Scénarios "Risque-Neutre"

Patrick Hénaff

Version: 07 févr. 2024

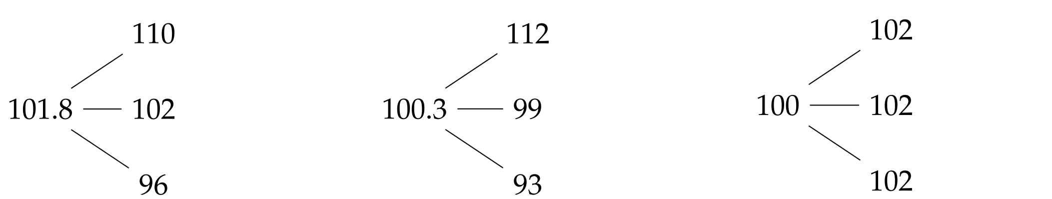
Le cadre réglementaire "Solvabilité II" repose sur la simulation de trajectoires de facteurs de risques (indices boursiers, taux de rendement, prix de l'immobilier) dans un univers "risque neutre" dans lequel tous les actifs ont la même espérance de rendement, et ce rendement est le taux sans risque (le rendement des obligations d'Etat notées AAA).

Ce cadre d'analyse soulève des questions légitimes: comment peut-on supposer que l'immobilier, par exemple, ait le même rendement qu'une obligation d'état? Les données historiques nous indiquent que le rendement à long terme des actions est supérieur au rendement obligataire; en imposant le même rendement pour tous les actifs, le cadre "Solvabilité II" induit-il un biais favorisant, entre autres, les obligations au détriment des actions?

Dans cette note, on explicite la notion de scénarios neutres par rapport au risque, et on montre que l'utilisation uniforme d'un taux sans risque pour actualiser tous les actifs est la conséquence logique d'une hypothèse plus fondamentale: l'existence d'un marché complet, sans opportunité d'arbitrage.

1 Valorisation par arbitrage

Soit une économie dotée de 2 actifs risqués et d'un taux sans risque. Pour l'année à venir, l'incertitude sur les rendements est modélisée par un arbre à trois branches, représentant un scénario haussier (1), intermédiaire (2) et baissier (3). Les prix des actifs A et B sont respectivement 101.8 €et 100.3 € tandis que le prix de l'actif sans risque R est arbitrairement fixé à 100 €, pour un taux sans risque de 2%.



Titre A — Titre B — Actif sans risque R

Il y a un consensus pour attribuer une probabilité de 70% au scénario haussier, 20% au scénario intermédiaire et 10% au scénario baissier. On en déduit l'espérance de rendement de chaque titre risqué:

$$
\begin{aligned}
R_A &= \frac{.7 \times 110 + .2 \times 102 + .1 \times 96}{101.8} - 1 \\
&= 5.11\% \\
R_B &= \frac{.7 \times 112 + .2 \times 99 + .1 \times 93}{100.3} - 1 \\
&= 7.18\%
\end{aligned}
$$

Dans “l’économie réelle”, chaque titre a bien sa propre espérance de rendement, fonction de son risque et d’autres facteurs.

Considérons maintenant un titre C, dont les valeurs attendues selon les trois scénarios sont:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & 108 \\
C \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 103 \\
 & 98
\end{tikzcd}
$$

et essayons de déterminer le prix de cet actif. Pour répondre à cette question, on observe que l’on peut constituer un portefeuille formé des titres A, B et R qui a la même valeur à terme que C. Les poids des titres dans ce portefeuille sont:

Table 1: Portefeuille répliquant l’actif C

A	1.167
B	-0.333
R	0.167

On vérifie que les valeurs à terme sont bien identiques:

$$
\begin{aligned}
1.167 \times 110 - 0.333 \times 112 + 0.167 \times 102 &= 108 \\
1.167 \times 102 - 0.333 \times 99 + 0.167 \times 102 &= 103 \\
1.167 \times 96 - 0.333 \times 93 + 0.167 \times 102 &= 98
\end{aligned}
$$

C’est ici qu’intervient l’hypothèse d’absence d’arbitrage: si le portefeuille ci-dessus a la même valeur à terme que l’actif C dans tous les scénarios, il doit aussi avoir la même valeur que C aujourd’hui. Sinon, on pourrait construire un arbitrage à gain illimité en achetant celui des deux qui est le moins cher, et en vendant l’autre.

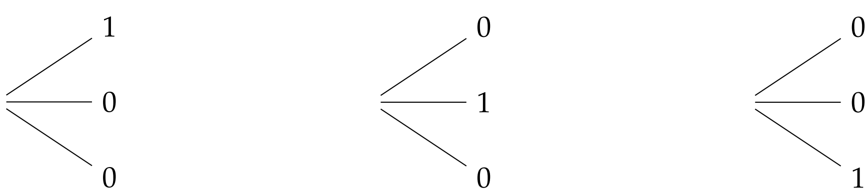
Le prix de l'actif C est donc:

$$\begin{aligned} P_C &= 1.167 \times 101.8 - 0.333 \times 100.3 + 0.167 \times 100 \\ &= 102 \end{aligned}$$

Ce raisonnement peut s'appliquer à n'importe quel actif. Si on connait les prix de trois titres A, B, R et que l'on considère seulement 3 scénarios pour l'avenir, alors on peut valoriser n'importe quel titre risqué, de manière cohérente avec les autres titres risqués du marché. Ce marché est dit "complet", car avec les titres A, B et R on peut reproduire tous les profils de risque à terme. Noter au passage que l'on valorisé le titre C sans faire référence aux probabilités d'occurrence des scénarios.

2 Prix d'Etat et Probabilité "Risque Neutre"

Pour simplifier les calculs de valorisation, il est utile de s'intéresser à des actifs élémentaires qui ont une valeur à terme nulle dans tous les scénarios sauf un: soit $E_i, i = 1, \ldots, 3$ de tels actifs, ayant par convention une valeur de 1 à terme dans le scénario i.



Titre E_1 Titre E_2 Titre E_3

Calculons les prix de ces trois actifs. En reprenant la même logique que précédement, on construit un portefeuille composé des titres A, B et R qui a la même valeur à terme que l'actif élémentaire considéré. Les solutions sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Table 2: Portefeuilles replicants les actifs élémentaires

	E_1	E_2	E_3
A	-0.200	0.633	-0.433
B	0.200	-0.467	0.267
R	0.006	-0.171	0.175

On vérifie par exemple que les valeurs à terme du portefeuille réplicant et de l'actif E_1 sont identiques:

$$\begin{aligned} -0.20 \times 110 + 0.20 \times 112 + 0.006 \times 102 &= 1 \\ -0.20 \times 102 + 0.20 \times 99 + 0.006 \times 102 &= 0 \\ -0.20 \times 96 + 0.20 \times 93 + 0.006 \times 102 &= 0 \end{aligned}$$

Comme dans la section précédente, les prix de ces actifs élémentaires sont les valeurs des portefeuilles réplicants à la date du jour, soit:

$$\begin{aligned}
P_1 &= -0.20 \times 101.8 + 0.20 \times 100.3 + 0.006 \times 100 \\
&= 0.29 \\
P_2 &= 0.633 \times 101.8 - 0.467 \times 100.3 - 0.171 \times 100 \\
&= 0.61 \\
P_3 &= -0.433 \times 101.8 + 0.267 \times 100.3 + 0.175 \times 100 \\
&= 0.08
\end{aligned}$$

Les actifs E_i sont appelés actifs d'Arrow-Debreu, et les prix P_i sont les prix d'états associés. Notons que pour éviter une opportunité d'arbitrage, $P_i \geq 0$. Un portefeuille composés des trois actifs d'Arrow-Debreu paie 1 dans chaque scénario, ce portefeuille est donc sans risque, et son rendement doit de ce fait être le taux sans risque r:

$$(1+r)\,(P_1 + P_2 + P_3) = 1$$

Considérons un actif quelconque Z de prix Z_0, valant à terme Z_i si le scénario i se réalise.

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \\
Z_0 \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & Z_2 \\
 & Z_3
\end{tikzcd}$$

Cet actif est un portefeuille d'actifs d'Arrow-Debreu, composé d'une quantité Z_1 d'actif E_1, d'une quantité Z_2 d'actif E_2, etc., de sorte que les valeurs à terme de l'actif Z et du portefeuille sont identiques. Invoquant une fois de plus l'argument d'absence d'arbitrage, il en découle que le prix actuel de l'actif Z est le prix du portefeuille, soit:

$$Z_0 = Z_1 \times P_1 + Z_2 \times P_2 + Z_3 \times P_3$$

Définissons $\pi_i = (1+r)P_i$, le prix de l'actif Z s'écrit alors:

$$Z_0 = \frac{1}{1+r}\,(Z_1 \times \pi_1 + Z_2 \times \pi_2 + Z_3 \times \pi_3)$$

avec $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \pi_i \geq 0$. On peut interpréter π_i comme une probabilité associée à l'état i. Ainsi, la valeur de l'actif Z est l'espérance de valeur future sous la probabilité π, actualisée au taux sans risque. Un agent qui valoriserait ainsi les actifs, en considérant uniquement l'espérance de valeur future, serait neutre par rapport au risque, et les pseudo-probabilités π sont de ce fait nommées "probabilités risque-neutre". Dans ce monde "risque-neutre", tous les actifs ont le même taux de rendement, et c'est le taux sans risque r. [1]

Les probabilités "réelles" et "risque-neutre" de chaque scénario sont très différentes:

Table 3: Probabilités des scénarios

	Historique	Risque-Neutre
Haussier	0.7	0.294
Moyen	0.2	0.620
Baissier	0.1	0.086

Reprenons le calcul du prix de l'actif C avec ce nouvel outil:

- on calcule l'espérance de valeur future sous la probabilité risque-neutre π
- et on actualise cette espérance au taux sans risque.

$$\begin{aligned} P_C &= \frac{1}{1.02}\left(0.294 \times 108 - 0.620 \times 103 + 0.086 \times 98\right) \\ &= 102 \end{aligned}$$

Les probabilités "risque-neutre" sont donc bien cohérentes avec les prix de marché observés.

En conclusion, le principe de valorisation par arbitrage dans un marché complet permet de valoriser les actifs d'une manière cohérente et de projeter des valeurs futures cohérentes avec les prix de marché observés. Une conséquence de ce principe de valorisation est que l'on ne considère pas les probabilités objectives des scénarios, mais des "pseudo-probabilités" sous lesquelles la valeur d'un actif aujourd'hui est simplement l'espérance actualisée (au taux sans risque) de la valeur future.

On voit la nécessité d'une telle approche dans le cadre de Solvabilité II, où l'on actualise la richesse future liée à l'activité (un actif non traité sur les marchés), et combine cette estimation à des valeurs de marché (par exemple, les valeurs des titres à l'actif). Il est indispensable de disposer d'un cadre de calcul qui garantisse l'absence d'arbitrage entre les valeurs futures actualisées et les valeurs de marché. Une incohérence à ce niveau pourrait être exploitée pour biaiser les résultats.

[1] Dans la "vie réelle", les agents ne sont pas neutres par rapport au risque: on préfère un gain certain d'un million d'euros à 10% de chance d'en gagner 10, alors que l'espérance de gain est la même dans les deux cas.