Olasılık ve İstatistik

Fırat İsmailoğlu, PhD

Olasılık - II

Çarpım Kuralı

Birinci elemanı A kümesinden, ikinci elemani B kümesinden alınarak oluşturulan ikililerin toplam sayısı: $|A| \times |B|$ dir.

ör. Yemek kumesi $A = \{kofte, doner, pide, lahmacun\}$,

İçecek kümesi $B = \{kola, fanta, ayran\}$

olsun. Bir yemek ve bir içecekten oluşan menü kaç farklı şekilde secilir?

Çözüm: Yemek ve icecekten olusan ikililerin toplam sayısı: $|A| \times |B| = 4 \times 3 = 12$.

Genelleştirirsek; $A_1, A_2, \dots, A_n$ n farklı küme olsun. Birinci elemanı A_1'den, ikinci elemanı A_2'den,.... alınarak oluşturulabilecek n elamanlı dizilerin sayısı:

$$|A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

ör. Sivas'tan Kayseriye 2 ulaşım şekli vardır: otobüs, araba. Kayseri'den Mersin'e 3 farklı ulaşım şekli vardır: tren, otobüs, araba. Mersin'den Kıbrıs'a iki farklı ulaşım vardır: uçak, gemi. Buna göre Sivas'tan Kıbrıs'a kaç farklı ulaşım vardır?

Çözüm. $2 \times 3 \times 2 = 12$ farklı ulaşım şekli vardır.

Şartlı Olasılık ve Bağımsızlık

Bazen, yaptığımız deneyin sonuçları hakkında bir bilgiye sahipken bu deneyin sonuçlarının olasılığını hesaplarız.

ör. İki zar atılıyor. Zarların toplamının 10 olması ile ilgileniyoruz.

Örnek uzay (olabilecek tüm sonuçlar):

İkinci Zarın Sonuçları

Birinci Zarın Sonuçları	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

36 tane olası sonuç var.

Diyelimki birinci zarın sonucunu biliyoruz: 4. Bu durumda örnek uzay yalnızca (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5) ve (4,6)'dan olusur. Yani yalnızca 6 olası sonuç vardır. Örnek uzayımız küçüldü, böylece olasılık arttı.

İkinci Zarın Sonuçları

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	**(4,1)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**(4,4)**	**(4,5)**	**(4,6)**
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Birinci zarın 4 geldiğini biliyoruz.

Artık örnek uzayımız yalnızca burası.

6 tane olası sonuç var.

Biz zarlar toplamının 10 gelmesi ilgileniyorduk. İlk zar 4 iken, ancak ikinci zar 6 olma durumunundа zarlar toplamı 10 olur: Su halde (şartlı) olasılık 1/6 dır. Yalnızca (4,6) sağlıyor.

Şartlı Olasılık Formül

Bir önceki örnekte B olayı zarların toplamının 10 gelmesi olayı, A olayı ilk zarın 4 gelmesi olayı olsun.

A verilmişken B'nin şartlı olasılığı: $P(B|A)$=A'nın içinde B'nin de olma olasılığı

Deneyin sonucu A'nın içinde olsun. Deneyin sonucunun B'nin de icinde olması için sonucun hem A hem de B'nin icinde yani $A \cap B$'nin içinde olması gerekir.

Deneyin sonucu A'nın içinde olduğundan A bizim yeni örnek uzayımız olur. Şu halde A olmuşken B'nin olmasının olasılığı yani : $P(B|A)$:

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|S|}}{\frac{|A|}{|S|}}$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Ayrıca içler dışlar çarpımıyla:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)}$$

Okunuşu: A ve B olaylarının birlikte olma olasılığı, A'nın olma olasılığı ile A varken B'nin olma olasılığının çarpımlarına eşittir. Buna çarpım kuralı denir.

Sonuç olarak olasılık teorisinin iki çok önemli kuralı vardır:

1. **Toplam Kuralı:** $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
2. **Çarpım Kuralı:** $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)}$

ör. Daha önce gördüğümüz örnekte, Amerika'daki çalışanlardan rastgele seçilen birinin erkek olması ve 6 aylık gelirinin 30,000 dolardan az olması olasılığını hesaplamıştık. Şimdi bunu şartlı olasılık kullanarak hesaplayalım.

ör.

6 aylik kazançlar (1000 $)	Sayı		Dağılım (Yüzde)	
	Kadın	Erkek	Kadın	Erkek
<5	427,000	548,000	1.4	1.1
5 - 10	440,000	358,000	1.4	0.7
10 - 15	1,274,000	889,000	4.1	1.8
15 - 20	1,982,000	1,454,000	6.3	2.9
20 -30	6,291,000	5,081,000	20.1	10.2
30 - 40	6,555,000	6,386,000	20.9	12.9
40 - 50	5,169,000	6,648,000	16.5	13.4
50 - 100	8,255,000	20,984,000	26.3	42.1
>100	947,000	7,330,000	3.0	14.9
Toplam	**31,340,000**	**49,678,000**	**100**	**100**

ABD'deki kişilerin cinsiyetlerine göre altı aylık kazanç miktarları tablosu.

A olayı kişinin erkek olması, B olayı kişinin kazancının 30,000 dolardan az olması olsun. Bu durumda,

$A \cap B$: kişinin erkek olması ve kazancının 30,000 dolardan az olması,

$B|A$: seçilen kişi erkek iken kazancının 30,000 dolardan az olması olur.

Tablodan erkeklerin yüzde $(1.1 + 0.7 + 1.8 + 2.9 + 10.2) = 16.7$ sinin geliri 30,000 dolardan azdır.

Bu durumda $P(B|A) = \frac{16.7}{100} = 0.167$ olur. Aynı zamanda $P(A)$, yani kişinin erkek olma olasılığını 0.6132 bulmuştuk. O halde seçilen kişinin hem erkek hemde gelirinin 30,000 dolardan az olma olasılığı:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = 0.167 \times 0.6132 = \approx 0.102$$

ör.

I. Öğretim		II. Öğretim		
1.Sınıf:	65	1.Sınıf:	68	
2.Sınıf:	86	2.Sınıf:	70	
3.Sınıf:	94	3.Sınıf:	88	
4. Sınıf	102	4. Sınıf	99	Genel Toplam:
Toplam: 347		Toplam: 325		672

Yukarıdaki tablo, bilgisayar mühendisliği bölümündeki 1 ve 2 öğretim öğrencilerinin sınıflara göre dağılımını göstermektedir. Buna göre bölümden rastgele seçilen bir öğrencinin:

i. I öğretim olma olasılığı nedir?

ii. I öğretim olduğu biliniyorsa sınıfının 3 ve daha yukarı olma olasılığı nedir?

iii. 4. sınıf olduğu biliniyorsa II öğretim olma olasılığı nedir?

çözüm.

i. A olayı öğrencinin I.öğretim olma olayı olsun. Buna göre $P(A)=\frac{347}{672}\approx 0.52$

ii. Öğrencinin sınıfının 3 ve daha yukarı olma olayı B olsun. Öğrencinin I. öğretim olduğu biliniyor. Şu halde biz $P(A|B)$ olasılığını arıyoruz.

$A\cap B$ olayı, öğrencinin hem I. öğretim olması hemde sınıfının 3 ve daha fazla olması olayıdır. Bu durumdaki kişiler I. öğretimdeki 3 ve 4. sınıf olan kişilerdir.

Bu kişilerin toplam sayıları: $|A\cap B|=94+102=196.$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{196/672}{347/672}\approx 0.565$$

iii. A olayı öğrencinin 4. sınıf olması,B olayı öğrencinin ikinci öğretim olması olsun. Toplam 4. sınıf sayısı:$|A|=102+99=201$

$A\cap B$ olayı, öğrencinin 4 sınıf ve ikinci öğretim olmasıdır: $|A\cap B|=99$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{99/672}{201/672}\approx 0.493$$

Genelleştirilmiş Çarpım Kuralı

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)$ (birinci olayın olması ve birinci olay varken ikincisinin olması)	
$P\big((A_1 \cap A_2) \cap A_3\big)$	$= P(A_1 \cap A_2)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$ $= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$
$P\big((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cap A_4\big)$	$= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ $= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
$P\big((A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cap A_5\big)$	$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)P(A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$
	$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3)\, P(A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

Genel Formül:

n tane olayın aynı anda olma olasılığı (zincir kuralı):

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P\big(A_2 \mid A_1\big)P\big(A_3 \mid A_1 \cap A_2\big) \cdots P\big(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\big)$$

ör.Aralarında Barcelona, Real Madrid, Bayern Münih ve Liverpool olan 4 güçlü takım ile zayıf olan dört takım şampiyonlar liginde çeyrek final kalmıştır. Çeyrek finallerde bu dört güçlü takımın hiçbirinin birbiriyle maç etmeme olasılığı nedir?

Çözüm.

Dört güçlü takımın hiçbirinin birbiriyle maç etmemesi, bu dört takımın herbirinin bir zayıf takım ile maç etmesi anlamına gelir.

A_1 olayı Barcelona'nın bir zayıf takımla maç etmesi,

A_2 olayı Real Madrid'in bir zayıf takımla maç etmesi,

A_3 olayı Bayern Münih'in bir zayıf takımla maç etmesi,

A_4 olayı Liverpool'un bir zayıf takımla maç etmesi olsun.

Biz bu dört olayın hepsinin olmasını istiyoruz.

Yani $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ 'un olmasını istiyoruz.

Aradığımız olayın olasılığı: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$.

Genelleştirilmiş çarpım kuralından:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P\left(A_2 \middle| A_1\right)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$P(A_1)$: A_1 olayının olma olasılığı, yani Barcelona'nın zayıf bir takımla maç etmesi olasılığı. Barcelona'nın maç edebileceği 4 zayıf takım vardır. Barcelona'nın toplmada maç edebilecegi kendi haric 7 takım vardır.

O halde $P(A_1) = \frac{4}{7}$

$P\left(A_2 \middle| A_1\right)$: Barceolona'nın bir zayıf takımla maç ettiği bilinirken, Real Madrid'in başka bir zayıf takımla maç etmesi olasılığı. Bir zayıf takım Barcelona ile maç ettiginden geriye 3 zayif takim kalmiştir. Real Madrid bu 3 takımın biriyle oynayabilir. Barcelona ve maç ettigi zayıf takım; birde Real Madrid'in kendini çıkardığımızda, Real madrid ile maç edebilecek geriye 5 takım kalır.

O halde:$P\left(A_2 \middle| A_1\right) = \frac{3}{5}$

$P(A_3|A_1 \cap A_2)$: Barceolona'nın bir zayıf takımla maç ettiği ve Real Madrid'in bir zayıf takımla maç ettiği bilinirken; Bayern Münih'in bir zayıf takımla maç etmesi olasılığı. Hali hazırda iki zayıf takım güçlü takımlarla maç ettiğinden geriye 2 zayıf takım kalır. Bayer Münih'in zayıf takımlarla maç yapan güçlü takımları (toplam 4 takım) çıkarınca geriye maç yapabilecegi kendi haric 3 takım kalıyor.

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{3}$$

$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$: İlk 3 büyük takımın diğer üç zayıf takımla mücadele ettiği bilinirken Liverpool'un bir zayıf takımla maç etme olasısılığı. 4 zayıf takımın üçü hali hazırda maç ettiğinden geriye 1 zayıf takım kalır. Toplam 8 takımdan üç güçlü, üç zayıf takımla maç ederse geriye 2 takım kalırki bunlardan biri Liverpool'un kendidir. O da çıkınca Liverpool'un maç yapabilceği tek takım kalır.

$$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{1} = 1.$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{8}{35} \approx 0.11$$

ör. 52'lik bir destede çekilen ilk iki kartın papaz, üçüncü kartın kız gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm.

A_1 olayı ilk kartın papaz gelmesi,

A_2 olayı ikinci kartın papaz gelmesi,

A_3 olayı üçüncü kağıdın kız gelmesi olayı olsun.

Biz bu üç olay aynı anda olsun istiyoruz. Yani $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ olayının gerçekleşmesini istiyoruz.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} \approx 0{,}001$$

$P(A_1)$: 4 papaz var. 52 toplam kart var. O halde $P(A_1) = \frac{4}{52}$

$P(A_2|A_1)$: Eldeki kart papaz iken bir sonraki kartın yine papaz gelmesı. 51 kart var, 3'ü papaz. $P(A_2|A_1) = \frac{3}{51}$

$P(A_3|A_1 \cap A_2)$: eldeki iki kart papaz iken bir sonraki kartın kız gelmesi

50 kart var, 4'ü kız. $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{50}$

Bağımsız Olaylar

Bazen, bir olayın olması yada olmaması diğerinin olmasını yada olmamasını hiç etkilemez. Örneğin atılan bir paranın tura yada yazı gelmesi, atılan bir zarın sonucunu değiştirmez. Yada, bir zarı iki defa atma deneyinde ilk zarın sonucu ikinci zarın sonucunu etkilemez. Bu tür olaylara bağımsız olaylar diyeceğiz.

$P(B|A)$, olasılığı A olayı olduğunda B'nin olma olasılığı idi; ama A ve B olayları bağımsız ise A'nın olması bilgisi B'nin olup olmaması hakkında bize bir bilgi vermez. Şu halde $P(B|A) = P(B)$ olur. Bu durumda, A ve B olaylarının birlikte olmasının olasılığı, A'nın olma olasılığı ile B'nin olma olasılığının çarpımına eşit olur.

Çarpım kuralında

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

idi. A ve B bağımsız iken $P(B|A) = P(B)$ olduğundan, A ve B olayları bağımsız iken

$$P(A \cap B) = P(B)P(A)$$

olur.

$P(A \cap B) = P(B)P(A)$ olması aynı zamanda bağımsızlık testidir. A ve B gibi iki olayın bağımsız olduğunu göstermek istiyorsak, bu eşitliğin sağlandığını göstermeliyiz.

ör. İki zar atılsın. A, birinci zarın 3 gelmesi; B, zarlar toplamının 8 gelmesi ve C, zarlar toplamının 7 gelmesi olsun.

i. A ve B olayları bağımsız mıdır?

ii. A ve C olayları bağımsız mıdır?

Çözüm.

A ve B olayları bağımsız ise $P(A \cap B) = P(B)P(A)$ olmaldır.

$P(A \cap B)$: ilk zarın 3 gelmesi ve zar toplamının 8 olması olayıdır. Bu yalnızca zarların 3 ve 5 gelmesi ile mümkündür. 2 zar atılıdğında 36 farklı sonuç oluşabilir. $P(A \cap B) = P(\{(3,5)\})\frac{1}{36}$

B olayı: $\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ olduğundan

olduğundan $P(A) = \frac{6}{36}$, $P(A) = \frac{5}{36}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(B)P(A) = \frac{5}{36} \times \frac{6}{36}$$

Olduğundan iki bağımsız değildir

ii.$A \cap C$: ilk zarın 3 gelmesi, ve zar toplamının 7 olması olayı

$A \cap C = \{(3,4)\}$ olup $P(A \cap C) = \frac{1}{36}$

C: zar toplamının 7 olması olayı

$C = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ olup $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(A) = \frac{1}{6}$. Şu halde $P(A \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ olduğundan A ve C olayları bağımsızdır.

ör.Havayolları genelde uçaktaki koltuk sayısından fazla bilet satarlar; buna overbooking denir. Amaç, yolculardan gelmeyenler olduğunda bile uçakta boş koltuğun kalmasını önlemektir.

Diyelimki bir uçuşta her bir yolcunun uçuşa gelme olasılığı p olsun, ve bu yolcuların uçuşa gelip gelmemeleri durumu birbirinden bağımsız olsun.

Diyelimki uçakta toplam 6 koltuk olsun. Eğer havayolu 8 bilet satarsa overbooking olma olasılığı ne olur?

Çözüm.

Overbooking olabilmesi icin uçusa 7 veya 8 kisi gelmesi gerekir.

A: uçuşa 7 kişi gelmesi olayı olsun.

B: uçuşa 8 kişi gelmesi olayı olsun.

Uçuşa 7 veya 8 kişi gelme olayı $A \cup B$ olayı olur. Biz bunun olasılığını arıyoruz:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (toplama kuralı).

$P(A)$'yı hesaplayalım. Bilet sattığımız toplam 8 kişiden 7'sinin gelme olasılığı ile ilgileniyoruz. Bu aynı zamanda, 7'sinin gelmesi birisinin gelmemesi demektir.

Biletli 7 kisinin gelmesi A_1 olayı, biletli bir kişinin gelmemesi A_2 olayı olsun.

A, A_1 ve A_2 olaylarının aynı anda olmasıdır: $A = A_1 \cap A_2$olup, bu iki olay bağımsız olduğundan $P(A) = P(A_1)P(A_2)$ olur.

A_1, 8 kişiden herhangi 7'sinin gelmesi. 8 kişiden 7 kişi kombinasyonla $\binom{8}{7} = 8$ farklı şekilde seçilir. Her bir seçimde (her bir durumda) birbirinden bağımsız 7 kişi gelir. Her birinin gelme olasılığı p olup, kişilerin gelmesi birbirinden bağımsız olduğundan 7 kişinin gelme olasılığı $p \times p \times p \times p \times p \times p \times p = p^7$ olur.

O halde $P(A_1) = 8p^7$ olur.

$P(A_2)$: bir kişinin gelmeme olasılılığı: $(1-p)$ olup, $P(A) = 8p^7(1-p)$.

…

$P(B)$: 8 kişinin de gelme olasılığı. Herkesin gelmesi birbirinden bağımsız olduğundan bu olasılıkları çarpabiliriz:

$$P(B) = p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times p = p^8$$

…

A ve B olayları ayrıktır. 7 kisinin gelmesi ile 8 kisinin gelmesi aynı anda mümkün olamayacağından $A \cap B = \emptyset$ olup, $P(A \cap B) = 0$ olur.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= 8p^7 + p^8.$$