I BOB
TO'PLAMLAR. TO'PLAMLAR USTIDA AMALLAR.

1.1. To'plamlar

1^0.To'plam tushunchasi. To'plam matematikaning boshlang'ich, ayni paytda muhim tushunchalaridan biri. Uni ixtiyoriy tabiatli narsalarning (predmetlarni) ma'lum belgilar bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi. Masala, javondagi kitoblar to'plami, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami, $x^2-5x+6=0$ tenglamaning ildizlari to'plami deyilishi mumkin.

To'plamni tashkil etgan narsalar uning elementlari deyiladi. Matematikada to'plamlar bosh xarflar bilan, ularning elementlari esa kichik xarflar bilan belgilanadi. Masalan, A,B,C - to'plamlar, a,b,c -to'plamning elementlari. Ba'zan to'plamlar ularning elementlarini ko'rsatish bilan yoziladi:

$$A=\{2,4,6,810,12\},$$
$$N=\{1,2,3,....,n,...\}$$
$$Z=\{....,-2,-1,0,1,2,....\}.$$

Agar a biror A to'plamning elementi bo'lsa, $a\in A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi. Agar a shu to'plamga tegishli bo'lmasa,u $a\notin A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli emas» deb o'qiladi. Masalan, yuqoridagi to'plamda $10\in A, 15\notin A$.

Agar A chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u chekli to'plam, aks holda cheksiz to'plam deyiladi. Masalan, $A=\{2,4,6,8,10,12\}$ chekli to'plambir nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami esa cheksiz to'plam bo'ladi.

1-ta'rif. A va B to'plamlari berilgan bo'lib, A to'plamning barcha elementlari B to'plamga tegishli bo`lsa, $A$ to`plam B ning qismi (qismiy to'plam) deyiladi va

$$A\subset B \text{ (yoki } B\supset A\text{)}$$

kabi yoziladi.

A to'planing elementlari orasida biror xususiyatga (bu xususiyatni P bilan belgilaymiz) ega bo'ladiganlari bo'lishi mumkin. Bunday xususiyatli elementlardan tuzilgan to'plam quyidagicha

$$\{x\in A\,|\,P\}$$

belgilanadi. Ravshanki,

$$\{x\in A\,|\,P\}\subset A$$

bo`ladi.

Agar A to'plam elementlari orasida P xususiyatli elementlar bo'lmasa, u holda

$$\{x\in A\,|\,P\}$$

bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'lib, uni **bo'sh to'plam** deyiladi.

Bo‘sh to‘plam $\varnothing$ kabi belgilanadi. Masalan, $x^2+x+1=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlaridan iborat A bo’sh to’plam bo’ladi:

$$\varnothing=\left\{x\in A \mid x^2+x+2=0\right\}.$$

Har qanday A to’plam uchun

$$A\subset A,\ \varnothing\subset A$$

deb qaraladi.

Odatda, A to‘plamning barcha qismiy to‘plamlaridan iborat to’plam $F(A)$ kabi belgilanadi. Masalan, $A=\{a,b,c\}$ to’plam uchun

$$F(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\varnothing\}$$

bo’ladi.

2-ta`rif. A va B to’plamlar berilgan bo’lib,

$$A\subset B,\ B\subset A$$

bo’lsa, A va B bir biriga teng to’plamlar deyiladi va

$$A=B$$

kabi yoziladi.

Demak, $A=B$ tenglik A va B to‘plamlarning bir xil elementlardan tashkil topganligini bildiradi.

2^0. To’plamlar ustida amallar. Ikki A va B to’plamlar berilgan bo’lsin.

**3-ta`rif**. $A$ va $B$ to’plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan $E$ to’plam $A$ va $B$ to`plamlar yig`indisi (birlashmasi) deyiladi va $A\bigcup B$ kabi belgilanadi:

$$E=A\bigcup B.$$

Demak,bu holda $a\in A\bigcup B$ dan $a\in A$, yoki $a\in B$, yoki bir vaqtda $a\in A$, $a\in B$ bo’lishi kelib chiqadi.

4-ta`rif. A va B to’plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan F to’plam A va B to’plamlar ko’paytmasi (kesishmasi) deyiladi va $A\bigcap B$ kabi belgilanadi:

$$F=A\bigcap B.$$

Demak,bu holda $a\in A\bigcap B$ dan bir vaqtda $a\in A$, $a\in B$ bo’lishi kelib chiqadi.

5-ta`rif. A to’plamning B to’plamga tegishli bo’lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan G to’plam A to’plamdan B to’plamning ayirmasi deyiladi va $A\setminus B$ kabi belgilanadi:

$$G=A\setminus B.$$

Demak, $a\in A\setminus B$ dan $a\in A$, $a\notin B$ bo’lishi kelib chiqadi.

6-ta`rif. A to’plamning B ga tegishli bo’lmagan barcha elementlaridan va B to’plamning ga tegishli bo’lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to’plam A va B **to’plamlarning simmetrik ayirmasi** deyiladi va $A\Delta B$ kabi belgilanadi:

$$A\Delta B=\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right).$$

Demak, $a\in A\Delta B$ bo’lishidan $a\in A, a\notin B$ yoki $a\in B$, $a\notin A$ bo’lishi kelib chiqadi.

7-ta`rif. Aytaylik, $a \in A$,$a \in B$ bo'lsin. Barcha tartiblangan (a,b) ko'rinishdagi juftliklardan tuzilgan to'plam A va B **to'plamlarning dekart ko'paytmasi** deyiladi va $A \times B$ kabi belgilanadi. Demak,

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\} .$$

8-ta`rif. Aytaylik, S va A to'plamlar berilgan bo'lib, $A \subset S$ bo'lsin. Ushbu

$$S \setminus A$$

to'plam A to'plamni S ga **to'ldiruvchi to'plam** deyiladi va CA yoki $C_S A$ kabi belgilanadi:

$$CA = S \setminus A .$$

To'plamlar ustida bajariladigan amallarning ba`zi xossalarini keltiramiz.

A, B va D to'plamlari berilgan bo'lsin.

1) $A \subset B,\ B \subset D$ bo'lsa, $A \subset D$ bo'ladi;

2) $A \cup A = A,\ A \cap A = A$ bo'ladi;

3) $A \subset B$ bo'lsa, $A \cup B = B,\ A \cap B = A$ bo'ladi;

4) $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$ bo'ladi;

5) $(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D),\ (A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$ bo'ladi;

6) $A \subset S$ bo'lsa, $A \cap CA = \varnothing$;

7) $C(A \cup B) = CA \cap CB$ bunda $A \subset S, B \subset S$ $A \cap CA = \varnothing$;

8) $C(A \cap B) = CA \cup CB$, bunda $A \subset S, B \subset S$.

Bu xossalarning isboti yuqorida keltirilga ta`riflardan kelib chiqadi.

To'plamlar ustida bajariladigan amallarni bayon etishda to'plamlarning qanday tabiatli elementlardan tuzilganligiga e`tabor qilinmaydi.

Aslida, keltirilgan amallar biror universal to'plam deb ataluvchi to'plamningr qismiy to'plamlari ustida bajariladi deb qaraladi. Masalan,natural sonlar to'plamlari ustida amallar bajariladigan bo'lsa, universal to'plam sifatida barcha natural sonlardan iborat N to'plamni olish mumkin.

3^0. Matematik belgilar. Matematikada tez-tez uchraydigan so'z va so'z birikmalari o'rnida maxsus belgilar ishlatiladi. Ulardan muhimlarini keltiramiz:

1) «agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi» iborasi «$\Rightarrow$ » belgi orqali yoziladi;

2) ikki iboraning ekvivalenti ushbu «$\Leftrightarrow$» belgi orqali yoziladi;

3) «har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so'zlari o'rniga «$\forall$ » belgi ishlatiladi;

4) «mavjudki», «topiladiki» so'zlari o'rniga «$\exists$» mavjudlik belgisi ishlatiladi.

1.2. Haqiqiy sonlar

Son tushunchasi uzoq o‘tmishdan ma'lum. Odamlar sanash taqozosi bilan dastlab $1,2,3,...$ - natural sonlarni qo‘lla-ganlar. So‘ngra manfiy son, ratsional son va nihoyat, haqiqiy son tushunchasi kiritilgan va o‘rganilgan.
Biz o‘quvchiga o‘rta maktab, kollej va litseylarda matematika kursidan natural, butun, ratsional sonlarni, ular ustida bajariladigan amallarni, amallarning xossalarini, shuningdek to‘g‘ri chiziqda (sonlar o‘qida) geometrik ifodalanishini ma'lum deb hisoblaymiz.

Haqiqiy sonlarning matematik analiz kursida muhimligini e'tiborga olib, ular haqidagi ma'lumotlarni talab darajasida bayon etamiz.

1^0. Ratsional sonlar va cheksiz davriy o‘nli kasrlar.

Faraz qilaylik, $\frac{p}{q}$ biror musbat ratsional son bo‘lsin. Bo‘lish qoidasidan foydalanib p butun sonni q ga bo‘lamiz. Agar p ni q ga bo‘lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo‘lsa, u holda bo‘lish jarayon to‘xtab, $\frac{p}{q}$ kasr o‘nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o‘nli kasr chekli o‘nli kasr deyiladi. Masalan, $\frac{59}{40}$ kasrda 59 ni 40 ga bo’lib,unu $1,475$ bo’lishini topamiz:

$$\frac{59}{40}=1,475.$$

Agar p ni q ga bo‘lish jarayoni cheksiz davom etsa, ma'lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchraydi, so‘ng undan oldingi raqamlar mos tartibda takrorlanadi.

Odatda bunday kasr cheksiz davriy o‘nli kasr deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o‘nli kasrning davri bo‘ladi.

Masalan, $\frac{1}{3}$ kasrda 1 ni 3 ga bo’lib, $0,333...$ bo’lishini topamiz;

$$\frac{1}{3}=0,333...$$

Ushbu

$$0,333..., \ 1,4777..., \ 2,131313...$$

kasrlar cheksiz davriy o‘nli kasrlardir. Ularning davri mos ravishda $3, \ 7, 13$ bo‘ladi va bu cheksiz davriy o‘nli kasrlar quyidagicha

$$0,(3), \ 1,4(7), \ \ 2,(13)$$

yoziladi;

$$0,(3)=0,333...$$

$$1,4(7)=1,4777...$$

$$2,(13)=2,131313...\,.$$

Shuni ta'kidlaymizki, davri 9 ga teng bo‘lgan cheksiz davriy o‘nli kasrni chekli o‘nli kasr qilib yoziladi.

Masalan,

$$0,4999...=0,4(9)=0,5,$$

$$2,71999...=2,71(9)=2,72\,.$$

Har qanday chekli o‘nli kasrni nollar bilan davom ettirib cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin.

Masalan,

$$1,4=1,4000...=1,4(0)$$

$$0,75=0,75000...=0,75(0)\,.$$

Demak,har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalanadi. Aksincha, har qanday cheksiz davriy o‘nli kasrni $\frac{p}{q}$ ko‘rinishida yozish mumkin.

Masalan, ushbu

$$0,(3)=0,333...\,,\ 7,31(06)=7,31060606\,...$$

cheksiz davriy o‘nli kasrlarni qaraylik. Avvalo ularni

$$0,(3)=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...\,,$$

$$7,31(06)=7+\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{6}{10^4}+\frac{6}{10^6}+...$$

ko‘rinishda yozib, so‘ng cheksiz kamayuvchi geometrik progres-siya yig‘indisi formulasidan foydalanib topamiz:

$$0,(3)=0,333...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}\,,$$

$$7{,}31(06)=7{,}31060606...=\frac{731}{100}+\frac{\frac{1}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{731}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{6}{99}=$$

$$=\frac{1}{100}\left(731+\frac{2}{33}\right)=\frac{965}{132}.$$

Demak, ixtiyoriy ratsional son cheksiz davriy o‘nli kasr orqali va aksincha, ixtiyoriy cheksiz davriy o‘nli kasr ratsional son orqali ifodalanadi**.**

2^0. Haqiqiy son tushunchasi. Cheksiz davriy bo‘lmagan o‘nli kasrlar ham bo‘ladi. Bu kesmalarni o‘lchash jarayonida yuzaga kelishini ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik, biror J kesma hamda o‘lchov birligi, masalan metr berilgan bo‘lsin. J kesmaning uzunligini hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, 1 metr J kesmada 5 marta butun joylashib, kesmaning J_1 qismi ortib qolsin. Ravshanki J_1 ning uzunligi 1 metrdan kam bo‘ladi. Bu holda J kesmaning uzunligini taxminan 5 m . ga teng deb olish mumkin:

$$J \text{ uzunligi } \approx 5 \text{ m}.$$

Agar bu aniqlik yetarli bo‘lmasa, o‘lchov birligining $\frac{1}{10}$ qismini, ya'ni 1 dm. ni olib, uni J_1 kesmaga joylashtiramiz. Aytaylik, 1 dm. J_1 kesmada 7 marta butunlay joylashib, J_1 kesmaning J_2 qismi ortib qolsin. Bunda J_2 ning uzunligi 1 dm. dan kichik bo‘ladi. Bu holda J kesmaning uzunligi taxminan $5{,}7$ m ga teng deb olinishi mumkin:

$$J \text{ uzunligi } \approx 5{,}7 \text{ m}.$$

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida ikki holga duch kelamiz:

1) biror qadamdan keyin, masalan $n+1$ qadamdan keyin o‘lchov birligining $\frac{1}{10^n}$ qismi J_n kesmaga α_n marta butunlay joylashadi. Bu holda o‘lchov jarayoni to‘xtatilib,

$$J \text{ uzunligi} = 5,\underbrace{7....\alpha_n}_{n \text{ ta raqam}}$$

bo‘lishi topiladi.

2) o‘lcham jarayoni to‘xtovsiz davom (cheksiz davom) etadi. Bu holda J kesmaning uzunligining aniq qiymati deb ushbu

$$5{,}7...\alpha_n...$$

cheksiz o‘nli kasr olinadi:

$$J \text{ uzunligi } = 5{,}7...\alpha_n...$$

Aytaylik, to‘g‘ri chiziqda biror O nuqta (koordinata boshi) hamda o‘lchov birligi tayinlangan bo‘lsin. U holda O nuqtadan o‘ngda joylashgan har bir P nuqtaga, OP kesmani o‘lchash natijasida hosil bo‘lgan ushbu $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ ushbu cheksiz o‘nli kasrni mos qo‘yish mumkin. Bunda

$$\alpha_0 \in N\bigcup\{0\},\ \alpha_n \in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, n\geq 1.$$

Bu moslik o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘ladi. Ravshanki, yuqoridagi cheksiz o‘nli kasrlar orasida cheksiz davriy o‘nli kasrlar bo‘lib, ular manfiy bo‘lmagan ratsional sonlar bo‘ladi. Qolgan kasrlar esa ratsional sonlar bo‘lmaydi.

1-ta'rif. Ushbu $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n....$, ko‘rinishidagi cheksiz o‘nli kasr **manfiy bo‘lmagan haqiqiy son** deyiladi, bunda

$$\alpha_0 \in N\bigcup\{0\},\ \ \alpha_n \in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, n\geq 1\ .$$

Agar $\exists\, n\geq 0; \alpha_n>0$ bo‘lsa, u **musbat haqiqiy son** deyiladi.

Manfiy haqiqiy sonning «–» ishora bilan olingani musbat haqiqiy son sifatida ta'riflanadi.

Barcha haqiqiy sonlardan iborat to‘plam R harfi bilan belgilanadi.

Barcha natural sonlar to‘plami N, ratsional sonlar to’plami Q, haqiqiy sonlar to’lami R uchun $N\subset Q\subset R$ bo’ladi.

2-ta`rif. Ushbu $R\setminus Q$ to‘plam elementi (son) **irratsional son** deyiladi.

Biz yuqorida, davri «9» ga teng bo‘lgan cheksiz davriy o‘nli kasrni chekli o‘nli kasr qilib olinishini aytgan edik. Buning oqibatida bitta son ikki ko‘rinishga, masalan, $\frac{1}{2}$ soni

$$\frac{1}{2}=0{,}5000...$$

$$\frac{1}{2}=0{,}4999...$$

ko‘rinishlarga ega bo‘lib qoladi.

Umuman, $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$ $(\alpha_n\neq 0)$ ratsional son ushbu,

1) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}$ $(\alpha_n-1)999...$,

2) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n 000...$, ikki ko‘rinishda yozilishi mumkin. Haqiqiy sonlarni solishtirishda ratsional sonning 1)- ko‘rinishidan foydalanamiz.

Ikkita manfiy bo‘lmagan

$$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n....\ ,$$

$$b=\beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n....$$

haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin.

3-ta'rif. Agar $\forall n\geq 0$ da $\alpha_n=\beta_n$,ya’ni

$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n, ...$$

bo’lsa, a **va** b **sonlar teng** deyiladi va $a = b$ kabi yoziladi.

4-ta`rif. Agar

$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n, ...$$

tengliklarning hech bo‘lmaganda bittasi bajarilmasa va birinchi bajarilmagan tenglik $n = k$ da sodir bo‘lsa, u holda:

$\alpha_k > \beta_k$ bo’lganda a **soni** b **sonidan katta** deyiladi va $a > b$ kabi belgilanadi.

$\alpha_k < \beta_k$ bo’lganda a **soni** b **sonidan kichik** deyiladi va $a < b$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, to‘g‘ri chiziq, unda tayin olingan O nuqta (koordinata boshi) va o‘lchov birligi berilgan bo‘lsin.

Haqiqiy sonlar to‘plami R bilan to‘g‘ri chiziq nuqtalari orasidagi bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin:

O nuqtadan o‘ngda joylashgan P nuqtaga OP kesmaning uzunligiga teng x soni mos qo’yiladi (x son P **nuqtaning koordinatasi** deyiladi);

O nuqtadan chapda joylashgan Q nuqtaga QO kesmaning uzunligiga teng x sonining minus ishorasi bilan olingan $-x$ soni mos qo’yiladi;

O nuqtaga nol soni mos qo‘yiladi.

Arximed aksiomasi. Ixtiyoriy chekli haqiqiy a soni uchun shunday natural m soni topiladiki,

$$m > a$$

bo’ladi.

Aytaylik,

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n... > 0,$$

bo’lsin. $m = \alpha_0 + 1,\ m \in N$ deb olinsa, unda **3-ta'rifga** binoan $a < m$ bo’ladi.

Kurs davomida tez-tez uchrab turadigan haqiqiy sonlar to‘plamlarini keltiramiz.

Aytaylik, $a \in R, b \in R, a < b$ bo’lsin:

$[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$ – segment deyiladi,

$(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ – interval deyiladi,

$[a,b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$ – yarim interval deyiladi,

$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$ – yarim interval deyiladi.

Bunda a va b sonlar $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ larning chegaralari deyiladi.

Shuningdek,

$$[a,+\infty) = \{x \in R \mid x \ge a\},$$

$$\left(-\infty, a\right) = \{x \in R \mid x < a\},$$

$$\left(-\infty, \infty\right) = R$$

deb qaraymiz.

Faraz qilaylik, a va b ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lib, $a < b$ bo‘lsin. U holda $\left(a, b\right) \neq \varnothing$

bo’ladi.

Haqiqatdan ham,

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n ... \geq 0$$

$$b = \beta_0, \beta_1\beta_2 ... \beta_n ....$$

bo’lib, $m \geq 0$ uchun

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, ... \alpha_{m-1} = \beta_{m-1} \text{ va } \alpha_m < \beta_m$$

bo‘lsin. Agar k natural son m dan katta sonlar ichida eng kichigi bo‘lsa, $\left(\alpha_k < 9\right)$ unda

$$r = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_m\alpha_{m+1} ... \left(\alpha_k + 1\right)$$

ratsional son uchun $a < r < b$ bo’ladi.Demak, $\left(a, b\right) \neq \varnothing$

1.3. Haqiqiy sonlar to‘plamining chegaralari

Haqiqiy sonlar to‘plamining chegaralanganligi, to‘plamning aniq chegaralari tushunchalari matematik analiz kursida muhim rol o‘ynaydi.

1^0. Sonlar to‘plamining aniq chegaralari. Biror $E \subset R$ to‘plam berilgan bo‘lsin.

1-ta'rif. Agar E to’planing shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki, E to’plamning ixtiyoriy x elementlari uchun

$$x \leq x_0$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists x_0 \in E, \quad \forall x \in E: \; x \leq x_0$$

bo’lsa, x_0 soni E to‘plamning **eng katta elementi** deyiladi va

kabi belgilanadi.

2-ta'rif. Agar E to’plamning shunday x_0 elamenti $(x_0 \in E)$ topilsaki, E to’plamning ixtiyoriy x elementlari uchun

$$x \geq x_0$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists x_0 \in E,\ \forall x \in E:\ \ x \geq x_0$$

bo’lsa, x_0 soni E to‘plamning **eng kichik elementi** deyiladi va

$$x_0 = \min E$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\max\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\right\} = 1$$

$$\min\ \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = 1$$

bo’ladi.

3-ta'rif. Agar shunday M soni $(M \in R)$ topilsaki, E to’plamning ixtiyoriy x elementlari uchun

$$x \leq M$$

tengsizliklar bajarilsa,ya`ni

$$\exists M \in R,\ \forall x \in E:\ \ x \leq M$$

bo’lsa, E to‘plam **yuqoridan chegaralangan** deyiladi, M soni to‘plamning **yuqori chegarasi** deyiladi.

4-ta'rif. Agar shunday m soni $(m \in R)$ topilsaki, E to’plamning ixtiyoriy x elementlari uchun

$$x \geq m$$

tengsizliklar bajarilsa,ya`ni

$$\exists m \in R,\ \forall x \in E:\ \ x \geq m$$

bo’lsa, E to‘plam **quyidan chegaralangan deyiladi,** m soni to‘plamning **quyi chegarasi** deyiladi.

Ravshanki, to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, uning yuqori chegaralari cheksiz ko‘p, shuningdek quyidan chegaralan-gan bo‘lsa, uning quyi chegaralari cheksiz ko‘p bo‘ladi.

5-ta'rif. Agar $E \subset R$ to‘plam ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, E **chegaralangan to‘plam** deyiladi.

6-ta'rif. Agar ixtiyoriy M soni $(M \in R)$ olinganda ham shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki,

$$x_0 > M$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall M \in R,\ \exists x_0 \in E:\ \ x_0 > M$$

bo’lsa, E to‘plam **yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

7-ta'rif. Agar ixtiyoriy m soni $(m \in R)$ olinganda ham shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki,

$$x_0 < m$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall m \in R, \quad \exists x_0 \in E: \ \ x_0 < m$$

bo'lsa, E to'plam **quyidan chegaralanmagan** deyiladi.

Masalan,

1) $E_1 = \{..., -2, -1, 0\}$ to'plam yuqoridan chegaralangan;

2) $E_2 = \{1, 2, 3, ...\}$ to'plam quyidan chegaralangan;

3) $E_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ to'plam chegaralangan;

4) $E_4 = \{x \in R \mid x > 0\}$ to'plam yuqoridan chegaralanmagan;

5) $E_5 = \{x \in R \mid x < 0\}$ to'plam quyidan chegaralanmagan bo'ladi.

Endi sonlar to'plamining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralari tushunchalarini keltiramiz.

Aytaylik, $E \subset R$ to'plam va $a \in R$ soni berilgan bo'lsin.

8-ta'rif. Agar

1) a soni E to'plamning yuqori chegarasi bo'lsa,

2) E to'plamning ixtiyoriy yuqori chegarasi M uchun $a \le M$ tengsizlik bajarilsa, a soni E to'plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi va $\sup E$ kabi belgilanadi:

$$a = \sup E \, .$$

Demak, E to'plamning aniq yuqori chegarasi, uning yuqori chegaralari orasida eng kichigi bo'ladi.

9-ta'rif. Faraz qilaylik, $E \subset R$ to'plam va $b \in R$ soni berilgan bo'lsin.

Agar

1) b son E to'plamning quyi chegarasi bo'lsa,

2) E to'plamning ixtiyoriy quyi chegarasi m uchun $b \ge m$ tengsizlik bajarilsa, b soni E to'plamning **aniq quyi chegarasi** deyiladi va $\inf E$ kabi belgilanadi:

$$b = \inf E \, .$$

Demak, E to'plamning aniq quyi chegarasi, uning quyi chegaralari orasida eng kattasi bo'ladi.

"sup" va "inf" lar lotincha "supremum" va "infimum" so'zlaridan olingan bo'lib, ular mos ravishda eng yuqori, eng quyi degan ma'nolarni anglatadi.

1-teorema. Faraz qilaylik, $E \subset R$ to'plam va $a \in R$ soni berilgan bo'lsin. a soni E to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'lishi uchun

1) a soni E to'plamning yuqori chegarasi,

2) a sonidan kichik bo‘lgan ixtiyoriy α $(\alpha < a)$ uchun E to’plamda $x > \alpha$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonining topilishi zarur va yetarli.

Zarurligi. Aytaylik,

$$a = \sup E$$

bo‘lsin. 8-ta'rifga binoan:

1) $\forall x \in E$ uchun $x \le a$, ya’ni a soni E to‘plamning yuqori chegarasi;

2) a soni yuqori chegaralar orasida eng kichigi. Binobarin, a dan kichik α soni uchun $x > \alpha$ bo’lgan $x \in E$ soni topiladi.

Yetarliligi. Teoremaning ikkala sharti bajarilsin. Bu holda, ravshanki, $\alpha < a$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday α soni E to‘plamning yuqori chegarasi bo‘lolmaydi. Demak, a - to‘plamning yuqori chegaralari orasida eng kichigi. Unda ta'rifga ko‘ra

$$a = \sup E$$

bo’ladi.

Xuddi shunga o‘xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

2- teorema. Faraz qilaylik, $E \subset R$ to’plam va $b \in R$ soni berilgan bo‘lsin. b soni E to‘plamning aniq quyi chegarasi bo‘lishi uchun

1) b soni E to‘plamning quyi chegarasi,

2) b sonidan katta bo‘lgan ixtiyoriy β $(\beta > b)$ uchun E to’plamda $x < \beta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonining topilishi zarur va yetarli.

Eslatma. Agar $E \subset R$ to‘plam yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda

$$\sup E = +\infty \quad ,$$

quyidan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda

$$\inf\ E = -\infty$$

deb olinadi.

2⁰.Aniq chegaralarning mavjudligi.

Aytaylik,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

musbat haqiqiy son bo‘lsin, bunda

$$\alpha_0 \in N \bigcup \{0\}, \quad \alpha_n \in N_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},\ \ n \ge 1.$$

Ushbu

$$a_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n},$$

$$b_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n + 1) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$a_n \le \alpha < b_n$$

bo’ladi.

Demak, ixtiyoriy haqiqiy son olinganda shunday ikkita ratsional son topiladiki, ulardan biri shu haqiqiy sondan kichik yoki teng, ikkinchisi esa katta bo‘ladi.

Endi sonlar to‘plamining aniq chegaralarining mavjudligi haqidagi teoremalarni keltiramiz.

3-teorema. Agar bo‘sh bo‘lmagan to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, uning aniq yuqori chegarasi mavjud bo‘ladi.

Bu teoremani

$$E \subset [0, +\infty), \quad E \neq \varnothing$$

to‘plam uchun isbotlaymiz.

E to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsin:

$$\exists M \in R, \ \forall x \in E: \quad x \leq M.$$

Arximed aksiomasini e'tiborga olib, $M \in N$ deyish mumkin.

Endi E to’plam

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2... \qquad (\alpha \in E)$$

elementlarining butun qismlaridan, ya'ni α_0 laridan iborat to‘plamni F_0 deylik:

$$F_0 = \{\alpha_0 \in N \bigcup \{0\} \ |, \ \ \alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2... \in E\}.$$

Bu to‘plam ham yuqoridan M soni bilan chegaralangan va $F_0 \neq \varnothing$. Ravshanki, $F_0 \subset N \bigcup \{0\}$. Bundan F_0 to‘plamning chekli ekanligini topamiz. Demak, F_0 to‘plamning eng katta elementi mavjud. Uni c_0 deylik:

$$\max F_0 = c_0 \tag{1}$$

E to’plamning

$$c_0, \alpha_1\alpha_2...$$

ko‘rinishdagi barcha elementlaridan iborat to‘plamni E_0 deb olamiz:

$$E_0 = \{c_0, \alpha_1\alpha_2... \in E\}.$$

Ravshanki, $E_0 \subset E$, $E_0 \neq \varnothing$.

Endi E_0 to’plam

$$c_0, \alpha_1\alpha_2...$$

elementlarining α_1 laridan iborat to‘plamni olib, uni F_1 deylik:

$$F_1 = \{\alpha_1 \in \{0,1,2,...,9\} \mid c_0, \alpha_1\alpha_{2.}... \in E_0\}.$$

Bu chekli to‘plam bo‘lib, $F_1 \neq \varnothing$ bo‘ladi. Shuning uchun uning eng katta elementi mavjud. Uni c_1 deb olamiz:

$$\max F_1 = c_1 \tag{2}$$

E_0 to’plamning

$$c_0,c_1\alpha_2\alpha_3...$$

ko‘rinishdagi barcha elementlaridan iborat to‘plamni E_1 deb olamiz:

$$E_1 = \{c_0,c_1\alpha_2.\alpha_3... \in E_0\}.$$

Ravshanki, $E_1 \subset E_0$, $E_1 \neq \varnothing$.

Endi E_1 to’plam

$$c_0,c_1\alpha_2\alpha_3...$$

elementlarning α_2 laridan iborat to‘plamni olib, uni F_2 deylik:

$$F_2 = \{\alpha_1 \in \{0,1,2,...,9\} \mid c_0,c_1,\alpha_2.... \in E_1\}.$$

Bu to‘plam ham chekli va $F_2 \neq \varnothing$ bo‘lib, uning eng katta elementi mavjud:

$$\max F_2 = c_2 \qquad (3)$$

E_1 to'plamning

$$c_0,c_1c_2\alpha_3...$$

ko‘rinishdagi barcha elementlaridan iborat to‘plamni E_2 deb olamiz:

$$E_2 = \{c_0,c_1c_2\alpha_3... \in E_1\}$$

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida

$$a = c_0,c_1c_2...c_n...$$

haqiqiy son hosil bo‘ladi.

Endi E to‘plam va bu a son uchun 1-teoremaning ikkala shartlarini bajarilishini ko‘rsatamiz:

1) Yuqoridagi (1) munosabatga ko‘ra $\forall\ \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3... \in E$ uchun $\alpha_0 \leq c_0$ bo’ladi.

Agar $\alpha_0 < c_0$ bo‘lsa, u holda $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... < a$ bo’ladi.

Agar $\alpha_0 = c_0$ bo‘lsa, u holda $c_0,\alpha_1\alpha_2... \in E_0$ bo’lib, (2) munosabatga ko’ra $\alpha_1 \leq c_1$ bo’ladi.

Agar $\alpha_1 < c_1$ bo‘lsa, u holda $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... < a$ bo’ladi.

Agar $\alpha_1 = c_1$ bo‘lsa, u holda $c_0,c_1\alpha_2... \in E_1$ bo’lib, (3) munosabatga ko’ra $\alpha_2 \leq c_2$ bo’ladi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ikki holga duch kelamiz:

a) shunday topiladiki $n \geq 0$ topiladiki,

$$\alpha_0 = c_0, \quad \alpha_1 = c_1, \ ... \ \alpha_{n-1} = c_{n-1}, \quad \alpha_n < c_n$$

bo’lib, $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... < a$ bo’ladi.

b) ixtiyoriy $n \geq 0$ da $\alpha_n = c_n$ bo’lib, $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... = a$ bo’ladi.

Demak, har doim $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... \leq a$ munosabat o‘rinli bo‘ladi;

2) a sondan kichik bo‘lgan ixtiyoriy

$$\beta = \beta_0, \beta_1\beta_2...\beta_n...$$

haqiqiy sonni olaylik:

$$\beta_0, \beta_1\beta_2...\beta_n... < c_0, c_1c_2...c_n...$$

Unda shunday $n \geq 0$ topiladiki,

$$\beta_0 = c_0, \quad \beta_1 = c_1, \; ... \; \beta_{n-1} = c_{n-1}, \quad \beta_n < c_n$$

bo‘ladi. Shuni e'tiborga olib, $\forall x \in E_n \subset E$ uchun

$$x > \beta_0, \beta_1\beta_2...\beta_n...$$

bo‘lishini topamiz.

Shunday qilib teoremada keltirilgan E to’plam va a soni uchun 1-teoremaning ikkala shartining bajarilishi ko‘rsatildi. Unda 1-teoremaga muvofiq E to‘plamning aniq yuqori chegarasi mavjud va

$$a = \sup E$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o‘xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

4-teorema. Agar bo‘sh bo‘lmagan to‘plam quyidan chegaralangan bo‘lsa, uning aniq quyi chegarasi mavjud bo‘ladi.

Eslatma. To‘plamning aniq quyi hamda aniq yuqori chegaralari shu to‘plamga tegishli bo‘lishi ham mumkin, tegishli bo‘lmasligi ham mumkin.

1.4. Haqiqiy sonlar ustida amallar

1^0. Ikki haqiqiy sonlar yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbati. Avval aytganimizdek, ratsional sonlar ustida, xususan chekli o‘nli kasrlar ustida bajariladigan amallar va ularning xossalari ma'lum deb hisoblaymiz.

Aytaylik, ikkita musbat

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$
$$b = \beta_0, \beta_1\beta_2...\beta_n...$$

haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin. Unda $n \geq 0$ bo’lganda ushbu

$$a_n^{'} = a_0, a_1a_2...a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n},$$

$$a_n^{''} = a_0, a_1a_2...(a_n + 1) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$a_n^{'} \leq a \leq a_n^{''}, \qquad (1)$$

shuningdek,

$$b_n' = \beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + ... + \frac{\beta_n}{10^n},$$

$$b_n'' = \beta_0,\beta_1\beta_2...(\beta_n + 1) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + ... + \frac{\beta_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$b_n' \le b \le b_n'' \qquad (2)$$

bo‘ladi.

Endi (1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning yig‘indisi $a_n' + b_n'$ lardan iborat $\{a_n' + b_n'\}$ ‘plamni qaraymiz. Ravshanki, bu to‘plam yuqoridan chegaralangan. Unda 4-ma'ruzadagi 3-teoremaga ko‘ra $\{a_n' + b_n'\}$ to‘plamning aniq yuqori chegarasi mavjud bo‘ladi.

1-ta'rif. $\{a_n' + b_n'\}$ to‘plamning aniq yuqori chegarasi a va b haqiqiy sonlar yigindisi deyiladi va $a+b$ kabi belgilanadi:

$$a + b = \sup_{n\ge 0}\{a_n' + b_n'\}.$$

(1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning ko‘paytmasi $a_n' \cdot b_n'$ lardan iborat $\{a_n' \cdot b_n'\}$ to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘ladi. Shuning uchun uning aniq yuqori chegarasi mavjud bo‘ladi.

2-ta'rif. $\{a_n' \cdot b_n'\}$ to‘plamning aniq yuqori chegarasi a va b haqiqiy sonlar ko‘paytmasi deyiladi va $a \cdot b$ kabi belgilanadi.

$$a \cdot b = \sup_{n\ge 0}\{a_n' \cdot b_n'\}.$$

(1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning nisbati $\frac{a_n'}{b_n''}$ lardan iborat $\left\{\frac{a_n'}{b_n''}\right\}$ to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘ladi.

3-ta'rif. $\left\{\frac{a_n'}{b_n''}\right\}$ to‘plamning aniq yuqori chegarasi a **sonning** b **songa nisbati** deyiladi va $\frac{a}{b}$ kabi belgilanadi.

$$\frac{a}{b} = \sup_{n\ge 0}\left\{\frac{a_n'}{b_n''}\right\}.$$

Aytaylik a va b musbat haqiqiy sonlar bo‘lib, $a > b$ bo’lsin.

4-ta`rif. $\{a_n^{'} - b_n^{''}\}$ to‘plamning aniq yuqori chegarasi a **sonidan** b **sonining ayirmasi** deyiladi va $a-b$ kabi belgilanadi.

$$a-b = \sup_{n\geq 0}\{a_n^{'} - b_n^{''}\}.$$

Eslatma. 1) Haqiqiy sonlar ustida bajariladigan qo‘shish, ko‘paytirish, ayirish va bo‘lish amallarini to‘plamning aniq quyi chegarasi orqali ham ta'riflash mumkin.

Masalan, a va b haqiqiy sonlar yig‘indisi quyidagicha ta'riflanadi:

$$a+b = \inf_{n\geq 0}\{a_n^{''} + b_n^{''}\}.$$

Haqiqiy sonlarda, yuqorida kiritilgan amallar o‘rta maktab matematika kursida o‘rganilgan amallarning barcha xossalarga ega.

2⁰. Haqiqiy sonning darajasi. Avval haqiqiy sonning 0-hamda n- darajalari ($n \in N$) quydagicha

$$a^0 = 1,$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ ta}}, \ (n \in N)$$

aniqlanishini ta'kidlaymiz.

Teorema (isbotsiz). Faraz qilaylik, $a > 0$ va $n \in N$ bo‘lsin. U holda shunday yagona musbat soni topiladiki,

$$x^n = a$$

bo‘ladi.

5-ta'rif. Musbat haqiqiy a soninning n darajali ildizi deb ushbu

$$x^n = a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi yagona x soniga aytiladi va

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

kabi belgilanadi.

Aytaylik, a musbat haqiqiy son, r esa musbat ratsional son bo‘lsin:

$$a > 0, \quad r = \frac{m}{n}, \quad m, n \in N.$$

Bu holda a sonining r - darajasi quydagicha

$$a^r = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

aniqlanadi.

6-ta'rif. Faraz qilaylik, $a > 1$, $b > 0$ haqiqiy sonlari berilgan bo‘lsin, a sonining $b-$ darajasi deb ushbu $\left\{a^{b_n^{'}}\right\}$ to‘plamning aniq yuqori chegarasiga aytiladi:

$$a^b = \sup_{n\geq 0}\left\{a^{b_n'}\right\} \text{ bunda } b_n' = \beta_0, \beta_1, \beta_2, ...\beta_n, \quad b = \beta_0, \beta_1, \beta_2, ...\beta_n, ...$$

3^0.Haqiqiy sonning absolyut qiymati. Aytaylik $x \in R$ son berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa}, \\ -x, \text{ agar } x < 0 \text{ bo'lsa}, \end{cases}$$

miqdor x **sonining absolyut qiymati** deyiladi.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1) $x \in R$ son uchun

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|$$

munosabatlar o’rinli,

2) $$\begin{aligned} &|x| < a \iff -a < x < a, \\ &|x| \leq a \iff -a < x < a, \quad (a > 0) \end{aligned}$$

3) $x \in R, \ \ y \in R$ sonlar uchun

$$\begin{aligned} &|x+y| \leq |x| + |y|, \\ &|x-y| \geq |x| - |y|, \\ &|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \\ &\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0) \end{aligned}$$

bo‘ladi.

Bu xossalarning isboti bevosita sonning absolyut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi. Ulardan birini, masalan $|x+y| \leq |x| + |y|$ bo‘lishini isbotlaymiz.

Aytaylik, $x + y > 0$ bo’lsin. Unda $|x+y| = x+y$ bo’ladi. $x \leq |x|, \ \ y \leq |y|$ bo‘lishini e'tiborga olib topamiz:

$$|x+y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Endi $x + y < 0$ bo’lsin.

Unda $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y)$ bo’ladi. $-x \leq |x|, \ -y \leq |y|$ bo‘lishini e'tiborga olib topamiz:

$$|x+y| = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|.$$

Barcha manfiy bo‘lmagan haqiqiy sonlar to‘plamini R_+ bilan belgilaylik. Ravshanki, $R_+ \subset R$.

Har bir $x \in R$ haqiqiy songa uning absolyut qiymati $|x|$ ni mos qo‘yish bilan ushbu

$$f : x \to |x| \quad (f : R \to R_+)$$

akslantirishga ega bo‘lamiz.

Demak haqiqiy sonning absolyut qiymati R to’pplamni R_+ to‘plamga akslantirish deb qaralishi mumkin.

Ixtiyoriy $x \in R, \ y \in R$ sonlarni olaylik. Ushbu

$$|x - y|$$

miqdor x va y **nuqtalar orasidagi masofa** deyiladi va $d(x, y)$ kabi belgilanadi:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Masofa quyidagi xossalarga ega:

1) $d(x, y) \geq 0$ va $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

2) $d(x, y) = d(y, x),$

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad (z \in R).$

4^0. Bernulli tengsizligi. Nyuton binomi formulasi. Ixtiyoriy $x \geq -1 (x \in R)$ hamda ixtiyoriy $n \in N$ uchun ushbu

$$(1 + n)^n \geq 1 + nx \qquad (4)$$

tengsizlik o‘rinli.

Bu tengsizlikni matematik induktsiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Ravshanki, $n = 1$ da (4) tengsizlik (tasdiq) o‘rinli bo‘ladi

$$1 + x = 1 + x$$

Endi $n \in N$ da (4) munosabat o‘rinli deb, uni $n + 1$ uchun ham o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz. (4) tengsizlikning har ikki tomonini $1 + x$ ga ko’paytirib topamiz:

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx) \cdot (1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$$

Matematik induktsiya usuliga binoan (4) munosabat ixtiyoriy $n \in N$ uchun o‘rinli bo‘ladi.(4) tengsizlik Bernulli tengsizligi deyiladi.

Endi Nyuton binomi formulasini keltiramiz.

Ma'lumki, $a \in R, \ b \in R$ da

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

bo‘ladi. Umuman, ixtiyoriy $n \in N$ da

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \ldots +$$
$$+C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n \cdot b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (5)$$

bo'ladi,bunda

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \; k! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot k, \;\; k = 1,2\ldots,n$$

(5) tenglik ham matematik induktsiya usuli yordamida isbotlanadi.

Ravshanki, $n=1$ da $C_1^0 \cdot a + C_1^1 \cdot b = a+b.$ Demak, bu holda (5) tenglik o'rinli. Endi (5) tenglik n uchun o'rinli bo'lsin deb, uni $n+1$ uchun ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. (5) tenglikning har ikki tomonini $a+b$ ga ko'paytirib topamiz:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k+1}) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{k+1}.$$

Ravshanki,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-2))}{k!}(n-(k-1)+k) =$$
$$\frac{n(n+1)((n+1)-1)\ldots((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k$$

Demak,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$$

bo'ladi. Bu esa (5) tenglik $n+1$ bo'lganda ham bajarilishini ko'rsatadi.

Odatda (5) tenglik Nyuton binomi formulasi deyiladi.

5^0. Ichma-ich joylashgan segmentlar printsipi. Ma'lumki, ushbu

$$\{x \in R: \; a \le x \le b\} = [a,b]$$

to'plam segment deb ataladi.

Aytaylik, $[a_1, b_1]$ va $[a_2, b_2]$ segmentlar berilgan bo'lsin. Agar

$$[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2]$$

bo'lsa, $[a_1, b_1]$ **segment** $[a_2, b_2]$ **segmentning ichiga joylashgan** deyiladi. Bu holda $a_1 \le a_2 < b_2 \le b_1$ bo'ladi.

7-ta'rif. Agar

$$\left[a_1,b_1\right],\left[a_2,b_2\right],....,\left[a_n,b_n\right],... \qquad (6)$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi

$$\left[a_1,b_1\right]\supset\left[a_2,b_2\right]\supset...\supset\left[a_n,b_n\right]\supset...$$

munosabatda,ya'ni $\forall n\in N$ da

$$\left[a_n,b_n\right]\supset\left[a_{n+1},b_{n+1}\right]$$

bo‘lsa, (6) **ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi** deyiladi.

Teorema. Aytaylik,

$$\left[a_1,b_1\right],\left[a_2,b_2\right],.....,\left[a_n,b_n\right],....$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\forall n\in N:\ \left[a_n,b_n\right]\supset\left[a_{n+1},b_{n+1}\right]$,

2) $\forall\varepsilon>0,\ \ \exists n_0\in N,\ \ n>n_0:\ \ b_n-a_n<\varepsilon$ bo'lsin.

U holda shunday $c\in R$ mavjud bo‘ladiki, $c\in\left[a_n,b_n\right],\ (n=1,2,3...)$ bo'lib,bunday c yagona bo'ladi.

Teoremada qaralayotgan segmentlar ketma-ketligi ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi bo‘ladi. Ravshanki, bu holda ushbu

$$a_1\le a_2\le a_3\le...\le a_n<b_n\le b_{n-1}\le...\le b_2\le b_1$$

munosabat bajariladi.

Endi $a_1,a_2,...,a_n$ sonlaridan tashkil topgan

$$E=\left\{a_1,a_2,...,a_n\right\}$$

to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plamning yuqoridan chegaralanganligini ko‘rsatamiz.

Ixtiyoriy natural m sonini olib, uni tayinlaymiz.

Agar $n\le m$ bo'lsa, $\left[a_m,b_m\right]\subset\left[a_n,b_n\right]$ bo'lib, $a_n\le a_m<b_m\le b_n$, ya'ni $a_n<b_m$ bo'ladi.

Agar $n>m$ bo'lsa, $\left[a_n,b_n\right]\subset\left[a_m,b_m\right]$ bo'lib, $a_m\le a_n<b_n\le b_m$, ya'ni $a_n\le b_m$ bo'ladi.

Aniq yuqori chegara haqidagi teoremaga ko‘ra

$$\sup E=c \qquad (c\in R)$$

mavjud bo‘ladi.

To‘plamning aniq yuqori chegarasi ta'rifiga binoan $\forall n\in N$ da $a_n\le c$ va $\forall m\in N$ da $c\le b_n$ bo'ladi.

Demak,

$$\forall n\in N \text{ da } c\in\left[a_n,b_n\right].$$

Agar shu nuqtadan farqli va barcha segmentlarga tegishli c' $(c' \in [a_n, b_n],\ \forall n \in N)$ mavjud deb qaraladigan bo‘lsa, unda

$$b_n - a_n \geq |c - c'| > 0$$

bo‘lib, bu teoremaning 2-shartiga zid bo‘ladi.

Demak, $c = c'$.

Odatda bu teorema ichma-ich joylashgan segmentlar printsipi deyilib, u haqiqiy sonlar to‘plamining uzluksizlik (to‘liqlik) xossasini ifodalaydi.