Finance Quantitative

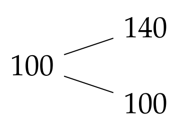
Exercise APT
Solution

Patrick Hénaff

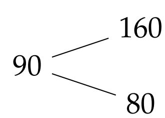
Version: 22 févr. 2024

Une économie comporte 2 actifs risqués et un au actif sans risque. Il y a un facteur de risque dans cette économie, qu'on nommera "cycle économique". Ce facteur prend la valeur $+\frac{1}{2}$ si l'économie est en croissance, et $-\frac{1}{2}$ si elle est en recession. La probabilité de chaque scenario est 0.5.

Les deux actifs risqués arrivent à maturité dans un an. Leur valeur à terme selon l'état de l'économie est résumé dans les graphiques ci-dessous.



Titre A



Titre B

```r
B <- matrix(c(140,100,160,80), nrow=2)
P.0 <- matrix(c(100,90), nrow=2)
```

1 Calcul du taux sans risque

On construit à partir des titres A et B un portefeuille sans risque payant 100 à l'horizon d'investissement. Le rendement de ce portefeuille est le taux sans risque.

```r
B <- matrix(c(140,100,160,80), nrow=2)
Fixed.CF <- matrix(c(100,100), nrow=2)
w.risk.free <- solve(B, Fixed.CF)
P.0 <- matrix(c(100,90), nrow=2)
B.0 <- as.numeric(t(P.0) %*% w.risk.free)
r.f <- 100/B.0 - 1
```

Soit un taux sans risque $r_f = 9.1\%$.

2 Projection des titres sur les facteurs

Calculez le β de chaque titre par rapport au facteur de risque. En pratique, on estimerait ces parametres par regression, mais ici avec seulement deux observations, il suffit de résoudre un système de deux équations linéaires.

On estime le modèle:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{f,t} + \epsilon_{i,t}$$

avec:

$R_{i,t}$ excédent de rendement du titre i

$R_{f,t}$ rendement du facteur

```r
# rendement attendu des titres selon les réalisations du facteur de risque
P.0.mat <- t(matrix(rep(P.0,2), nrow=2))
R <- (B-P.0.mat) / P.0.mat
R.excess <- R-r.f

# valeur du facteur selon les réalisations
f <- matrix(c(1/2, -1/2), nrow=2)

# régression des rendements sur le facteur. Ici, il s'agit d'une
# équation
X <- cbind(c(1,1), f)
coef <- solve(X, R.excess)

row.names(coef) <- c('$\\alpha$', '$\\beta$')
```

On obtient les estimations suivantes:

	A	B
α	0.11	0.24
β	0.40	0.89

Le titre B est plus volatile que le titre A et, logiquement, son β relatif au facteur de risque est plus élevé.

3 Prime de risque

Calculez la prime de risque du facteur "cycle économique". Comme dans la question précédente, on estimerait en pratique ces paramètres par régression mais ici, il suffit de résoudre pour λ_0 et λ_1 un système linéaire à deux inconnues:

$$
\begin{aligned}
\bar{r_A} &= \lambda_0 + \beta_A \lambda_1 \\
\bar{r_B} &= \lambda_0 + \beta_B \lambda_1
\end{aligned}
$$

r_A et r_B sont les espérances de l'excédent de rendement des titres.

$$
\begin{aligned}
\bar{r_A} &= (\frac{\frac{140+100}{2}}{100} - 1) - r_f \\
\bar{r_B} &= (\frac{\frac{160+80}{2}}{90} - 1) - r_f
\end{aligned}
$$

```
beta <- coef[2,]
r.bar <- colMeans(R) - r.f
X <- cbind(c(1,1), beta)
lambdas <- solve(X, matrix(r.bar, nrow=2))
```

λ_0	0.000
λ_1	0.273

L'exposition d'un titre à une unité du facteur "croissance" est récompensé par une espérance d'excédent de rendement de 27.3%.

4 Probabilités risque-neutres

Calculez les probabilités risque-neutres des scénarios et le prix d'état (prix d'Arrow-Debreu) associé à chaque scénario.

soit AD_u l'actif d'Arrow-Debreu valant 1 dans l'état "hausse" et 0 autrement. AD_d paie l'inverse. On construit des portefeuilles répliquant ces deux actifs:

```
# prix d'etats
w.AD = solve(B, diag(2))
```

Les solutions sont:

	AD_u	AD_d
q_A	-0.017	0.033
q_B	0.021	-0.029

On en déduit le prix des deux portefeuilles de réplication et les probabilités risque-neutres p_u et p_d:

```r
P.state <- t(P.0) %*% w.AD
# probabilités risque neutres
prob <- P.state * rep(1+r.f,2)
```

p_u	p_d
0.227	0.773

On peut vérifier que ces probabilités risque-neutres valorisent correctement les actifs. Calculons les valeurs actualisées des espérances de valeur à terme des actifs A et B:

```r
P.act <- as.vector(prob %*% B / (1+as.numeric(r.f)))
```

On retrouve bien $P_A = 100$ et $P_B = 90$.