Quantitative Finance

"Exo: Pricing under Historical Distributions"
Solution

Patrick Hénaff

Version: 14 mars 2024

Contents


```
library(lubridate)
library(fExoticOptions)
library(kableExtra)
library(ggplot2)
library(stats)
library(nleqslv)
library(reshape)
```

Dans cet exercice, on teste la méthode Derman-Zou pour ajuster et rendre risque-neutre une distribution empirique. Utiliser l'algorithme contenu dans la note de cours pour calculer les q_i.

0.1 Construction de la distribution empirique

Sélectionner une série du SBF120 et générer 500 scénarios de rendement moyen sur 3 mois. En effectuant un tirage avec remise dans la serie des rendements quotidiens.

```
ts.zc <- get.ts(folder="SBF120", ticker="zc.pa")
nb.samples <- 500
nb.days <- 22*3
boot.samples <- matrix(sample(ts.zc, size=nb.samples*nb.days, replace=TRUE), nb.samples, nb.days
period.means <- apply(boot.samples,1,sum)
```

Calcul d'une densité lissée à partir de l'échantillon, et interpolée à intervalles réguliers. Une répartition régulière des points rendra plus robuste les calculs d'espérance de produits dérivés:

```
adj = 1
eps <- .2 * diff(range(period.means))
dens <- density(period.means, adjust = adj, from=min(period.means)-eps, to=max(period.means)+eps
                n=500)
dens <- data.frame(x=dens$x, y=dens$y)
```

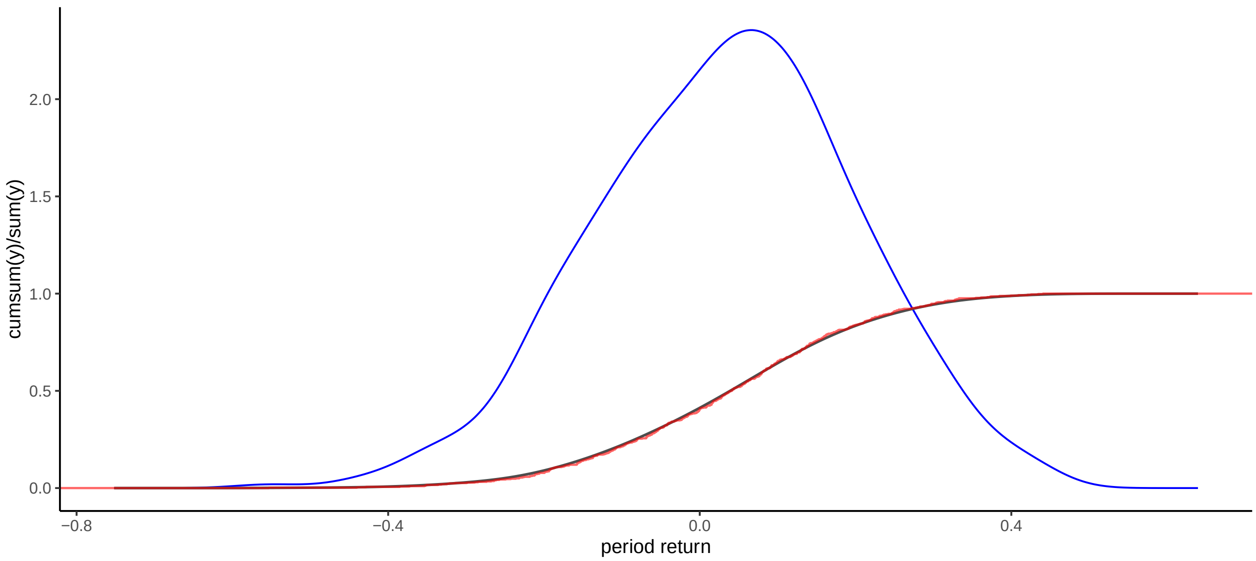

Figure 1: Historical monthly return - Zodiac Aerospace

Le rendement moyen annualisé est13.6 %, et la volatilité 33.2 %.

0.2 Nouvelle information

Le taux sans risque est 2%. Le spot est $S_0 = 100$. Incorporer les informations suivantes et observez à chaque fois l'effet sur la distribution ajustée.

1. Le straddle ATM est valorisé avec la volatilité empirique.
2. Le call 110 a une volatilité implicite égale à la volatilité empirique + 1%
3. Le put 85 a une volatilité implicite égale à la volatilité empirique + 0.5%

0.3 Smile

Calculez les volatilité implicites pour les strikes de 80 à 120 et tracer la courbe du smile.

0.4 Solution

On calcule le prix de marché du straddle ATM:

```
S.0 <- 100
K <- 100
TTM = 3/12
r = .02
```

```
sigma.histo = sd(period.means) * sqrt(12/3)
riskfree.df <- exp(-r*TTM)
s <- CRRBinomialTreeOption(TypeFlag="ce", S=S.0, X=K, Time=TTM, r=r,
                            b=r, sigma=sigma.histo, n=200)@price +
     CRRBinomialTreeOption(TypeFlag="pe", S=S.0, X=K, Time=TTM, r=r,
                            b=r, sigma=sigma.histo, n=200)@price
```

La matrice A est à ce stade composée de deux lignes: une ligne pour contraindre l'espérance de rendement, et une pour contrainte le prix du straddle.

```
S.T <- S.0 * exp(dens$x)
p = dens$y / sum(dens$y)
A <- matrix(c(S.T, abs(S.T-K)) * riskfree.df, nrow=2, byrow=TRUE)
b <- c(S.0, s)
```

Solution pour λ_j et q_i:

```
obj.func <- function(l) {
lambda <- matrix(l, nrow=1)
n.1 <- exp(-lambda %*% A)
denom = sum(p*n.1)
pn <- as.vector(p*n.1)

num = rowSums(sweep(A, MARGIN=2, pn, "*"))

err <- b - num / denom
err
}

sol <- nleqslv(c(1,1), obj.func)
lambda <- matrix(sol$x, nrow=1)

n.1 <- exp(-lambda %*% A)
denom <- sum(p*n.1)
q = p*n.1 / denom

df <- data.frame(x=dens$x, p=p, q=as.vector(q))
```

La figure 2 compare la distribution *a-priori* p_i et la distribution *a-posteriori* q_i. La loi normale de même variance est aussi représentée.

0.5 Call 110 (+1 vol) et 85 (+.5 vol)

```
C.110 <- CRRBinomialTreeOption(TypeFlag="ce", S=S.0, X=110, Time=TTM, r=r,
                            b=r, sigma=sigma.histo+.01, n=200)@price
P.85 <- CRRBinomialTreeOption(TypeFlag="pe", S=S.0, X=85, Time=TTM, r=r,
                            b=r, sigma=sigma.histo+0.005, n=200)@price
```

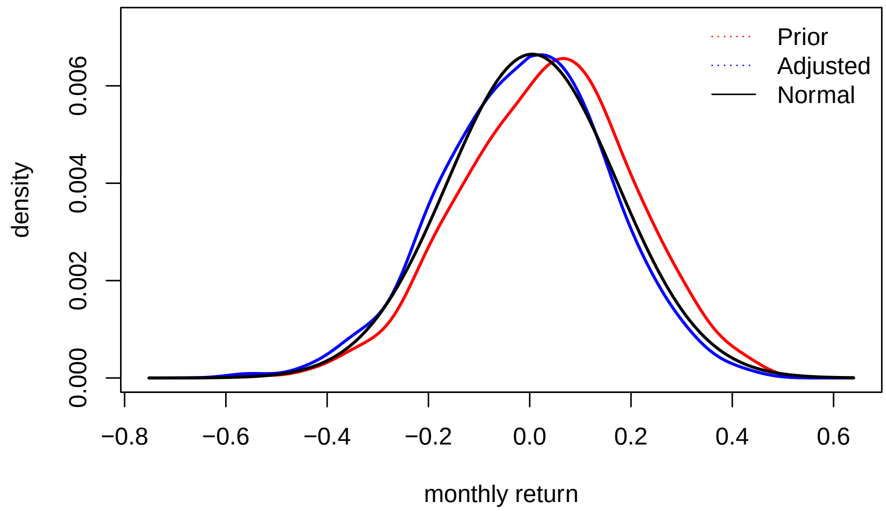

Figure 2: Adjusted densities calibrated to the risk-free rate and to the ATM straddle.

```
A.2 <- matrix(c(pmax(S.T-110,0), pmax(-S.T+85,0))*riskfree.df,nrow=2, byrow=TRUE)
b.2 <- c(C.110, P.85)
A <- rbind(A, A.2)
b <- c(b, b.2)

sol <- nleqslv(rep(.1,4), obj.func)
lambda <- matrix(sol$x, nrow=1)

n.1 <- exp(-lambda %*% A)
denom <- sum(p*n.1)
q = p*n.1 / denom

df <- data.frame(x=dens$x, p=p, q=as.vector(q))
```

La figure 3 montre la nouvelle distribution q_i.

0.6 Calcul du smile de volatilité

La volatilité fonction du strike est représentée dans la figure 4.

```
KK <- seq(from=90, to=110, by=2)
c.vol <- vector(mode="numeric", length=length(KK))

for(i in seq_along(KK)) {
  K <- KK[i]
  c.price = sum(df$q * pmax(S.T-K, 0)) * exp(-r*TTM)
  c.vol[i] = GBSVolatility(price=c.price, TypeFlag="c", S=S.0, X=K, Time=TTM, r=r,
                           b=r)
}
```

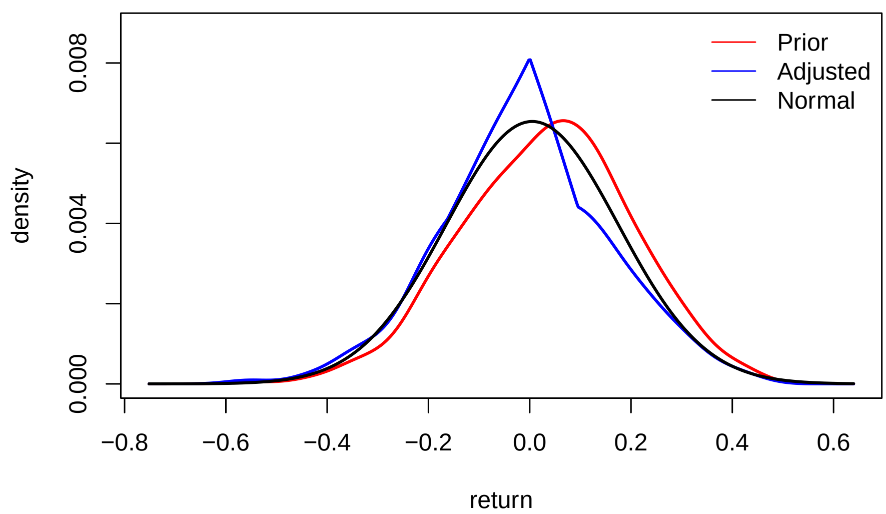

Figure 3: Adjusted densities calibrated to the risk-free rate, ATM straddle and smile.

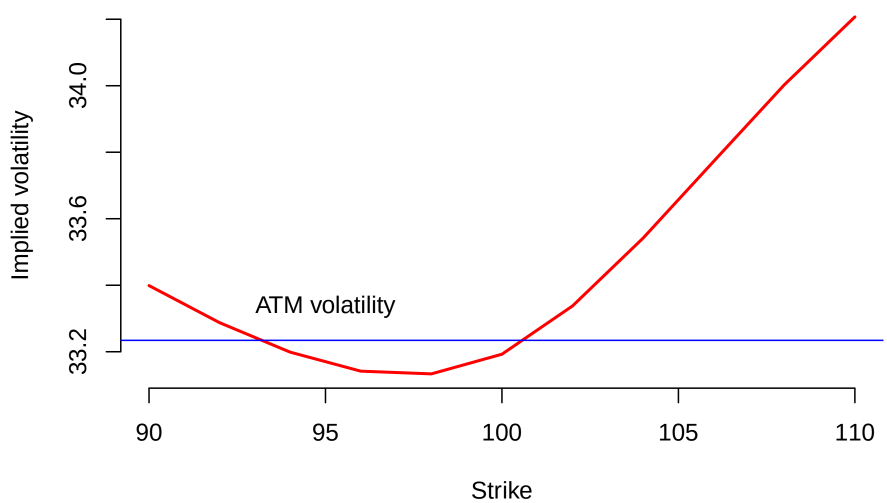

Figure 4: Implied volatility from the adjusted empirical density