Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Кильдишев Петр Степанович
Группа:	РК6-56Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Интерполяция Лагранжа

Студент ____________ Кильдишев П.С.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ____________ ____________
подпись, дата Фамилия, И.О.

Москва, 2022

Содержание

Интерполяция Лагранжа

Задание

Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \tag{1}$$

где $x \in [-1; 1]$. Также дана рациональная функция, известная как аппроксимация Паде:

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k x^k}, \tag{2}$$

где $x \in [-1; 1]$.

Требуется (базовая часть):

1. Разработать функцию l_i(i, x, x_nodes), которая возвращает значение i-го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes, в точке x.

2. Написать функцию L(x, x_nodes, y_nodes), которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes, в точке x.

3. Для равномерно расположенных узлов вывести на экран одновременно графики $f(x)$ полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для следующих количеств узлов: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23. В результате это должно дать 7 пар графиков. Опишите, что наблюдается при увеличении количества узлов?

4. Повторить предыдущий пункт для чебышевских узлов. В чем разница между интерполяцией Лагранжа функции $f(x)$ на основе равномерно расположенных узлов и чебышевских? Сделать выводы.

Требуется (продвинутая часть):

1. Сгенерировать 100 функции $f_{n,m}(x)$ где целые степени $n, m \in [7; 15]$ и вещественные коэффициенты $a_j, b_k \in [-1; 1]$ генерируются случайным образом для каждой из функций.

2. Для нескольких из сгенерированных функций вывести на экран одновременно графики $f_{n,m}(x)$ и соответствующего интерполяционного полинома $L(x)$, построенного по N равномерно расположенным узлам, где N выбирается по собственному усмотрению, но должно быть не меньше 5. На том же графике выведите $L(x)$, построенного по N чебышевским узлам.

3. Для каждой из функции, сгенерированных в предыдущем пункте, найдите интерполяционные полиномы $L(x)$, построенные по $N \in \{1, 2, ..., 30\}$ равномерно расположенным узлам и чебышевским узлам. Для каждого N рассчитайте расстояние между $f_{n,m}(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L_∞.Рассмотрите несколько графиков зависимости этого расстояния для равномерных и чебышевских узлов от N и сделайте по ним вывод. Добавьте в отчет один характерный график, который наглядно демонстрирует верность вашего вывода.

4. Объясните, что такое аппроксимация Паде и до какой степени предложенный метод генерации случайных функций $f_{n,m}(x)$ позволяет обобщить выводы предыдущего пункта на произвольные функции.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы: исследовать влияние расположения узлов и их количества на точность интерполяции полиномами Лагранжа.

1 Базовая часть

Все приведенные ниже примеры программного кода были реализованы на языке Python версии 3.8.

Задание 1

i-й базисный полином Лагранжа l_i в точке x имеет вид:

$$l_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{3}$$

где x_i и x_j - абсциссы i-го и j-го узла интерполяции.
Программная реализация задания 1:

```
def l_i(i, x, x_nodes):
    ans = 1
    for j in range(len(x_nodes)):
        if i != j:
            ans *= (x - x_nodes[j]) / (x_nodes[i] - x_nodes[j])
    return ans
```

Задание 2

Значение интерполяционного полинома L в точке x:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) \tag{4}$$

Программная реализация задания 2:

```
def L(x, x_nodes, y_nodes):
    ans = 0
    for i in range(len(y_nodes)):
        ans += y_nodes[i] * l_i(i, x, x_nodes)
    return ans
```

Задание 3

Отображение графиков функций было выполнено программно с использованием прикладных команд графической библиотеки matplotlib и библиотеки numpy.

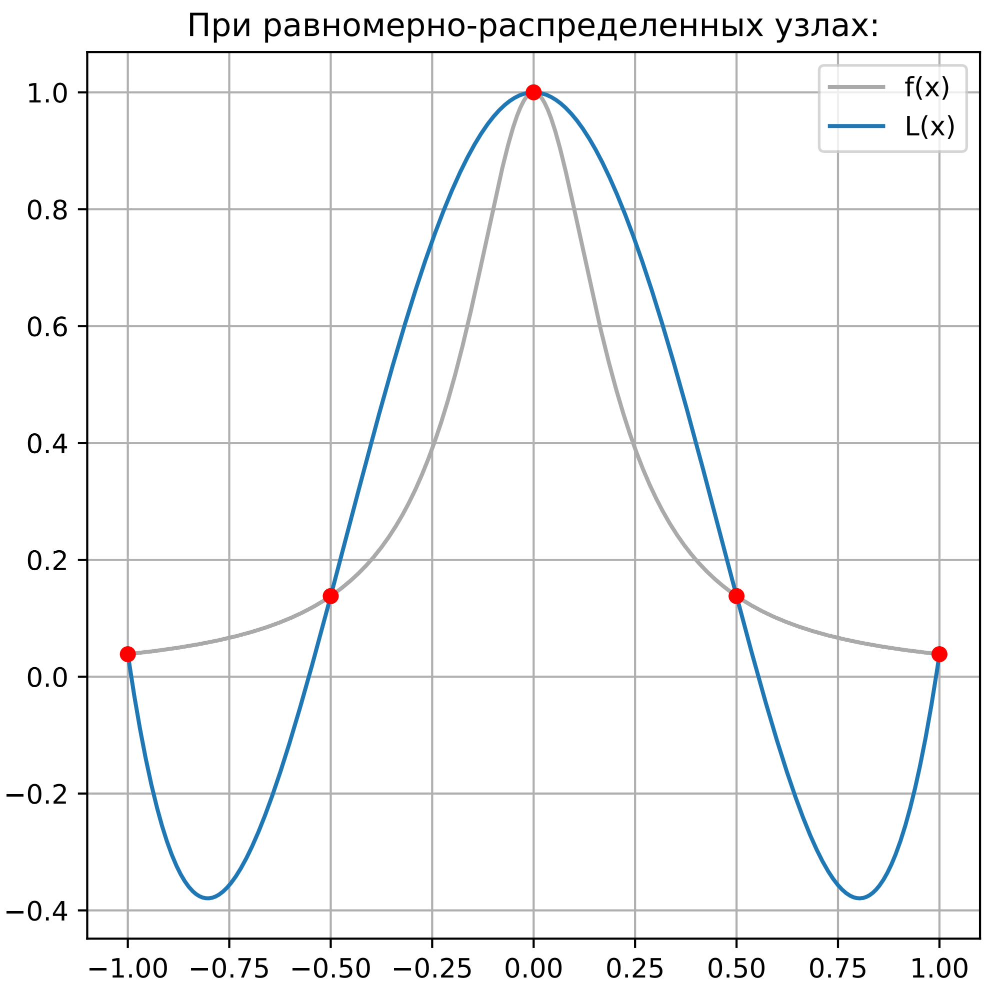

Рис. 1. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 5-ти равномерно-распределенным узлам

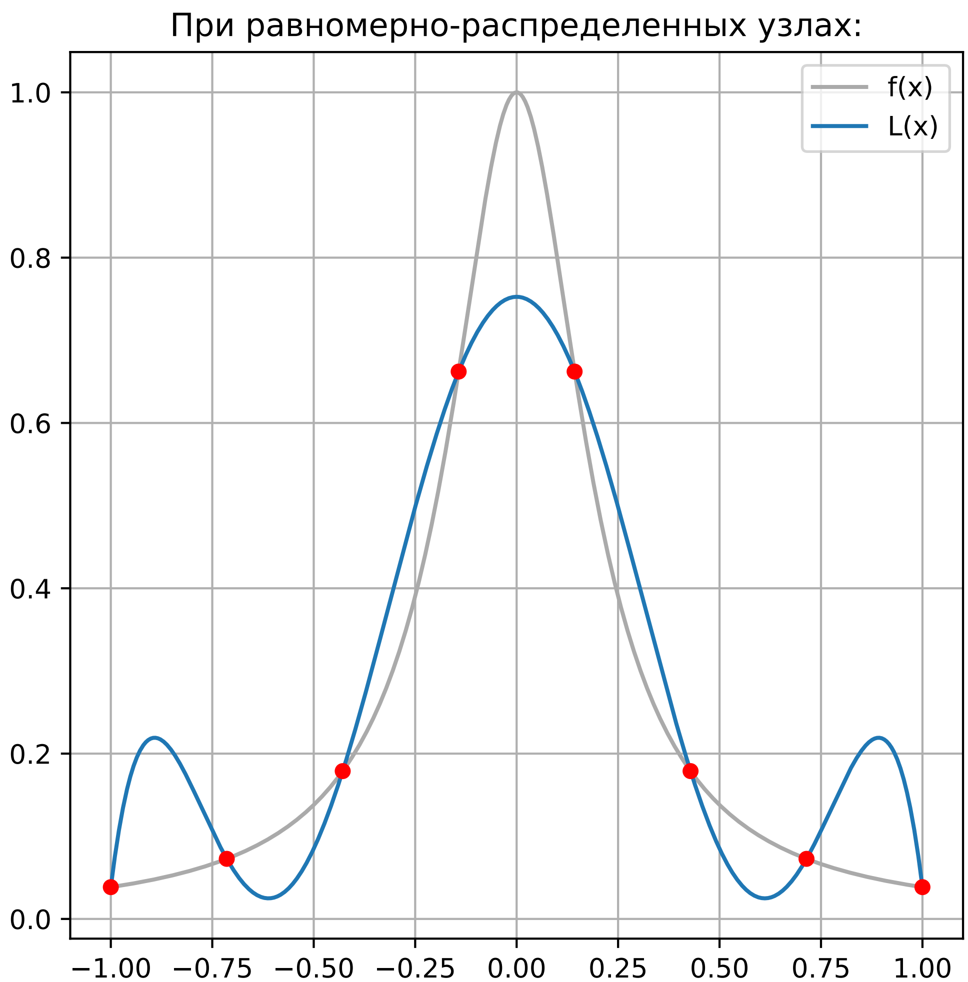

Рис. 2. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 8-ми равномерно-распределенным узлам

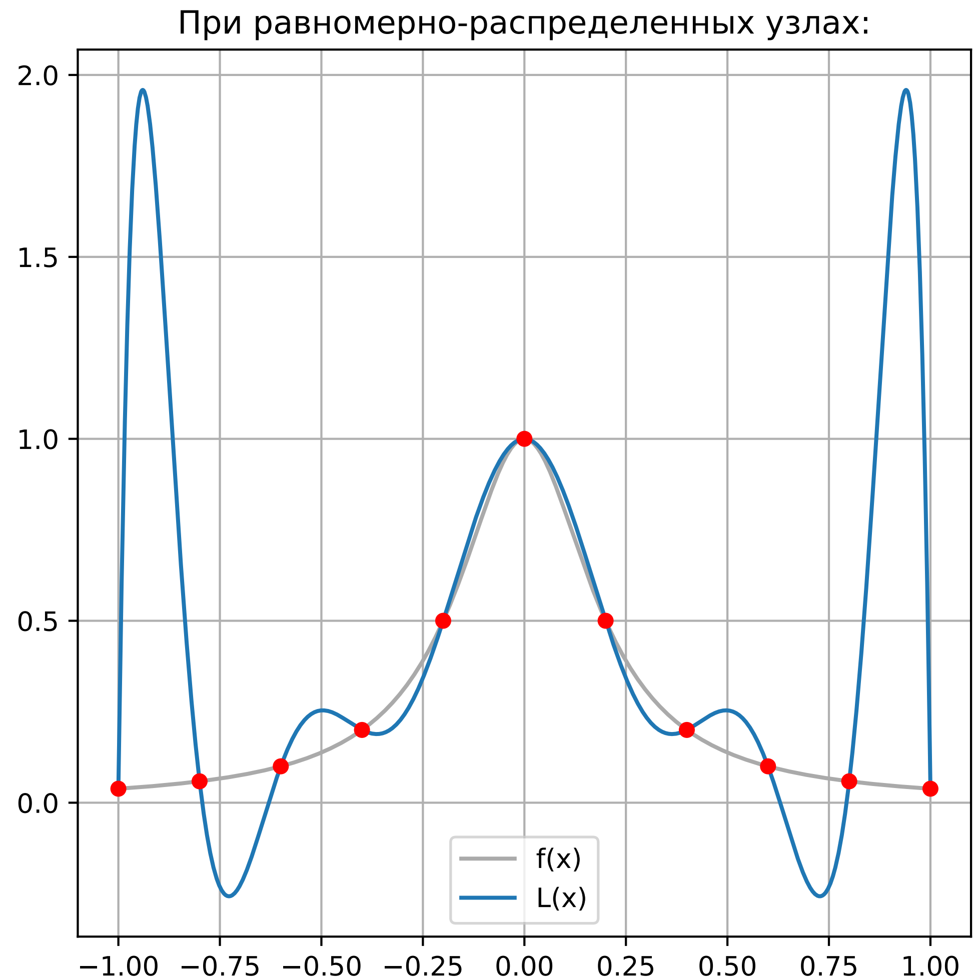

Рис. 3. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 11-ти равномерно-распределенным узлам

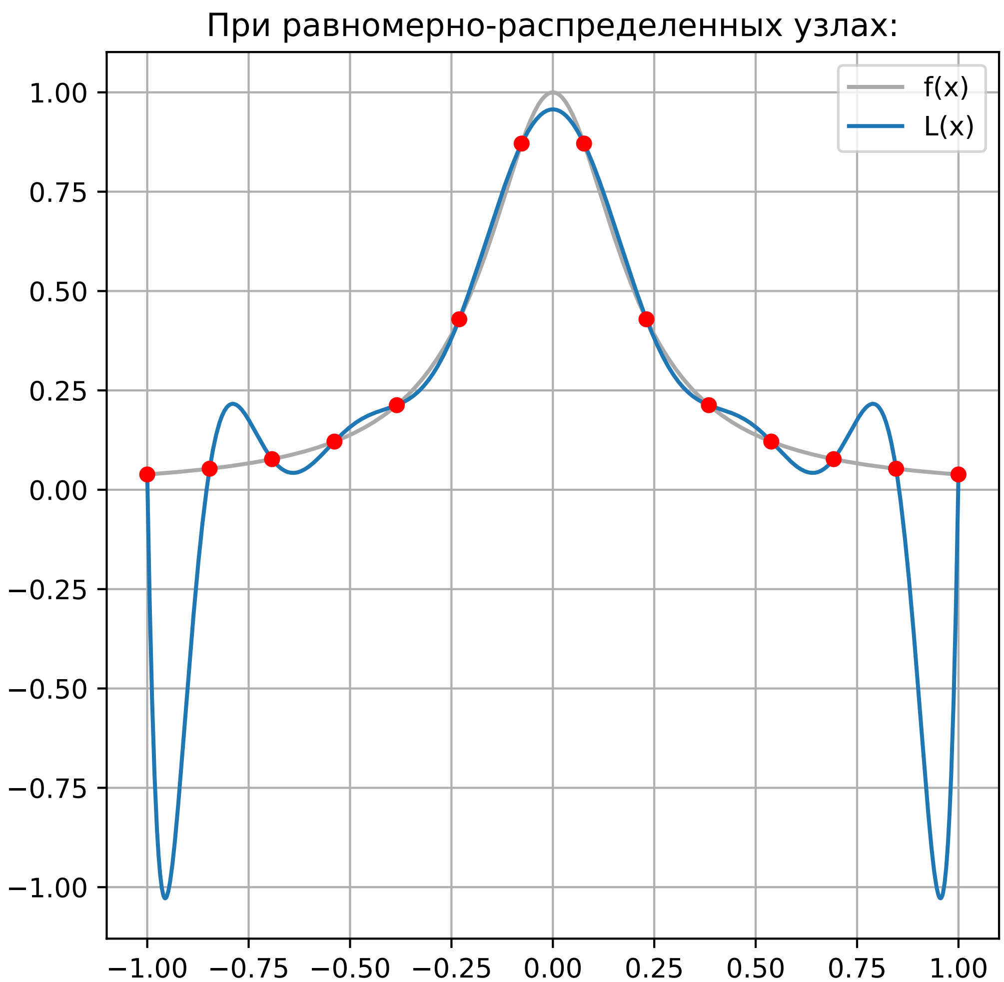

Рис. 4. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 14-ти равномерно-распределенным узлам

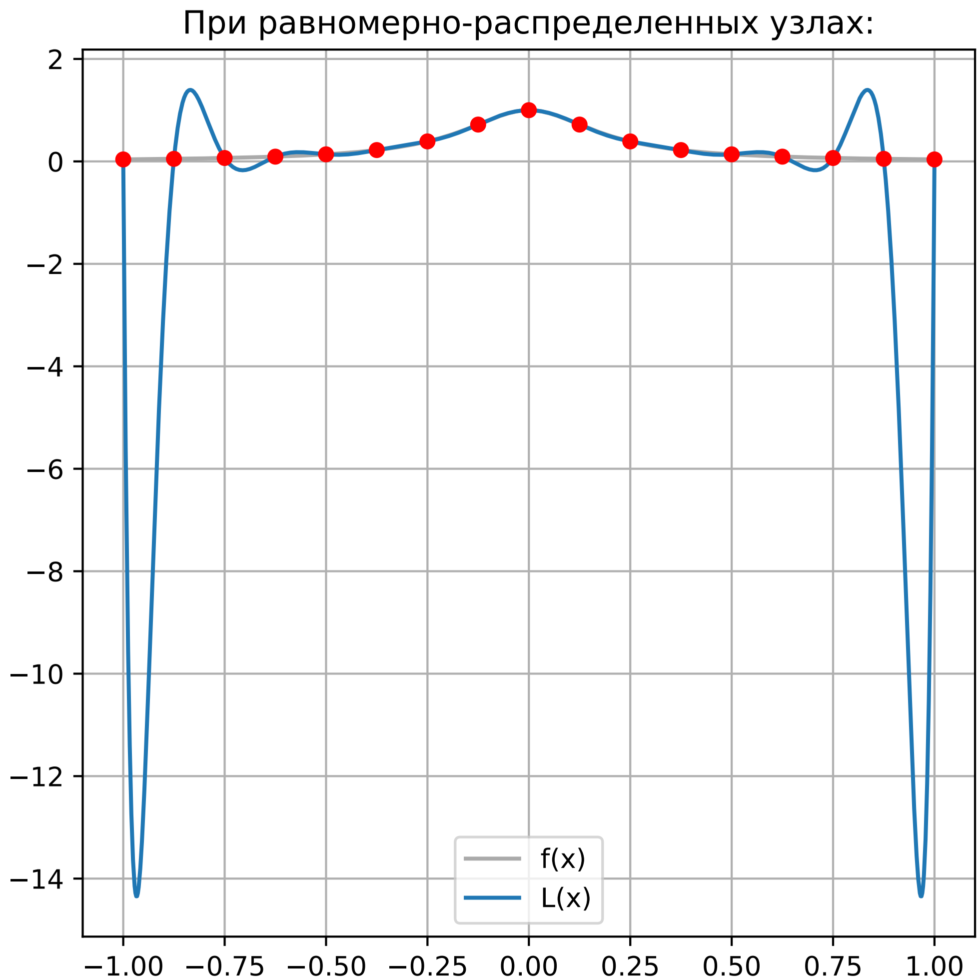

Рис. 5. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 17-ти равномерно-распределенным узлам

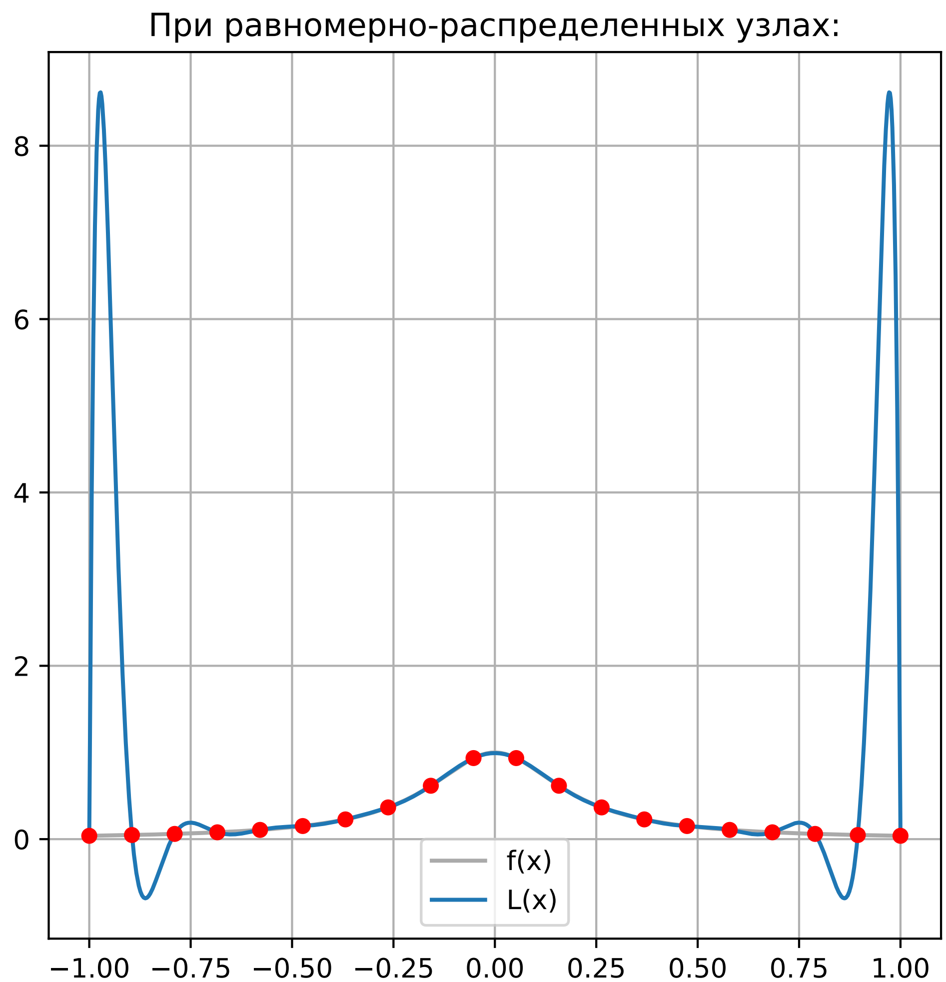

Рис. 6. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 20-ти равномерно-распределенным узлам

Рис. 7. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 23-м равномерно-распределенным узлам

При увеличении узлов наблюдается рост осцилляции аппроксимационного полинома вблизи границ отрезка интерполирования [-1;1].

Задание 4

Повторим предыдущий пункт для чебышевских узлов. Координаты чебышевских узлов на отрезке [-1;1] будем находить по следующей формуле:

$$x_i = cos(\frac{2i-1}{2n}\pi), i = 1, ..., n \tag{5}$$

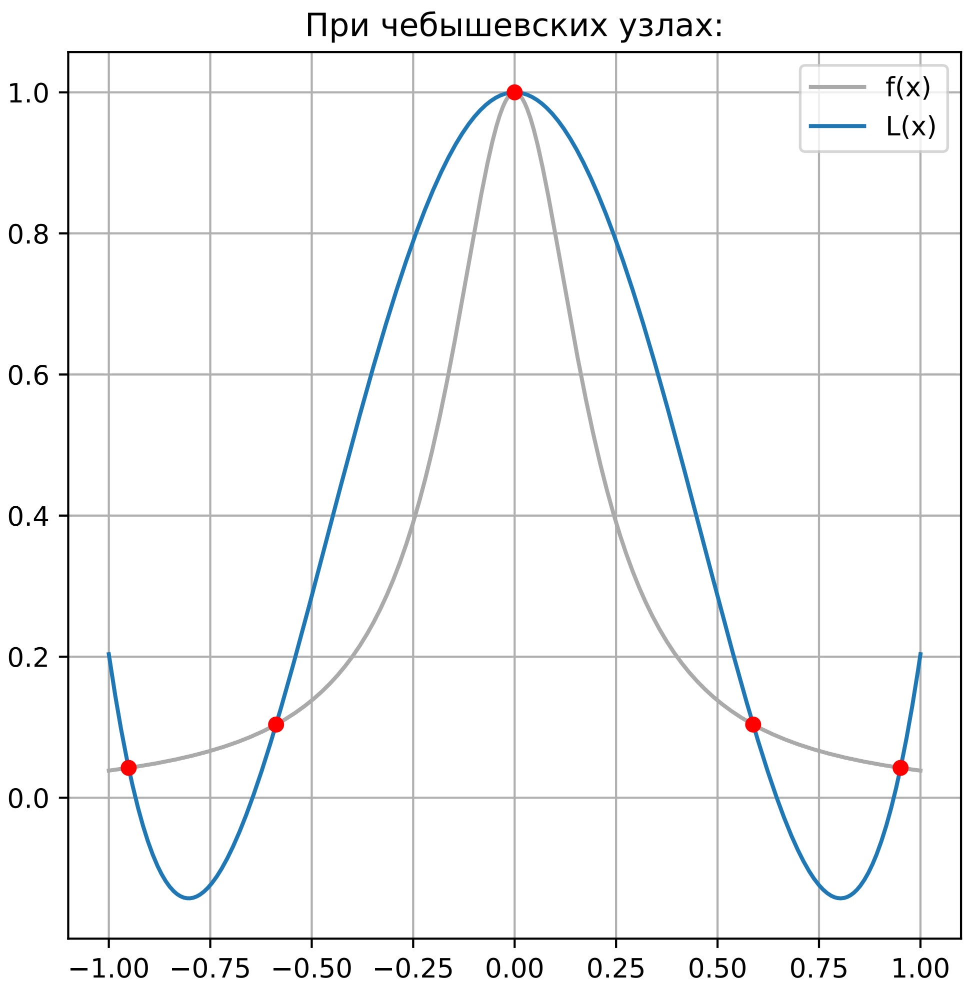

Рис. 8. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 5-ти чебышевским узлам

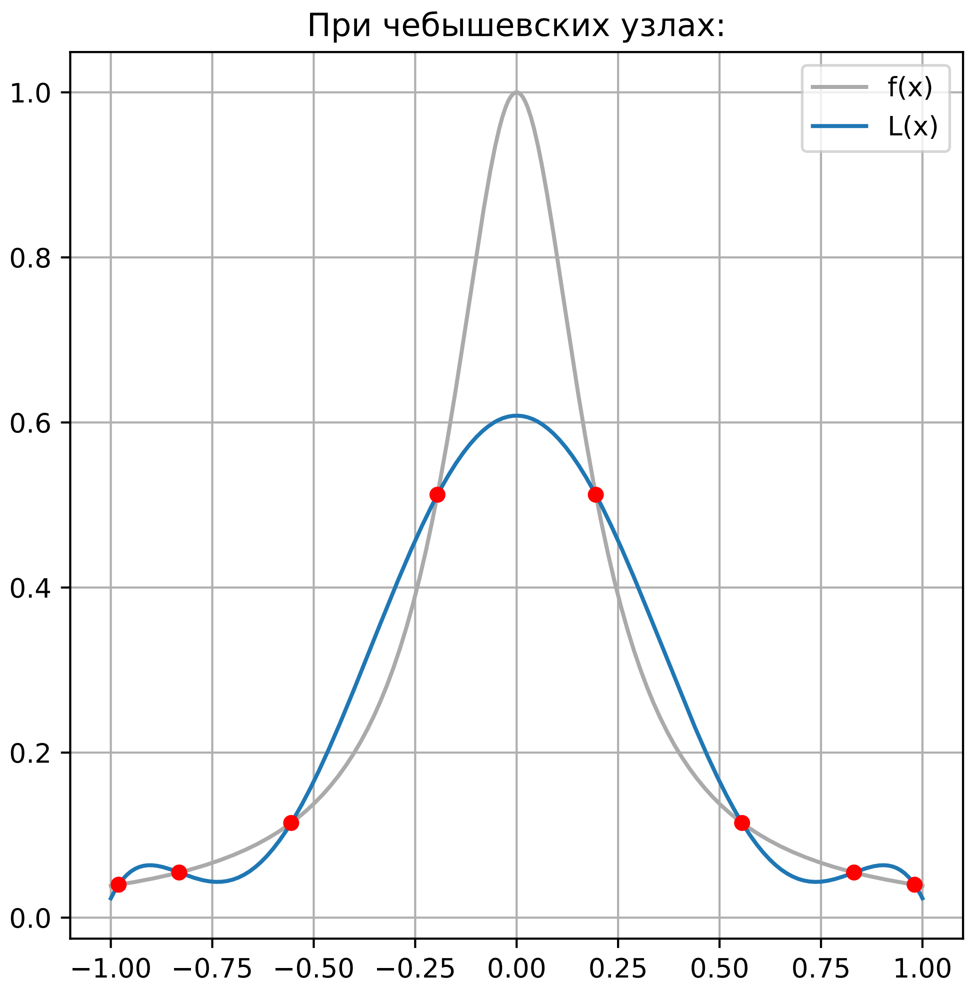

Рис. 9. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 8-ми чебышевским узлам

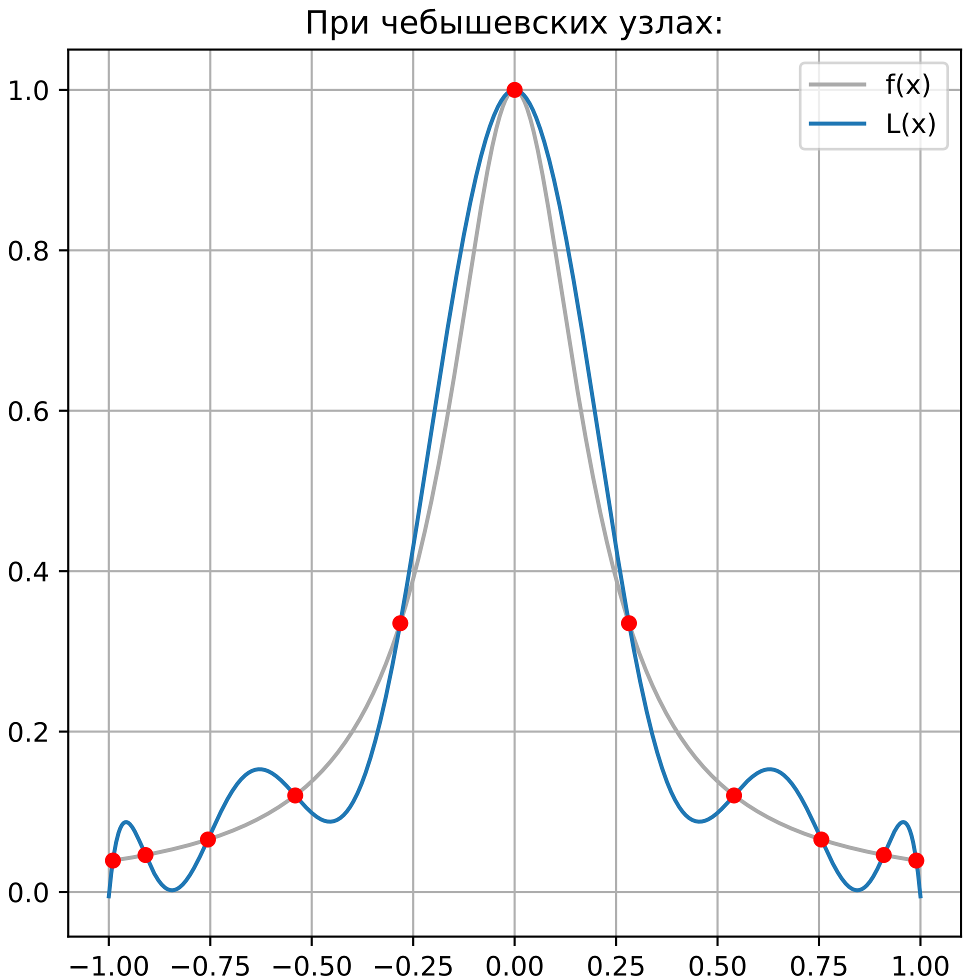

Рис. 10. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 11-ти чебышевским узлам

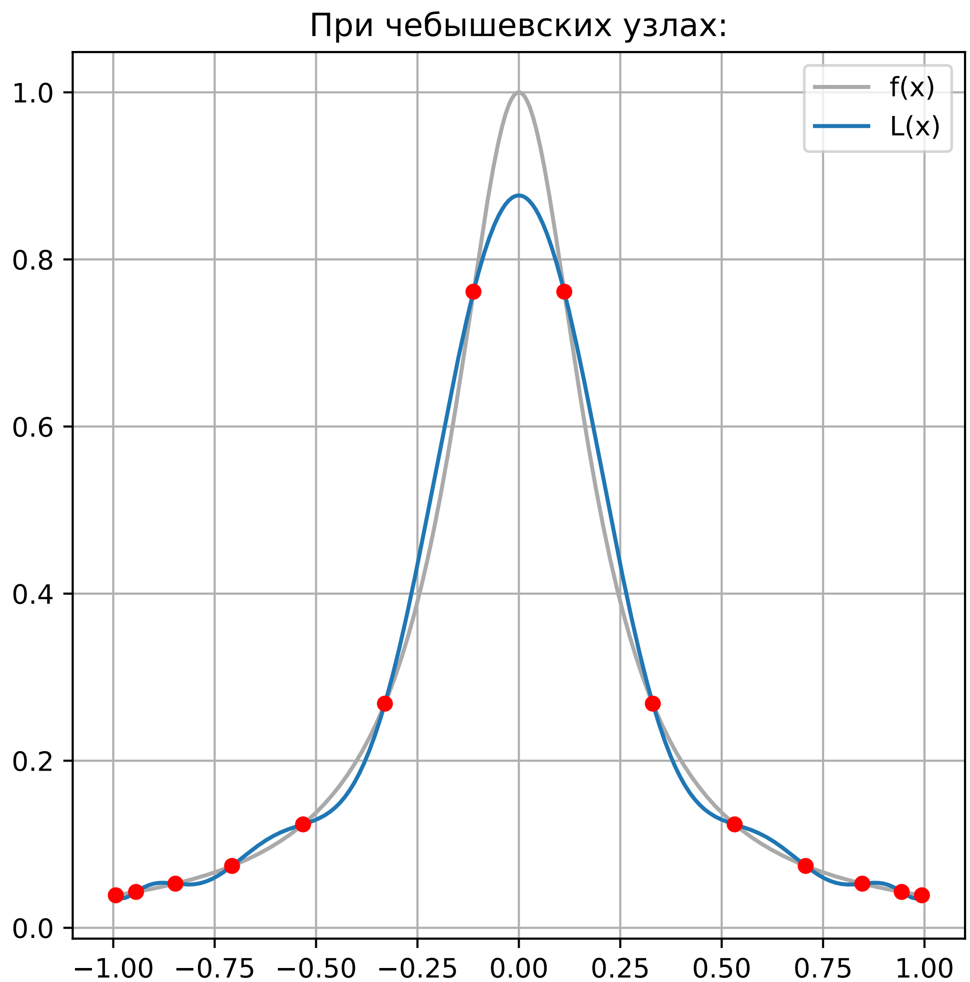

Рис. 11. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 14-ти чебышевским узлам

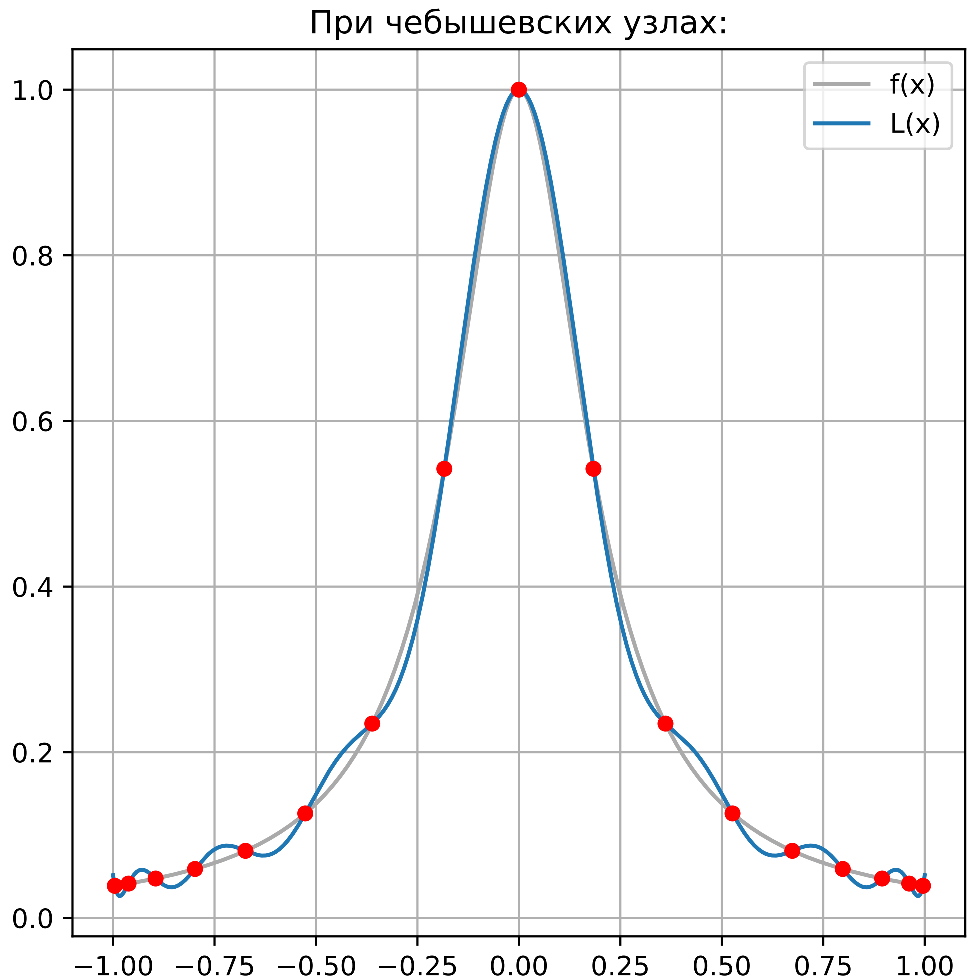

Рис. 12. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 17-ти чебышевским узлам

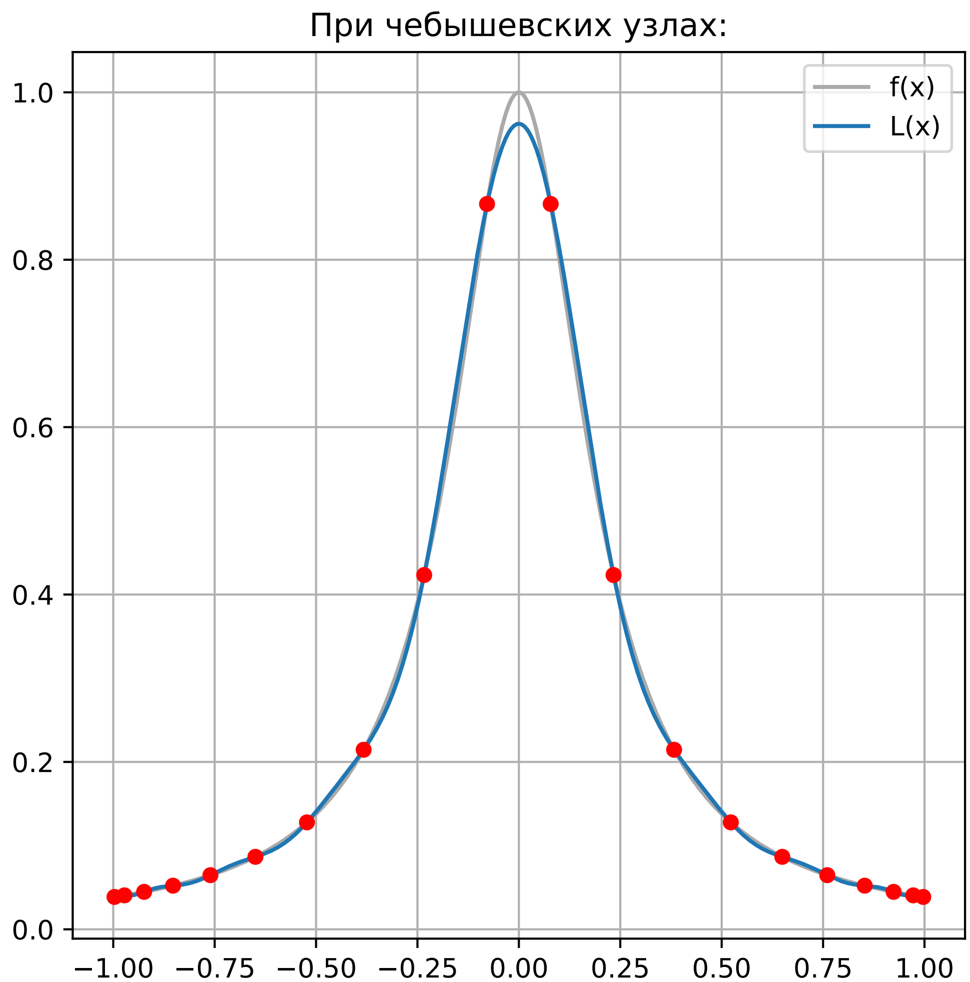

Рис. 13. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 20-ти чебышевским узлам

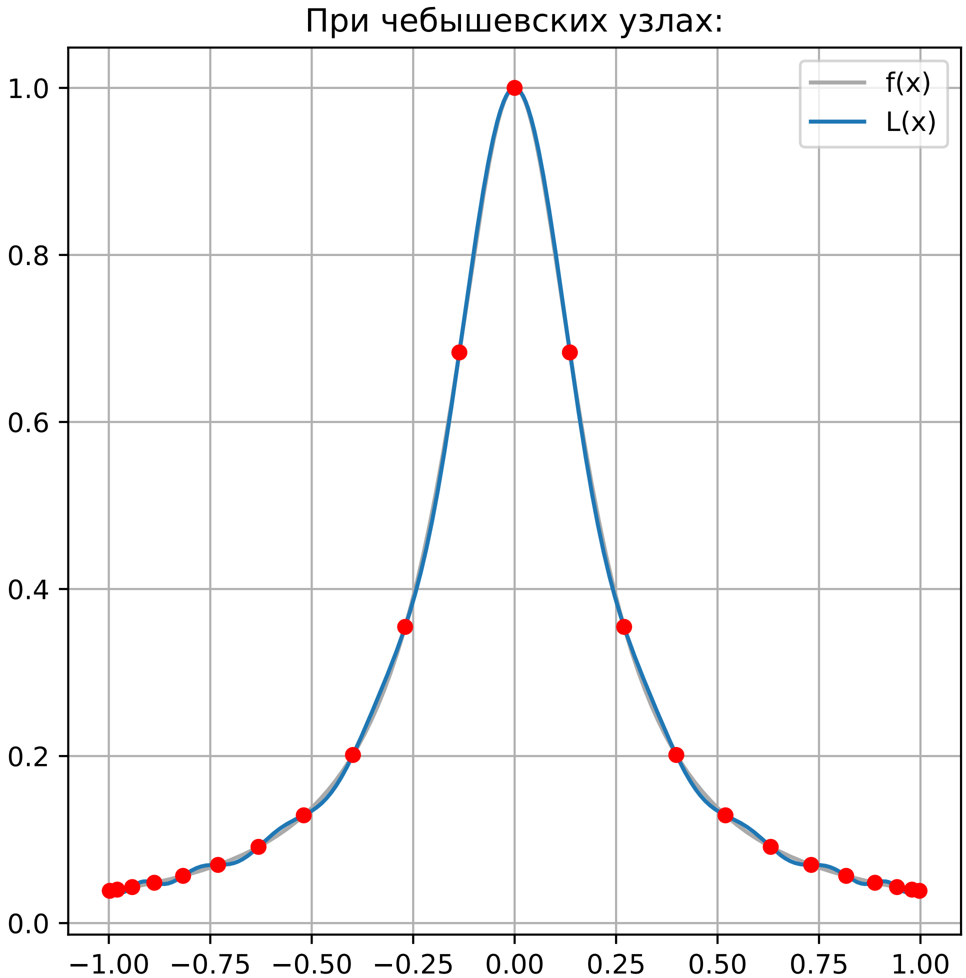

Рис. 14. Графики $f(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ по 23-м чебышевским узлам

При интерполяции Лагранжа на основе чебышевских узлов существенной и растущей осцилляции аппроксимационного полинома вблизи границ отрезка интерполирования не происходит. Таким образом можно сделать вывод, что при интерполировании по чебышевским узлам, в отличии от интерполирования по равномерно-распределенным узлам, эффект Рунге отсутствует.

2 Продвинутая часть

Задание 1

Для генерации функций $f_{n,m}(x)$ реализован повторяющийся в цикле алгоритм по заполнению соответствующими случайными значениями переменных a_i, b_k, n и m, которые в программной реализации названы a_f, b_f, n_f и m_f:

```
n_f = random.randint(7, 15)
m_f = random.randint(7, 15)
a_f = []
b_f = []
for i in range(m_f + 1):
    a_f.append(random.random())
for k in range(1, n_f + 1):
    b_f.append(random.random())
```

При такой генерации функций возможны варианты, при которых сумма в знаменателе будет близка или равна нулю, что соответствует разрыву функции. В программе будем считать, что сумма в знаменателе равна нулю, если она < 0.0001, перебирать возможные x (интервал [-1;1] разделен в программе на 500 подинтервалов) и пропускать такие функции, так как получение интерполяционного полинома Лагранжа по ним является не корректным. Для получения программно значения функции $f_{n,m}(x)$ в точке x реализована пользовательская функция func_pade:

```
def func_pade(x, a, b):
    up = 0
    down = 1
    for i in range(len(a)):
        up += a[i] * x ** i
    for k in range(1, len(b)):
        down += b[k] * x ** k
    return up / down
```

Задание 2

Выберем число узлов N равное 10. Рассмотрим несколько полученных графиков интерполяционного полинома Лагранжа и самой функции $f_{n,m}(x)$.

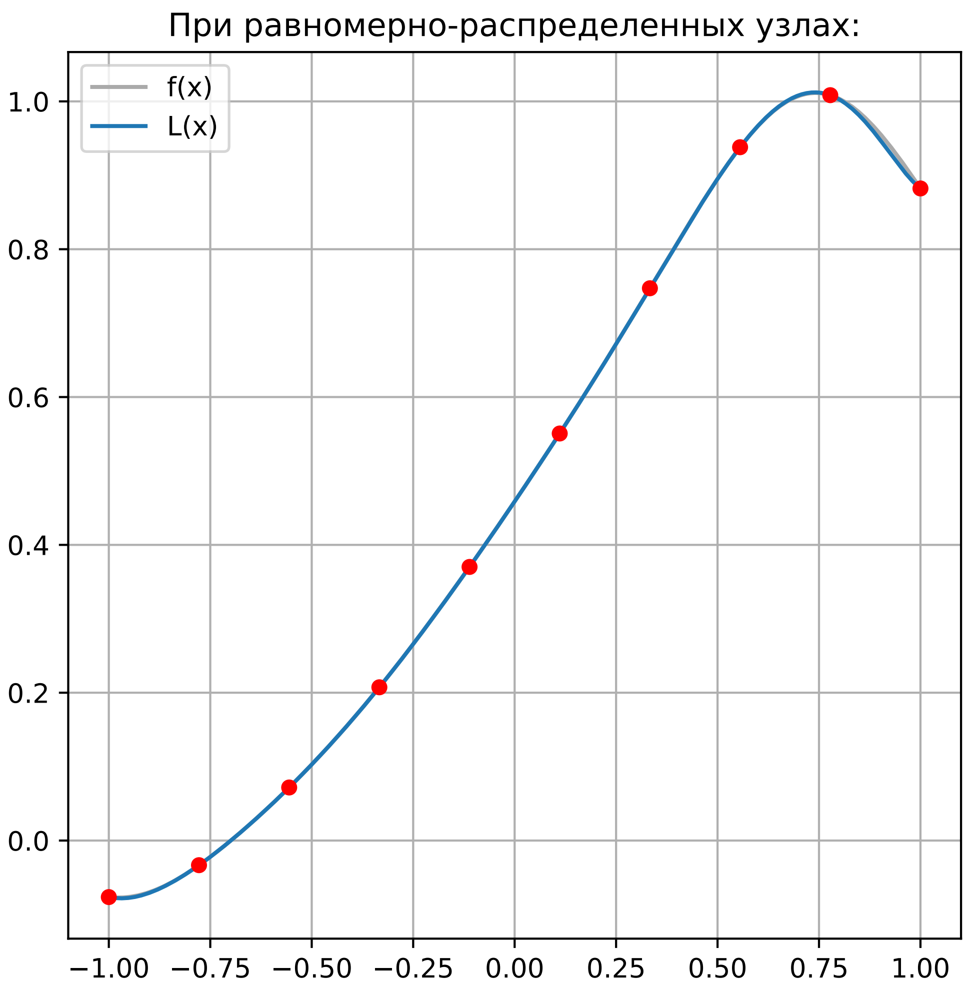

Рис. 15. Графики 1-й $f_{n,m}(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ при равномерно-распределенных узлах

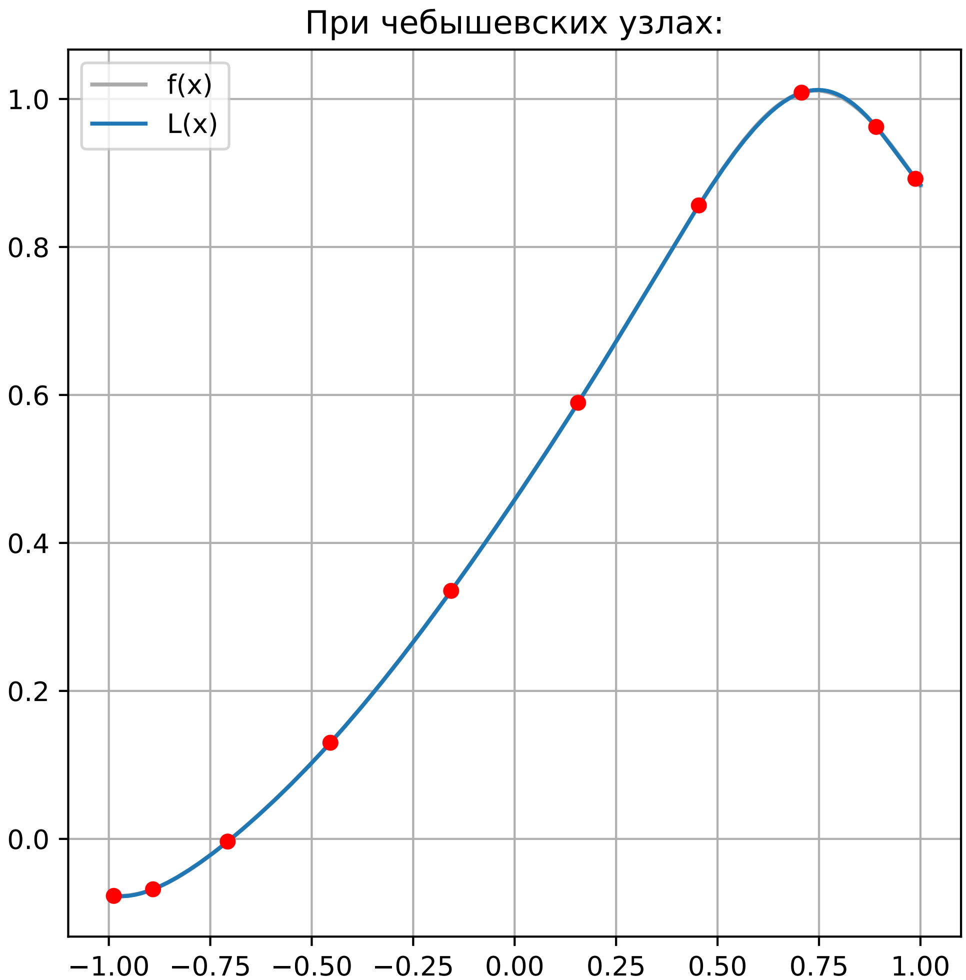

Рис. 16. Графики 1-й $f_{n,m}(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ при чебышевских узлах

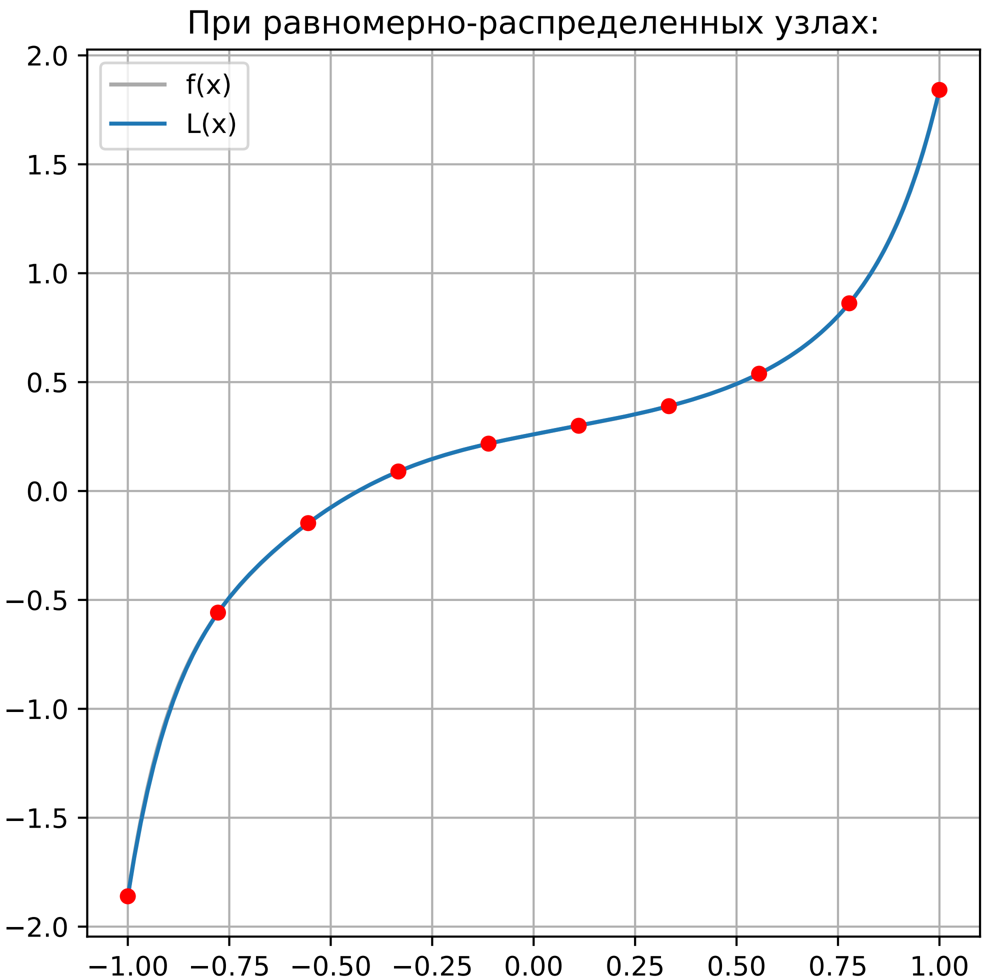

Рис. 17. Графики 2-й $f_{n,m}(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ при равномерно-распределенных узлах

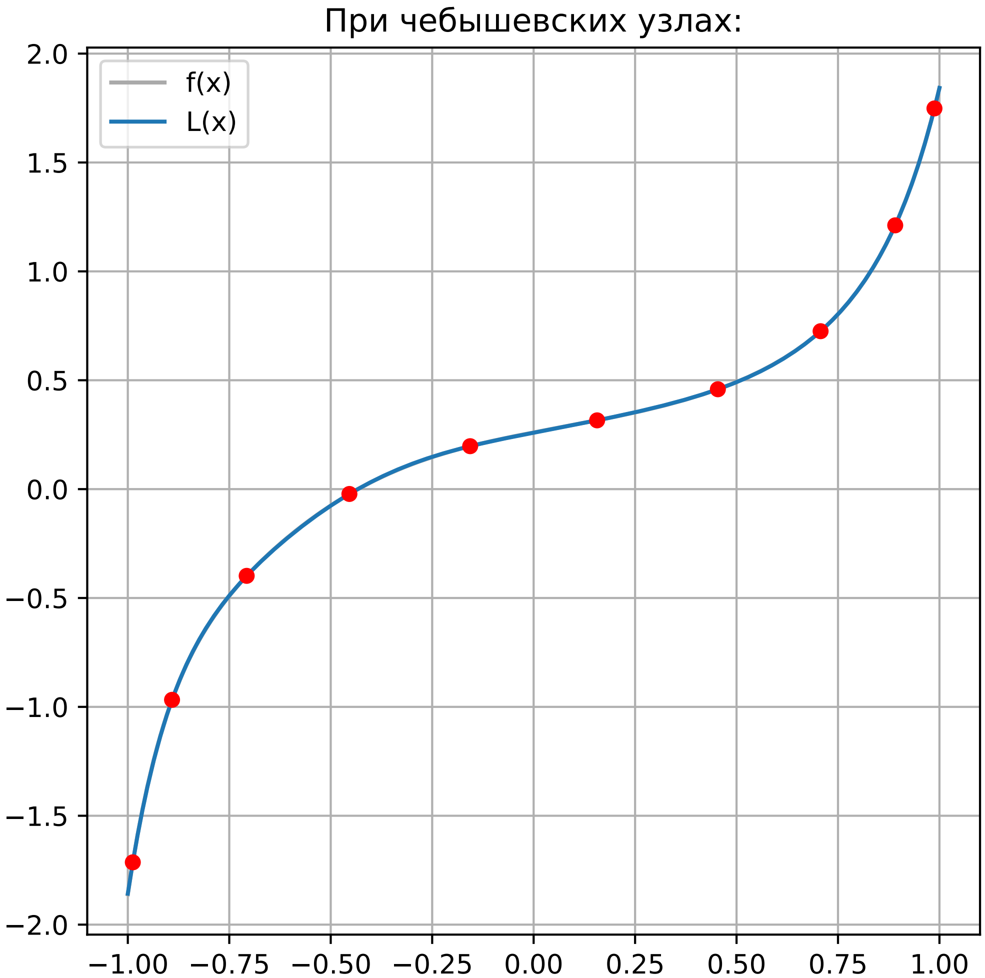

Рис. 18. Графики 2-й $f_{n,m}(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ при чебышевских узлах

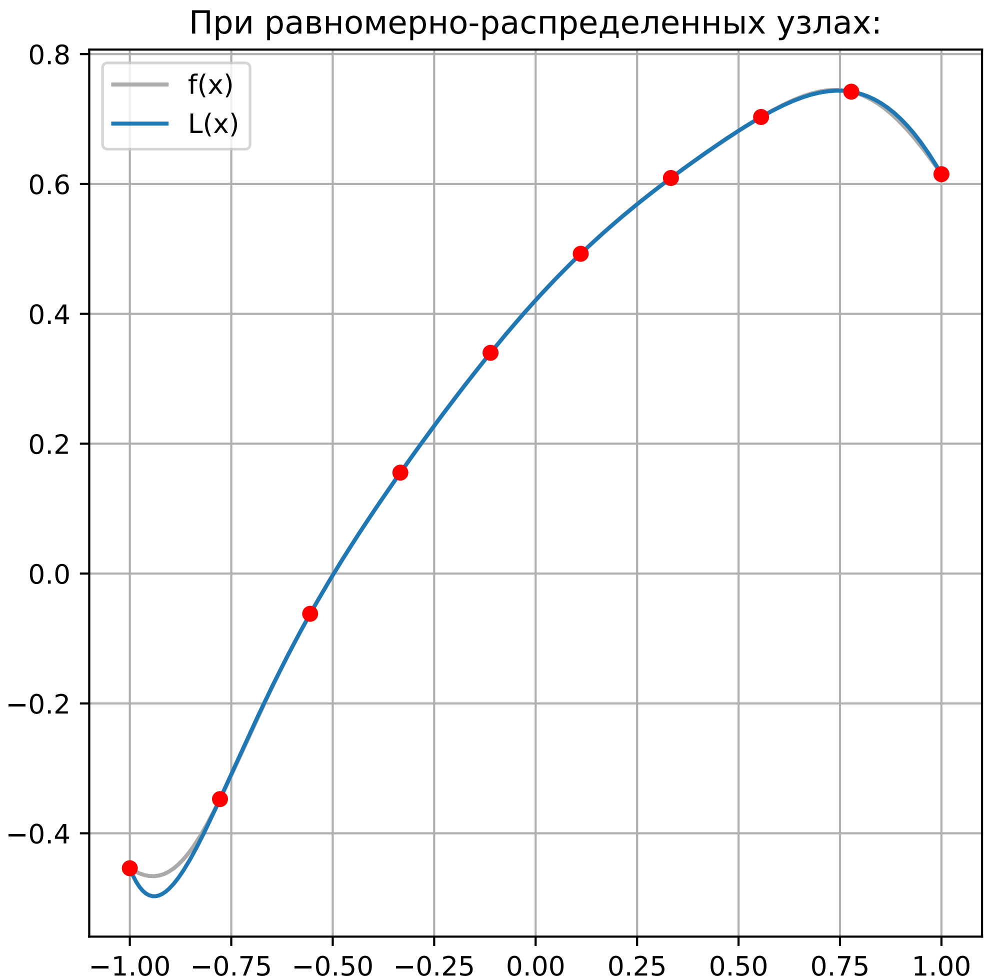

Рис. 19. Графики 3-й $f_{n,m}(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ при равномерно-распределенных узлах

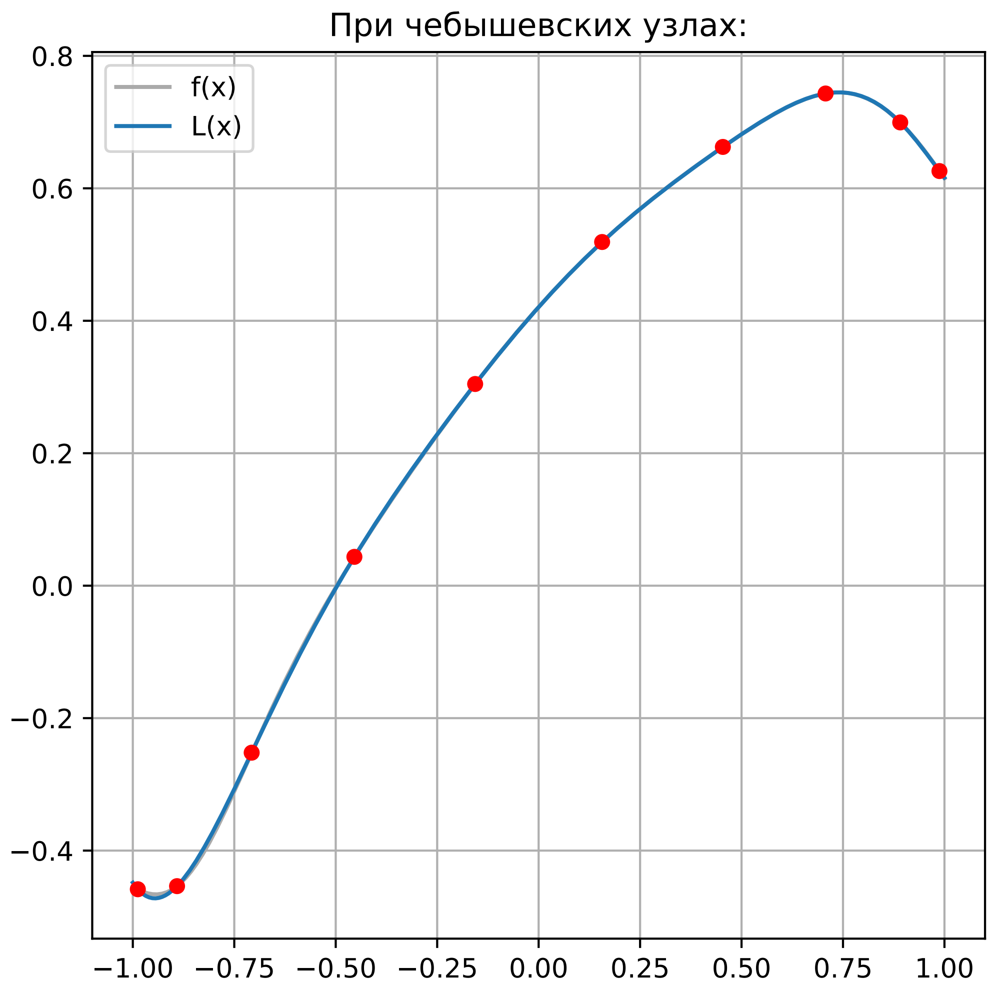

Рис. 20. Графики 3-й $f_{n,m}(x)$ и интерполяционного полинома $L(x)$ при чебышевских узлах

Задание 3

Приблизительное расстояние между интерполяционным полиномом Лагранжа и функцией будем находить перебором значений x в интервале [-1;1] с шагом 0.004 и нахождением максимальной разницы между полиномом Лагранжа и значением функции. Результаты данных вычислений по функциям, приведенным в задании 2, при количестве узлов $N \in \{1, ..., 30\}$:

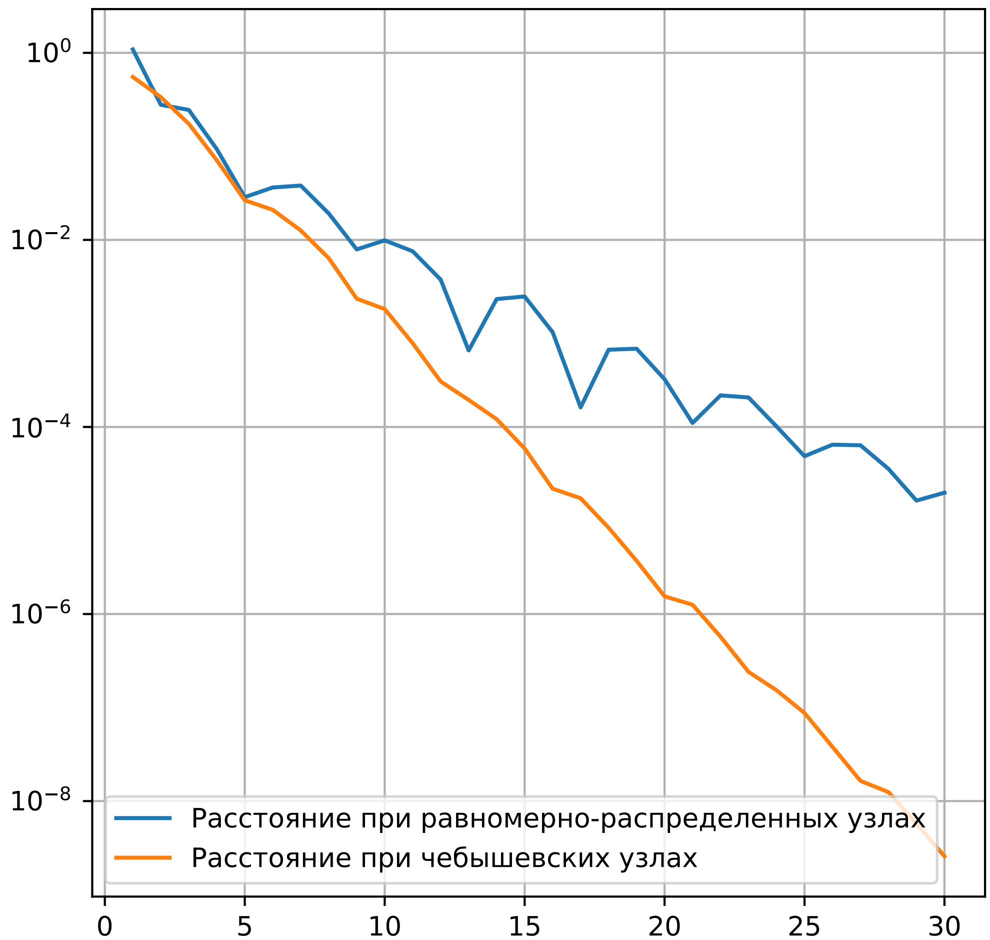

Рис. 21. График расстояния от N у 1-й функции при логарифмической шкале расстояния

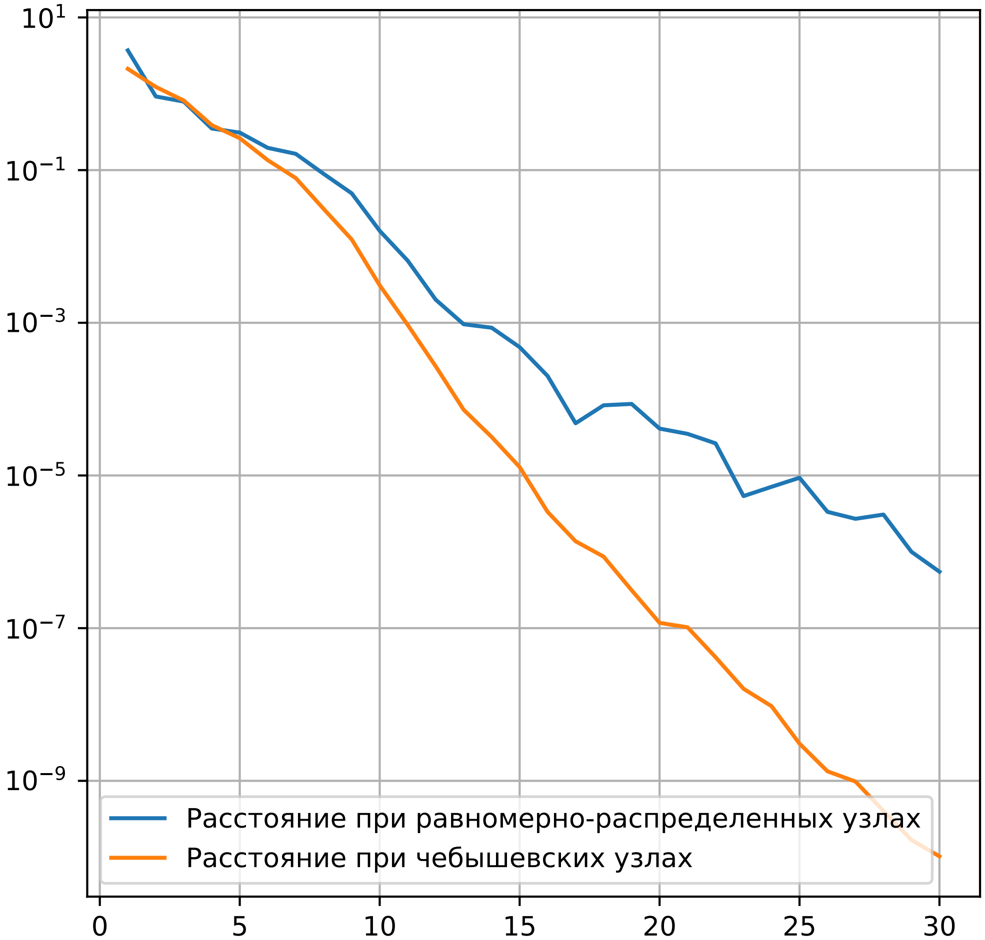

Рис. 22. График расстояния от N у 2-й функции при логарифмической шкале расстояния

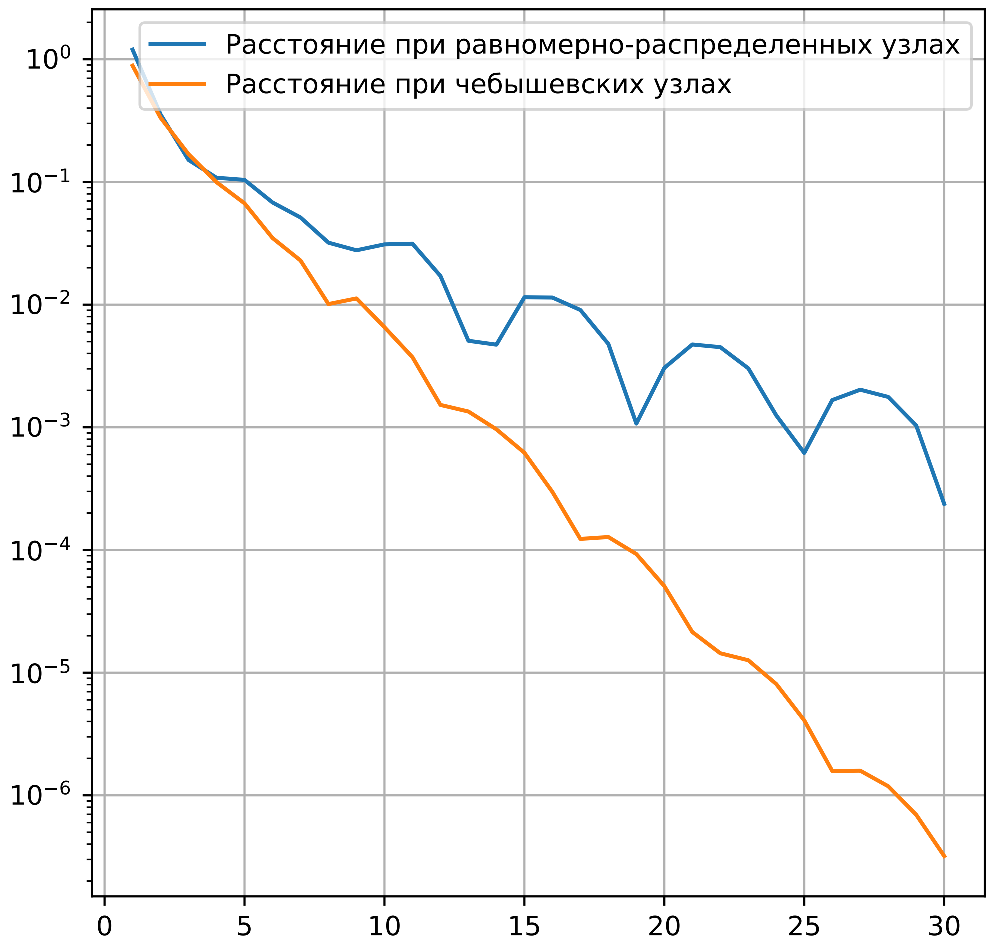

Рис. 23. График расстояния от N у 3-й функции при логарифмической шкале расстояния

По данным графикам можно сделать вывод: расстояние между интерполяционным полиномом Лагранжа, построенного по чебышевским узлам, будет меньше, чем расстояние интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по равномерно-распределенным узлам, следовательно интерполирование Лагранжа по чебышевским узлам является более оптимальным.

Задание 4

Аппроксимация Паде - метод аппроксимации аналитических функций, заключающийся в представлении функции в виде отношения 2-х полиномов, коэффициенты которых являются коэффициентами разложения функции в ряд Тейлора.

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k x^k}, \tag{6}$$

Можно выбрать такие коэффициенты a_j, b_k, что функция, разложенная в ряд Тейлора, будет приблизительно равна этой.

Заключение

1. *@Вывод@*

2. ...

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046.

2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

Выходные данные

Кильдишев П.С.Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2022. — 31 с. URL: https://sa2systems.ru:88 (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка: *доцент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин*

Решение и вёрстка: *студент группы РК6-56Б, Кильдишев П.С.*

2022, осенний семестр