Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu, PhD

Matris Tersi

Bir Matrisin Tersi

a ve b birer reel sayı iken $ax = b$ denkleminde, bilinmeyen x'i bulmak için a'nın tersi olan $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ile denklemin her iki tarafını (soldan) çarpıp:

$$ax = b$$
$$x = \frac{1}{a} \cdot b$$

elde ediyorduk. Burada a ile a'nın tersini çarpıtğımızda 1 elde ederiz, yani çarpmaya göre birim (etkisiz) elemanı:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Benzer şekilde, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $Ax = b$ şeklinde bir lineer denklem sistemnin çözüzmü:

$$x = A^{-1}b$$

olur. Buradaki A^{-1}, A′nın tersidir. A ile sağdan veya soldan çarpıldığında $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ birim matrisini verir:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Işte biz varsa A^{-1}'i arıyoruz.

Tanım: Bir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin tersinin olabilmesi için bir $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi var olmalıdır öyleki

$$A \cdot C = C \cdot A = I_n$$

olmalıdır. Burada tersini göstermek için *hem sağdan hem de soldan* çarpıp birim matrisi bulmaya çalışacağız.

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ matrsinin tersinin $C = \begin{bmatrix} -14 & -13 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

çözüm.

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 & -13 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

ve

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} -14 & -13 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

olduğundan A'nın tersi vardır ve bu ters C'dir.

Teorem: Bir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin tersi A^{-1} olsun. Bu durumda $Ax = b$ lineer denklem sisteminin tek bir çözümü vardır, ve bu çözüm $x = A^{-1}b$ dir.

Kanıt.

A'nın tersi A^{-1}olduğuna göre elimizde $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ vardır.

$$Ax = b$$
$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
$$I_n x = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b$$

olup $x = A^{-1}b$ sistemin çözümüdür, ve bu çözüm tektir. Çünkü örneğin $\hat{x}$ sistemin bir başka çözümü olsaydı:

$$A\hat{x} = b$$

olurdu. Bu eşitlik her iki taaraf için soldan A^{-1} ile çarpılırsa $\hat{x} = A^{-1}b$ olur, bu da zaten x'e eşittir. Yani x 'ten farklı bir çözüm düşünemeyiz.

Teorem. A ve B tersi olan matrisler olsun. Bu durumda

i) $(A^{-1})^{-1} = A$ (tersinin tersi kendine eşittir.)

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Kanıt. $ii)$ $(AB)\,B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1}=I_n$

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BI_nB^{-1} = BB^{-1}=I_n$$

olduğundan AB'nin tersi $B^{-1}A^{-1}$ 'dır.

dır.

Teorem: Bir matrisin tersinin olması için gerekli ve yeterli şart determinatı 0'dan farklı olmasıdır. Yani tersi varsa determinantı 0'dan farklıdır; determınantı 0'dan farkli ise tersi vardır.

Kanıt.

Bu şekilde 'gerekli ve yeterli' ifadesi içeren teoremlerin ispatı iki yönlü yapılır. Her iki taraftan birbirine gidebilecgimizi gössterebilmemiz gerekir.

Öncelikle tersi olan bir matrisin determinantının 0'dan farklı olduğunu gösterelim.

Bir A matrsinin tersi varsa $A \cdot A^{-1} = I_n$ olur. Her iki tarafın determinantı alındığında:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(\mathrm{A})det(A^{-1}) = \det(I_n)$$

olur (önceki haftadan $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ olduğunu hatırlayın. Ayrıca Birim matrsin determınantı 1'dir: $\det(I_n) = 1$ olur. Burada $det(A^{-1})$yalnız bırakılırsa:

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

olur. Bu ise $\det(A)$'nın 0'dan farklı olması ile mümkündür.

Şimdi ise $\det(A) \neq 0$ iken A'nın tersinin var olduğunu gösterelim.

Eğer $\det(A) \neq 0$ ise $Ax = b$ denklem sisteminin çözümünün var olduğunu biliyoruz. Bu durumda $x = A^{-1}b$ vardır; bu da A^{-1}'in var olması anlamına gelir.

Bir Matrisin Tersinin Hesaplanması

1. Elementer Satır İşlemleri ile Matris Tersinin Hesaplanması

Tersi olan bir kare matrsin tersini almak için matrisi kendi boyutundaki birim matris ile birleştirip yeni bir matris oluşturuyoruz. Bunun için birim matrisi, matrisin sağına koyuyoruz. Daha sonra elementer satır işlemleri ile, yani bir satırının belirli bir katının diger satıra eklenmesi gibi, ortaya çıkan yeni matriste sol tarafı birim matris haline getiriyoruz. Bu durumda iken sağ tarafta beliren matris aradığımız ters matristir.

Bunu bir örnekle görelim.

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin varsa tersini bulunuz.

çözüm.

$\det(A) = -2 + 3 = 1 \neq 0$ olduğundan bu matrisin tersi vardır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2 \leftarrow R_1 + R_2}{\equiv} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 & -3 \\ 0 & 1 & | & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Böylece birim matris sağdan sola taşınmış, sağ tarafta beliren matris ise $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersidir. Şimdi bulduğumuz tersin gerçekten A'nın tersi olup olmadığını anlamak için A ile sağdan ve solan çarpalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan buluduğumuz ters doğrudur.

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ matrisinin varsa tersini bulunuz.

çözüm. $\det(A) = -1 \neq 0$ olduğundan bu matrisin tersi vardır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & | & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_3 \leftarrow 2R_1 + R_3}{\overset{R_2 \leftarrow -R_1 + R_2}{\equiv}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3}{\overset{R_1 \leftarrow R_1 + 3R_3}{\equiv}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{\equiv}{R_3 \leftarrow -R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1\end{array}\right]$$

olur. Şu halde aradığımız ters:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3\\ -7 & 1 & -3\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

olur. Bu matris ile A sağdan ve soldan çarpıldığında I_3 birim matrisi elde edilir.

ör. $x_1 + 3x_3 = 4$

$x_1 + x_2 = 1$

$-2x_1 - 7x_3 = -1$ lineeer denklem sisteminin çözümü nedir?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$$

olup $\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -7\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4\\ 1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3\\ -7 & 1 & -3\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4\\ 1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\\ -24\\ -7\end{bmatrix}$

olduğundan x_1, x_2 ve x_3 sırasıyla 25, -24 ve -7 olur.

2. Adjoint Matrsi Yardımıyla Matris Tersinin Bulunması

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bir matris olsun. Bu durumda

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)}$$

ile de matris tersi bulunur; fakat daha önce de gördüğümüz gibi A'nın determinantının 0 olması durumunda A'nın tersi yine tanımsız olur, yani yoktur. Şimdi $adj(A)$ ile gösterilen adjoint matrisin nasıl bulunacağına bakalım.

$$adj(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det(M_{11}) & (-1)^{1+2}\det(M_{12}) & \dots & (-1)^{1+n}\det(M_{1n}) \\ (-1)^{2+1}\det(M_{21}) & (-1)^{2+2}\det(M_{22}) & \dots & (-1)^{2+n}\det(M_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ (-1)^{n+1}\det(M_{n1}) & (-1)^{n+2}\det(M_{n2}) & \dots & (-1)^{n+n}\det(M_{nn}) \end{bmatrix}^T$$

Buradaki $\det(M_{ij})$ - aynı determinant hesabında olduğu gibi- A'da i. satır ve j. sütunun silinmesiyle ortaya çıkan matrisin determinantıdır.

ör. Daha önce gördüğümüz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini adjoint matrsi yadımıyla bulalım.

çözüm.

$$adj(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det(-2) & (-1)^{1+2}\det(-1) \\ (-1)^{2+1}\det(3) & (-1)^{2+2}\det(1) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \det(-2) & -\det(-1) \\ -\det(3) & \det(1) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(tek elemanlı matrislerin determinantının kendisi olduğunu hatırlayın)

O halde $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin varsa tersini adjoint matris yardımıyla bulunuz.

çözüm.

$\det(A) = -4 \neq 0$ olduğundan matrisin tersi vardır.

$$adj(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -13 & 21 & -11 \\ 7 & -11 & 5 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -13 & 7 & 4 \\ 21 & -11 & -8 \\ -11 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

O halde $A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -13 & 7 & 4 \\ 21 & -11 & 8 \\ -11 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13/4 & -7/4 & -1 \\ -21/4 & 11/4 & 2 \\ 11/4 & -5/4 & -1 \end{bmatrix}$

şeklinde bulunur.

Son olarak aşağıda adjoint matris ile matris tersi bulmanın Matlab kodunu paylaşıyorum:

myInv.m

```
function ters =myInv(A)
m=det(A);
assert (m~=0);
n=size(A);

adj=zeros(size(n));

for i=1:n
    for j=1:n
        adj(i,j)=(-1)^(i+j)*det(A(setdiff(1:n,i),setdiff(1:n,j)));
    end
end
ters=(1/m)*adj';

```