Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

# ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине «Вычислительная математика»

| | |
|---|---|
| Студент: | Кильдишев Петр Степанович |
| Группа: | РК6-56Б |
| Тип задания: | лабораторная работа |
| Тема: | Численное дифференецирование и интегрирование |

Студент ____________ Кильдишев П.С.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ____________ ____________
подпись, дата Фамилия, И.О.

Москва, 2022

# Содержание

# Численное дифференецирование и интегрирование

## Задание

Даны функция

$$g_1(x) = xe^x, \tag{1}$$

с узлом $x_0 = 2$ и функция

$$g_2(x) = x^2 \sin 3x, \tag{2}$$

заданная на интервале $x \in [0; \pi]$.

Требуется (базовая часть):

1. Написать функцию diff2(x_0, h, f), которая возвращает значение первой производной функции $f$ на основе центральной формулы численного дифференцирования 2-го порядка в точке $x_0$ для шага дифференцирования $h$.

2. Рассчитать производную $g_1'(x)$ в точке $x_0 = 2$ для множества значений $h \in [10^{-16}; 1]$ с помощью функции diff2. Построить log-log графики зависимости абсолютной погрешности численного дифференцирования от шага дифференцирования.

3. Написать функцию composite_simpson(a, b, n, f) численного интегрирования функции $f$ на интервале [a; b] по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.

4. Рассчитать интеграл $\int_0^\pi g_2(x)dx$ с помощью составной формулы Симпсона для множества значений $n \in [3; 9999]$. Построить log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования.

Требуется (продвинутая часть):

1. Вывести общую центральную формулу численного дифференцирования 4-го порядка вместе с остаточным членом, аппроксимирующую первую производную по 5 узлам:

   $$f'(x_0) \approx Af(x_0 - 2h) + Bf(x_0 - h) + Cf(x_0) + Df(x_0 + h) + Ef(x_0 + 2h). \tag{3}$$

   Продемонстрировать, что формула действительно имеет 4-й порядок точности.

2. Написать функцию diff4(x_0, h, f), которая возвращает значение первой производной функции $f$ на основе центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка в точке $x_0$ для шага дифференцирования $h$.

3. Рассчитать производную $g_1'(x)$ в точке $x_0 = 2$ для множества значений $h \in [10^{-16}; 1]$ с помощью функции diff4. Добавить log-log график зависимости абсолютной погрешности численного дифференцирования от шага дифференцирования к соответствующему графику для diff2. Для каждого случая (diff2 и diff4) ответить на следующие вопросы:

- Каким образом на log-log графике можно увидеть порядок формулы дифференцирования? Доказать это формульно и продемонстрируйте на графике по аналогии с лекциями.
- Совпадает ли порядок выведенной формулы дифференцирования на log-log графике с ее действительным порядком?
- Каков оптимальный шаг дифференцирования, при котором абсолютная погрешность минимальна? С чем связано существование такого минимума? Обосновать свой ответ, ссылаясь на данные log-log графика.
- Сравнить оптимальный шаг дифференцирования и соответствующую минимально достижимую погрешность для формул 2-го и 4-го порядка. Чем обоснована разница между ними?

4. Сравнить порядок формулы, полученный с помощью графика для составной-формулы Симпсона, с аналитическим порядком точности составной формулы Симпсона. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минизимирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ.

5. С помощью теоремы о корнях многочленов Лежандра, доказанной в лекциях, вывести квадратуру Гаусса, имеющую степень точности 5. Указать, сколько узлов необходимо для вывода такой квадратуры?

6. Написать функцию gauss_quad5(f) численного интегрирования функции $f$ спомощью квадратуры Гаусса пятой степени точности.

7. Доказать, что квадратура Гаусса имеет степень точности 5, с помощью следующего вычислительного эксперимента:

   - построить последовательность полиномов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$, $P_6(x)$, имеющих степени соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, используя случайно сгенерированные значения коэффициентов полиномов;
   - проинтегрировать их на интервале (0; 2 аналитически и с помощью выведенной квадратуры Гаусса;
   - посчитать абсолютную погрешность и сделать вывод о степени точности выведенной квадратуры;
   - указать все выкладки и полученные значения в отчете.

## Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы: исследовать составную формулу Симпсона, вывести и исследовать квадратуру Гаусса степени точности 5.

# 1 Базовая часть

Все приведенные ниже примеры программного кода были реализованы на языке Python версии 3.8.

## Задание 1

Формула численного дифференцирования 2-го порядка в точке $x_0$ шага дифференцирования $h$ для $f(x) \in C^3[x_0 - h; x_0 + h]$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi), \tag{4}$$

где $\xi \in [x_0 - h; x_0 + h]$.
Программная реализация задания 1:

```
def diff2(x_0, h, f):
    return (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) / (2 * h)
```

## Задание 2

Истинное значение производной $g_1(x)$ имеет вид:

$$g_1'(x) = e^x + xe^x \tag{5}$$

В точке 2 она приблизительно равна 22,16716829. С помощью функции logspace(-16, 0, 300) получены равномерно распределенные по логарифмической оси значения шага дифференцирования $h$.
Найдем абсолютная разницу истинного значения и полученного при помощи функции diff2:

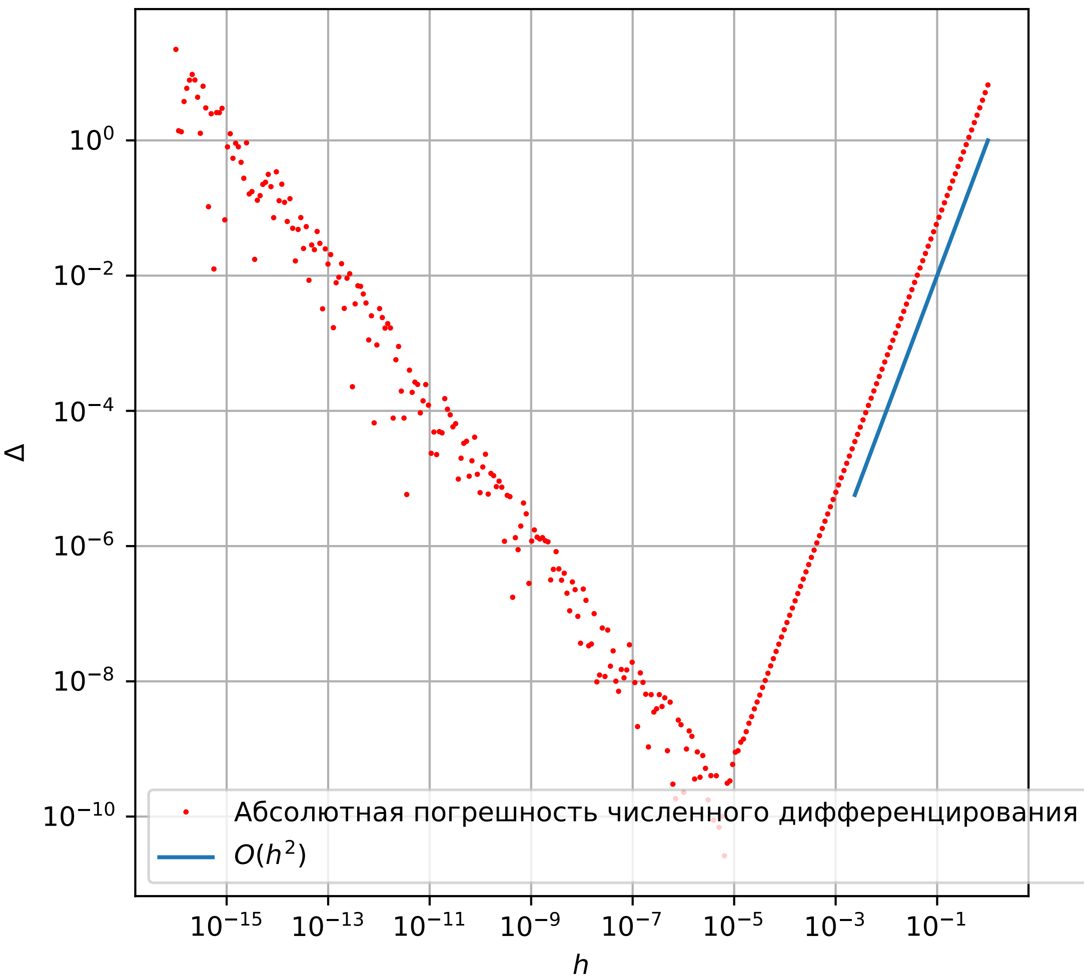


Рис. 1. Абсолютная погрешность численного дифференцирования от значения шага

Отображение графиков функций было выполнено программно с использованием прикладных команд графической библиотеки matplotlib и библиотеки numpy.
При уменьшении шага $h$ погрешность сначала убывает пропорционально $h^2$, затем снова начинает возрастать, что говорит о вычислительной неустойчивости численного дифференцирования.

## Задание 3

Составная формула Симпсона для функции $f(x) \in C^4[a;b]$ по n узлам:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\Big[f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})\Big] - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi), \tag{6}$$

где $h = \frac{(b-a)}{n}$, $x_i = a + (i-1)h$, $i = 1, \ldots, n+1$, $\xi \in [a;b]$.
Программная реализация задания 3:

```
def composite_simpson(a, b, n, f):
    h = (b - a) / (n - 1)
    Xs = np.linspace(a, b, n)
    return h / 3 * (f(Xs[0]) + 4 * np.sum(f(Xs[1:n:2])) + 2 * np.sum(f(Xs[2:n - 1:2]) +
        f(Xs[n - 1])))
```

## Задание 4

Истинное значение неопределенного интегралла $g_2(x)$ имеет вид:

$$\int g_2(x)dx = \frac{2}{9}x\sin 3x - \frac{1}{27}(9x^2 - 2)\cos 3x + C \tag{7}$$

Определенный интегралл $\int\limits_a^b g_2(x)dx$ равен $\frac{1}{27}(9\pi^2 - 4)$.
Значения получены при помощи сервиса wolframalpha.com.
Абсолютная разница истинного значения интегралла и полученного при помощи функции composite_simpson:

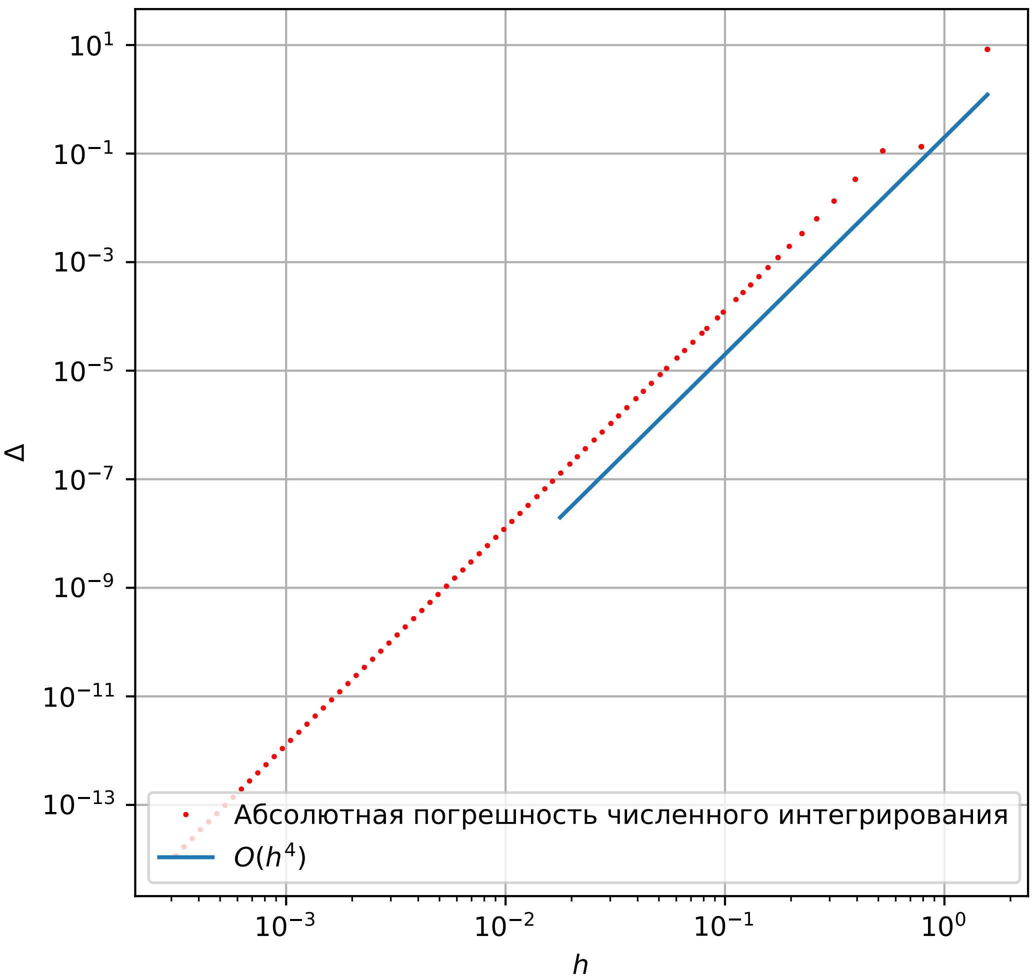


Рис. 2. Абсолютная погрешность численного интегрирования от значения шага

Абсолютная погрешность убывает пропорционально $h^4$, что иллюстрирует вычислительную устойчивость численного интегрирования.

## Вывод по базовой части

Графически были изображены графики зависимости абсолюной погрешности при численном дифференцировании 2-го порядка и интегрировании составной формулой Симпсона. По ним видно, что значение абсолютной погрешности в случае численного интегрирования пропорционально $h^4$, а в случае численного дифференцирования пропорциональность $h^2$ сохраняется до определенного значения шага, а последующее уменьшение шага приводит к увеличению погрешности всвязи с вычислительной неустойчивостью численного дифференцирования.

## 2 Продвинутая часть

### Задание 1

Поставленная задача решена методом разложения в ряд Тейлора.
Пусть $f(x) \in C^5[x_0-2h; x_0+2h]$. Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора в точке $x_0$ до 5 порядка:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{24}(x-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi)}{120}(x-x_0)^5, \tag{8}$$

где $\xi \in (x_0; x)$. Значение ряда в узлах $x_0 - h$, $x_0 + h$:

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(\xi_1), \tag{9}$$

где $\xi_1 \in (x_0 - h; x_0)$;

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(\xi_2), \tag{10}$$

где $\xi_2 \in (x_0; x_0 + h)$. Разность выражений (10) и (9):

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)] \tag{11}$$

$\xi_1 < \xi_2$, по теореме о промежуточном значении $\exists \xi \in (x_0 - h; x_0 + h)$:

$$f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{2}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)] \tag{12}$$

После подстановки:

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{h^5}{60}f^{(5)}(\xi) \tag{13}$$

Те же действия для узлов $x_0 - 2h$, $x_0 + 2h$:

$$f(x_0-2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) - \frac{4h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_0) - \frac{4h^5}{15}f^{(5)}(\xi_3), \tag{14}$$

где $\xi_3 \in (x_0 - 2h; x_0)$;

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) + \frac{4h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_0) + \frac{4h^5}{15}f^{(5)}(\xi_4), \tag{15}$$

где $\xi_4 \in (x_0; x_0 + 2h)$.
Разность выражений (15) и (14):

$$f(x_0+2h) - f(x_0-2h) = 4hf'(x_0) + \frac{8h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{4h^5}{15}[f^{(5)}(\xi_3) + f^{(5)}(\xi_4)] \tag{16}$$

По теореме о промежуточном значении $\exists \xi \in (x_0 - 2h; x_0 + 2h)$:

$$f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{2}[f^{(5)}(\xi_3) + f^{(5)}(\xi_4)] \tag{17}$$

После подстановки:

$$f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h) = 4hf'(x_0) + \frac{8h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{4h^5}{15}f^{(5)}(\xi) \tag{18}$$

Сумма выражения (18) и домноженного на 8 выражения (13):

$$f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 + h) + 8f(x_0 - h) = -12hf'(x_0) + \frac{2h^5}{5}f^{(5)}(\xi) \tag{19}$$

Таким образом:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h)}{12h} + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi) \tag{20}$$

Степень h в остаточном члене равна 4, что подтверждает 4-й порядок точности.

## Задание 2

Программная реализация задания 2:

```
def diff4(x_0, h, f):
    return (f(x_0 - 2 * h) - f(x_0 + 2 * h) - 8 * f(x_0 - h) + 8 * f(x_0 + h)) / (12 *
        h)
```

## Задание 3

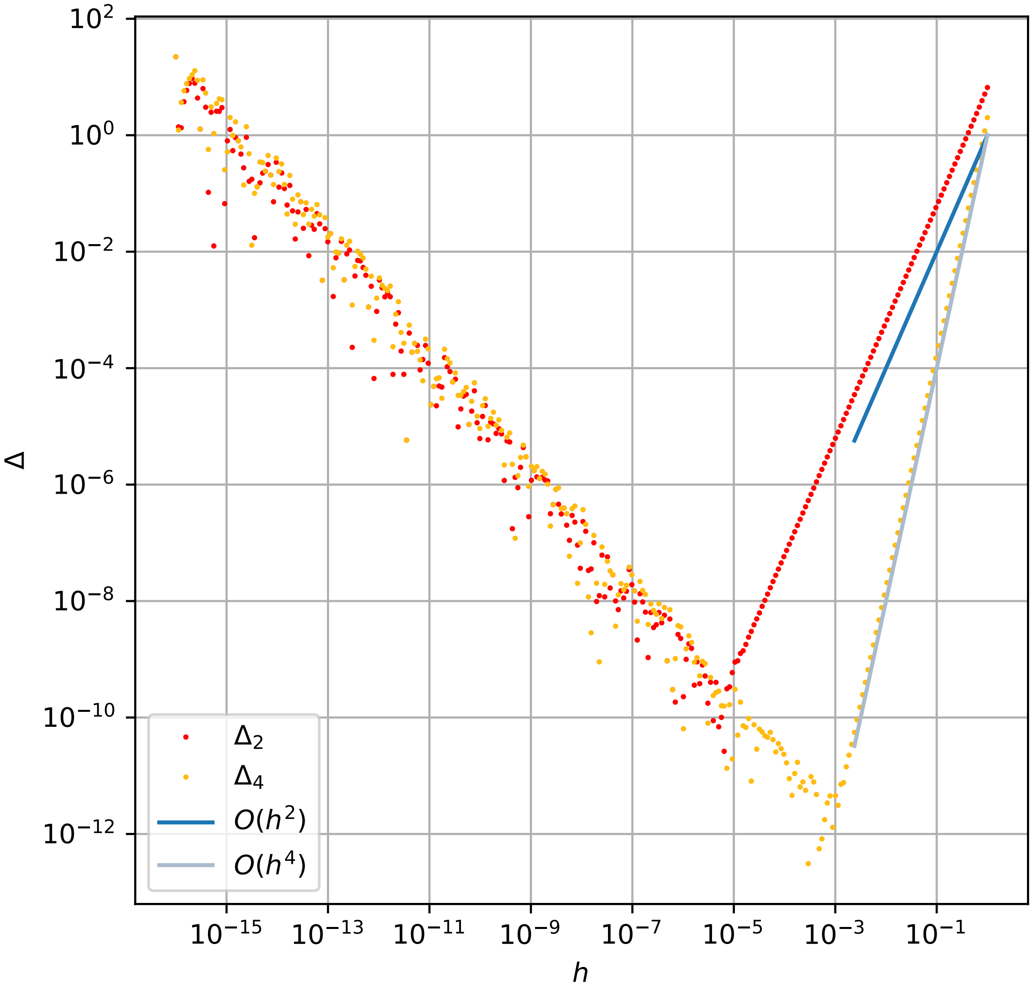


Рис. 3. Абсолютная погрешность численного дифференцирования 2-го и 4-го порядков от значения шага

На графике видно, что абсолютная погрешность при численном дифференцировании 2-го порядка убывает до определенного значения шага пропорционально $h^2$, а при численном дифференцировании 4-го порядка убывает до другого определенного значения шага пропорционально $h^4$ (так как прямые параллельны).

Представим $f(x)$ как сумму приближенного значения (в памяти компьютера) $\overline{f}(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ и погрешности округления $e(x)$:

$$f(x) = \overline{f}(x) + e(x) \tag{21}$$

Тогда абсолютное значение погрешности в точке $x_0$ при численном дифференцировании 2-го порядка равно:

$$E = |f'(x_0) - \frac{\overline{f}(x_0 + h) - \overline{f}(x_0 - h)}{2h}| \tag{22}$$

При подставлении (21) в (3) и получившееся в (22) формула принимает вид:

$$E = |\frac{e(x_0 + h) - e(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)| \leq \frac{|e(x_0 + h)| + |e(x_0 - h)|}{2h} - \frac{h^2}{6}|f^{(3)}(\xi)| \tag{23}$$

Пусть $|e(x)| \leq \epsilon$, $f^{(3)}(\xi) \leq M_1$, тогда:

$$E \leq \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M_1 \tag{24}$$

При $h- > 0$ значение $\frac{\epsilon}{h}$ стремится в бесконечность, а $\frac{h^2}{6}M_1$ стремится к 0, что объясняет наличие минимальной абсолютной погрешности и оптимального шага дифференцирования.
Найден оптимальный шаг $h$, при приравнивании производной $\frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M_1$ к нулю:

$$h_{1opt} = (\frac{3\epsilon}{M_1})^{\frac{1}{3}} \tag{25}$$

Повторим те же действия для формулы численного дифференцирования 4-го порядка:

$$E = |f'(x_0) - \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h)}{12h}| \tag{26}$$

Подставим (21) в (20), затем все вместе в (26):

$$E = |\frac{e(x_0 - 2h) - e(x_0 + 2h) - 8e(x_0 - h) + 8e(x_0 + h)}{12h} + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)| \tag{27}$$

$$E \leq \frac{|e(x_0 - 2h)| + |e(x_0 + 2h)| + 8|e(x_0 - h)| + 8|e(x_0 + h)|}{12h} + \frac{h^4}{30}|f^{(5)}(\xi)| \tag{28}$$

Пусть $|e(x)| \leq \epsilon$, $f^{(5)}(\xi) \leq M_2$, тогда:

$$E \leq \frac{3\epsilon}{2h} + \frac{h^4}{30} M_2 \tag{29}$$

Аналагично с численным дифференцированием 2-го порядка при $h- > 0$ значение $\frac{3\epsilon}{2h}$ стремится в бесконечность, а $\frac{h^4}{30}M_2$ стремится к 0, что объясняет наличие минимальной абсолютной погрешности и вычислительной неустойчивости.
При приравнивании производной $\frac{3\epsilon}{2h} + \frac{h^4}{30}M_2$ к нулю получается:

$$h_{2opt} = (\frac{45\epsilon}{4M_2})^{\frac{1}{5}} \tag{30}$$

За $M_1$ возьмем 3-ю производную $g_1(x)$:

$$M_1 = (x+3)e^x \tag{31}$$

За $M_2$ возьмем 5-ю производную $g_1(x)$:

$$M_2 = (x+5)e^x \tag{32}$$

Найдем программно значение $h_{1opt}$ и $h_{2opt}$:

```
def h_opt(x_0, dtype=np.float64):
    h1_opt = (dtype(3) * np.finfo(np.float64).eps / ((dtype(3) + x_0) * np.exp(x_0))) **
        (dtype(1) / dtype(3))
    h2_opt = (dtype(45) * np.finfo(np.float64).eps / (dtype(4) * (dtype(5) + x_0) *
        np.exp(x_0))) ** (dtype(1) / dtype(5))
    print(h1_opt, h2_opt)
```

Результат выполнения программы: $h_{1opt} \approx 2.622210209782995 * 10^{-6}$, $h_{2opt} \approx 5.454829101818735 * 10^{-4}$.

Значение оптимального шага для численного дифференцирования 4-го порядка больше, чем значение оптимального шага для численного дифференцирования 2-го порядка. Это обусловлено более быстрым убыванием значения абсолютной погрешности, так как прямая $h^4$ на логарифмической шкале убывает быстрее прямой $h^4$ при уменьшении $h$ и, таким образом, более быстрым достижением значения, при котором погрешность начинает стремиться к бесконечности. При этом минимальное значение абсолютной погрешности при численном дифференцировании 4-го порядка лучше. Это обусловлено большей точностью формулы.

Параллельность графиков абсолютных погрешностей при дифференцировании 2-го и 4-го порядка прямым на логарифмической шкале $h^2$ и $h^4$ соответственно, подтверждает соответсвие порядка выведенных формул с их действительным порядком.

## Задание 4

На Рис. 2. видно, что абсолютная погрешность численного интегрирования составной формулой Симпсона пропорциональна $h^4$, что подтверждает аналитический порядок точности равный 4-м (степень $h$ при остаточном члена равна 4-м).

Для данной формулы минимальное значение абсолютной погрешности ограничивается только машинным эпсилоном, так как численное интегрирование является вычислительно устойчивой опперацией. Следовательно, оптимального шага интегрирования для данной формулы не существует.

## Задание 5

Квадратура Гаусса имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \tag{33}$$

Она имеет $2n$ параметров: $c_i, x_i, i = 1, \dots, n$. Столько же параметров имеет полином $2n-1$ степени. Это позволяет записать решающую сиситему для нахождения $c_i, x_i$.
Так как требуемая степень точности равна 5, то количество узлов $n$ будет равно 3-м.
Так как $n = 3$, рассмотрен многочлен Лежандра $\phi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, его корни: $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Теорема о корнях многочлена Лежандра:
Пусть $x_1, \dots, x_n$ являются корнями полинома Лежандра $n$-й степени $\phi_n(x)$ и коэффициенты $c_1, \dots, c_n$ определены как:

$$c_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx = \int_{-1}^{1} \prod_{j=1,j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx. \tag{34}$$

Тогда, если $P_m(x)$ является полиномом степени $m < 2n$, то верно:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P_m(x_i). \tag{35}$$

Численные значения коэффициентов для $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} dx = \frac{5}{9}; \tag{36}$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} dx = \frac{8}{9}; \tag{37}$$

$$c_3 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} dx = \frac{5}{9}; \tag{38}$$

Значения получены при помощи сервиса wolframalpha.com.
Если при вычислении квадратуры Гаусса применять узлы, равные узлам многочлена Лежандра, то квадратура Гаусса, имеющая точность 5 имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)dx = \sum_{i=1}^{3} c_i f(x_i) = \frac{5}{9} f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{\frac{3}{5}}), \tag{39}$$

где $m < 2n$.

## Задание 6

Программная реализация задания 6:

```
def gauss_quad5(f):
    return 5 / 9 * f(-np.sqrt(3 / 5)) + 8 / 9 * f(0) + 5 / 9 * f(np.sqrt(3 / 5))
```

## Задание 7

Полином степени $n$ имеет вид:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{40}$$

Распишем аналитическое значение интегралла $\int\limits_0^2 P_n(x)dx$ для всех $n$ от 0 до 6:

$$\int\limits_0^2 P_0(x)dx = \int\limits_0^2 a_0 dx = a_0 x|_0^2 = 2 * a_0 \tag{41}$$

$$\int\limits_0^2 P_1(x)dx = \int\limits_0^2 a_1 x dx + \int\limits_0^2 a_0 dx = [\frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x]_0^2 = 2a_1 + 2a_0 \tag{42}$$

$$\int\limits_0^2 P_2(x)dx = \int\limits_0^2 a_2 x^2 dx + \int\limits_0^2 P_1(x)dx = [\frac{a_2}{3}x^3]_0^2 + 2a_1 + 2a_0 = \frac{8}{3}a_2 + 2a_1 + 2a_0 \tag{43}$$

$$\int\limits_0^2 P_3(x)dx = \int\limits_0^2 a_3 x^3 dx + \int\limits_0^2 P_2(x)dx = [\frac{a_3}{4}x^4]_0^2 + \int\limits_0^2 P_2(x)dx = 4a_3 + \frac{8}{3}a_2 + 2a_1 + 2a_0 \tag{44}$$

$$\int\limits_0^2 P_4(x)dx = \int\limits_0^2 a_4 x^4 dx + \int\limits_0^2 P_3(x)dx = [\frac{a_4}{5}x^5]_0^2 + \int\limits_0^2 P_3(x)dx = \frac{32}{5}a_4 + 4a_3 + \frac{8}{3}a_2 + 2a_1 + 2a_0 \tag{45}$$

Аналогично:

$$\int\limits_0^2 P_5(x)dx = \frac{32}{3}a_5 + \frac{32}{5}a_4 + 4a_3 + \frac{8}{3}a_2 + 2a_1 + 2a_0 \tag{46}$$

$$\int\limits_0^2 P_6(x)dx = \frac{128}{7}a_6 + \frac{32}{3}a_5 + \frac{32}{5}a_4 + 4a_3 + \frac{8}{3}a_2 + 2a_1 + 2a_0 \tag{47}$$

Программно заданы значения $a_i, i \in [0, n]$ полиномов.
Полученные значения интегрирования:

| n | Истинное значение | С помощью квадратуры | Абсолютная погрешность |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.8824549737700829 | 0.8824549737700829 | 0.0 |
| 1 | 4.199802070227385 | 4.199802070227385 | 0.0 |
| 2 | 3.934985069447714 | 3.9349850694477144 | 4.440892098500626*$10^{-16}$ |
| 3 | -3.8209426877917365 | -3.8209426877917365 | 0.0 |
| 4 | -11.992919616202967 | -11.992919616202967 | 0.0 |
| 5 | -6.522204973827044 | -6.522204973827046 | 1.7763568394002505*$10^{-15}$ |
| 6 | -2.0514240389221676 | -2.0348155416201377 | 0.016608497302029956 |

При степени полинома $n = 6$ точность значительно падает, так как степень точности квадратуры Гаусса равна 5, данный вычислительный эксперимент это подтверждает. В других же случаях погрешность не велика и может считаться приблизительно равной нулю.

## 3 Заключение

1. При выполнении задания 1 было явно показано преимущество использования чебышевских узлов при интерполяции Лагранжа, заключающееся в виде отсутствия эффекта Рунге.

2. При выполнении задания 2 было явно показано ещё одно преимущество использования чебышевских узлов при интерполяции Лагранжа, заключающееся в уменьшении расстояния между полиномом Лагранжа и интерполируемой функцией.

### Список использованных источников


1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046.

2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).


### Выходные данные

*Кильдишев П.С.Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2022. — 17 с. URL: https://sa2systems.ru:88 (система контроля версий кафедры РК6)*

Постановка: *доцент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин*
Решение и вёрстка: *студент группы РК6-56Б, Кильдишев П.С.*

*2022, осенний семестр*