Finance Quantitative

TP 1
Optimisation de Portefeuille
Solution

Patrick Hénaff

Version: 22 mars 2024

Modèle de Black-Litterman

- Effectuer une lecture attentive de l'article de He et Litterman.
- A partir de la note de cours, reproduire les autres exemples de l'article, comparer les résultats avec ceux obtenus avec le package BLCOP.
- Comparer avec une allocation MV classique.

Données

```
 data =
'1,0.4880,0.4780,0.5150,0.4390,0.5120,0.4910
 0.4880,1,0.6640,0.6550,0.3100,0.6080,0.7790
 0.4780,0.6640,1,0.8610,0.3550,0.7830,0.6680
 0.5150,0.6550,0.8610,1,0.3540,0.7770,0.6530
 0.4390,0.3100,0.3550,0.3540,1,0.4050,0.3060
 0.5120,0.6080,0.7830,0.7770,0.4050,1,0.6520
 0.4910,0.7790,0.6680,0.6530,0.3060,0.6520,1'

  Corrmat = matrix( as.double(spl( gsub('\n', ',', data), ',')),
                    nrow = length(spl(data, '\n')), byrow=TRUE)

  stdevs = c(16.0, 20.3, 24.8, 27.1, 21.0,  20.0, 18.7)/100
  w.eq = c(1.6, 2.2, 5.2, 5.5, 11.6, 12.4, 61.5)/100
  # Prior covariance of returns
  Sigma = Corrmat * (stdevs %*% t(stdevs))
```

Calcul des rendements d'équilibre:

```
# risk aversion parameter
delta = 2.5
Pi = delta * Sigma %*% w.eq
```

Fonction de calcul des poids optimaux

Table 1: Résumé des données de marché

Assets	σ	w_{eq}	Π
Australia	16	1.6	3.9
Canada	20.3	2.2	6.9
France	24.8	5.2	8.4
Germany	27.1	5.5	9
Japan	21	11.6	4.3
UK	20	12.4	6.8
USA	18.7	61.5	7.6

```
bl.weights <- function(P, Q, tau.s, tau.o) {
# one tau per view
x = tau.o * diag(P %*% Sigma %*% t(P))
Omega = diag(x, nrow=length(x))
tau.Sigma.inv = solve(tau.s*Sigma)
M.inverse = solve(tau.Sigma.inv + (t(P) %*% solve(Omega) %*% P))
mu.bar = M.inverse %*% (tau.Sigma.inv %*% Pi + t(P) %*% solve(Omega) %*% Q)
Sigma.bar = M.inverse + Sigma

w.star = (1/delta) * solve(Sigma.bar) %*% mu.bar

A = (1/tau.s)*Omega + 1/(1+tau.s) * P %*% Sigma %*% t(P)
APS <- 1/(1+tau.s) * solve(A) %*% P %*% Sigma
OIQ <- (tau.s/delta) * solve(Omega) %*% Q
Lambda =  OIQ - APS %*% w.eq - APS %*% t(P) %*% OIQ

Hmisc::llist(mu.bar, w.star, Lambda)
}
```

Point de vue 1: Le marché action Allemand surperforme le reste du marché action Européen de 5% par an.

Portefeuille exprimant le point de vue:

```
P.1 = matrix(c(0, 0, -29.5, 100, 0, -70.5, 0)/100, nrow=1)
Q.1 = 5/100
tau.s = 0.05
tau.o = 0.05

res <- bl.weights(P.1, Q.1, tau.s, tau.o)
df = data.frame(100*cbind(t(P.1), res$mu.bar, res$w.star, res$w.star-w.eq/(1+tau.s)))
df <- rbind(df, c(100*Q.1, rep(NA, 4)))
df <- rbind(df, c(100*res$Lambda[1], rep(NA, 4)))

row.names(df) = c(AssetNames, 'q', '$\\lambda \\times 100$')
names(df) =  c('P', "$\\bar{\\mu}$", '$w^*$','$w^* - \\frac{W_{eq}}{1+\\tau}$')

tmp <- kable(df, digits = 1, format="latex", booktabs=T, escape=F,
      caption="Solution avec PdV 1. P: matrice du PdV, $\\bar{\\mu}$: rendement ex-post,
```

```
      $w^*$: poids optimaux, $\\frac{W_{eq}}{1+\\tau}$: poids ex-ante") %>%
  kable_styling(latex_options="HOLD_position")
kableExtra::row_spec(tmp, 7, hline_after = TRUE)
```

Table 2: Solution avec PdV 1. P: matrice du PdV, $\bar{\mu}$: rendement ex-post, w^*: poids optimaux, $\frac{W_{eq}}{1+\tau}$: poids ex-ante

	P	$\bar{\mu}$	w^*	$w^* - \frac{W_{eq}}{1+\tau}$
Australia	0.0	4.3	1.5	0.0
Canada	0.0	7.6	2.1	0.0
France	-29.5	9.3	-3.9	-8.9
Germany	100.0	11.0	35.4	30.2
Japan	0.0	4.5	11.0	0.0
UK	-70.5	7.0	-9.5	-21.3
USA	0.0	8.1	58.6	0.0
q	5.0			
$\lambda \times 100$	31.7			

Point de vue 2: le marché action Canadien surperforme le marché US de 3% par an.

Solution Litterman & He

Portefeuille exprimant le point de vue:

```
P.2 = matrix(c(0, 100, 0, 0, 0, 0, -100)/100, nrow=1)
Q.2 = 3/100

P <- rbind(P.1, P.2)
Q <- matrix(c(Q.1, Q.2), nrow=2)
tau.o <- rep(0.05,2)
res <- bl.weights(P, Q, tau.s, tau.o)
df = data.frame(100*cbind(t(P), res$mu.bar, res$w.star, res$w.star-w.eq/(1+tau.s)))
df <- rbind(df, c(100*t(Q), rep(NA, 4)))
df <- rbind(df, c(t(100*res$Lambda), rep(NA, 4)))

row.names(df) = c(AssetNames, 'q', '$\\lambda \\times 100$')
names(df) =  c('$P_1$', '$P_2$', "$\\bar{\\mu}$", '$w^*$','$w^* - \\frac{W_{eq}}{1+\\tau}$')
tmp <- kable(df, digits = 1, format="latex", booktabs=T, escape=F,
      caption="Solution avec PdV 1 and 2.") %>%
  kable_styling(latex_options="HOLD_position")
kableExtra::row_spec(tmp, 7, hline_after = TRUE)
```

Table 3: Solution avec PdV 1 and 2.

	P_1	P_2	$\bar{\mu}$	w^*	$w^* - \frac{W_{eq}}{1+\tau}$
Australia	0.0	0.0	4.4	1.5	0.0
Canada	0.0	100.0	8.7	41.9	39.8
France	-29.5	0.0	9.5	-3.4	-8.4
Germany	100.0	0.0	11.2	33.6	28.3
Japan	0.0	0.0	4.6	11.0	0.0
UK	-70.5	0.0	7.0	-8.2	-20.0
USA	0.0	-100.0	7.5	18.8	-39.8
q	5.0	3.0			
$\lambda \times 100$	29.8	41.8			

Solution BLCOP

La solution obtenue en resolvant directement le portefeuille tangent avec les rendements et la matrice de covariance ex-post est globalement en accord avec le résultat de Litterman & He.

```
# rendement ex-ante
delta = 2.5
Pi = delta * Sigma %*% w.eq

# Point de vue
tau.pdv = 0.05

PDV.1 = matrix(c(0, 0, -29.5, 100, 0, -70.5, 0)/100, nrow=1)
colnames(PDV.1) <- AssetNames
# niveau de confiance
sd <- as.numeric(tau.pdv * PDV.1  %*% Sigma %*% t(PDV.1))
views <- BLViews(P = PDV.1, q = 0.05,
                 confidences =  1/sd,
                 assetNames = AssetNames)

PDV.2 = matrix(c(0, 100, 0, 0, 0, 0, -100)/100, nrow=1)
colnames(PDV.2) <- AssetNames
# niveau de confiance
sd <- as.numeric(tau.pdv * PDV.2  %*% Sigma %*% t(PDV.2))
views <- addBLViews(PDV.2, q = 0.03,
                 confidences =  1/sd,
                 views)

dist.expost <- posteriorEst(views=views, sigma=Sigma, mu=as.vector(Pi), tau=0.05)

mu <- dist.expost@posteriorMean
S <- dist.expost@posteriorCovar
res <- solve.QP(Dmat=S, dvec=rep(0, length(mu)), Amat=as.matrix(mu, ncol=1), bvec=1, meq=1)
w.QP <- round(100*res$solution/sum(res$solution),1)
df <- data.frame(w=w.QP)
row.names(df) <- AssetNames
names(df) <- "$w^*$"
kable(df, caption = "Portefeuille tangent avec BLCOP et solve.QP, incorporant les PDV 1 et 2",
```

```
      format="latex", booktabs=T, escape=F) %>%
    kable_styling(latex_options="HOLD_position")
```

Table 4: Portefeuille tangent avec BLCOP et solve.QP, incorporant les PDV 1 et 2

	w^*
Australia	1.6
Canada	44.0
France	-3.6
Germany	35.3
Japan	11.6
UK	-8.6
USA	19.7

Point de vue 3: Optimiste sur le marché action Canadien

Le seul changement est le paramètre q_2:

```
Q.2 = 4/100

Q <- matrix(c(Q.1, Q.2), nrow=2)

res <- bl.weights(P, Q, tau.s, tau.o)
df = data.frame(100*cbind(t(P), res$mu.bar, res$w.star, res$w.star-w.eq/(1+tau.s)))
df <- rbind(df, c(100*t(Q), rep(NA, 4)))
df <- rbind(df, c(t(100*res$Lambda), rep(NA, 4)))

row.names(df) = c(AssetNames, 'q', '$\\lambda \\times 100$')
names(df) =  c('$P_1$', '$P_2$', "$\\bar{\\mu}$", '$w^*$','$w^* - \\frac{W_{eq}}{1+\\tau}$')
tmp <- kable(df, digits = 1, format="latex", booktabs=T, escape=F,
      caption="Actions Allemandes surperforment de 4\\%") %>%
  kable_styling(latex_options="HOLD_position")
kableExtra::row_spec(tmp, 7, hline_after = TRUE)
```

Table 5: Actions Allemandes surperforment de 4%

	P_1	P_2	$\bar{\mu}$	w^*	$w^* - \frac{W_{eq}}{1+\tau}$
Australia	0.0	0.0	4.4	1.5	0.0
Canada	0.0	100.0	9.1	53.3	51.3
France	-29.5	0.0	9.5	-3.3	-8.2
Germany	100.0	0.0	11.3	33.1	27.8
Japan	0.0	0.0	4.6	11.0	0.0
UK	-70.5	0.0	7.0	-7.8	-19.6
USA	0.0	-100.0	7.3	7.3	-51.3
q	5.0	4.0			
$\lambda \times 100$	29.2	53.8			

Point de vue 4: Moindre confiance dans le PdV "Allemagne vs reste de l'Europe"

L'écart type du rendement du portefeuille 1 double ($\tau = 0.1$):

```
tau.o <- c(0.1, .05)
res <- bl.weights(P, Q, tau.s, tau.o)
df = data.frame(100*cbind(t(P), res$mu.bar, res$w.star, res$w.star-w.eq/(1+tau.s)))
df <- rbind(df, c(100*t(Q), rep(NA, 4)))
df <- rbind(df, c(t(100*res$Lambda), rep(NA, 4)))

row.names(df) = c(AssetNames, 'q', '$\\lambda \\times 100$')
names(df) =  c('$P_1$', '$P_2$', "$\\bar{\\mu}$", '$w^*$','$w^* - \\frac{W_{eq}}{1+\\tau}$')
tmp <- kable(df, digits = 1, format="latex", booktabs=T, escape=F,
      caption="Moindre confiance dans le PdV 1.") %>%
  kable_styling(latex_options="HOLD_position")
kableExtra::row_spec(tmp, 7, hline_after = TRUE)
```

Table 6: Moindre confiance dans le PdV 1.

	P_1	P_2	$\bar{\mu}$	w^*	$w^* - \frac{W_{eq}}{1+\tau}$
Australia	0.0	0.0	4.3	1.5	0.0
Canada	0.0	100.0	8.9	53.9	51.8
France	-29.5	0.0	9.3	-0.5	-5.4
Germany	100.0	0.0	10.6	23.6	18.4
Japan	0.0	0.0	4.6	11.0	0.0
UK	-70.5	0.0	6.9	-1.1	-13.0
USA	0.0	-100.0	7.1	6.8	-51.8
q	5.0	4.0			
$\lambda \times 100$	19.3	54.4			

Ajout d'un point de vue redondant.

Le point de vue "Le marché action Canadien surperforme le marché Nippon de 4.12%" est implicite aux points de vue précédents. L'ajout du PdV ne change pas l'allocation.

```
P.3 = matrix(c(0, 100, 0, 0, -100, 0, 0 )/100, nrow=1)
Q.3 = 4.12/100

P <- rbind(P.1, P.2, P.3)
Q <- matrix(c(Q.1, Q.2, Q.3), nrow=3)
tau.o <- c(0.1, .05, 0.05)
res <- bl.weights(P, Q, tau.s, tau.o)
df = data.frame(100*cbind(t(P), res$mu.bar, res$w.star, res$w.star-w.eq/(1+tau.s)))
df <- rbind(df, c(100*t(Q), rep(NA, 4)))
df <- rbind(df, c(t(100*res$Lambda), rep(NA, 4)))

row.names(df) = c(AssetNames, 'q', '$\\lambda \\times 100$')
names(df) =  c('$P_1$', '$P_2$', '$P_3$', "$\\bar{\\mu}$", '$w^*$','$w^* - \\frac{W_{eq}}{1+\\tau}$')
tmp <- kable(df, digits = 1, format="latex", booktabs=T, escape=F,
```

```
    caption="PdV redondant Canada/Japon.") %>%
  kable_styling(latex_options="HOLD_position")
kableExtra::row_spec(tmp, 7, hline_after = TRUE)
```

Table 7: PdV redondant Canada/Japon.

	P_1	P_2	P_3	$\bar{\mu}$	w^*	$w^* - \frac{W_{eq}}{1+\tau}$
Australia	0.0	0.0	0.0	4.3	1.5	0.0
Canada	0.0	100.0	100.0	8.8	53.9	51.8
France	-29.5	0.0	0.0	9.2	-0.5	-5.4
Germany	100.0	0.0	0.0	10.6	23.6	18.4
Japan	0.0	0.0	-100.0	4.6	11.0	0.0
UK	-70.5	0.0	0.0	6.9	-1.1	-13.0
USA	0.0	-100.0	0.0	7.1	6.8	-51.8
q	5.0	4.0	4.1			
$\lambda \times 100$	19.3	54.4	0.0			

Modèle MV multi-factoriel

Pour remédier à la fragilité d'une matrice de covariance estimée sur des données historiques, on se propose d'explorer diverses techniques pour obtenir une estimation plus robuste, et d'observer l'effet de ces estimations sur la solution d'un modèle classique moyenne-variance.

Lire et mettre en oeuvre la méthode "modèles diagonalizables de covariance" décrite par Jacobs, Levy et Markowitz (2005). Résoudre le problème MV et comparer le résultat à celui obtenu avec une estimation directe de la matrice à partir des séries chronologiques.

Solution:

Le rendement des actifs est modélisé à l'aide de facteurs (pas nécésairement orthogonaux):

$$R_A = \mu_A + BR_F + U_A$$

La variance d'un portefeuille W_A est donc:

$$\begin{aligned}
V(R_P) &= V(R_A^T W_A) && (1)\\
&= V((\mu_A + BR_F + U_A)^T W_A) && (2)\\
&= W_A^T (F \Sigma_F F^T + D) W_A && (3)\\
&= W_F^T \Sigma_F W_F + W_A^T D W_A && (4)
\end{aligned}$$

avec $W_F = F^T W_A$.

Le portefeuille tangent est la solution du problème:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \frac{\mu^T w_A - r_0}{\sqrt{w_F^T \Sigma_F w_F + w_A^T D w_A}} \\
\text{s.t.} & \\
& \mathbf{1}^T w = 1 \\
& F^T w_A - w_F = 0 \\
& A w_A \geq b \\
& w_A \geq 0
\end{aligned}
$$

Ce problème est équivalent à:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & w_F^T \Sigma_F w_F + w_A^T D w_A \\
\text{s.t.} & \\
& \hat{\mu}^T w_A = 1 \\
& F^T w_A - w_F = 0 \\
& \hat{A}^T w_A \geq 0 \\
& w_A \geq 0
\end{aligned}
$$

avec $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}], \hat{a}_{ij} = a_{ij} - b_i$ et $\hat{\mu} = \mu_A - r_0$.

Données

On utilisera les facteurs Fama-French ainsi que des séries de cours des actions du NASDAQ.

Facteurs Fama-French

Les facteurs mensuels du modèle classique à trois facteurs sont disponibles sur le site de K. French:

```
FF.file <- file.path(get.data.folder(), "FFdownload.rda")
if(!file.exists(FF.file)) {
  tempf <- tempfile(fileext = ".RData")
  inputlist <- c("F-F_Research_Data_Factors")
  FFdownload(output_file = FF.file, inputlist=inputlist)
}
load(FF.file)

# Fama-French 3 factors - monthly

ts.FF <- FFdownload$`x_F-F_Research_Data_Factors`$monthly$Temp2["1960-01-01/",
c("Mkt.RF","SMB","HML")]/100
ts.FF <- timeSeries(ts.FF, as.Date(time(ts.FF)))
```

Historique des cours du NASDAQ

```
folder <- 'NASDAQ'
tickers <- get.tickers(folder)
ts.all <- get.all.ts(folder, tickers, dt.start = dmy('01Mar2007'), combine = TRUE)
# exclusion des titres a trop forte vol
sigma = colSds(ts.all)
idx <- which((sigma-mean(sigma)) > 3*sqrt(var(sigma)))
```

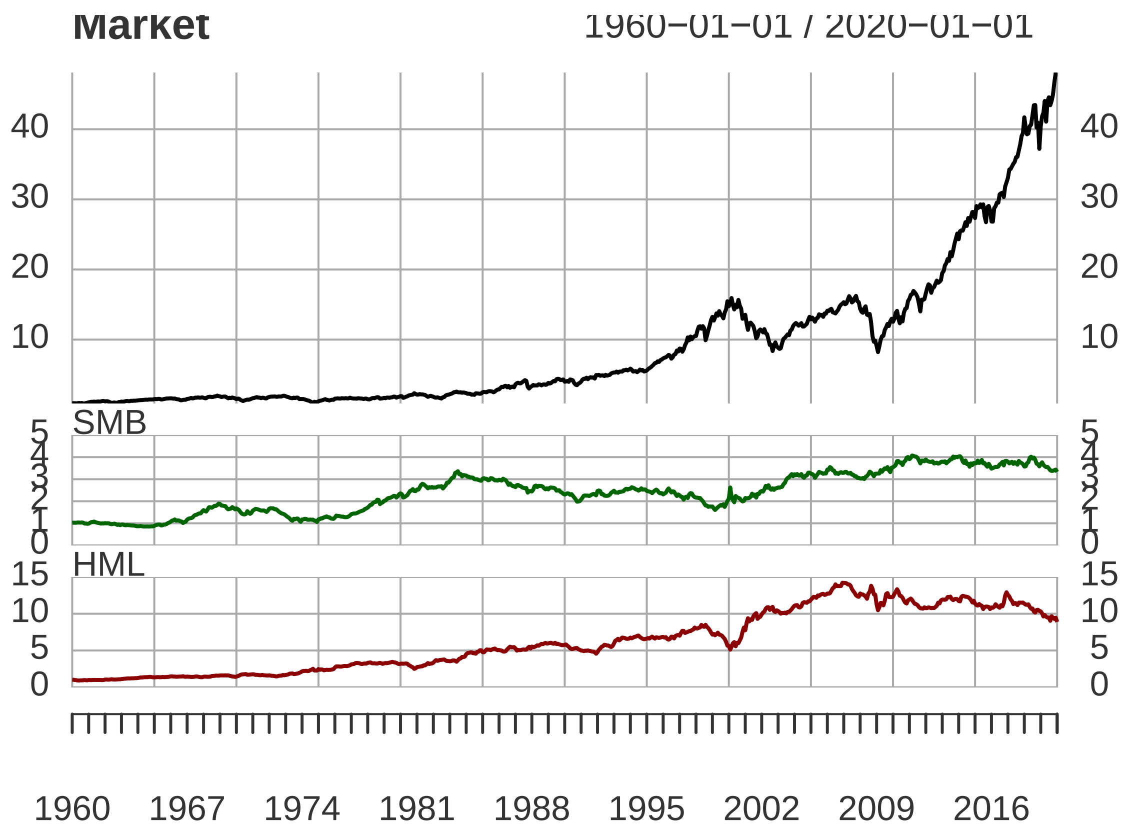

Figure 1: Facteurs Fama-French

```
while(length(idx)>0) {
ts.all <- ts.all[,-idx]
sigma = colSds(ts.all)
idx <- which((sigma-mean(sigma)) > 3*sqrt(var(sigma)))
}
```

Taux sans risque

Le taux sans risque est obtenu du site de la Banque Féderale.

```
# riskless rate
file.path <- file.path(get.data.folder(), "DP_LIVE_01032020211755676.csv")
tmp <- read.csv(file.path, header=TRUE, sep=";")[, c("TIME", "Value")]
dt <- ymd(paste(tmp$TIME, "-01", sep=""))
rf_rate <- timeSeries(data=tmp$Value/(100.0*12), dt)
colnames(rf_rate) <- "Rf"
```

Modèle Moyenne-Variance avec la covariance historique.

Tous les calculs doivent se faire sur des données mensuelles.

1. Convertir les séries de rendement quotidiennes en séries mensuelles
2. Choisir un intervalle de 36 mois et calculer la matrice de covariance. Vérifier que la matrice est positive définite, et effectuer la correction necessaire si besoin.
3. Calculer le portefeuille tangent.

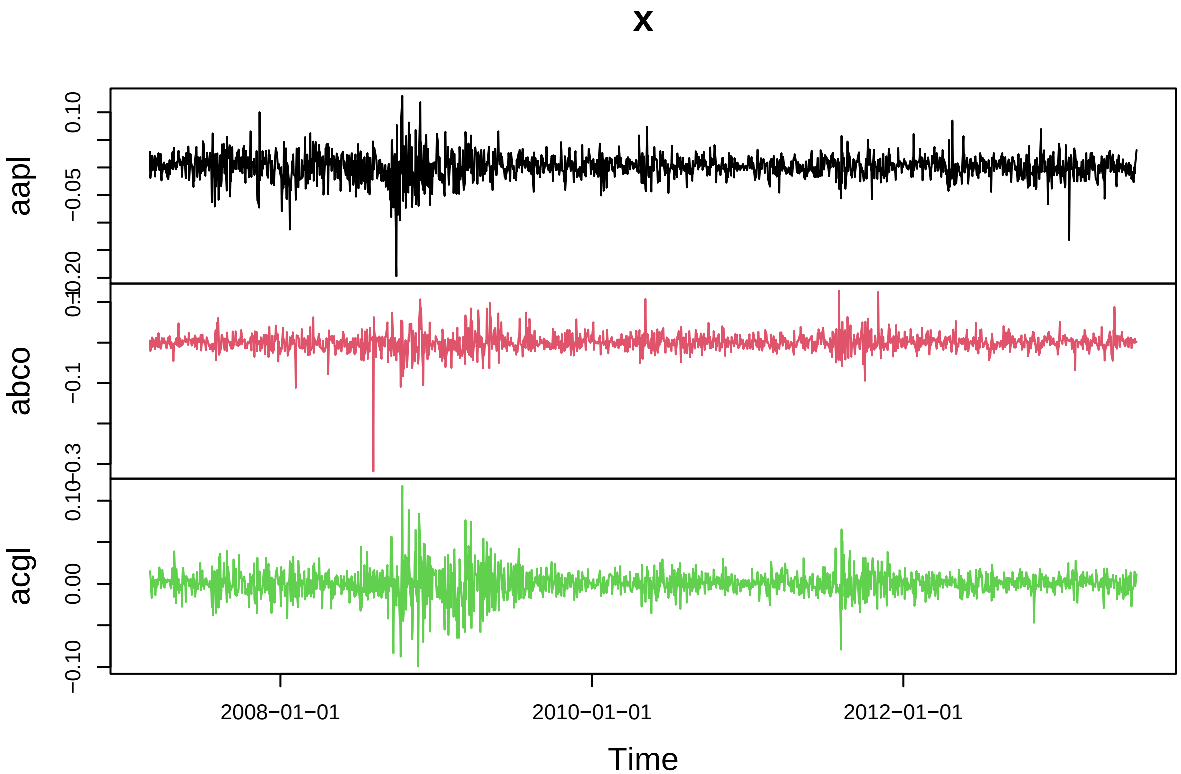

Figure 2: Rendements quotidiens de titres du NASDAQ

Que penser de la solution trouvée?

Solution

Calcul du rendement mensuel. La série de taux sans risque mensuel est alignée avec les séries de rendement des titres.

```
ts.all.monthly <- apply.monthly(ts.all[,1], FUN=sum)
for(i in 2:ncol(ts.all)) {
  tmp <- apply.monthly(ts.all[,i], FUN=sum)
  ts.all.monthly <- cbind(ts.all.monthly, tmp)
}
tmp <- floor_date(ymd(time(ts.all.monthly)), 'month')
time(ts.all.monthly) = as.timeDate(tmp)
ts.all.A <- removeNA(merge(ts.all.monthly, rf_rate))
asset.cols <- head(colnames(ts.all.A), -1)
nb.assets <- length(asset.cols)
```

Selection de l'intervalle de calcul: 3 ans de données mensuelles.

```
nb.obs = 12*3
dt.start <- dmy("01Aug2009")
idx.start <- closest.index(ts.all.A, dt.start)
idx <- seq(idx.start, length.out=nb.obs)

ts.r.A <- ts.all.A[idx, asset.cols]
riskfree.r <- ts.all.A[idx, "Rf"]
```

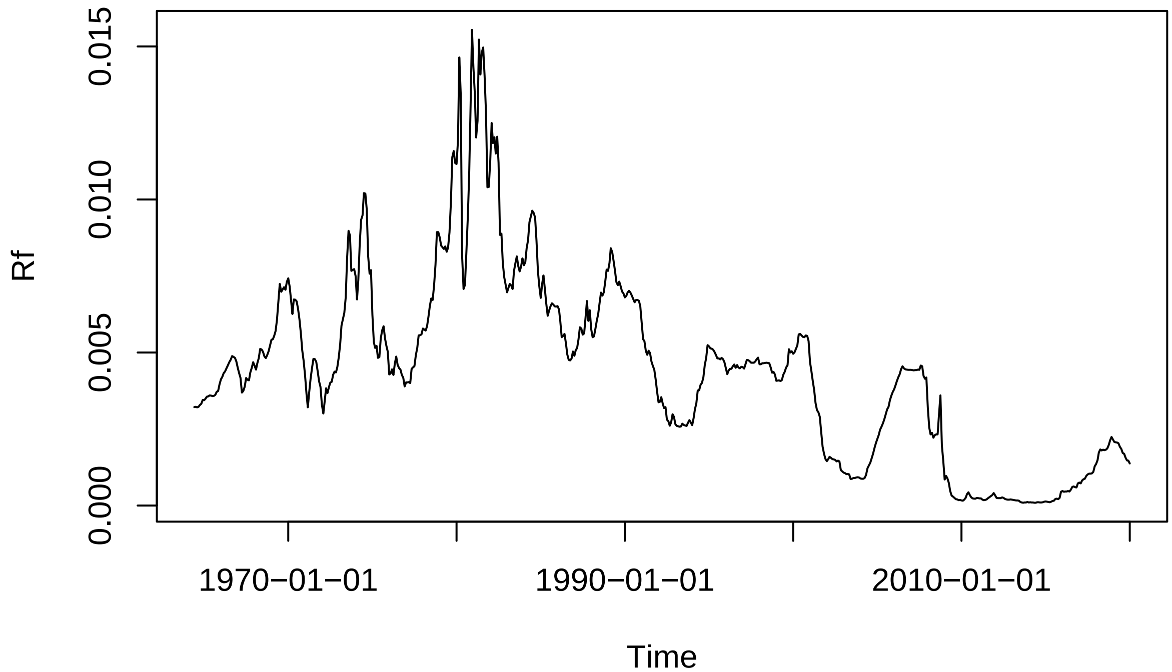

Figure 3: Taux court-terme mensuel des emprunts d'état

On calcule les termes du programme quadratique, en prenant soin de rendre Σ positive définite si nécéssaire.

```
mu.hat <- colMeans(ts.r.A[, asset.cols]) - rep(as.numeric(last(riskfree.r)), nb.assets)
cov.A = cov(ts.r.A[, asset.cols], method='pearson')

if(!is.positive.definite(cov.A)) {
  cov.A <- make.positive.definite(cov.A, 0.0000001)
}


# w > 0
A = diag(nb.assets)
b.0 <- rep(0, nb.assets)

# \mu^T w = 1
A <- cbind(mu.hat, A)
b.0 <- c(1, b.0)

sol = solve.QP(Dmat = cov.A, dvec = rep(0, nrow(cov.A)) ,
                      Amat=A, bvec=b.0, meq=1)
```

On ne garde que les poids significativement positifs.

```
w.tol <- 2.5/100
w = sol$solution / sum(sol$solution)
w[w < w.tol] = 0
w = w/sum(w)
names(w) = asset.cols
nb.assets <- length(asset.cols)
w <- as.matrix(w, ncol=1)
risk <- round(100*sqrt(t(w) %*% cov.A %*% w),2)
```

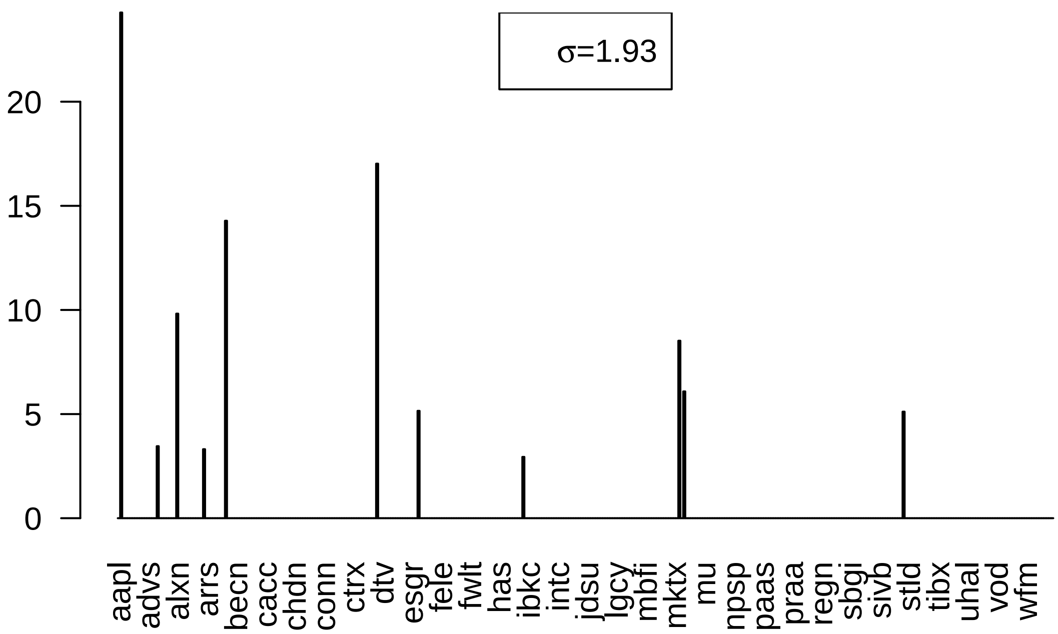

Figure 4: Portefeuille Tangent (covariance historique)

On observe que le portefeuille est concentré sur un petit nombre de titres.

Modèle Moyenne-Variance avec des facteurs statistiques

On se propose d'utiliser des facteurs issus d'une ACP pour modéliser la covariance entre les titres. En pratique, on utilisera le modèle "Diagonizable Model of Covariance" décrit par Jacobs, Levy & Markowitz (2005).

Avec les données selectionnées précédement,

1. Calculer une ACP et identifier les facteurs qui semblent significatifs.
2. Construire les séries chronologiques $R_F(t)$.
3. Calculer la matrice B en estimant par regression les coefficients β_{ik} de l'équation

$$R_i(t) = \mu_i + \sum_k \beta_{ik} R_{F_k}(t) + U_i(t)$$

4. Calculer les matrices de covariance des facteurs et des termes d'erreur.
5. Formuler et résoudre le programme quadratique dont la solution est le portefeuille tangent.

Comparer cette solution à la solution précédente.

Solution

Calcul des composantes principales et regression des rendements sur les facteurs.

```
res.pca <- prcomp(ts.r.A[, asset.cols], scale=TRUE)
nb.factors <- 3
# Rendement des facteurs: rotation des séries initiales
f.ret <- timeSeries(data=res.pca$x[,1:nb.factors], time(ts.r.A))

# Calcul des \beta
```

```r
w = lapply(seq_len(nb.assets),function(i) {lm(ts.r.A[,i] ~ f.ret)})

beta <- matrix(0, ncol=ncol(f.ret), nrow=nb.assets)
alpha <- rep(0, nb.assets)
cov.U.ACP <- rep(0, nb.assets)
for(i in seq_len(nb.assets)) {
  beta[i,] = tail(w[[i]]$coefficients,-1)
  alpha[i] = w[[i]]$coefficients[1]
  cov.U.ACP[i] = var(w[[i]]$residuals)
}

cov.diag = c(cov.U.ACP, colVars(f.ret))
cov.FM = diag(cov.diag)
```

On peut maintenant former le programme quadratique

```r
A <- rbind(beta, -diag(nb.factors))
A <- cbind(A, c(mu.hat, rep(0, nb.factors)))
b.0 <- c(rep(0, nb.factors), 1)
sol <- solve.QP(Dmat=cov.FM, dvec=rep(0, nrow(cov.FM)), Amat=A, bvec=b.0, meq=ncol(A))
```

```r
w.tol <- 2.5/100
w <- head(sol$solution, nb.assets)
w = w/sum(w)
w[w < w.tol] = 0
w = w/sum(w)
names(w) = asset.cols
nb.assets <- length(asset.cols)
w <- as.matrix(w, ncol=1)
risk <- round(100*sqrt(t(w) %*% cov.A %*% w),2)
```

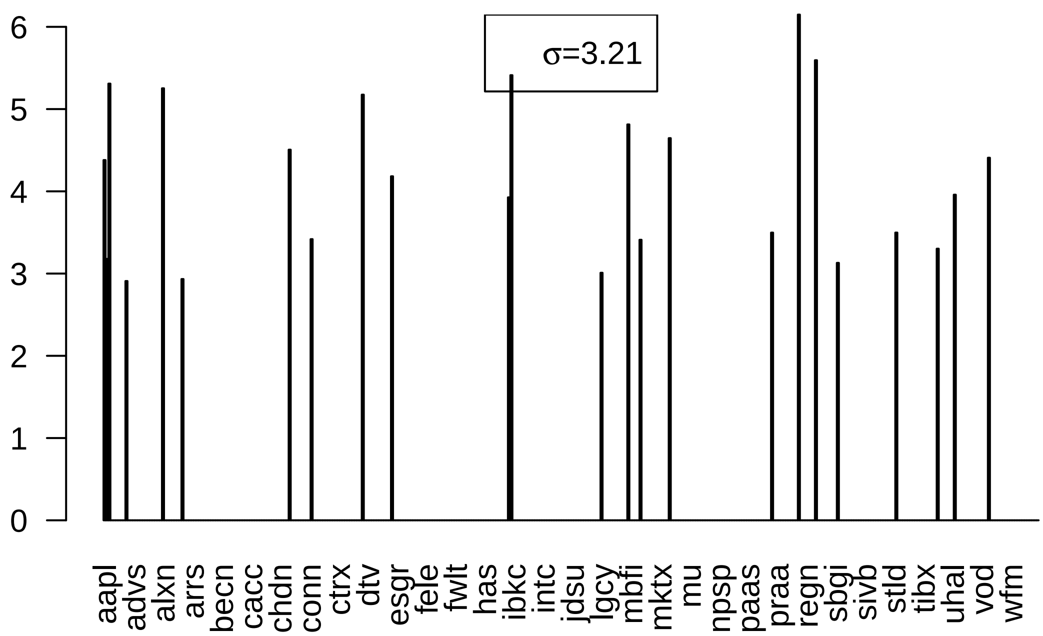

Figure 5: Portefeuille Tangent (covariance selon facteurs ACP). L'allocation est beaucoup plus diversifiée qu'en utilisant la covariance historique

A titre de curiosité, on compare ci-dessous l'évolution d'AAPL et du premier facteur issu de l'ACP. Sans surprise, une entreprise à très forte capitalisation telle que AAPL suit globalement l'indice de marché.

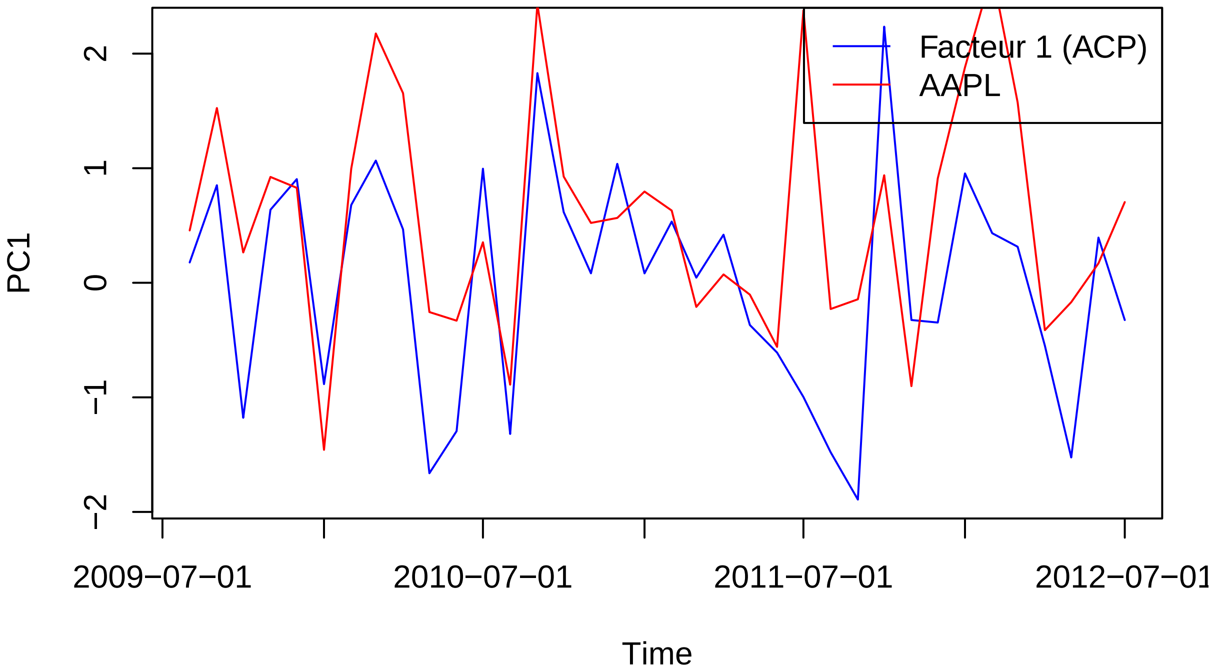

Figure 6: Rendement du facteur 1 et d'AAPL

Modèle Moyenne-Variance avec les facteurs Fama-French

On procède de la même manière que précédement, en substituant les 3 facteurs Fama-French aux facteurs statistiques. Noter que la matrice de covariance des facteurs n'est plus diagonale.

Solution

On aligne les séries de facteurs avec les rendements des titres.

```
tmp <- removeNA(merge(ts.all.monthly, ts.FF))
ts.merged <- removeNA(merge(tmp, rf_rate))
```

Selection de l'intervalle de calcul: 3 ans de données mensuelles.

```
nb.obs = 12*3
dt.start <- dmy("01Aug2009")
idx.start <- closest.index(ts.all.A, dt.start)
idx <- seq(idx.start, length.out=nb.obs)

ts.r.A <- ts.merged[idx, asset.cols]
riskfree.r <- ts.merged[idx, "Rf"]
f.ret <- ts.merged[idx,colnames(ts.FF)]
nb.factors = ncol(f.ret)
```

```
# Calcul des \beta

w = lapply(seq_len(nb.assets),function(i) {lm(ts.r.A[,i] ~ f.ret)})
```

```
beta <- matrix(0, ncol=ncol(f.ret), nrow=nb.assets)
row.names(beta) <- asset.cols
alpha <- rep(0, nb.assets)
cov.U.FF <- rep(0, nb.assets)
names(alpha) = asset.cols
names(cov.U.FF) <- asset.cols
for(i in seq_len(nb.assets)) {
  beta[i,] = tail(w[[i]]$coefficients,-1)
  alpha[i] = w[[i]]$coefficients[1]
  cov.U.FF[i] = var(w[[i]]$residuals)
}

cov.F = cov(f.ret)
cov.FU.1 <- cbind(diag(cov.U.FF), matrix(0, nrow=nb.assets, ncol=nb.factors))
cov.FU.2 <- cbind(matrix(0, nrow=nb.factors, ncol=nb.assets), cov.F)
cov.FU <- rbind(cov.FU.1, cov.FU.2)
```

On peut maintenant former le programme quadratique

```
A <- rbind(beta, -diag(nb.factors))
A <- cbind(A, c(mu.hat, rep(0, nb.factors)))
b.0 <- c(rep(0, nb.factors), 1)
sol <- solve.QP(Dmat=cov.FU, dvec=rep(0, nrow(cov.FU)), Amat=A, bvec=b.0, meq=ncol(A))
```

```
w.tol <- 2.5/100
w = head(sol$solution, nb.assets)
w = w/sum(w)
w[w < w.tol] = 0
w = w/sum(w)
names(w) = asset.cols
nb.assets <- length(asset.cols)
w <- as.matrix(w, ncol=1)
risk <- round(100*sqrt(t(w) %*% cov.A %*% w),2)
```

Pour évaluer les mérites respectifs des facteurs issus de l'ACP et des facteurs FF, on représente ci-dessous la correspondance entre les résidus des regressions des rendements sur les deux types de facteurs. Les résultats sont globalement comparables.

Comme précédement, on observe que le titre AAPL est globalement cohérent avec les mouvements du premier facteur de FF.

Finalement, on note une cohérence remarquable entre le facteur 1 issu de l'ACP et le facteur "marché" de Fama-French.

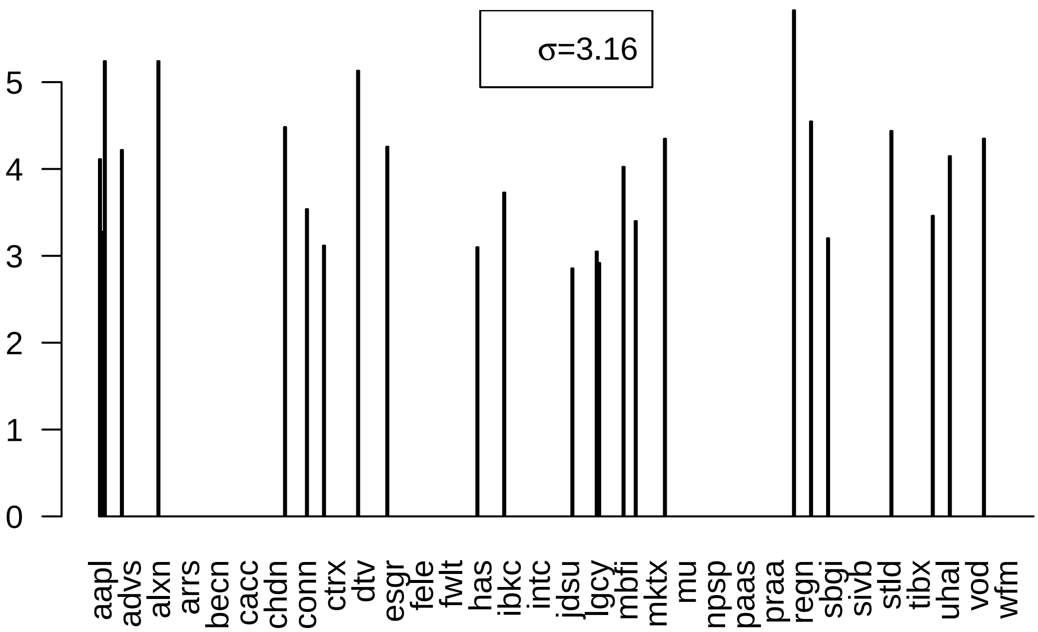

Figure 7: Portefeuille Tangent (covariance selon facteur F-F). On obtient la même diversification qu'avec une matrice de covariance issue de l'ACP

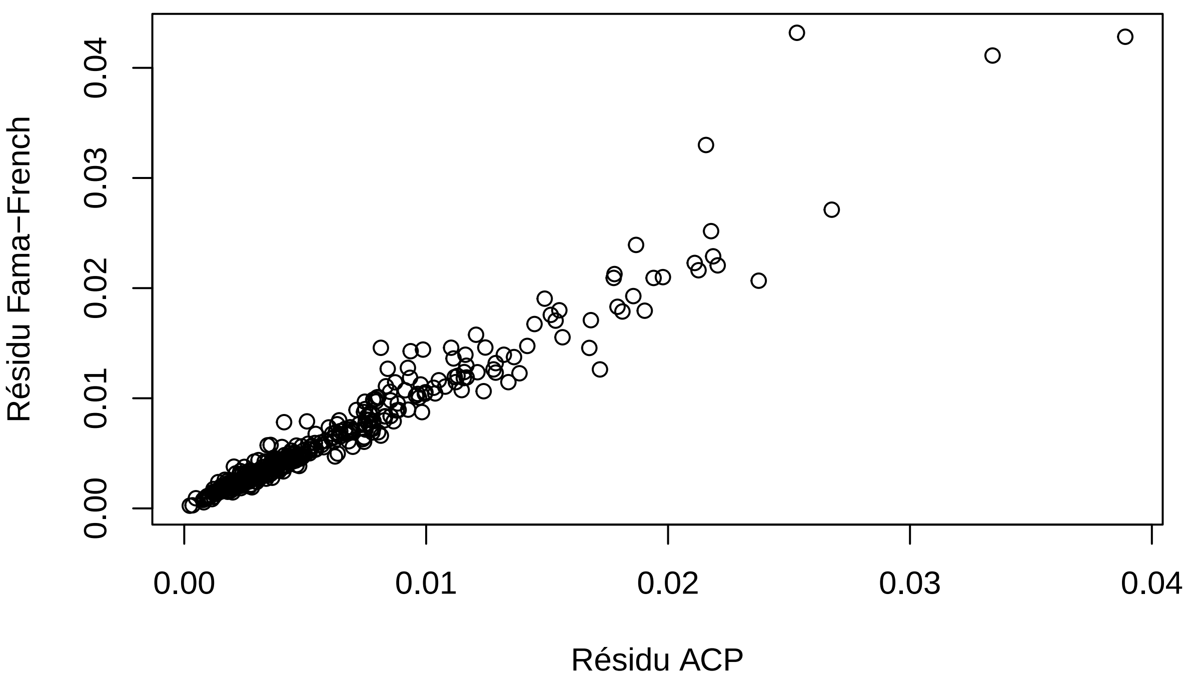

Figure 8: Résidus des modèles FF et ACP. Chaque point représent un titre, avec en abscisse le résidu du modèle ACP, et en ordonnée le résidu du modèle FF. On observe une cohérence entre les deux modèles

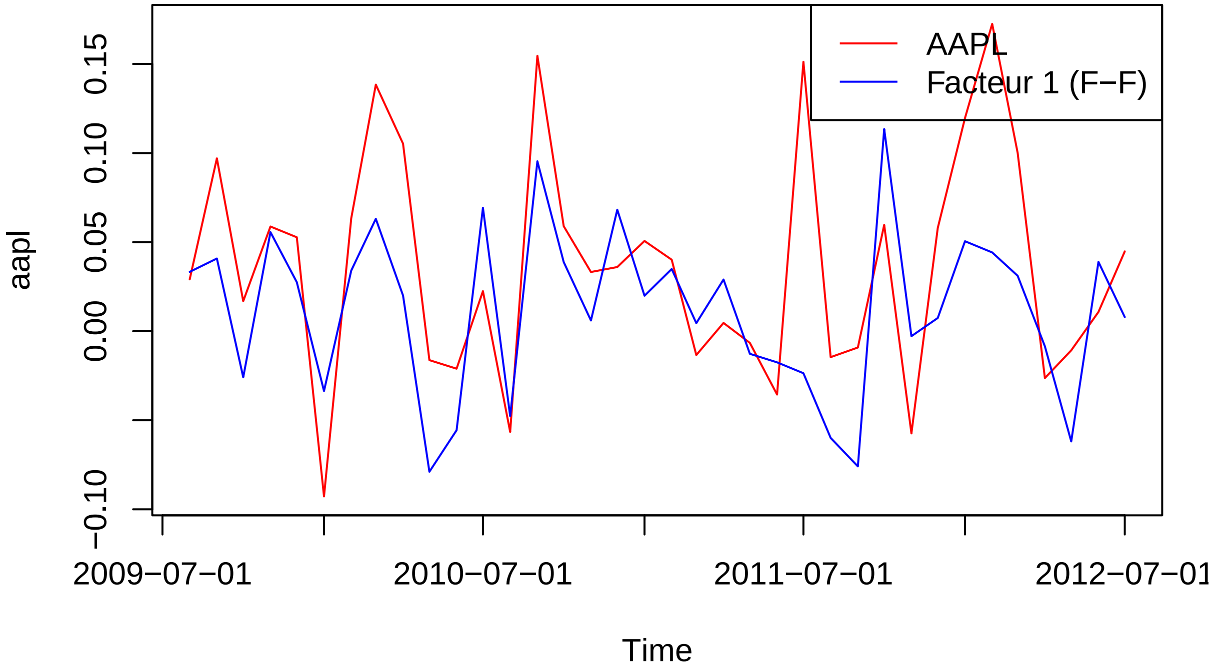

Figure 9: Rendement du facteur Marché de F-F et d'AAPL

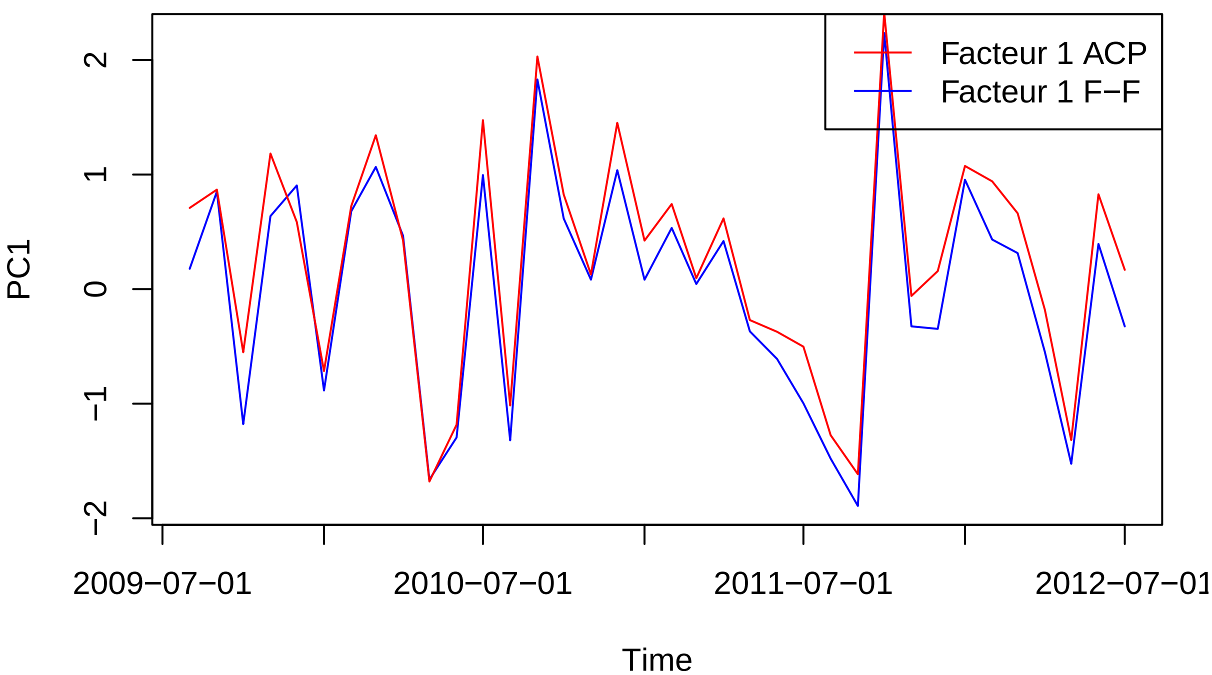

Figure 10: Facteur 1 statistique et facteur marché de Fama-French