II BOB
SONLAR KETMA-KETLIGI

2.1. Sonlar ketma-ketligi va ularning limiti

1^0. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi. Biz birinchi bobda ixtiyoriy E to'plamni F to'plamga akslantirish:

$$f: E \to F$$

tushunchasi bilan tanishgan edik.

Endi $E = N$, $F = R$ deb, har bir natural n songa biror haqiqiy x_n sonni mos qo'yuvchi

$$f: n \to x_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (1)$$

akslantirishni qaraymiz.

1-ta'rif. 1- akslantirishning akslaridan iborat ushbu

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ \ldots, x_n, \ldots \qquad (2)$$

to'plam **sonlar ketma-ketligi** deyiladi. Uni $\{x_n\}$ yoki x_n kabi belgilanadi.

$x_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ sonlar (2) **ketma-ketlikning hadlari** deyiladi.

Masalan,

1) $x_n = \dfrac{1}{n}: \ 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots,$

2) $x_n = (-1)^n: -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

3) $x_n = \sqrt[n]{n}: \ 1, \ \sqrt{2}, \ \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$

4) $x_n = 1: \ 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$

5) $0{,}3; \ 0{,}33; \ 0{,}333; \ldots; \ 0{,}\underbrace{333\ldots3}_{n \ ta}; \ldots$

lar sonlar ketma-ketliklaridir.

Biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ uchun $x_n \le M$ tengsizlik bajarilsa (ya'ni $\exists M, \ \forall n \in N: \ x_n \le M$ bo'lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan deyiladi.

3-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas m soni mavjud bo'lsaki,ixtiyoriy $x_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ uchun $x_n \ge m$ tengsizlik bajarilsa (ya'ni, $\exists m, \ \forall n \in N: x_n \ge m$ bo'lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa (ya'ni $\exists\, m, M,\ \forall\, n \in N:\ m \le x_n \le M$ bo’lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik **chegaralangan** deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$\forall M \in R,\ \exists n_0 \in N:\ x_{n_0} > M$$

bo‘lsa, **ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

2^0. Sonlar ketma-ketligining limiti. Aytaylik, $a \in R$ son hamda ixtiyoriy musbat ε berilgan bo‘lsin.

6-ta'rif. Ushbu

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R |\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$$

to’plam a **nuqtaning** ε **- atrofi** deyiladi.

Faraz qilaylik $\{x_n\}$ ketma-ketlik va $a \in R$ soni beril-gan bo‘lsin.

7-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday n_0 natural soni mavjud bo‘lsaki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (3)$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0:\ |x_n - a| < \varepsilon$$

bo’lsa a son $\{x_n\}$ **ketma-ketlikning limiti** deyiladi va

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ yoki } n \to \infty \text{ da } x_n \to a$$

kabi belgilanadi.

Ravshanki, yuqoridagi (3) tengsizlik uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

ya’ni, $x_n \in U_\varepsilon(a),\ (n > n_0)$ bo‘ladi. Shuni e'tiborga olib, ketma-ketlikning limitini quyidagicha ta'riflasa bo‘ladi.

8-ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(a)$ atrofi olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo‘lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan ko‘rinadiki ε ixtiyoriy musbat son bo‘lib, natural n_0 soni esa ε ga va qaralayotgan ketma-ketlikka bog‘liq ravishda topiladi.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud emasligi isbotlansin.

Teskarisini faraz qilaylik, $\{x_n\}$ketma-ketlik ikkita a va b $(a \ne b)$ limitga ega bo’lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b \qquad (a \ne b)$$

Limitning ta`rifiga ko’ra

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in N,\quad \forall n>n_0:\ |x_n-a|<\varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0^{'}\in N,\quad \forall n>n_0^{'}:\ |x_n-b|<\varepsilon$$

bo'ladi.

Agar n_0 va $n_0^{'}$ sonlarning kattasi $\overline{n}$ desak,unda $\forall n>\overline{n}$ da

$$|x_n-a|<\varepsilon,\quad |x_n-b|<\varepsilon$$

bo'lib

$$|x_n-a|+|x_n-b|<2\varepsilon$$

bo'ladi.

Ravshanki, $|a-b|=|a-x_n+x_n-b|\le|x_n-a|+|x_n-b|$.

Demak, $\forall\ \varepsilon>0$ da $|a-b|<2\varepsilon$ bo'lib,unda $a=b$ bo'lishi kelib chiqadi.