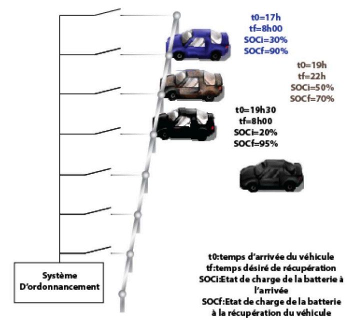

MINES ParisTech
`https://moodle.psl.eu` *2023-2024*

Ce mini-projet, à effectuer en binôme au sein du même groupe de PC, fera l'objet d'un rapport incluant notamment équations et graphiques obtenus par des simulations sous Python. La forme de ce rapport est laissée libre (pdf, jupyter notebook, github...). Le rendu s'effectuera sur Moodle. La date limite de rendu est le lundi 06/05 à 09h00, aucun rendu ne sera possible après cela.

Mille bornes

On s'intéresse dans ce sujet à la charge de plusieurs véhicules électriques connectés à une station de charge. Chaque véhicule est décrit par une heure d'arrivée et un état de charge de sa batterie. L'utilisateur indique au système d'ordonnancement l'heure à laquelle il souhaite récupérer sa voiture totalement chargée. On cherche dans ce contexte à assurer ces demandes, tout en minimisant le coût électrique de charge. Pour ce faire, on considère un horizon de temps $[t_0, t_f]$, que l'on partitionne en N intervalles de temps $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, \dots, N-1)$ de longueur uniforme Δt, avec $\Delta t = (t_f - t_0)/N$, de sorte que $t_N = t_f$. On note N_v le nombre de véhicules à charger et, pour un véhicule $j \in \{1, \dots, , N_v\}$, t_j^{in} son heure d'arrivée, t_j^f son heure de départ et Q_j^{in} sa charge à l'arrivée.



La dynamique de charge du véhicule j s'écrit alors

$$Q_{j,i+1} = Q_{j,i} + \Delta t \beta_j P_{j,i}\,, \qquad \text{pour } i \text{ tel que } t_j^{in} \leq t_i \leq t_j^f \tag{1}$$

où $\beta_j > 0$ est une constante et $P_{j,i}$ la puissance fournie par la station au véhicule j, qui est nulle pour i tel que $t_i \notin [t_j^{in}, t_j^f]$. Les conditions initiales et terminales de charge sont par ailleurs

$$Q_{j,i_{j0}} = Q_j^{in} \text{ et } Q_{j,i_{jf}} = \overline{Q}_j \text{ avec } i_{j0} = \frac{t_j^{in}}{\Delta t} \text{ et } i_{jf} = \frac{t_j^f}{\Delta t} \tag{2}$$

où $\overline{Q}_j$ est la charge maximale du véhicule j. La charge restant bornée, on a par ailleurs $0 \leq Q_{j,i} \leq \overline{Q}_j$ pour tout $i = 0, \dots N$. De plus, la puissance fournie par la station est positive ($P_{j,i} \geq 0$) et limitée

$$\sum_{j=1}^{N_v} P_{j,i} \leq \overline{P}\,, \quad i = 0, \dots, N \tag{3}$$

Enfin, on suppose l'existence d'un tarif heure pleine/heure creuse pour l'électricité, correspondant à un tarif d'électricité c_i variant dans le temps et à la facture d'énergie

$$\Delta t \sum_{j=1}^{N_V} \sum_{i=0}^{N} c_i P_{j,i} \tag{4}$$

1 Etude du problème d'optimisation

1. Justifier la forme de la dynamique de charge (1).

2. Formuler le problème d'optimisation à résoudre sous la forme

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{tel que } & c_{eq}(x) = 0, \\ & c_{in}(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

On précisera les variables de décision x, leur nombre n, les contraintes c_{eq} et c_{in} ainsi que la fonction objectif f à minimiser.

3. Etudier la convexité de ce problème. Appartient-il à une famille particulière de problèmes d'optimisation ?

2 Identification du paramètre β

On suppose que tous les véhicules sont équipés de batteries similaires ($\overline{Q}_j = \overline{Q}$ et $\beta_j = \beta$) et l'ont cherche à en identifier la caractéristique β, pour déterminer la gestion optimale de leur charge. Pour cela, on dispose d'essais réalisés sur une batterie, fournissant l'état de charge $SOC = Q/\overline{Q}$ du véhicule et l'intensité les parcourant à différents instants.

4. On cherche à identifier le paramètre β à partir de ces essais, connaissant la charge maximale atteignable $\overline{Q}$ (qui est elle simple à déterminer) et la tension secteur $U_{sec} = 230V$, reliant puissance et intensité. Formuler le problème de moindres carrés correspondant à l'identification de β.
5. Charger les données à l'aide du fichier data_battery.csv et résoudre ce problème pour $\bar{Q} = 50Ah$. On pourra utiliser la solution des moindres carrés, ou utiliser la fonction `numpy.linalg.lstsq`. On n'oubliera pas de filtrer convenablement le bruit de mesure, si besoin, et de commenter l'impact de ce filtrage sur les résultats obtenus. On tracera en particulier sur la même figure l'évolution de l'état de charge de la batterie au cours du temps, ainsi que l'état de charge estimé obtenu à partir de l'intensité et du paramètre estimé β.

3 Etude et résolution numérique du problème centralisé

6. Quelles méthodes de résolution peuvent être envisagées pour ce problème ?
7. Développer un algorithme de résolution dans le cas d'un horizon de temps de 24h ($t_0 = 17h$, $\Delta t = 0.25h$), avec :
   - un tarif d'heure creuse ($c_i = c_{cr}$ constant) entre d'une part minuit et $6h$, et d'autre part $12h$ et $14h$ et un tarif d'heure pleine ($c_i = c_{pl}$ constant) le reste du temps ;
   - un premier véhicule qui arrive avec un état de charge de 30% à $18h$ et souhaite repartir à $8h$ le lendemain matin ;
   - un second véhicule qui arrive avec un état de charge de 50% à $18h30$ et souhaite repartir à $9h$ le lendemain.

   On prendra les valeurs numériques suivantes :

   $$c_{cr} = 1\,, \quad c_{pl} = 3/2\,, \quad \overline{Q} = 50Ah\,, \quad \overline{P} = 2.5kW \tag{6}$$

   On veillera à afficher au minimum les graphiques suivants :

   (a) l'évolution de l'état de charge de chaque véhicule au cours du temps ainsi que la puissance (normalisée) fournie à chaque véhicule. On prendra soin d'indiquer les temps de contrainte de pleine charge des véhicules.

   (b) l'évolution de la puissance totale (normalisée) fournie à la flotte, au cours du temps, ainsi que celle du tarif électrique.

   Commenter les résultats obtenus.
8. Quels inconvénients présente cette solution centralisée ? (On pourra penser aux données dont doit disposer l'optimiseur pour la résolution.)

4 Régulation décentralisée

On étudie maintenant comment réaliser cette régulation de façon décentralisée, en utilisant la technique de décomposition-coordination détaillée en Annexe.

9. Ecrire (sans les coder) les équations de l'algorithme de décomposition-coordination pour le problème considéré.
10. Discuter des difficultés éventuelles à résoudre le problème (9) correspondant à la fonction coût (4). Justifier que l'on utilise ainsi le coût modifié suivant avec un terme quadratique additionnel (avec $\epsilon \ll c_i \Delta t$)
$$\sum_{j=1}^{N_V} \sum_{i=0}^{N} \left(\Delta t c_i P_{j,i} + \varepsilon (P_{j,i})^2 \right) \tag{7}$$
11. Les problèmes (9) et (10) sont résolus séparément par chaque véhicule, sous l'hypothèse de la connaissance [1] de la quantité $\sum_{j=0}^{N_v} P_{j,i}$. Comparer les avantages et inconvénients de cette solution par rapport à la précédente.
12. *Bonus :* Implémenter l'algorithme de décomposition-coordination dans le même cas que précédemment. (On pourra prendre $\varepsilon = 1$, $\rho = 1$ et $N_{iter} = 100$.) Commenter la solution obtenue et la comparer avec celle de la question 7.

Annexe : Algorithme de décomposition/coordination

L'algorithme de décomposition/coordination par méthode d'Uzawa permet de résoudre le problème d'optimisation
$$\begin{aligned} &\min_x \quad f(x) \\ &\text{tel que } c(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{8}$$
dans le cas où :

- le coût f se décompose comme une somme de différentes termes ne dépendant que d'une variable de décision
$$f(x) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$$
- les containtes inégalités (et égalités) c se décomposent comme une somme de différentes termes ne dépendant que d'une variable de décision
$$c(x) = c_1(x_1) + \ldots + c_n(x_n)$$

Le principe de l'algorithme est alors de "décomposer" le problème à l'aide du Lagrangien, de résoudre n problèmes découplés d'optimisation sous contraintes et de "coordonner" les solutions par les multiplicateurs de Lagrange, pour mettre à jour les variables couplées.

Plus précisément, en notant I l'ensemble des coordonnées de c qui dépendent de plusieurs variables x_k et, pour $i = 1, \ldots, n$, J_i l'ensemble des indices des contraintes qui dépendent uniquement de x_i, on a :

Algorithme 1 (Décomposition/coordination)

1. *Initialisation ($k = 0$) : on choisit le multiplicateur λ_0 et le pas ρ.*
2. *Décomposition : on résout les n problèmes :*
$$\begin{aligned} &\min_{x_i} \quad f_i(x_i) + \sum_{j \in I} \lambda_j^k c_{ji}(x_i) \\ &\text{tel que } c_l(x_i) \leq 0 \,, \quad l \in J_i \end{aligned} \tag{9}$$
dont on note x_i^k les solutions.

1. Dans le cas $N_v \geq 3$, il est possible pour les véhicules d'échanger la quantité $\sum_{j=0}^{N_v} P_{j,i}$, sans être capable d'identifier séparément chaque $P_{j,i}$, par un algorithme de somme sécurisée par exemple.

3. *Coordination : effectuer les mises à jour des multiplicateurs*

$$\lambda^{k+1} = P(\lambda^k + \rho \sum_{j \in I} c_j(x_j^k) \tag{10}$$

où P est la projection sur $(\mathbb{R}^+)^{card(I)}$.

4. *Test d'arrêt : si $|\lambda^{k+1} - \lambda^k|$ est suffisamment petit ou $k+1$ supérieur à N_{iter}, on arrête l'algorithme. Sinon, $k = k+1$ et on revient à l'étape 2.*