

# Finance Quantitative

Exo: Formule de Breeden-Litzenberger

Version: 10 mars 2024

On se propose de calculer la distribution empirique de  $S_T$  à partir de la volatilité implicite des options.

```
sigma <- .2
S <- 100
r <- .0
b <- 0.0
T <- 1
```

La courbe de volatilité est donnée par un polynôme du second degré. La volatilité de “Black-Scholes” est la volatilité à l’argent, réputée indépendante du strike.

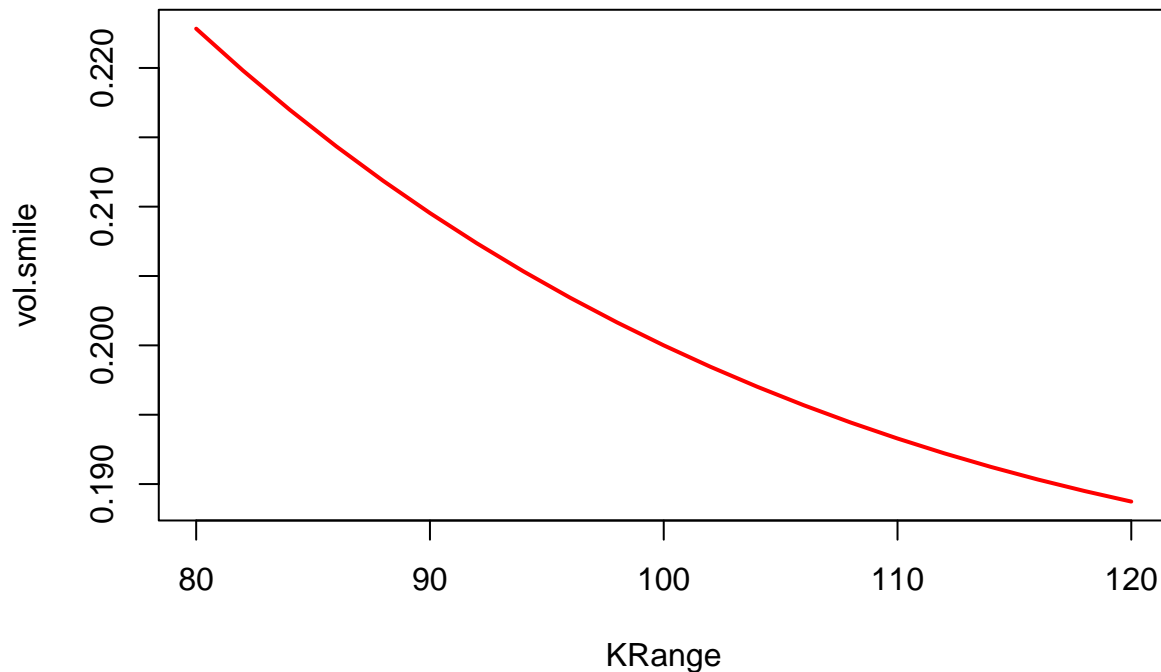
```
## quadratic smile coefficients
a1 <- -.80/10
a2 <- 1/10

## BS volatility function
bsVol <- function(K) {
  rep(sigma, length(K))
}

## Volatility with smile
smileVol <- function(K) {
  sigma + a1*log(K/S) + a2*log(K/S)^2
}
```

## Smile de volatilité

```
KRange <- seq(80, 120, by=2)
vol.smile <- sapply(KRange, smileVol)
plot(KRange, vol.smile, type="l", col="red", lwd=2)
```



## Options Européenne

Calcul du prix d'un call avec volatilité fonction du strike.

```
# Call avec smile de volatilité
call.sm <- function(K) {
  tmp <- GBSOption(TypeFlag="c", S, X=K, Time=T,
                    r=r, b=b, sigma=smileVol(K))
  tmp@price
}
# test
print(paste("Call 90: ", round(call.sm(90), 3)))
```

```
## [1] "Call 90: 13.904"
```

## Densité de $S_T$

Calculer la densité  $p(S_T)$  en utilisant la formule de Breeden-Litzenberger. Le résultat sera une fonction

## Valorisation de call digitaux strike=140

Valoriser un call digital en dehors de l'argent ( $K = 105$ ), en utilisant la distribution lognormale (Black-Scholes) et la distribution implicite dérivée du smile. On pourra utiliser la fonction “integrate” pour calculer

$$\int_K^{\infty} p(x) dx$$

Vérifiez l'intégration numérique de la distribution lognormale à l'aide de la formule analytique du call digital.