Risk Budgeting & Risk Parity

P. Hénaff

Version: 07 févr. 2024

Mesures de risque cohérente

- Croissance: $X > Y \Rightarrow \mathcal{R}(X) \geq \mathcal{R}(Y)$
- Invariance: $\mathcal{R}(X + k) = \mathcal{R}(X)$
- Homogénéité: $\lambda \in R_+ \Rightarrow \mathcal{R}(\lambda X) = \lambda \mathcal{R}(X)$
- Convexité:
  $\lambda \in [0, 1] \Rightarrow \mathcal{R}(\lambda X + (1 - \lambda) Y) \leq \lambda \mathcal{R}(X) + (1 - \lambda) \mathcal{R}(Y)$

Théorème de décomposition d'Euler

Soit $f(X), X \in R^n$ homogène de degré 1: $f(\lambda X) = \lambda f(X)$

Alors:

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_i x_i \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \\ &= X^T \nabla_X f \end{aligned} \quad (1)$$

Décomposition du risque

Soit $\mathcal{RM}_p(w)$ une mesure cohérente du risque:

- CMR_i Contribution marginale au risque de l'actif i: $\frac{\partial \mathcal{RM}_p(w)}{\partial w_i}$
- CR_i Contribution au risque de l'actif i: $w_i \text{CMR}_i$
- Décomposition du risque

$$\begin{aligned} \mathcal{RM}_p(w) &= \sum_i w_i \text{CMR}_i \\ &= \sum_i \text{CR}_i \end{aligned} \tag{2}$$

- Contribution relative au risque (CRR):

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_i w_i \frac{\text{CMR}_i}{\mathcal{RM}_p(w)} \\ &= \sum_i \text{CRR}_i \end{aligned} \tag{3}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
\mathcal{RM}_p(x) &= \left(w^T \Sigma w\right)^{1/2} \\
&= \sum_i w_i \frac{\partial \mathcal{RM}_p(w)}{\partial w_i} \\
&= w^T \nabla_w \mathcal{RM}_p(w)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
\mathcal{RM}_p(w) &= (w^T \Sigma w)^{1/2} \\
\nabla_w \mathcal{RM}_p(w) &= \frac{\partial (w^T \Sigma w)^{1/2}}{\partial w} \\
&= \frac{1}{2} (w^T \Sigma w)^{-1/2} 2 \Sigma w \\
&= \frac{\Sigma w}{\sqrt{w^T \Sigma w}}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Exemple

- CMR_i Contribution marginale au risque de l'actif i: $\frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$
- Décomposition du risque

$$\mathcal{RM}_p(w) = \sum_i w_i \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \tag{6}$$

Utilité en gestion des risques

- Impact d'un changement d'allocation

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{RM}_p(w) &= \sum_i \Delta\bar{w}_i \mathrm{CMR}_i \\ \sum_i \Delta\bar{w}_i &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

- Impact de l'ajout Δw_i de titres en portefeuille

$$\Delta\mathcal{RM}_p(w) = \sum_i \Delta w_i \mathrm{CMR}_i \tag{8}$$

Lien avec β

$$R_p(\bar{w}) = \sum_i \bar{w}_i R_i$$

Definition

Le β d'un titre i par rapport au portefeuille est défini par:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_p(w))}{\mathrm{Var}(R_p(w))}$$

Lien avec β

Si la mesure de risque est $\sigma_p(w)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{CMR}_i &= \frac{\partial \sigma_p(w)}{\partial w_i} \\
&= \frac{(\Sigma w)_i}{\sigma_p(w)} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_p(w))}{\sigma_p(w)} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_p(w))}{\sigma_p^2(w)} \sigma_p(w) \\
&= \beta_i \sigma_p(w)
\end{aligned} \tag{9}$$

Exemple

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma) \times \mathrm{P} \times \mathrm{diag}(\sigma) \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

Table 1: Décomposition du risque

σ_i^2	w	CMR	CR	CRR
0.01	0.333	0.088	0.029	0.164
0.04	0.333	0.172	0.057	0.322
0.09	0.333	0.275	0.092	0.514

$\sigma_p(w) = 0.178$

Exemple (suite)

- Modification de l'allocation: $w^T = (.532, .276, .192)$

$$\Delta\sigma_p(w) = \mathrm{CMR}^T(w^* - w) \tag{10}$$
$$= -0.03 \tag{11}$$

σ_i	w	CMR	CR	CRR
0.01	0.532	0.093	0.049	0.333
0.04	0.276	0.178	0.049	0.332
0.09	0.192	0.259	0.050	0.335

$\sigma_p(w) = 0.148$

Risk Parity & Budgeting

Parity:

$$\mathrm{CR}_i = \frac{1}{N}\mathcal{RM}_p(w)$$

Bugeting:

$$\mathrm{CR}_i = b_i\mathcal{RM}_p(w)$$

Cas Particulier: Risk Parity avec Σ diagonal

$$\Omega = \sqrt{\mathrm{diag}(\Sigma)}$$

Cas Particulier: Risk Parity avec Σ diagonal

$$\Omega = \sqrt{\mathrm{diag}(\Sigma)}$$

$$w = \frac{\Omega^{-1}}{1^T\Omega^{-1}} \tag{12}$$

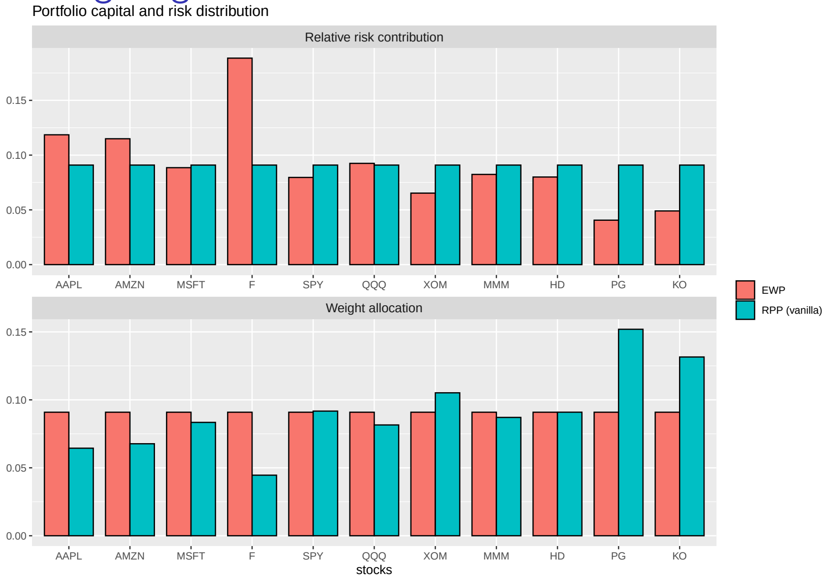
$$w_i = \frac{1/\sigma_i}{\sum_i 1/\sigma_i} \tag{13}$$

Risk Parity & Budgeting: Exemple.

```
Sigma <- cov(monthly.ret)
mu <- colMeans(monthly.ret)
rpp_vanilla <- riskParityPortfolio(Sigma)

w_all <- cbind("EWP" = rep(1/nrow(Sigma), nrow(Sigma)),
               "RPP (vanilla)" = rpp_vanilla$w)
```

Risk Budgeting



Exercice

Solution numérique du problème "risk parity".

Contribution au risque de l'actif i: $w_i \frac{(\Sigma w)_i}{w^T \Sigma w}$

1. Calculer les poids w_i de la solution RP en résolvant un programme du type:

$$
\begin{aligned}
\min_w \quad & f(w) \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 1^T w = 1 \\
& 0 \leq w \leq 1
\end{aligned}
$$

- Formuler la fonction objectif $f(w)$
- Résoudre le problème avec le librarie NlcOptim

2. Calculer la solution d'une seconde manière, en résolvant un système d'équations non-linéaires à l'aide de la librairie lnegsly.