehen werden
- NP-vollständig: SAT $\preceq$ 0/1 IPROG, da jede Klausel als Ungleichung aufgefasst werden kann
  - $u_1 \vee \overline{u_2} \vee \overline{u_3}$ kann ausgedrückt werden durch $u_1 + (1 - u_2) + (1 - u_3) \geq 1$

Andere Klassen

EXP und NEXP

- Probleme deren Zertifikat in exponentieller Zeit verfiziert bzw. gefunden werden kann.
- In vieler Hinsicht analog zu P und NP, aber in der Praxis weniger interessant.

Sonstige

- L $\subseteq$ NL
  - logarithmischer Platz
- PSPACE $=$ NPSPACE
  - polynomieller Platz
- EXPSPACE $=$ NEXPSPACE
  - exponentieller Platz

Es gilt:

- L $\subseteq$ NL $\subseteq$ P $\subseteq$ NP $\subseteq$ PSPACE
- L $\subset$ PSPACE
- NL $\subset$ PSPACE

Indizien

P $\neq$ NP

- Unüberschaubar viele Probleme in P und NP. Trotz enormem Aufwand nicht eine einzige Reduktion.
- Reduktionen oft um ein ϵ nicht polynomiell. Warum, wenn P $=$ NP?
- Existenzbeweise meist leichter als Nichtexistenzbeweise. Deswegen schwer?
- NL $\subset$ PSPACE, eine der Untermengenrelationen dazwischen **muss** also echt sein.

coNP $\neq$ NP

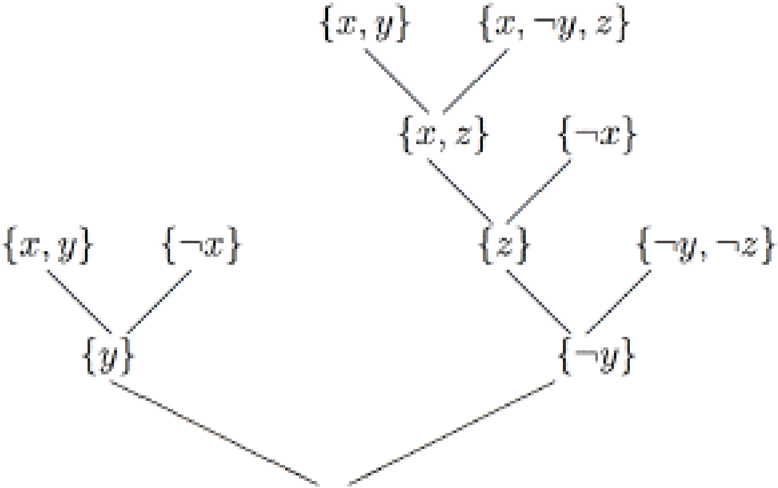
- bisher wurde noch für kein coNP-schweres Problem ein polynomielles Zertifikat gefunden
- es konnte noch für kein NP-schweres Problem nachgewiesen werden, dass es in coNP liegt
- es konnte noch für kein Problem aus NP $\cap$ coNP NP-schwere bzw. coNP-schwere nachgewiesen werden

Resolution als Indiz für coNP $\neq$ NP

- Resolution prüft ob eine KNF eine Kontradiktion ist
- wähle 2 Klauseln C_1, C_2, sodass ein Literal u in C_1 und seine Negierung $\overline{u}$ in C_2 vorkommen
- bilde eine neue Klausel $C_3 = C_1 \backslash \{u\} \vee C_1 \backslash \{\overline{u}\}$
- $C_1 = (x \vee \overline{y} \vee z)$ und $C_2 = (y \vee z)$ werden zu $C_3 = (x \vee z)$
- es gilt $C_3 = \mathit{false} \Rightarrow C_1 \wedge C_2 = \mathit{false}$
- kann man eine leere Klausel herleiten ist die Formel eine Kontradiktion

Resolution Beispiel

$$F_3 = \{\{x, y\}, \{x, \neg y, z\}, \{\neg x\}, \{\neg y, \neg z\}\}$$



Resolution als Indiz für coNP $\neq$ NP

- 1985 bewies Haken eine untere Schranke für die Größe des Resolutionsbeweises für das Pidgeonhole Principle
- diese ist $(1.49^{0.01})^n$ und unabhängig vom gewählten Algorithmus
- aufbauend auf Hakens Beweis wurden exponentielle untere Schranken auch für andere Probleme gezeigt
  - mittels Resolution ist coNP $=$ NP nicht beweisbar
  - $\Rightarrow$ Indiz für coNP $\neq$ NP

Implikationen

Philosophisch

- In den Naturwissenschaften wären Hypothesen mit vergleichbarer Faktenlage als Theorien anerkannt.
  - „nur“ ein Problem weil Informatik eine Strukturwissenschaft ist
- Folgen oft völlig unintuitiv:
  - Warum sollte es keine Suchprobleme geben, die sich nicht besser als mit brute-force lösen lassen?
  - Insbesondere bei nichtdeterministischen TMs: Polyzeitreduktion praktisch nicht vorstellbar.

P = NP

coNP ?= NP

- aus P = NP folgt automatisch coNP = NP
  - Umkehrung gilt nicht automatisch
- allerding folgt aus coNP $\neq$ NP automatisch P $\neq$ NP
  - man wählt ein NP-vollständiges Problem L
  - das Komplement $\overline{L}$ von L liegt laut Definition in coNP
  - würde P = NP gelten, gilt $L \in$ P
  - da P unter Komplementbildung abgeschlossen ist gilt $\overline{L} \in$ P
  - da gilt P = NP gilt $\overline{L} \in$ NP
  - daraus würde folgen coNP = NP was ein Wiederspruch ist

Probleme zwischen P und NP

Umgang mit NP-vollständigen Problemen

Abbildung 3:http://everfalling.deviantart.com/art/DON-T-PANIC-15975789

Umgang mit NP-vollständigen Problemen

- Exisitieren vielleicht gute Näherungslösungen?
- Ist der Worst-Case wirklich wahrscheinlich?
- Gibt es andere Modelierungen in P?
- Ist n wirklich so groß, dass NP-Vollständigkeit ein Problem darstellt?