

Ayrık Matematik (Ayrık İşlemsel Yapılar)

Fırat İsmailoğlu, PhD

Hafta 11:
Graflar (Çizgeler) ve Ağaçlar - I

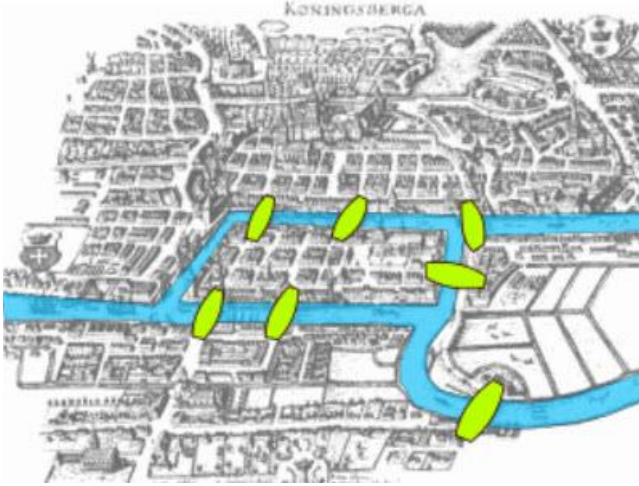
Hafta 11

Plan

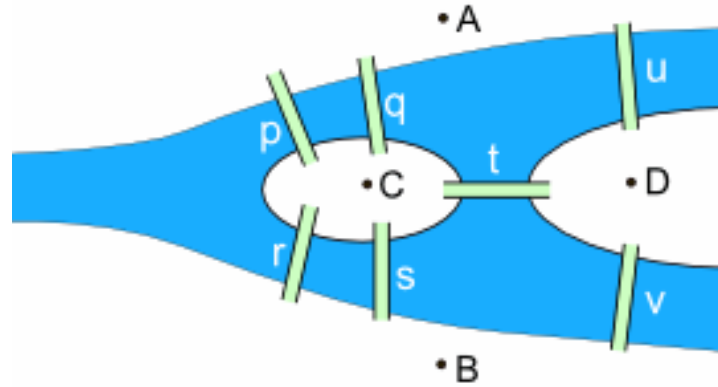
1. Königsberg Köprüsü
2. Graf Örnekleri
3. Komşu-Komşuluk-Derece
4. Komşu Listesi – Komşu Matrisi
5. İzomorfik Graflar – Alt Graflar
6. Özel Graflar : Tam, İki parçalı, Düzenli, Düzlemsel

Konigsberg'in Yedi Köprüsü

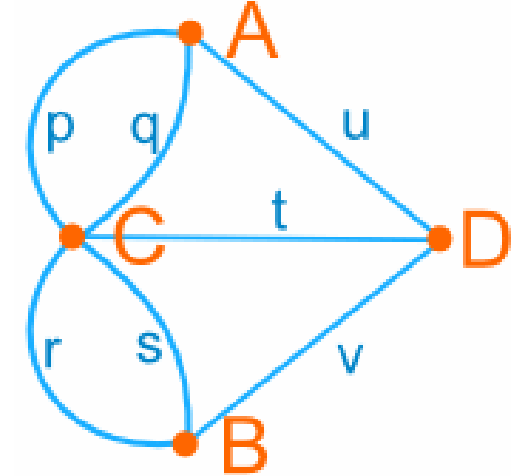
Graflarla ilgili çalışmalar ilk olarak İsviçreli matematikçi Leonard Euler'ın 1736 yılında Königsberg'teki yedi köprünün her birini bir kez kullanarak başlanılan noktaya gelinemeyeceğini ispatlamasıyla başladı.



Konisberg şehri
ve köprüleri



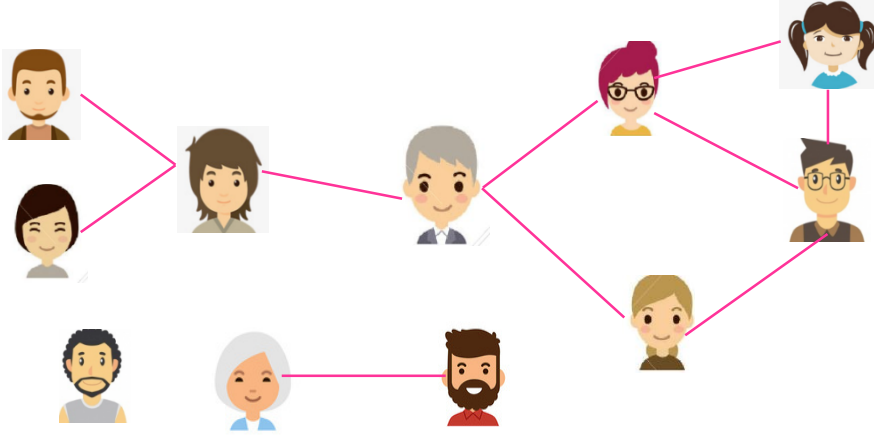
Köprülerin ve ayırdıkları
bölgelerin basitleştirilmiş
hali



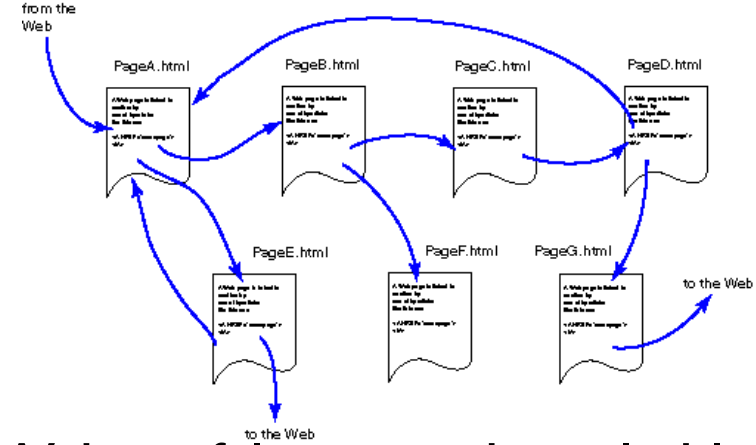
Köprü probleminin
graf hali

A, B, C, D noktalarından birinden başlayarak bütün yollardan bir kez geçmek şartıyla elimizi kaldırmadan başladığımız noktaya gelebilir miyiz?

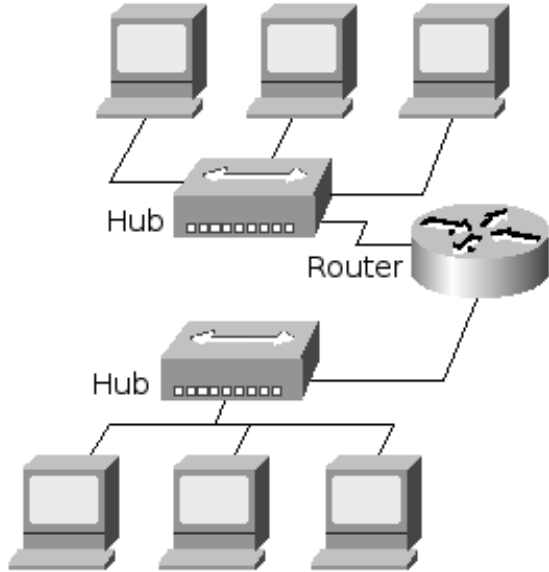
Graf Örnekleri



Sosyal ağlar



Web sayfaları arası hiperlinkler



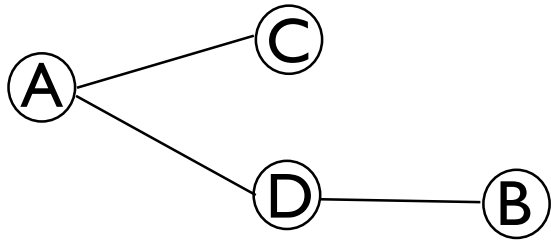
internet



Demiryolları haritası

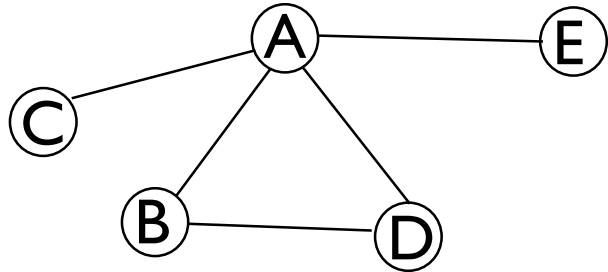
Graflar (Çizgeler)

Graflar bir düğüm kümesi V ve bir bağlar kümesi (ayrıt, kenar, edge) E oluşan (V, E) ikilileridir.



$V = \{A, B, C, D\}$ —————> Düğümler kümesi

$E = \{\{A, C\}, \{A, D\}, \{D, B\}\}$ —————> Bağlar kümesi



$V = \{A, B, C, D, E\}$ —————> Düğümler kümesi

$E = \{\{A, C\}, \{A, B\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{D, B\}\}$ —————> Bağlar kümesi

Graflar (Çizgeler)

Grafları genel olarak ikiye ayırırız: yönsüz (undirected) graflar ve yönlü (directed) graflar.

Yönsüz graf formal olarak şu şekilde ifade edilir.

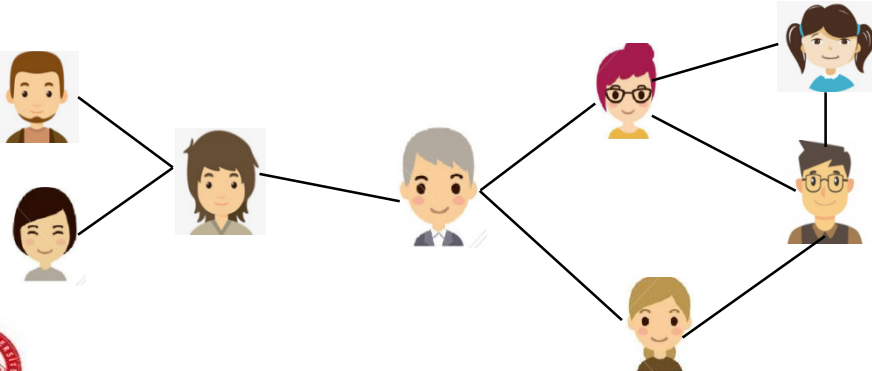
Yönsüz Graf

Bir yönsüz graf $G = (V, E)$ ikilisidir, öyleki V düğümlerin boştan farklı bir kümesidir ve $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ kümelerinden oluşan bağlantılar kümesidir.

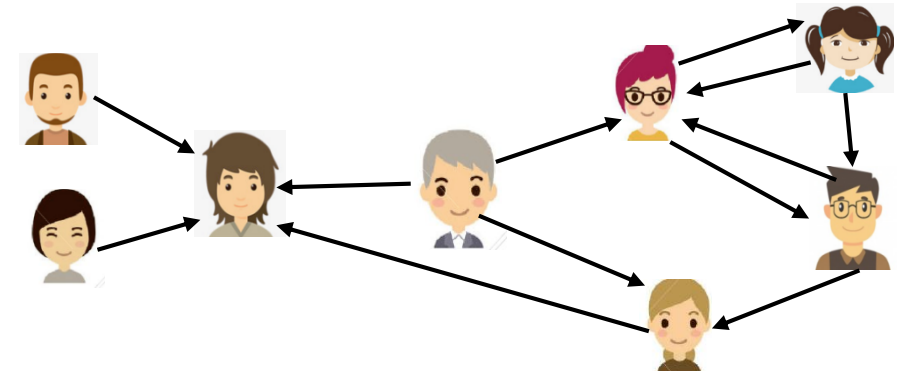
Yönlü Graf

Bir yönlü graf $G = (V, E)$ ikilisidir, öyleki V düğümlerin boştan farklı bir kümesidir ve $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\}$ ikililerinden oluşan bağlantılar kümesidir.

ör. Yönsüz graf: Facebook arkadaşlığı



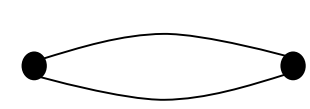
ör. Yönlü graf: Twitter/Instagram takipleşmesi



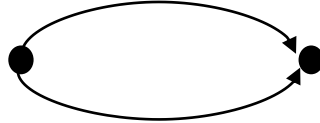
Basit Graflar

Yönlü yada yönsüz olsun biz genel olarak ‘basit graflar’ ile ilgileneceğiz. Basit graf, paralel bağlar yada kendine dönen bağlar içermeyen graflardır.

Paralel Bağ

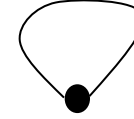


yönsüz graf

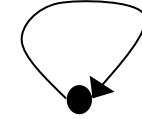


yönlü graf

Kendine Dönen Bağ (Self-Loop Edges)



yönsüz graf



yönlü graf

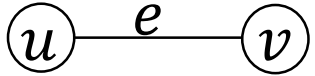
ör. Aşağıdaki durumlarda paralel ve kendine dönen bağların bir anlam ifade edip etmeyeceğine karar veriniz.

- Facebook arkadaşlığı: düğümler kişiler, arkadaşlık durumunda kişiler arası bağ oluşur.
- Bir havayolu şirketinin uçuş ağı: düğümler havaalanları, bağlar havaalanlarını bağlayan direkt uçuşlar.
- Bir üniversitedeki email ağı: düğümler kişiler, bir kişi birine mail durumunda bir mail atması durumunda bu iki kişi arasında bağ oluşur.



Bazı Önemli Tanımlar

Yönsüz bir grafta $e = \{u, v\}$ bağıımız olsun:



Bitiş noktası

u ve v ; e bağıının bitiş noktalarıdır (endpoints).

Komşu

u ve v komşudur (adjacent, neighbor) deriz.

Komşuluk

Bir düğümün komşuluğı komşu olduğı düğümlerin kümesidir.

Bir $u \in V$ 'nin komşuluğı: $\{v \in V : \{u, v\} \in E\}$

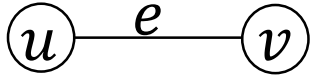
Derece

Bir düğümün sahip olduğı komşu sayısına o düğümün derecesi denir; aynı zamanda bu komşuluk kümesinin eleman sayısıdır.



Bazı Önemli Tanımlar

Yönsüz bir grafta $e = \{u, v\}$ bağıımız olsun:



Bitiş noktası

u ve v ; e bağıının bitiş noktalarıdır (endpoints).

Komşu

u ve v komşudur (adjacent, neighbor) deriz.

Komşuluk

Bir düğümün komşuluğu komşu olduğu düğümlerin kümesidir.

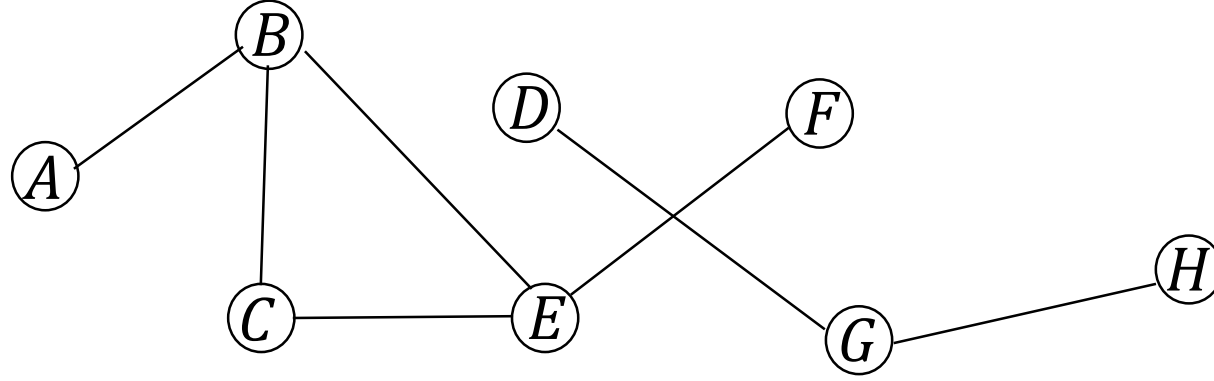
Bir $u \in V$ 'nin komşuluğu: $\{v \in V : \{u, v\} \in E\}$

Derece

Bir düğümün sahip olduğu komşu sayısına o düğümün derecesi denir; aynı zamanda bu komşuluk kümesinin eleman sayısıdır.



ör.



- i. C 'nin komşuları nelerdir?
- ii. Hangi düğümlerin derecesi 1'dir?
- iii. Hangi düğümün derecesi en yüksektir?
- iv. Hem B 'nin hem de E 'nin komşuluğunda olan düğümler hangileridir?

Cevap:

- i. C 'nin komşuları: $\{B, E\}$
- ii. A, D, F, H .
- iii. En yüksek dereceye sahip düğümler 3'er komşusu olan E ve B 'dir.
- iv. $\{A, C, E\} \cap \{B, C, F\} = C$.



Grafların Veri Yapıları Olarak Gösterimi

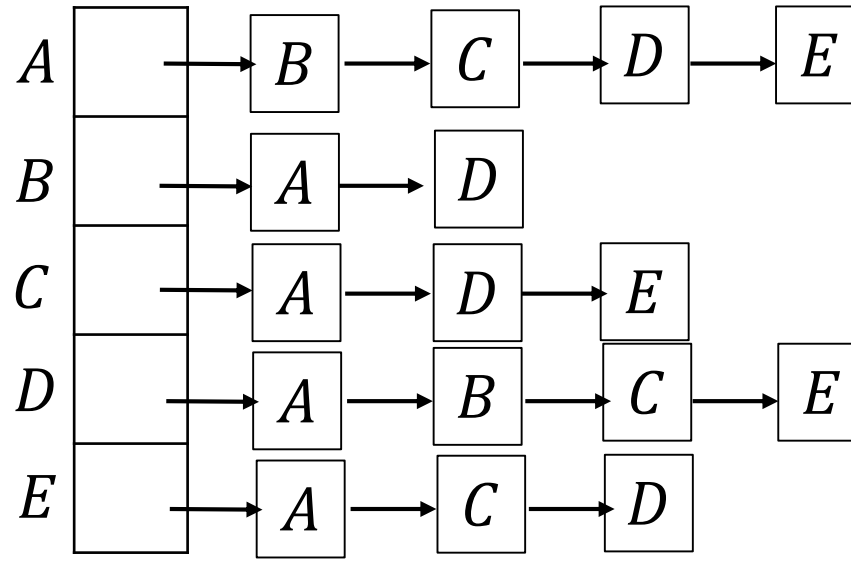
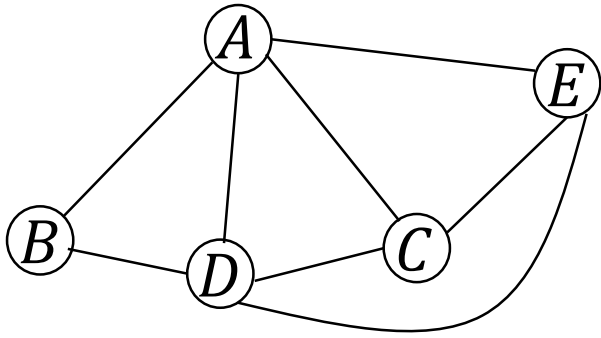
Şimdiye kadar grafları görsel şekiller olarak gördük. Fakat grafları bilgisayar ortamına aktarmak için bazı veri yapılarına ihtiyaç duyarız. Bu veri yapılarından beklediğimiz bize iki sorunun cevabını hızlıca verebilmeleridir:

1. A 'nın komşuları nelerdir?
2. B ve C bağlı mıdır?

Graflar bilgisayar ortamında genellikle iki şekilde gösterilir: komşu listesi ve komşu matrisi.

Komşu Listesi (Adjacency List)

Komşu listesi basitçe düğümlerin komşularının liste olarak yazılmasıdır.



Not: Komşu listesi Python'daki dict (dictionary) listesi ile kolayca gösterilebilir.

Önceki örnek için:

```
G=dict([( 'A', [ 'B', 'C', 'D', 'E' ] ), ( 'B', [ 'A', 'D' ] ), ( 'C', [ 'A', 'D', 'E' ] ),  
( 'D', [ 'A', 'B', 'C', 'E' ] ), ( 'E', [ 'A', 'C', 'E' ] )])
```

örneğin A'nın komşularını çağırmak istiyorsak

```
>>G[ 'A' ]
```

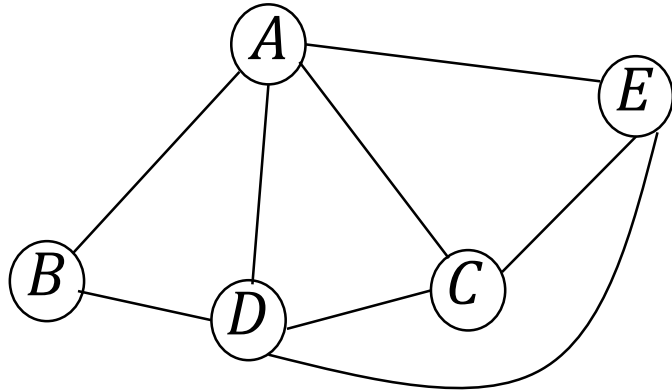
```
>>[ 'B', 'C', 'D', 'E' ]
```

Komşu Matrisi (Adjacency Matrix)

$G = (V, E)$ grafi için komşu matrisi $|V| \times |V|$ bir binary matristir; öyleki bu matrisin i . satırının j . sütununun 1 olabilmesi için i . düğüm ile j . düğümün bağlı olması gerekir.



Komşu Matrisi (Adjacency Matrix)



| | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>A</i> | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| <i>B</i> | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| <i>C</i> | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| <i>D</i> | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| <i>E</i> | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Komşu Matrisinin Özellikleri

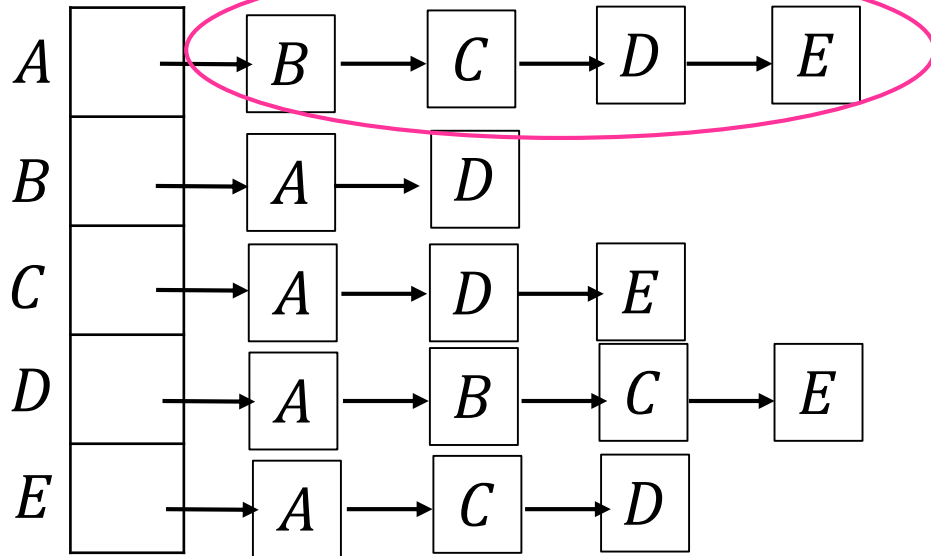
- Yönsüz bir graftan elde edilmişse simetrik bir matristir. (i, j) elemanı (j, i) elemanına eşittir.
- Basit graftan elde edilmişse (yani kendine dönen bağa ve paralel bağa izin verilmemişse) diagonal üzeri elemanlar 0 olur.

Komşu Listesi Vs Komşu Matrisi

Grafları veri yapıları olarak gösterirken iki amacımız vardı:

1. istenilen dugumun komsularini getirmek
2. belirli iki dugum arasinda bağ var mi diye kontrol etmek.

A'nın komşuları kolayca getirilabilir.



A ile B arasında bağ olduğu kolayca görülebilir.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| B | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| D | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| E | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

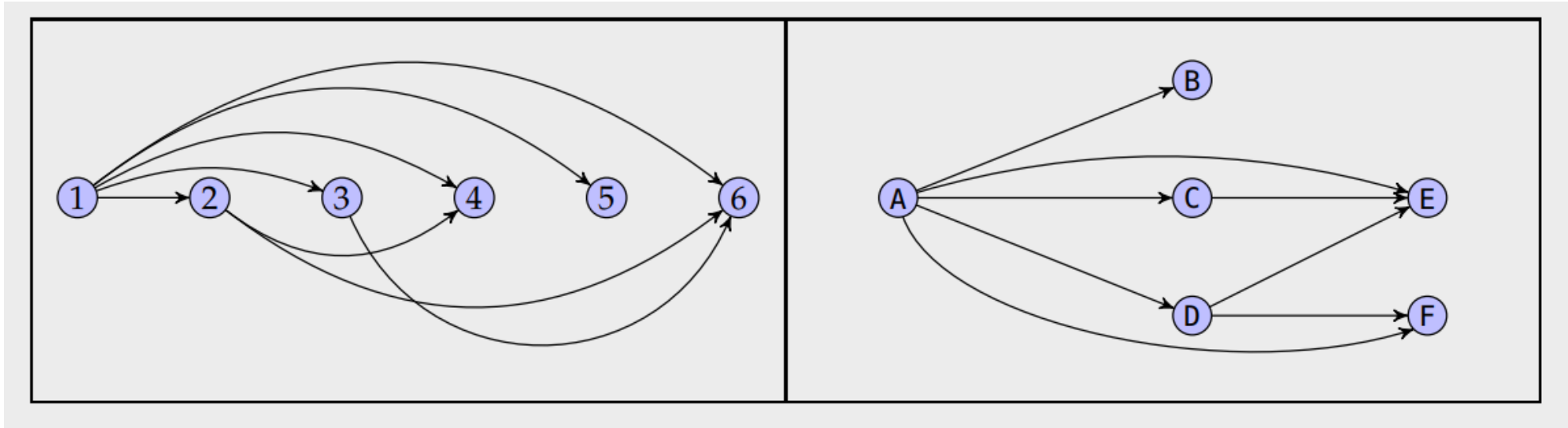


Graflar Arası İlişki

Eş Yapılı Graflar (Graph Isomorphism)

Eş yapılı graflar aslında aynı graflardır; fakat düğümlerin yerleri farklıdır.

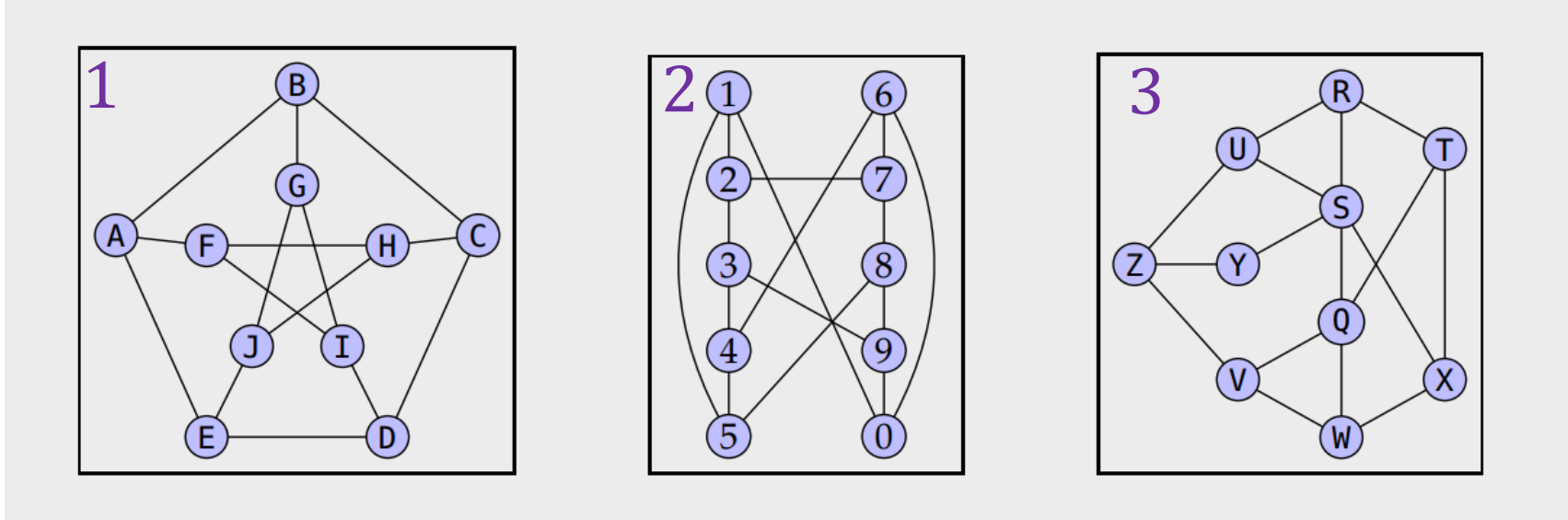
ör. Aşağıdaki iki graf eş yapılıdır (izomorfiktir). 1 yerine A, 2 yerine D, 3 yerine C, 4 yerine F, 5 yerine B ve 6 yerine E düşünlürse soldaki graftaki tüm bagların sağda da olduğu görülür.



| | |
|---|---|
| 1 | A |
| 2 | D |
| 3 | C |
| 4 | F |
| 5 | B |
| 6 | E |

Eş Yapılı Graflar (Graph Isomorphism)

ör. Aşağıdaki graflardan hangileri eş yapılıdır?



Çözüm.

1 ve 2 numaralı graflar eş yapılıdır.

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 7 | 9 | 6 | 5 |

3 nolu graf 1 ve 2 ile eş yapılı değildir. Çünkü orneğin S düğümünün derecesi 5'tir; fakat 1 ve 2 nolu graflarda 5 dereceli düğüm bulunmaz.

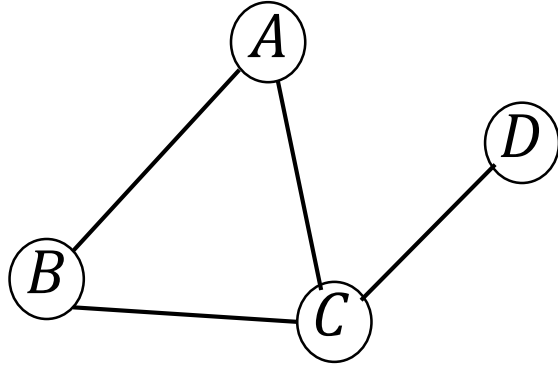
Alt Graf (Subgraph)

Var olan bir grafın bazı düğümlerini ve bağlarını silerek alt graflar elde edebiliriz.

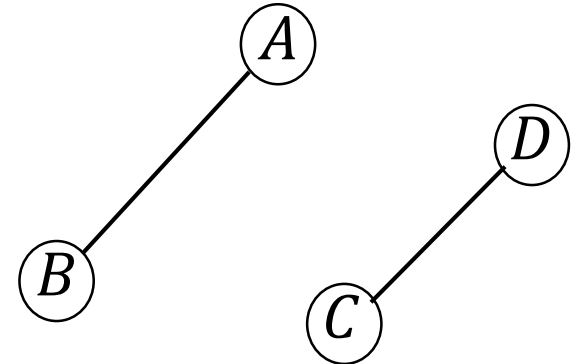
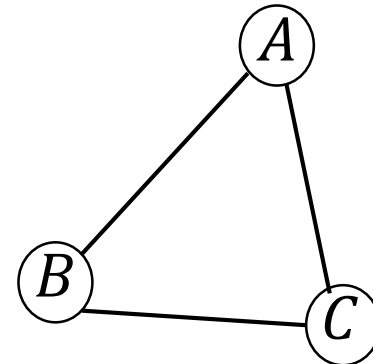
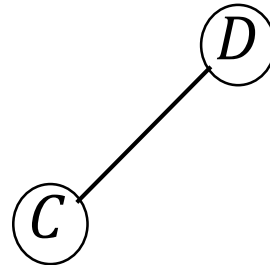
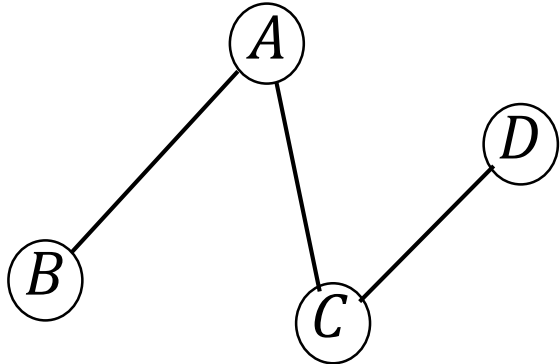
Matematiksel olarak

$G = (V, E)$ bir graf olsun. Bu grafın bir alt grafi $G' = (V', E')$ için $V' \subseteq V$ ve $E' \subseteq E$ olur.

ör.



grafının bazı alt grafları:



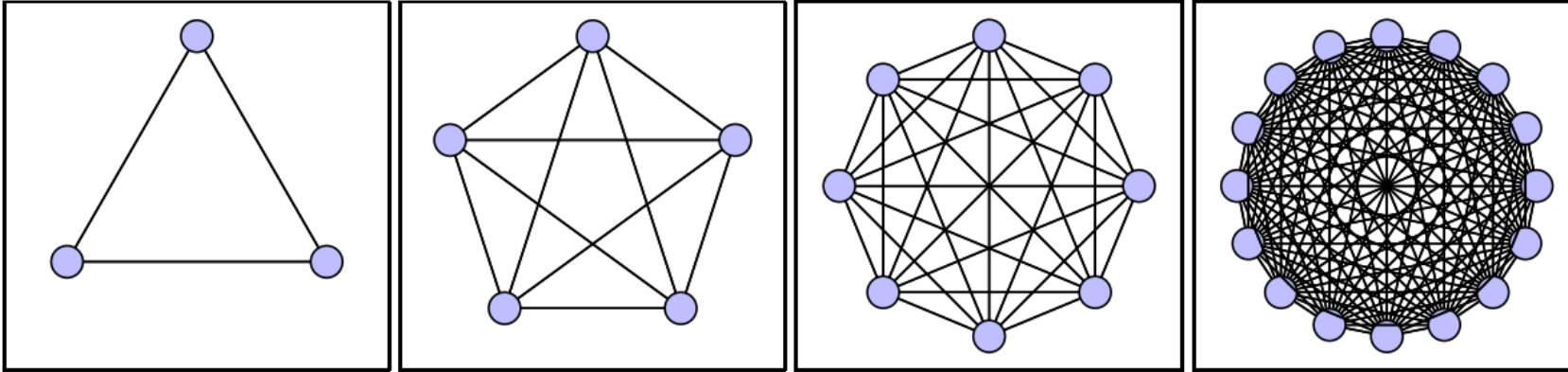
Bazı Özel Graflar

Bazı uygulama alanları özel graflar gerektirirler. Bunlar tam, iki parçalı, düzenli ve düzlemsel graflardır.

1. Tam Graf (Klik) (Complete Graph)

Kısaca tam graf, her düğümün her düğümle bağlantılı olduğu graftır.

3, 5, 8 ve 16 düğümlü tam graflar sırasıyla şu şekildedir:

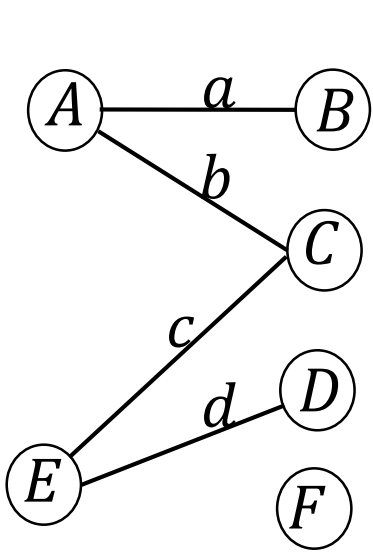


ör. Bir partide herkesin birbiriyle el sıkışması.

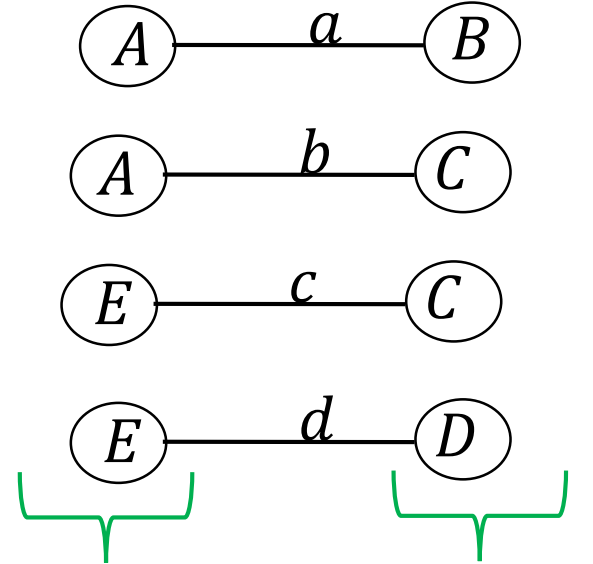
2. İki Parçalı Graf (Bipartite Graph)

İki parçalı graf, iki parçaya ayrıldığında her bağı bir bitiş noktasının bir parçada diğer bitiş noktasının diğer parçada olabilen graf türüdür.

ör. Aşağıdaki graf bir iki parçalı graftır. Düğümler $\{A, E\}$ ve $\{B, C, D, F\}$ şeklinde ikiye ayrılırsa



Bu graf iki parçalı graftır. Düğümler $\{A, E\}$ ve $\{B, C, D, F\}$ olarak iki parçaya ayrılırsa her bir bağı bitiş noktalarının biri $\{A, E\}$ 'de diğeri $\{B, C, D, F\}$ 'de olur.



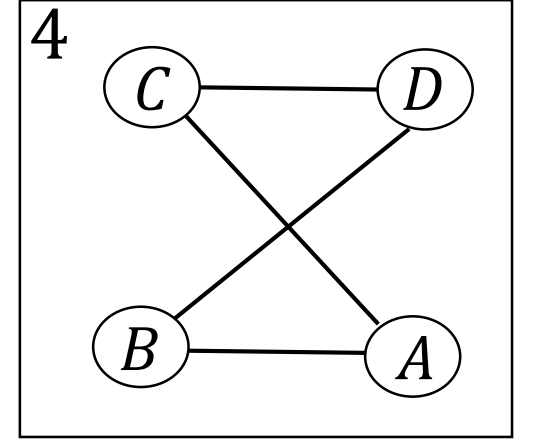
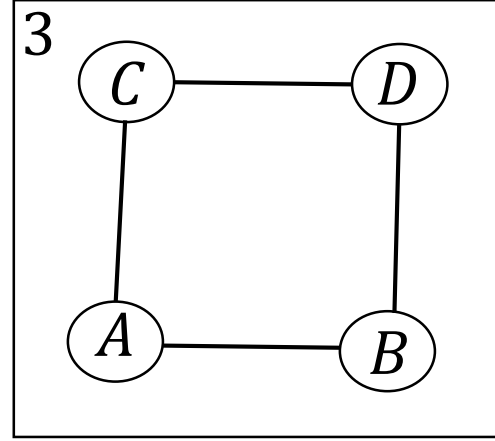
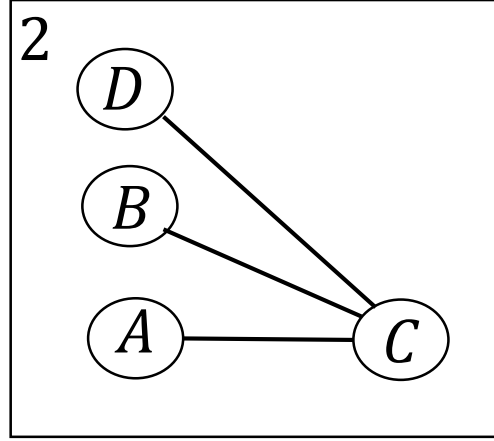
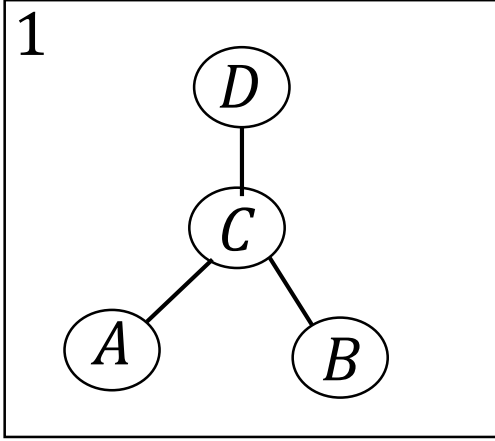
Birinci parçadaki
düğümler

İkinci parçadaki
düğümler



İki Parçalı Graf (Bipartite Graph)

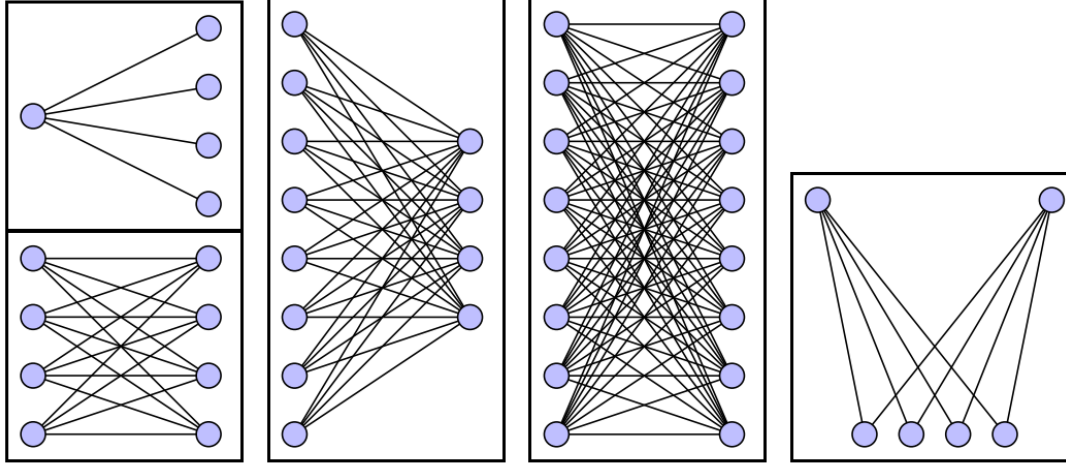
Aşağıdaki grafların hepsi iki parçalıdır.



1. graf $\{C\}$ ve $\{A, D, B\}$ şeklinde ikiye ayrılabilir.
 2. graf $\{C\}$ ve $\{A, D, B\}$ şeklinde ikiye ayrılabilir.
 3. graf $\{B, C\}$ ve $\{A, D\}$ şeklinde ikiye ayrılabilir.
 4. graf $\{B, C\}$ ve $\{A, D\}$ şeklinde ikiye ayrılabilir.
- (1. ve 2. graf eş yapılıdır; 3. ve 4. graf eş yapılıdır)

İki Parçalı Graf (Bipartite Graph)

Aşağıdaki grafların da iki parçalı olduğu kolayca görülebilir.



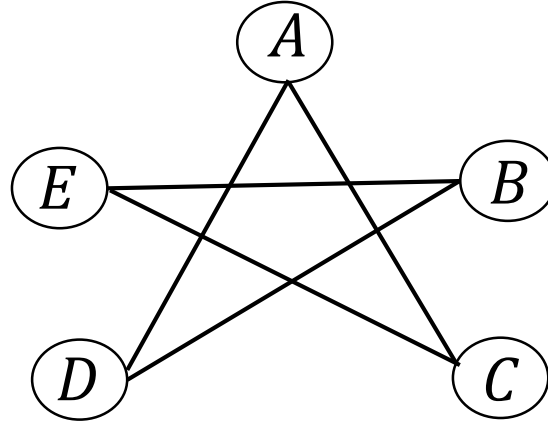
ör. Öğrenciler ve aldıkları derslerden oluşmuş bir graf iki parçalı olur. Çünkü her bir bağ bir öğrenci ve bir dersten oluşmuştur; ve öğrenci düğümleri bir parçada ve ders düğümleri diğer parçada olacak şekilde iki parçaya bölünebilir.

ör. Yukarıdaki örneğe benzer şekilde kişiler ve çalıştıkları kurumlardan oluşan bir graf ve evli çiftlerden oluşmuş bir graf da (erkekler bir parçada kadınlar diğer parçada) iki parçalı birer graftır.

Düzenli Graf (Regular Graph)

Eğer bir graftaki düğümlerin dereceleri aynıysa (her düğüm esit sayıda baglantiya sahip ise) bu grafa düzenli (regular graf) denir.

ör. Asagida gosterilen $G = (V, E)$ grafi icin $V = \{A, B, C, D, E\}$ ve $E = \{\{A, C\}, \{A, D\}, \{B, E\}, \{B, D\}, \{C, E\}\}$ dir ve her düğümün iki bağı vardır (dereceleri 2 dir)

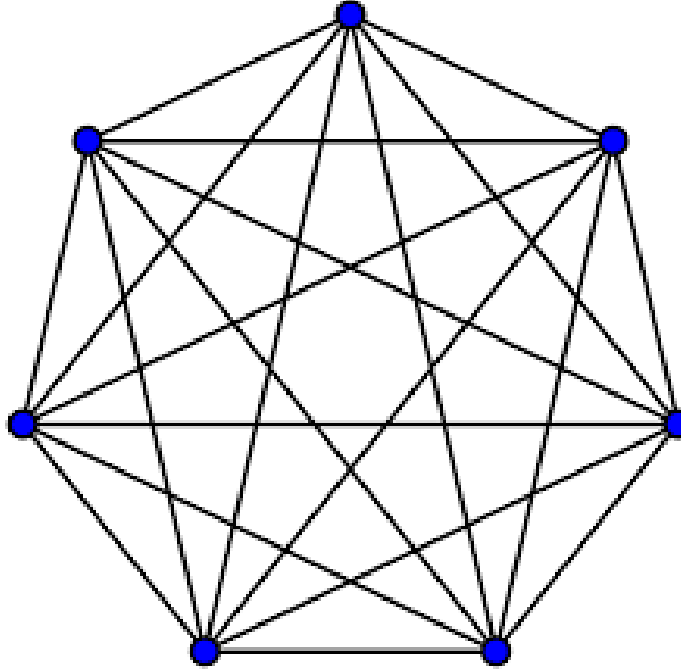


ör. 10 takimlik bir turnuvada her takim iki mac yapsin. Burada takimler dugumleri, iki takimin arasinda mac yapilmasi baglari olusturduguu dusunulurse oratay cikan graf duzenli graf olur.

Düzenli Graf (Regular Graph)

Not: Tam graflar, düzenli grafların özel bir durumudur. Gerçekten, tam graflarda her düğüm kendi haric graftaki diğer bütün düğümlerle bağlıdır. O halde her düğümün derecesi aynı olur, bu derece $|V| - 1$ dir.

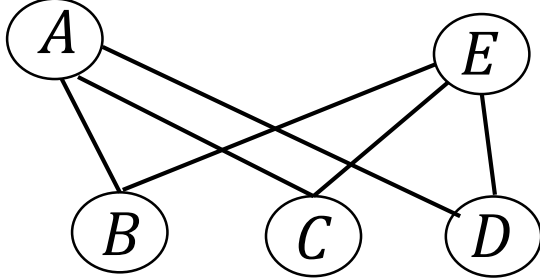
Örnek olarak aşağıdaki tam graf 7 düğümden oluşur ve her düğümün 6 bağlıdır.



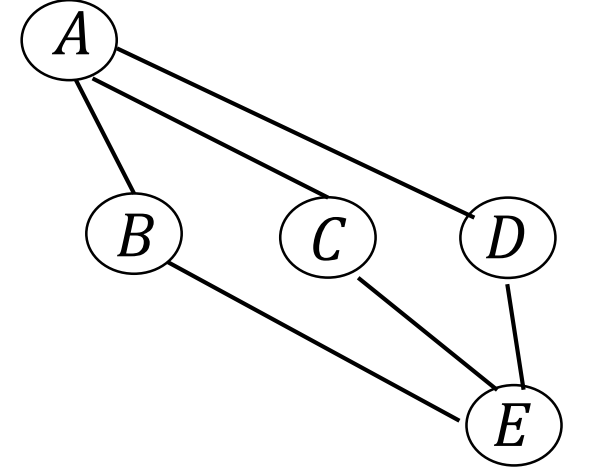
Düzlemsel Graf (Planar Graph)

Düzlemsel graf, baglari birbirini kesmeyecek sekilde bir duzlem uzerinde çizilebilen graf türüdür.

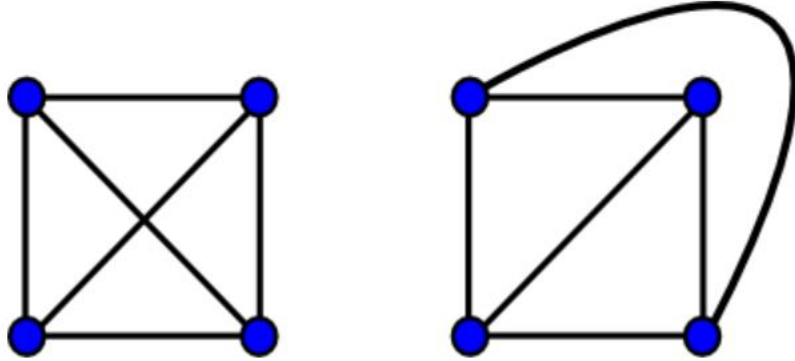
ör.



Bu graf düzlemsel bir graftır. Gerçekten, eğer E düğümü aşağı çekilirse, bağlar birbiririni kesmeyecek hale getirilir.



ör.



Not: www.planarity.net adresinde verilen graflari düzlemsel hale getirme oyunu oynayabilirsiniz.