Model Risk

P. Hénaff

3/2021

Le Modèle Moyenne-Variance

$$
\begin{aligned}
w^* = \text{argmin} \quad & w^T \Sigma w \\
\text{s.t.} & \\
& \mu^T w = \mu^*
\end{aligned}
$$

Equivalent à:

$$
\begin{aligned}
w^* &= \text{argmin} \quad \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \gamma x^T \mu^* \\
&= \gamma \Sigma^{-1} \mu^*
\end{aligned}
$$

Decomposition de Σ et Σ^{-1} (**Ste1997?**)

$$\begin{aligned}
\Sigma &= V \Omega V^T \\
\Sigma^{-1} &= V \Omega^{-1} V^T \\
&= \mathcal{I}
\end{aligned}$$

Exemple 1

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma) \times \mathrm{P} \times \text{diag}(\sigma) \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

	Σ			Σ^{-1}		
	V1	V2	V3	V1	V2	V3
Eigenvectors						
1	-0.2404	-0.2168	0.9462	0.9462	-0.2168	-0.2404
2	-0.4599	-0.8330	-0.3077	-0.3077	-0.8330	-0.4599
3	-0.8548	0.5091	-0.1006	-0.1006	0.5091	-0.8548
Eigenvalues						
	0.1153	0.0222	0.0026	389.8800	45.1264	8.6749

Exemple 2

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad \rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.85 \\ 0.9 & 1 & 0.8 \\ 0.85 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

	Σ			Σ^{-1}		
	V1	V2	V3	V1	V2	V3
Eigenvectors						
1	-0.2565	-0.2046	0.9446	0.9446	-0.2046	-0.2565
2	-0.5054	-0.8047	-0.3115	-0.3115	-0.8047	-0.5054
3	-0.8239	0.5573	-0.1030	-0.1030	0.5573	-0.8239
Eigenvalues						
	0.1274	0.0113	0.0013	778.6401	88.2399	7.8503

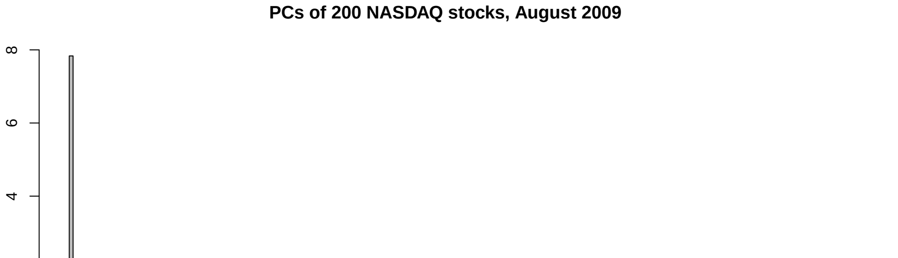
Retour sur l'ACP

```
## Loading required package: timeSeries

## Loading required package: timeDate

##
## Attaching package: 'timeSeries'

## The following objects are masked from 'package:graphics
##
##     lines, points
```



Interprétation de $\mathcal{I}$ (I)

Modèle multifacteur pour le rendement:

$$R_{i,t} = \beta_0 + \beta_i^T R_t^{(-i)} + \epsilon_{i,t}$$

avec $R_t^{(-i)}$ vecteur de rendement de tous les actifs sauf l'actif i, $\epsilon_{i,t} \sim \mathcal{N}(0, s_i^2)$

Voir l'article de Stevens. La matrice d'information $\mathcal{I}$ est de la forme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{i,i} &= \frac{1}{\sigma_i^2(1 - R_i^2)} \\
\mathcal{I}_{i,j} &= -\frac{\beta_{i,j}}{\sigma_i^2(1 - R_i^2)} \\
&= -\frac{\beta_{j,i}}{\sigma_j^2(1 - R_j^2)}
\end{aligned}$$

Interprétation de $\mathcal{I}$ (II)

Ce qui donne une expression simple pour w_i, le poid de l'actif i dans le portefeuille optimal:

$$w_i(\gamma) = \gamma \frac{\mu_i - \beta_i^T \mu_i^{(-i)}}{s_i^2}$$

Conséquences pour le portefeuille optimal MV

- Plus l'actif i est bien répliqué par les autres actifs, plus forte est la pondération dans le portefeuille MV
- Le signe de w_i est déterminé par la différence entre le rendement espéré du titre et de celui du portefeuille de couverture.

le portefeuille optimal MV de Markowitz ne procure pas une diversification des facteurs de risque, mais réalise une concentration du risque sur les facteurs d'arbitrage (sur les actifs qui peuvent être très bien répliqués par d'autres actifs de l'univers des titres)

Bibliographie