Olasılık ve İstatistik

Fırat İsmailoğlu, PhD

Olasılık - I

Deney (Experiment)

Olasılık, bir deneyde belirli bir olayın olma şansıdır.

Deney: Bir sonuç, bir gözlem yaratan süreçlere deney denir. Deneyin sonuçları olur ve bunlar önceden bilinmez.

ör. Zar atma deneyi: Bu deneyin sonuçları: zarın 1 gelmesi, zarin 2 gelmesi..

ör. Bir bozuk para atma deneyi: Bu deneyin sonuçları: paranın yazı gelmesi, paranın tura gelmesi.

ör. İki bozuk para atma deneyi: Bu deneyin sonuçları: paranın birinin yazı diğerinin tura gelmesi, iki paranın da yazı gelmesi

ör. 7 atın katıldığı bir at yarışı deneyi: Bu deneyin sonuçları: sırasıyla 4,5,1,3, 6, 2,7 nolu atların yarışı bitirmesi, sırasıyla 7,6,2,3, 5, 1,4 nolu atların yarışı bitirmesi... (yani 1,2,3,4,5,6,7 sayılarının bütün sıralanışları)

ör. Bir zarın ve bir bozuk paranın atılma deneyi: Bu deneyin sonuçları: zarın 5 paranın tura gelmesi, zarın 3 paranın yazı gelmesi....

Örnek Uzay (Sample Space)

Örnek uzay, bir deneyin olabilecek bütün sonuçlarının yer aldığı kümedir. S ile gösterilir (bazı kaynaklarda örnek uzay Ω ile gösterilir).

ör. Zar atma deneyinin örnek uzayı: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

ör. Bir bozuk parayı iki defa atma deneyinin örnek uzayı: $S = \{YY, YT, TY, TT\}$.

ör. 52'lik bir desteden bir kart çekilmesi deneyinin örnek uzayı

(SAMPLE SPACE OF DRAWING A CARD)

2♣	2♦	2♥	2♠
3♣	3♦	3♥	3♠
4♣	4♦	4♥	4♠
5♣	5♦	5♥	5♠
6♣	6♦	6♥	6♠
7♣	7♦	7♥	7♠
8♣	8♦	8♥	8♠
9♣	9♦	9♥	9♠
T♣	T♦	T♥	T♠
J♣	J♦	J♥	J♠
Q♣	Q♦	Q♥	Q♠
K♣	K♦	K♥	K♠
A♣	A♦	A♥	A♠

ör. Havanın sıcaklığının ölçülmesi deneyinin örnek uzayı $S = \{x \mid x \in [-50,50]\}$ (örnek uzayın sonsuz elemanı vardır).

Olay (Event)

Örnek uzayın herhangi bir altkümesine olay (event) denir. E ile gösterilir.

ör. Bir zarın atılması deneyinde örnek uzay : $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ bunun bir alt kümesi $E = \{2,4,6\} \subset S$ (zarın çift gelme olayı)

ör. Bir bozuk parayı iki defa atma deneyinde ilk paranın yazı gelme olayı:
$E = \{YY, YT\}$.

ör. Havanın sıcaklığının ölçülmesi deneyinde havanın 20 dereceden fazla olma olayı: $E = \{x \mid x \in (20,50]\}$

ör. Sınıfa ilk giren kişinin tespiti deneyinde, sınıfa gıren kişinin adının G ile başlaması olayı: $E = \{Gamze, Gizem, Gazenfer, \ldots.\}$

Not: Olay, bir deneydeki sonuçlar içerisinden ilgilendiğimiz sonuçların kümesidir (yani olay, neyle ilgileniyorsak onun kümesidir).

Olaylar, aslında birer küme olduğundan, kümeler ile yapıtığımız işlemler olaylar için de tanımlanır.

Olayların Birleşmesi

A ve B birer olay iken bu iki olayın birleşimi yeni bir olaydır. $A \cup B$ ile gösterilir.

ör. Bir zar atma deneyinde $A = \{2,4,6\}$ çift gelme olayı ile $B = \{2,3,5\}$ asal sayı gelme olaylarının birleşimi $A \cup B = \{2,4,6,3,5\}$ olayıdır.

Not: A ve B olaylarının birleşmesini A veya B olayının olması olarak yorumlayabiliriz.

$A \cup B = \{2,4,6,3,5\}$ atılan zarın çift veya asal gelme olayı.

ör. İki Sivas'lı, bir Kayseri'li, bir İzmir'li ve üç Adana'lı kişiden oluşan topluluktan birini seçme deneyinde, seçilen kişinin Sivas'lı veya Kayseri'li olma olayı nedir?

A olayı seçilen kişinin Sivas'li olma olayı olsun: $A = \{Sivaslı - 1, Sivaslı - 2\}$

B olayı seçilen kişinin Kayseri'li olma olayı: $B = \{Kayserili\}$

$A \cup B = \{Sivaslı - 1, Sivaslı - 2, Kayserili\}$ seçilen kişiinin Sivas'lı veya Kayseri'li olma olayı.

Olayların Kesişmesi

A ve B birer olay iken bu iki olayın kesişimi yeni bir olaydır. $A \cap B$ ile gösterilir. $A \cap B$ olayı, A ve B olaylarının her ikisinde birden bulunan olaylardan oluşur.

ör. Bir zar atma deneyinde $A = \{2,4,6\}$ çift gelme olayı ile $B = \{2,3,5\}$ asal sayı gelme olaylarının kesşimi $A \cap B = \{2\}$ olayıdır.

Not: A ve B olaylarının birleşmesini A ve B olayının beraber olması (aynı anda olması) olarak yorumlayabiliriz.

ör. 7 atın koştuğu yarışmada 1 nolu ve 4 nolu atların yarışı birinci bitirmesi olayı nedir?

$A = \{1\, nolu\ atın\ birinci\ olması\}, B = \{4\, nolu\ atın\ birinci\ olması\},$ olsun. Bu iki olayın kesişimi boştur: $A \cap B = \emptyset$

Eğer iki olayın kesişimi boş küme ise, bu olaylara ayrık (disjoint) (mutually exclusive) olaylar diyeceğiz.

Bir Olayın Tamamlayanı (Complement of an Event)

A bir olay olsun. A olayı olduğunda olmayan, A olayı olmadığında olan olaya $A'nın$ tamamlayanı denir ve A^c ile gösterilir.

Doğal olarak bir olay ve o olayın birleşimi örnek uzayı verir: $A \cup A^c = S$.

ör. Bir zar atma deneyinde A ,zarın çift gelme olayı olsun. Bu durumda $A = \{2,4,6\}$. Bu olayın tamamlayanı $A^c = \{1,3,5\}$. İfade edersek A^c, zarın çift gelmeme olayı olur.

Soru. Bir deney bir bozuk paranın üç defa atılması ve gelen paranın kaydedilmesinden oluşsun. Bu durumda

i. Bu deneyin örnek uzayı nedir?

ii. Turanın, yazıdan fazla gelme olayı nedir?

Çözüm.

i. $S = \{TTT, TTY, TYT, YTT, TYY, YTY, YYT, YYY\}$.

ii. $E = \{TTT, TTY, TYT, YTT\}$

Soru. Bir aile gelecek yaz için Amerika'ya yada Hollanda'ya gidecek olsun. Bu aile Amerika'ya uçakla yada gemi ile gidebilir. Bu aile Hollanda'ya araba ile, trenle yada uçakla gidebilir. Buradaki deneyin sonucunu gidilen yer ve bu yere nasıl gidildiği oluşturulsun. Bu durumda,

i. Örnek uzay nedir?

ii. Uçakla gitme olayı nedir?

Çözüm.

i. $S = \{Amerika\ uçakla, Amerika\ gemiyle, Hollanda\ trenle, Hollanda\ arabayla, Hollanda\ uçakla\}$

ii. $E = \{Amerika\ uçakla, Hollanda\ uçakla\}$

Soru.

Yemek	Seçimler
Ana Yemek	Et veya Tavuk
Çorba	Mercimek veya Domates
Tatlı	Dondurma, pasta, veya helva

Yukarıdaki listenin olduğu bir restoranttan menü alan kişiler bir ana yemek, bir çorba ve bir tatlı seçebiliyor. Bu deneyin sonuçları seçilen menü olsun.

i. Örnek uzay nedir?

ii. Dondurmanın tatlı olarak seçildiği olay A olsun. A'nın elemanları nelerdir?

iii. Tavuğun ana yemek olarak seçildiği olay B olsun. B'nin elemanları nelerdir?

iv. $A \cap B = ?$ (Bu birleşim kümesi sözel olarak ne ifade etmektedir?)

v. Mercimeğin çorba olarak seçildiği olay C olsun. C'nin elemanları nelerdir?

vi. $A \cap B \cap C = ?$ (Bu birleşim kümesi sözel olarak ne ifade etmektedir?)

Çözüm.

$i. \quad S = \{(Et, Mercimek, Dondurma), (Et, Mercimek, Pasta), (Et, Mercimek, Helva), (Et, Domates, Dondurma), (Et, Domates, Pasta), (Et, Domates, Helva), (Tavuk, Mercimek, Dondurma), (Tavuk, Mercimek, Pasta), (Tavuk, Mercimek, Helva), (Tavuk, Domates, Dondurma), (Tavuk, Domates, Pasta), (Tavuk, Domates, Helva)\}$

ii. $A = \{(Et, Mercimek, Dondurma), (Et, Domates, Dondurma), (Tavuk, Mercimek, Dondurma), (Tavuk, Domates, Dondurma)\}$

iii. $B = \{(Tavuk, Mercimek, Dondurma), (Tavuk, Mercimek, Pasta), (Tavuk, Mercimek, Helva), (Tavuk, Domates, Dondurma), (Tavuk, Domates, Pasta), (Tavuk, Domates, Helva)\}$

iv. $A \cap B = \{(Tavuk, Mercimek, Dondurma), (Tavuk, Domates, Dondurma)\}$

(Ana yemek olarak tavuğun, tatlı olarak dondurmanın alındığı menüler)

v. $C = \{(Et, Mercimek, Dondurma), (Et, Mercimek, Pasta), (Et, Mercimek, Helva),$
$(Tavuk, Mercimek, Dondurma), (Tavuk, Mercimek, Pasta), (Tavuk, Mercimek, Helva)\}$

vi. $A \cap B \cap C = (Tavuk, Mercimek, Dondurma)\}$

(Ana yemek olarak tavuğun, çorba olarak mercimeğin, tatlı olarak dondurmanın alındığı menüler)

Olasılık (Probability)

Bir $E \subseteq S$ olayının olasılığı:

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

$|E| \rightarrow$ istenilen olaydaki tüm sonuçların sayısı

$|S| \rightarrow$ olabilecek tüm sonuçların sayısı

ör. İki bozuk para atıldığında en az bir yazı gelmesi olayının olasılığı nedir?

$E = \{YY, YT, TY\}$ ve $S = \{YY, YT, TT, TY\}$ iken $P(E) = \frac{3}{4}$

ör. İki zar atılıdğında zarların toplamının çift olması olayının olasılığı nedir?

İkinci Zarın Sonuçları

Birinci Zarın Sonuçları	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

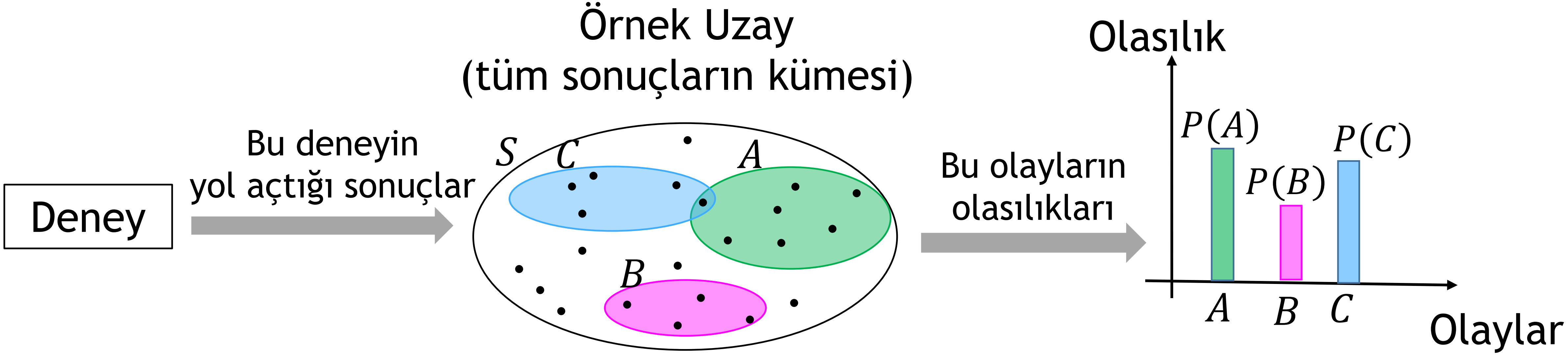
Yeşil yuvarlağın içine alınan sonuçlar ilgilendigimiz olayın sonuçlarıdır. 18 tanedir. Örnek uzayda toplam 36 sonuç vardır.

Şu halde olasılık $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Olasılık aslında uzun dönemde görülen göreli sıklıktır (relative frequency). Bir bozuk para atıldığında, yazı gelme olasılığı ½ ‘dir. Buna göre bir para 2 defa atılırsa 1 defa, 10 defa atılırsa 5’inde yazı görmeyi bekleriz. Yada 100 defa atılırsa 50 defa yazı görmeyi umarız. Fakat şans faktörü yüzünden her zaman beklediğimiz olmaz. Örneğin 10 defa atılan bir bozuk paranın 10’nunda da tura gelebilir. Genel olarak deneyin tekrarlanma sayısı arttıkça şans faktörü azalır, olasılığa uygun sonuçlar elde ederiz.

ör. Bir bozuk parayı çeşitli sayılarda atalım. Sayı arttıkça yazı gelme oranı, yazı gelme olaslığına yani 0.5’e eşit olur.

Atış Sayısı	Yazı Gelme Sayısı	Yazı Gelme Oranı
10	3	0.3
50	21	0.42
100	46	0.46
2000	1004	0.502
10000	5011	0.5011



(örnek uzayda sonuçlar nokta ile gösterilmiştir)

ör. Deney: Ramazan, Şeyma, ve Yüsra'nın aynı anda sudoku çözmesi, kimin sudokuyu daha önce çözeğine bakılması

Tüm Sonuçlar (Örnek Uzay) (Olabilecek tüm sıralamalar) :

1. Ramazan, Şeyma, Yüsra
2. Ramazan, Yüsra, Şeyma
3. Şeyma, Ramazan, Yüsra
4. Şeyma, Yüsra, Ramazan
5. Yüsra, Şeyma, Ramazan
6. Yüsra, Ramazan, Şeyma

A olayı, kızların ilk iki sırayı alması olayı olsun: Şu halde A olayı, 4. ve 5. nolu iki sonuçtan oluşur. A'nın olasılığı: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Olasılığın Özellikleri

Özellik 1. Olasılık her zaman 0 ile 1 arasında bir sayıdır: $0 \leq P(A) \leq 1$

Özellik 2. Örnek uzayın olasılığı 1'dir: $P(S) = 1$

Özellik 3. Ayrık olayların birleşiminin olasılığı, olayların olasılıklarının toplamına eşittir. A ve B ayrık olaylar olsun $(A \cap B = \emptyset)$. Bu durumda $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(Ayrık olaylar aynı anda olamayan olaylardır).

ör. Bir zar atma deneyinde A olayı zarın 2 'nin katı gelmesi; B olayı zarın 5'in katı gelmesi olayı olsun. Bu durumda zarın 2'nin veya 5'in katı gelmesi olasılığı nedir?

$A = \{2,4,6\}$, $B = \{5\}$. Bu durumda $A \cap B = \emptyset$ olduğundan:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Özellik 4. Bir olayın tamamlayıcısının olasılığı 1'den kendi olasılığı çıkartılarak bulunur: $P(A^c) = 1 - P(A)$

ör.5 defa atılan bir bozuk paranın en az bir defa yazı gelme olasılığı nedir?

Çözüm.

Bir paranın 5 defa atılma deneyinde toplam $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ farklı sonuç elde edilebilir. Sonuçta $|S| = 32$ olur.

E olayı 5 defa atılan bir bozuk paranın en az bir defa yazı gelmesi olayı olsun. Bu durumda E^c olayı 5 atışta hiç yazı gelmeme durumu olur ve yalnızca bir sonuç içerir: $E^c = \{TTTTT\}$. E'nin tamamlayıcısı olan E^c olayının olasılığını hesaplamak çok daha kolaydır: $P(E^c) = \frac{1}{32}$

$P(E) + P(E^c) = 1$ idi. O halde $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} \approx 0.96$

Ana fikir: Eğer olması çok muhtemel bir olayın olasılığı soruluyorsa, genelde bu olayın değil bu olayın tersi olan (tamamlayıcısı olan) olayın olasılığı hesaplanarak 1'den çıkarılır. Çunku bu durumda tersinin olma olaslığı düşük olduğundan olasılığının hesaplanması daha kolay olur.

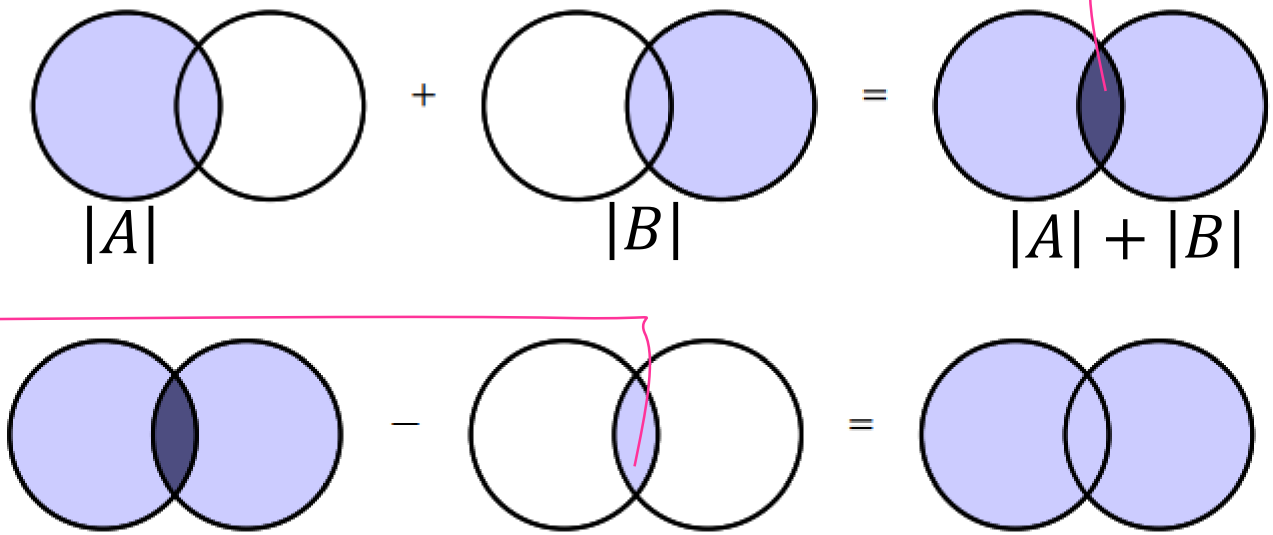
Özellik 5 (Olasılığın Toplama Özelliği): A ve B herhangi iki olay olsun. Bu durumda:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

İspat: :A ve B herhangi iki küme iken $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

birleşimi 2 defa saydık!

2 defa saydığımız yeri çıkartıyoruz!



$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}{|S|} = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} + \frac{|A \cap B|}{|S|}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ör.Diyelimki bir mağazanın müşterilerinin %22'i Visa, %58 'i Mastercard, %14'ü her iki kartı birden kullanıyor. Bir müşterinin visa yada mastercard'ların en az birini kullanma olasılığı kaçtır?

Çözüm.

A olayı Visa kullanma olayı; B olayı Mastercard kullanma olayı olsun. Bu durumda $A \cup B$, Visa yada Mastercard'dan herhangi birini kullanma olayı olur.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.22 + 0.58 - 0.14 = 0.66$$

ör.Diyelimki bir kişinin bir mağazadan takım elbise alma olasılığı 0.3; kıravat alma olasılığı 0.2; hem takım elbise hemde kıravat alma olasılığı 0.1 olsun. Bu kişinin ne takım elbise nede kıravat almama olasılığı kaçtır?

Çözüm.

A takım elbise alma olayı olsun. Bu durumda $P(A) = 0.3$.

B kıravat alma olayı olsun. Bu durumda $P(B) = 0.2$.

Hem takım elbise hem kıravat alma olasılığı: $P(A \cap B) = 0.1$

Takım elebise veya kıravat alma olasılığı: $P(A \cup B) = 0.3 + 0.2 - 0.1 = 0.4$

Ne takım elbise nede kıravat alma olasılığı: $1 - P(A \cup B) = 0.6$

ör. 52’lik bir desteden çekilen bir kartın sinek veya kız olması olasılığı nedir?

Çözüm. A olayı çekilen kartın sinek gelmesi; B olayı çekilen kartın kız gelmesi olsun.

Destede 13 tane sinek olduğundan $P(A) = \frac{13}{52}$.

Destede 4 tane kız olduğundan $P(B) = \frac{4}{52}$.

$A \cap B$ olayı çekilen kartın hem sinek hem kız olması olayı olur. Destede hem kız hem sınek 1 tane kart olduğundan $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

Çekilen kartın kız veya sinek gelme olayı: $A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{8}{27}$$

ör. Atılan bir zarın çift veya atılan bir paranın tura gelem olasılığı kaçtır?

A olayı atılan bir zarın çift gelme olayı: $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B olayı atılan bir paranın tura gelme olayı: $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$

Ayrık olaylar!

$A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ör.

Yıllar	Ölme Olasılığı	Yıllar	Ölme Olasılığı
0 - 10	0.062	50 - 60	0.124
10 - 20	0.012	60 - 70	0.215
20 - 30	0.024	70 - 80	0.271
30 - 40	0.033	80 - 90	0.168
40 - 50	0.063	90 - 100	0.028

Yukarıdaki tablo yaş aralıklarını, ve kişilerin bu yaş aralıklarında ölme olasılıklarını göstermektedir. Buna göre yeni doğan birinin:

i. 30 - 60 yaş arasında ölme olasılığı nedir?
ii.40'a kadar yaşamama olasılığı nedir?
iii.80 yasına kadar hayatta kalma olasılığı kaçtır?

Çözüm.

i. $P(30 - 60\ yas\ arası\ ölme) = 0.033 + 0.063 + 0.0124 = 0.220$

ii. $P(40\,'tan\ önce\ \ ölme) = 0.062 + 0.012 + 0.024 + 0.033 = 0.131$

iii. 80 yasina kadar hayatta kalma olayının tamamlayanı 80'den sonra da yasamaktır.

ör.

6 aylik kazançlar (1000 $)	Sayı		Dağılım (Yüzde)	
	Kadın	Erkek	Kadın	Erkek
<5	427,000	548,000	1.4	1.1
5 - 10	440,000	358,000	1.4	0.7
10 - 15	1,274,000	889,000	4.1	1.8
15 - 20	1,982,000	1,454,000	6.3	2.9
20 -30	6,291,000	5,081,000	20.1	10.2
30 - 40	6,555,000	6,386,000	20.9	12.9
40 - 50	5,169,000	6,648,000	16.5	13.4
50 - 100	8,255,000	20,984,000	26.3	42.1
>100	947,000	7,330,000	3.0	14.9
Toplam	**31,340,000**	**49,678,000**	**100**	**100**

ABD’deki kişilerin cinsiyetlerine göre altı aylık kazanç miktarları tablosu.

Buna göre rastegele seçilen birinin

a. kadın olma olasılığını b. erkek olma olasılığını

c.30,000 dolardan az kazanan bir erkek olma olasılığnı

d.50,000 dolardan fazla kazanan bir kadın olma olasılığını

Çözüm.

a.Toplamda: 31,340,000+49,678,000=81,018,000 kişi vardır.

Rastegele seçilen birinin kadın olma olasılığı: $\frac{31{,}340{,}000}{81{,}018{,}000} \approx 0.3868$

b.Seçilen kişinin erkek olması, kadın olması olayının tamamlayıcısıdır. O halde erkek olma olasılığı: $1 - 0.3868 = 0.6132$.

c.30,000 dolardan az kazanan erkek sayısı:548+358+889+1454+5081=8330

$\frac{8330}{81{,}018} \approx 0.1028$

d.50,000 dolardan fazla kazanan kadın sayısı: 8255+947=9202

$\frac{9202}{81{,}018} \approx 0.1136$