

Лекция 5

Основы теории надежности

Ефимов Александр Владимирович
E-mail: alexandr.v.efimov@sibguti.ru

Курс «Архитектура вычислительных систем»
СибГУТИ, 2020

Основные понятия теории надежности. «Отказ»

Отказ - событие, при котором ЭВМ теряет способность выполнять заданные функции по переработке информации.

Полный отказ приводит к абсолютному нарушению работоспособности ЭВМ, или, говоря иначе, к потере её способности выполнять любые из заданных функций по переработке информации.

Частичный отказ ЭВМ вызывает ухудшение качества её функционирования или сокращение количества выполняемых функций.

Основные понятия теории надежности. «Отказ»

Под **отказом** будем понимать **устойчивое событие**, которое само не устраняется, и может быть устранено только в результате ремонта (или восстановления) машины.

Событие отказа, имеющие **временный характер** и способные самоустраняться, называется **сбой**.

Далее будем рассматривать устойчивые отказы, не различая полный и частичный отказы.

В случае, когда в машине произошел отказ, и он не устранен, то говорят, что ЭВМ находится в неработоспособном состоянии (в состоянии отказа).

Основные понятия теории надежности. «Восстановление»

Восстановлением называется событие, заключающееся в том, что отказавшая ЭВМ полностью приобретает способность выполнять заданные функции по обработке информации.

Восстановление отказавшей ЭВМ **может быть** осуществлено **автоматически** (в общем случае с помощью аппаратурно-программных средств) или **полуавтоматически** (с участием бригады технического обслуживания).

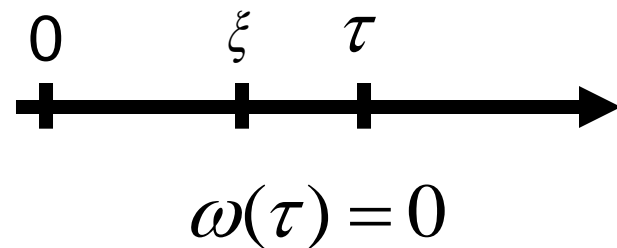
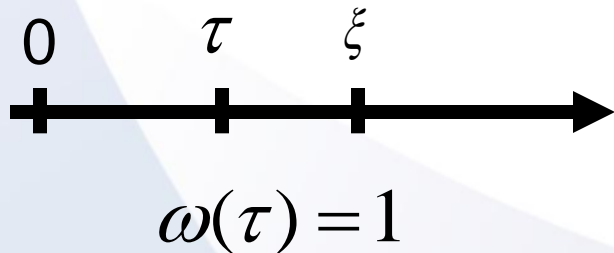
Далее будем считать, что восстановление производится средством, называемым **восстанавливающим устройством (ВУ)**.

Основные понятия теории надежности. «Производительность»

$$\omega(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если в момент времени } \tau \geq 0 \text{ ЭВМ} \\ & \text{находится в работоспособном состоянии;} \\ 0, & \text{если в момент времени } \tau \geq 0 \text{ ЭВМ} \\ & \text{находится в неработоспособном состоянии;} \end{cases}$$

$\omega(\tau)$ - производительность ЭВМ в момент времени $\tau \geq 0$

ξ - случайная величина, являющаяся моментом возникновения первого отказа в работе ЭВМ.



Функция надежности

Функция надежности (или вероятность безотказной работы) ЭВМ характеризует способность ЭВМ обеспечить на промежутке времени потенциально возможную производительность.

Функцией надежности ЭВМ называется:

$$r(t) = P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \omega(\tau) = 1\}$$

Вероятность

для всякого τ

Производительность
ЭВМ, равна потенциально
возможной

принадлежащего
промежутку времени
от 0 до t

Функция надежности

Второе определение функции:

$$r(t) = P\{\xi > t\},$$

Вероятность

Момент

возникновения
первого отказа

наступит после $t \geq 0$

Свойства функции надежности

1. $r(0) = 1$; событие $\xi > 0$ считается достоверным, (т.е. в момент начала функционирования ЭВМ работоспособна) $P\{\xi > 0\} = 1$;
2. $r(+\infty) = 0$; событие $\xi > +\infty$ считается невозможным, (т.е. ЭВМ работоспособна на конечном промежутке времени) $P\{\xi > (+\infty)\} = 0$;
3. $r(t_1) \geq r(t_2)$ для $t_1 \leq t_2$, события $\xi > t_2$ и $t_2 \geq \xi > t_1$ не совместимы, следовательно по теореме сложения вероятностей:

$$\begin{aligned} r(t_1) &= P\{\xi > t_1\} = P\{(\xi > t_2) \cup (t_2 \geq \xi > t_1)\} = \\ &= P\{\xi > t_2\} + P\{t_2 \geq \xi > t_1\} \geq P\{\xi > t_2\} = r(t_2). \end{aligned}$$

Функция ненадежности

$$q(t) = 1 - r(t).$$

Может рассматриваться как интегральная функция распределения случайной величины ξ .

Для оценки $q(t)$ на практике пользуются формулой:

$$q(t) \approx \tilde{q}(t) = n(t) / N,$$

N - число работоспособных ЭВМ в начале испытаний

$n(t)$ - число отказавших машин в промежутке времени $[0, t)$.

Среднее время безотказной работы

$$\mathcal{G} = \int_0^{\infty} t dq(t) = - \int_0^{\infty} t dr(t) = - \left. tr(t) \right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} r(t) dt = \int_0^{\infty} r(t) dt;$$

$$\tilde{\mathcal{G}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i,$$

t_i - Время безотказной работы i -ой машины
 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТКАЗОВ

$$\lambda(t) = \frac{1}{1-q(t)} \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{r(t)} \frac{dr(t)}{dt}, \quad (1)$$

$$\lambda(t) \approx \tilde{\lambda}(t) = n(\Delta t) / [N(t) \cdot \Delta t], \quad (2)$$

$n(\Delta t)$ - число отказавших ЭВМ в промежутке времени $[t, t + \Delta t)$;

$N(t)$ - число безотказно работающих ЭВМ в момент времени t .

Расчет функции надежности

Подставив в (2) оценки:

$$n(\Delta t) = n(t + \Delta t) - n(t) \approx N[q(t + \Delta t) - q(t)]$$

$$N(t) = N - n(t) \approx N[1 - q(t)]$$

и осуществив предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$,
получим (1).

Расчет функции надежности

Интегрируя от 0 до t выражение (1) , получаем:

$$\int_0^t \lambda(\tau) d\tau = -\ln r(t); \quad r(t) = \exp \left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right].$$

Практически установлено, что зависимость интенсивности отказов от времени имеет место на периоде приработки ЭВМ.

После приработки ЭВМ интенсивность отказов остается постоянной .

Функция надежности

$$r(t) = \exp(-\lambda t); \quad \mathcal{G} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$\lambda = \text{const}$, – среднее число отказов, появляющихся в машине в единицу времени.

$r(t)$ – вероятность того, что в ЭВМ произойдет ноль отказов за время t

Функция надежности

Вероятность появления в ЭВМ k отказов за время t равна:

$$r_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t) = 1; \quad r_0(t) = r(t).$$

Среднее число отказов, появляющихся на промежутке времени $[0, t)$ равно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r_k(t) = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t,$$

Таким образом, поток отказов в ЭВМ является пуассоновским или простейшим.

Функция восстановления

Функция восстановления ЭВМ (вероятность восстановления работоспособного состояния) характеризует способность ЭВМ восстанавливать производительность после отказа с помощью ВУ.

$$u(t) = 1 - P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \omega(\tau) = 0\},$$

Вероятность
для всякого τ

принадлежащего
промежутку времени
от 0 до t

Производительность ЭВМ
равна 0

Свойства функции восстановления

1. $u(0) = 0$;
2. $u(+\infty) = 1$;
3. $u(t_1) \leq u(t_2)$ для $t_1 \leq t_2$.

$u(t)$ - интегральная функция распределения времени восстановления отказавшей ЭВМ.

Оценка на практике:

$$u(t) \approx \tilde{u}(t) = m(t) / M,$$

M - число отказавших машин в начале восстановления.

$m(t)$ - число восстановленных машин за время t при условии, что ремонт каждой ЭВМ осуществляется своим ВУ.

Расчет функции восстановления

$$u(t) = 1 - \exp(-\mu t); \quad \tau = \int_0^{\infty} t du(t) = 1 / \mu,$$

τ - среднее время восстановления работоспособного состояния ЭВМ.

μ - интенсивность восстановления ЭВМ или среднее число восстановлений ЭВМ, которое может произвести ВУ в единицу времени.

Примечания

1. Проведение статистических экспериментов, для машин 1-го и 2-го поколений и для мощных ЭВМ 3-го поколения было невозможным.
2. При оценке показателей надежности ЭВМ целесообразно “эксплуатировать” эргодическую гипотезу, кт. позволяет вместо статистических результатов наблюдения за большим числом машин воспользоваться результатами наблюдения за одной машиной в течении длительного времени

Примечания

3. Справедливость экспоненциального закона распределения времени безотказной работы ЭВМ подтверждена обработкой статистических данных по эксплуатации ЭВМ 1 – 3 поколений.
4. Среднее время безотказной работы современных микропроцессорных ЭВМ оценивается в пределах: 10^5 - 10^8 ч. Для отыскания оценок показателей надежности ЭВМ разработаны методики ускоренных экспериментов (например, использующие нагревание интегральных схем).

Функция надежности

$$r(t) = \exp(-\lambda t);$$

λ – интенсивность отказов ЭВМ или среднее число отказов, появляющихся в машине в единицу времени.

Функция восстановимости

$$u(t) = 1 - \exp(-\mu t);$$

μ - интенсивность восстановления ЭВМ или среднее число восстановлений ЭВМ, которое может произвести ВУ в единицу времени.

Функция готовности

Комплексный (связан с понятиями и отказа, и восстановления) показатель надежности ЭВМ, который характеризует производительность ЭВМ и в переходном, и в стационарном режимах работы.

$E_0^1 = \{0, 1\}$ - множество состояний ЭВМ,

$i = 0$ – состояние отказа

$i = 1$ – работоспособное состояние

$P_j(i, t)$ - вероятность нахождения ЭВМ в момент $t \geq 0$ в состоянии $j \in E_0^1$, при условии, что начальным было состояние $i \in E_0^1$.

$$s(i, t) = P_1(i, t) = P\{i; \omega(t) = 1\},$$

Свойства функции готовности

1. $s(0, 0) = 0, s(1, 0) = 1;$
2. $s(i, +\infty) = s = const, \quad 0 < s < 1, \quad i \in E_0^1;$
3. $s(0, t_1) \leq s(0, t_2), s(1, t_1) \geq s(1, t_2)$
для $t_1 \leq t_2$.

s - коэффициент готовности.

$$s(i, +\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(i, t) = s = const,$$

Вывод формулы функции готовности

Функция готовности

$$s(0, t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu) \cdot t}$$

$$s(1, t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu) \cdot t}$$

$$s = \lim_{t \rightarrow \infty} s(i, t) = \mu / (\lambda + \mu),$$

λ – интенсивность отказов ЭВМ или среднее число отказов, появляющихся в машине в единицу времени.

μ - интенсивность восстановления ЭВМ или среднее число восстановлений ЭВМ, которое может произвести ВУ в единицу времени.

Функция осуществимости

$$f(t) = r(t)\varphi(t),$$

$r(t)$ – вероятность безотказной работы ЭВМ;

$\varphi(t)$ – вероятность события $\{0 \leq \eta < t\}$; $\varphi(t) = P\{0 \leq \eta < t\}$,

η – случайная величина, являющаяся моментом решения задачи на работоспособной (абсолютно надежной) ЭВМ.

В качестве закона распределения времени решения задач на ЭВМ может быть взят экспоненциальный:

$$\varphi(t) = 1 - \exp(-\beta t),$$

β – интенсивность решения задач на машине.

Литература

Хорошевский В.Г. Архитектура вычислительных систем. Учебное пособие. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005; 2-е издание, 2008.

Хорошевский В.Г. Инженерные анализ функционирования вычислительных машин и систем. – М.: “Радио и связь”, 1987.