Методы решения СЛАУ

Метод Гаусса (ДЗ)

Оригинальная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Прямой ход: приведём матрицу к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2)^{\text{я строка}} + 1{,}5 \cdot (1)^{\text{я строка}} \\ (3)^{\text{я строка}} + 0{,}5 \cdot (1)^{\text{я строка}} \end{array} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 + 1{,}5 \cdot (-2) & 1 + 1{,}5 \cdot 1 & -6 + 1{,}5 \cdot (-3) & -9 + 1{,}5 \cdot (-8) \\ 1 + 0{,}5 \cdot (-2) & 1 + 0{,}5 \cdot 1 & 2 + 0{,}5 \cdot (-3) & 5 + 0{,}5 \cdot (-8) \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) (3)^{\text{я строка}} + 0{,}2 * (2)^{\text{я строка}} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & -0{,}5 + 0{,}2 \cdot 2{,}5 & 0{,}5 + 0{,}2 \cdot (-10{,}5) & 1 + 0{,}2 \cdot (-21) \end{array}\right) =$$

Получаем треугольный вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & 0 & -1{,}6 & -3{,}2 \end{array}\right)$$

Обратный ход: запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} -1{,}6x_3 = -3{,}2 \\ 2{,}5x_2 - 10{,}5x_3 = 21 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ 2{,}5x_2 - 21 = 21 \\ -2x_1 + x_2 - 6 = -8 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Модифицированный метод Гаусса (ДЗ)

Необходимо поменять строки местами таким образом, чтобы ведущим элементом был максимальный по модулю среди элементов данного столбца ниже главной диагонали.

В данном примере вторую строку нужно поставить на место первой.

Оригинальная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \end{array}\right)$$

Прямой ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2)^{\text{я строка}} - 1/3 \cdot (1)^{\text{я строка}} \\ (3)^{\text{я строка}} + 2/3 \cdot (1)^{\text{я строка}} \end{array} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \end{array}\right) (3)^{\text{я строка}} + 5/4 \cdot (2)^{\text{я строка}} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -4{,}75 & -9{,}5 \end{array}\right)$$

Обратный ход:

$$\begin{cases} -4{,}75x_3 = -9{,}5 \\ \frac{5}{3}x_2 - 7x_3 = -14 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ \frac{5}{3}x_2 - 14 = -14 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ \frac{5}{3}x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 + 0 - 12 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Вычисление чисел с погрешностью (ДЗ)

$x = 2{,}384 \ \pm 0{,}021$
$y = 9{,}485 \ \pm 0{,}014$
$x + y = 2{,}384 + 9{,}485 \pm (0{,}021 + 0{,}014) = 11{,}869 \pm 0{,}035$
$x - y = 2{,}384 - 9{,}485 \pm (0{,}021 + 0{,}014) = \ -7{,}101 \ \pm 0{,}035$

В операциях с делением и умножением переходим от абсолютной погрешности к относительной.

$$x \cdot y = 2{,}384\left(1 \pm \frac{0{,}021}{2{,}384}\right) \cdot 9{,}485\left(1 \pm \frac{0{,}014}{9{,}485}\right) = 2{,}384(1 \pm 0{,}009) \cdot 9{,}485(1 \pm 0{,}001) =$$

$$22{,}612(1 \pm (0{,}009 + 0{,}001)) = 22{,}612(1 \pm 0{,}01) = 22{,}612 \pm 0{,}226$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2{,}384\left(1 \pm \frac{0{,}021}{2{,}384}\right)}{9{,}485\left(1 \pm \frac{0{,}014}{9{,}485}\right)} = \frac{2{,}384(1 \pm 0{,}009)}{9{,}485(1 \pm 0{,}001)} = 0{,}251(1 \pm 0{,}01) = 0{,}251 \pm 0{,}002$$

$$y^2 = 9{,}485^2\left(1 \pm \frac{2 \cdot 0{,}014}{9{,}485}\right) = 89{,}965(1 \pm 0{,}003) = 89{,}965 \pm 0{,}269$$

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{11{,}869\left(1 \pm \frac{0{,}035}{11{,}869}\right)}{-7{,}101\left(1 \pm \frac{0{,}035}{-7{,}101}\right)} = \frac{11{,}869(1 \pm 0{,}003)}{-7{,}101(1 \pm 0{,}005)} = -1{,}761(1 \pm 0{,}008) = -1{,}671 \pm 0{,}013$$

$$\sqrt{x} = 2{,}384^{1/2}\left(1 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}021}{2{,}384}\right) = 2{,}384^{1/2}\left(1 \pm \frac{1}{2} 0{,}009\right) = 1{,}544(1 \pm 0{,}004) = 1{,}544 \pm 0{,}006$$

$$x - y^2 = 2{,}384 \ \pm 0{,}021 - \ 89{,}965 \pm 0{,}269 = -87{,}581(0{,}021 + 0{,}269) = -87{,}581 \pm 0{,}290$$

$$sinx = sin\, 2{,}384 \pm cos\, 2{,}384 \cdot 0{,}021 = 0{,}69 \pm 0{,}73 \cdot 0{,}021 = 0{,}69 \pm 0{,}015$$

$$siny = sin\, 9{,}485 \pm cos\, 9{,}485 \cdot 0{,}014 = 0{,}06 \pm 0{,}1 \cdot 0{,}014 = 0{,}06 \pm 0{,}001$$

$$\frac{\sqrt{x} \cdot (x - y^2)}{sinx + y^2} = \frac{(1{,}544 \pm 0{,}006) \cdot (-87{,}581 \pm 0{,}290)}{(0{,}69 \pm 0{,}015) + (89{,}965 \pm 0{,}269)} = \frac{1{,}544(1 \pm 0{,}004) \cdot -87{,}581(1 \pm 0{,}003)}{90{,}655 \pm 0{,}296}$$
$$= \frac{-135{,}225(1 \pm 0{,}007)}{90{,}655(1 \pm 0{,}003)} = -1{,}495(1 \pm 0{,}01) = -1{,}492 \pm 0{,}15$$

$$\ln x = \ln 2{,}384 \pm \frac{1}{2{,}384} \cdot 0{,}021 = \ln 2{,}384 \pm \frac{0{,}021}{2{,}384} = 0{,}869 \pm 0{,}009$$

Метод простых итераций (ДЗ)

Оригинальная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)^{\text{я строка}} \div 5 \\ (2)^{\text{я строка}} \div -10 \\ (3)^{\text{я строка}} \div 5 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 1 & -0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 1 & 2{,}4 \end{array}\right)$$

$$l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|^{\infty} = \max(0{,}2 + 0{,}4; 0{,}2 + 0{,}3; 0{,}2 + 0{,}4) = \max(0{,}6; 0{,}5; 0{,}6) = 0{,}6$$

$$\|B\|^{\infty} = \max(0{,}6; 0{,}4; 2{,}4) = 2{,}4$$

$$N = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon \cdot (1 - \|C\|^{\infty})}{\|B\|^{\infty}}\right)}{\ln(\|C\|^{\infty})} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{10^{-4} \cdot (1 - 0{,}6)}{2{,}4}\right)}{\ln(0{,}6)} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{10^{-4} \cdot (1 - 0{,}6)}{2{,}4}\right)}{\ln(0{,}6)} \right\rceil = \lceil 21{,}58 \rceil = 22$$

$$x^{(k+1)} = B - C \cdot x^{k}$$

<u>Шаг 1:</u> (начальный вектор x - нулевой)

$$x^{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^{1} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 2:</u>

$$x^{2} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \cdot 0.6 - 0.2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 2.4 \\ 0{,}2 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 - 0.3 \cdot 2.4 \\ 0{,}2 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.4 - 0 \cdot 2.4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}88 \\ -0{,}6 \\ 0{,}28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}28 \\ 1 \\ 2{,}12 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 3:</u>

$$x^{3} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}28 \\ 1 \\ 2{,}12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}648 \\ -0{,}692 \\ 0{,}344 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}048 \\ 1{,}092 \\ 2{,}056 \end{pmatrix};$$

Метод Зейделя (ДЗ)

Оригинальная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \qquad \varepsilon = 10^{-4} \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)^{\text{я строка}} \div 5 \\ (2)^{\text{я строка}} \div -10 \\ (3)^{\text{я строка}} \div 5 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 1 & -0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 1 & 2{,}4 \end{array}\right)$$

$$x^{(k+1)} = B - C \cdot x^k$$

<u>Шаг 1:</u>

$$\begin{cases} x_1^1 = 0{,}6 - (-0{,}2 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 0) = 0{,}6 \\ x_2^1 = 0{,}4 - (0{,}2 \cdot 0{,}6 - 0{,}3 \cdot 0) = 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}28 \\ x_3^1 = 2{,}4 - (0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}28) = 2{,}4 - 0{,}12 - 0{,}112 = 2{,}168 \end{cases}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}28 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}28 \\ 2{,}168 \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 2:</u>

$$\begin{cases} x_1^2 = 0{,}6 - (-0{,}2 \cdot 0{,}28 + 0{,}4 \cdot 2{,}168) = 0{,}6 + 0{,}056 - 0{,}8672 = -0{,}2112 \\ x_2^2 = 0{,}4 - (0{,}2 \cdot (-0{,}2112) - 0{,}3 \cdot 2{,}168) = 0{,}4 + 0{,}04224 + 0{,}6504 = 1{,}0926 \\ x_3^2 = 2{,}4 - (0{,}2 \cdot (-0{,}2112) - 0{,}4 \cdot 1{,}0926) = 2{,}4 + 0{,}04224 - 0{,}43704 = 2{,}0052 \end{cases}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}28 \\ 2{,}168 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0{,}2112 \\ 0{,}28 \\ 2{,}168 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0{,}2112 \\ 1{,}0926 \\ 2{,}168 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0{,}2112 \\ 1{,}0926 \\ 2{,}0052 \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 3:</u>

$$\begin{cases} x_1^3 = 0{,}6 - (-0{,}2 \cdot 1{,}0926 + 0{,}4 \cdot 2{,}0052) = 0{,}6 + 0{,}21852 - 0{,}80208 = 0{,}0164 \\ x_2^3 = 0{,}4 - (0{,}2 \cdot 0{,}0164 - 0{,}3 \cdot 2{,}0052) = 0{,}4 - 0{,}003288 + 0{,}60156 = 0{,}9983 \\ x_3^3 = 2{,}4 - (0{,}2 \cdot 0{,}0164 - 0{,}4 \cdot 0{,}9983) = 2{,}4 - 0{,}00328 - 0{,}30932 = 1{,}9974 \end{cases}$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} -0{,}2112 \\ 1{,}0926 \\ 2{,}0052 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}0164 \\ 1{,}0926 \\ 2{,}0052 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}0164 \\ 0{,}9983 \\ 2{,}0052 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}0164 \\ 0{,}9983 \\ 1{,}9974 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|^\infty = \max(0{,}2 + 0{,}4; 0{,}2 + 0{,}3; 0{,}2 + 0{,}4) = \max(0{,}6; 0{,}5; 0{,}6) = 0{,}6$$

$$\|B\|^\infty = \max(0{,}6; 0{,}4; 2{,}4) = 2{,}4$$

$$N = \left\lceil \frac{ln\left(\frac{\varepsilon \cdot (1 - \|C\|^\infty)}{\|B\|^\infty}\right)}{ln(\|C\|^\infty)} \right\rceil = \left\lceil \frac{ln \frac{10^{-4}(1 - 0{,}6)}{2{,}4}}{ln 0{,}6} \right\rceil = \left\lceil \frac{ln \frac{4}{240000}}{-0{,}511} \right\rceil = 22$$

Методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

Метод половинного деления (ДЗ)

$\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ Начальный интервал: (1; 2)

Находим произведение значений функции в крайних точках:

$f(a) \cdot f(b) = (1^2 - 3) \cdot (2^2 - 3) = -2$

<u>Шаг 1:</u>

Находим середину интервала:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5 \qquad f(\mathrm{c}) = 1{,}5^2 - 3 = -0{,}75 \qquad \varepsilon = \frac{|b-a|}{2} = 0{,}5$$

В новых интервалах:

(1; 1,5) $f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = -2 \cdot (-0{,}75) = 1{,}5$

(1,5; 2) $f(c) \cdot f(b) = (-0{,}75) \cdot 1 = -0{,}75$ < 0, выбираем этот интервал

<u>Шаг 2:</u>

Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,5; 2)

Находим середину интервала:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75 \qquad f(\mathrm{c}) = 1{,}75^2 - 3 = 0{,}0625 \qquad \varepsilon = \frac{|b-a|}{2} = 0{,}25$$

В новых интервалах:

(1,5; 1,75) $f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}75) \cdot 0{,}0625 = -0{,}046875$ < 0, выбираем этот интервал

(1,75; 2) $f(c) \cdot f(b) = 0{,}0625 \cdot 1 = 0{,}0625$

<u>Шаг 3:</u>

Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,5; 1,75)

Находим середину интервала:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+1{,}75}{2} = 1{,}625 \qquad f(\mathrm{c}) = 1{,}625^2 - 3 = -0{,}36 \qquad \varepsilon = \frac{|b-a|}{2} = 0{,}125$$

В новых интервалах:

(1,5; 1,625) $f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}75) \cdot (-0{,}36) = 0{,}27$

(1,625; 1,75) $f(c) \cdot f(b) = (-0{,}36) \cdot 0{,}0625 = -0{,}0225$ < 0, выбираем этот интервал

<u>Шаг 4:</u>

Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,625; 1,75)

Находим середину интервала:

$$c = \frac{1{,}625+1{,}75}{2} = 1{,}6875 \qquad f(\mathrm{c}) = 1{,}6875^2 - 3 = -0{,}152 \qquad \varepsilon = \frac{|b-a|}{2} = 0{,}0625$$

В новых интервалах:

(1,625; 1,6875) $f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}36) \cdot (-0{,}152) = 0{,}054$

(1,6875; 1,75) $f(c) \cdot f(b) = (-0{,}152) \cdot 0{,}0625 = -0{,}0095$ < 0, выбираем этот интервал

Метод хорд (ДЗ)

$\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ Начальный интервал: (1; 2)

В отличие от метода половинного деления, точка *c* является не серединой интервала, а вычисляется по формуле

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\varepsilon = c_n - c_{n-1}$$

<u>Шаг 1:</u>

Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 + 4}{1 + 2} = 1{,}666667$$

В интервалах:

(1; 1,666667) $f(a) \cdot f(\text{c}) = 0{,}444442$

(1,666667; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}222221$ < 0, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 2:</u>

Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1{,}666667 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}222221)}{1 - (-0{,}222221)} = 1{,}727273$$

В интервалах:

(1,666667; 1,727273) $f(a) \cdot f(\text{c}) = 0{,}003673$

(1,727273; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}016528$ < 0, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 3:</u>

Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1{,}727273 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}016528)}{1 - (-0{,}016528)} = 1{,}731707$$

В интервалах:

(1,727273; 1,731707) $f(a) \cdot f(\text{c}) = 0{,}000020$

(1,731707; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}001191$ < 0, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 4:</u>

Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1{,}731707 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}001191)}{1 - (-0{,}001191)} = 1{,}732026$$

В интервалах:

(1,731707; 1,732026) $f(a) \cdot f(\text{c}) = 0{,}000000102$

(1,732026; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}0000854$ < 0, значит, выбираем этот интервал

Метод Ньютона (ДЗ)

$\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ Начальный интервал: (1; 2)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad f(x) = x^2 - 3; \qquad f'(x) = 2x$$

$$\varepsilon = x_n - x_{n+1}$$

В качестве начальной точки x_0 выбираем такую, в которой знак 2-ой производной совпадает со знаком функции, в нашем случае $x_0 = 2$

$$x_0 = 2$$
$$x_1 = 2 - \frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} = 2 - 0{,}25 = 1{,}75$$

Аналогично для последующих x:

$$x_2 = 1{,}75 - \frac{1{,}75^2 - 3}{2 \cdot 1{,}75} = 1{,}75 - \frac{3{,}0625 - 3}{3{,}5} = 1{,}75 - 0{,}017857 = 1{,}732143$$
$$x_3 = 1{,}732143 - \frac{1{,}732143^2 - 3}{2 \cdot 1{,}7732143} = 1{,}732143 - 0{,}000092 = 1{,}732051$$
$$x_4 = 1{,}732051 - \frac{1{,}732051^2 - 3}{2 \cdot 1{,}732051} = 1{,}732051 - 0{,}000000192431 =$$
$$= 1{,}7320503333$$

Для сравнения, найдем точное решение данного уравнения

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075$$

Как видно, приближенное решение совпадает с точным на 6 знаков после запятой.

Решение СНУ методом Ньютона: через обратную матрицу (ДЗ)

$$\begin{cases} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{cases} \qquad F = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon = x^n - x^{n-1}$$

$$W = \begin{pmatrix} f'(x)_{\text{1ое уравнение}} & f'(y)_{\text{1ое уравнение}} \\ f'(x)_{\text{2ое уравнение}} & f'(y)_{\text{2ое уравнение}} \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}; \qquad x^0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 1:</u>

$$F(x^0) = \begin{pmatrix} 2^2 + 1^3 - 4 \\ 2/1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 - 4 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad W(x^0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

Найдем обратную матрицу:

$$\Delta W = w_{00} * w_{11} - w_{01} * w_{10} \qquad \Delta W(x^0) = -8 - 3 = -11$$

$$\begin{matrix} \Delta_{11} = -2 & \Delta_{21} = 3 \\ \Delta_{12} = 1 & \Delta_{22} = 4 \end{matrix} \qquad W(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad W^T(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$W^{-1}(x^0) = \frac{1}{\Delta W} * W^T(x^0) = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 1/11 & -4/11 \end{pmatrix};$$

$$x^1 = x^0 - W^{-1}(x^0) * F(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 1/11 & -4/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 \\ 1/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/11 \\ 10/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8182 \\ 0{,}9091 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 2:</u>

$$F(x^1) = \begin{pmatrix} (1{,}8182)^2 + (0{,}9091)^3 - 4 \\ \frac{1{,}8182}{0{,}9091} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76/1331 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta W(x^1) = -7{,}99 - 2{,}99 = -10{,}98$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (1{,}8182) & 3 \cdot (0{,}9091)^2 \\ \frac{1}{0{,}9091} & -\frac{1{,}8182}{(0{,}9091)^2} \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} \Delta_{11} = -\frac{1{,}8182}{(0{,}9091)^2} & \Delta_{21} = 3 \cdot (0{,}9091)^2 \\ \Delta_{12} = \frac{1}{0{,}9091} & \Delta_{22} = 2 \cdot (1{,}8182) \end{matrix}$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1,8182}{(0,9091)^2} & \frac{1}{0,9091} \\ 3 \cdot (0,9091)^2 & 2 \cdot (1,8182) \end{pmatrix};$$

$$W^T(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1,8182}{(0,9091)^2} & -3 \cdot (0,9091)^2 \\ -\frac{1}{0,9091} & 2 \cdot (1,8182) \end{pmatrix};$$

$$W^{-1}(x^0) = -\frac{1}{10,98} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1,8182}{(0,9091)^2} & -3 \cdot (0,9091)^2 \\ -\frac{1}{0,9091} & 2 \cdot (1,8182) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2004 & 0,2258 \\ 0,1002 & -0,3311 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2004 & 0,2258 \\ 0,1002 & -0,3311 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{76}/_{1331} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,012 \\ 0,00587 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1,8062 \\ 0,9032 \end{pmatrix}$$

Решение СНУ методом Ньютона: через Гаусса (ДЗ)

$$\begin{cases} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{cases} \qquad F = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon = x^n - x^{n-1}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}; \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad F(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boxed{\begin{aligned} &X^{i+1} = X^i - Y^i \\ &Y^i = \text{СЛАУ}\left(\left(W(x^i) \middle| F(x^i)\right)\right) \end{aligned}}$$

<u>Шаг 1:</u>

$$F(x^0) = \begin{pmatrix} 2^2 + 1^3 - 4 \\ 2/1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 - 4 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1^2 \\ 1/1 & -2/1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Y^0 = \text{СЛАУ}\left(\left(W(x^0) \middle| F(x^0)\right)\right) = \text{СЛАУ}\left(\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0{,}1818 \\ 0{,}0909 \end{pmatrix} - \text{по методу Гауса}$$

$$X^1 = X^0 - Y^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1818 \\ 0{,}0909 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8182 \\ 0{,}9091 \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 2:</u>

$$F(x^1) = \begin{pmatrix} 1{,}8182^2 + 0{,}9091^3 - 4 \\ \dfrac{1{,}8182}{0{,}9091} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0572 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} 3{,}6364 & 2{,}4793 \\ 1{,}0999 & -2{,}1997 \end{pmatrix};$$

$$Y^1 = \begin{pmatrix} 0.012 \\ 0.00587 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = X^1 - Y^1 = \begin{pmatrix} 1.8182 \\ 0.9091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.012 \\ 0.00587 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8062 \\ 0{,}9032 \end{pmatrix}$$

Формула Лагранжа (ДЗ)

x	y
1	1.0000
2	1.4142
3	1.7321
4	2.0000

Найти *y* для **x = 2.56**

Т.к. имеем 4 узла интерполяции, то найти $\underline{\boldsymbol{P_3(x)}}$

$$P_3(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$
$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_3(2.56)=1\frac{(2.56-2)(2.56-3)(2.56-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+1.4142\frac{(2.56-1)(2.56-3)(2.56-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}+$$
$$+1.7321\frac{(2.56-1)(2.56-2)(2.56-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+2\frac{(2.56-1)(2.56-2)(2.56-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$P_3(2.56)=-0.0591+0.6989+1.0895-0.1281=1.6012$

Теперь посчитаем погрешности *усечения*, *округления* и *реальную*:

$$M_4=\max\left|\left(\sqrt{x}\right)''''\right|=\max\left|\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'''\right|=\max\left|\left(\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}\right)''\right|=\max\left|\left(\frac{3}{8\sqrt{x^5}}\right)'\right|=\max\left|\left(\frac{-15}{16\sqrt{x^7}}\right)\right|=\frac{15}{16}$$

$$\varepsilon_{усеч}\le\frac{M_4}{4!}\cdot((2.56-1)(2.56-2)(2.56-3)(2.56-4))=\frac{M_4}{4!}\cdot 0.5535=0.0216$$

$$\varepsilon_{реальное}=\varepsilon_{округ}+\varepsilon_{усеч}=+0.0216=0.02165$$

$$\varepsilon_{округ}=5\cdot 10^{-5}$$

Схема Эйткена (ДЗ)

x	y
1	1.0000
2	1.4142
3	1.7321
4	2.0000

Найти *y* для **x = 2.56**

$y_0=P_{x0}(x)$ $\quad P_{x0x1}(x)$ $\quad P_{x0x1x2}(x)$ $\quad P_{x0x1x2x3}(x)$

$y_1=P_{x1}(x)$ $\quad P_{x1x2}(x)$ $\quad P_{x1x2x3}(x)$

$y_2=P_{x2}(x)$ $\quad P_{x2x3}(x)$

$y_3=P_{x3}(x)$

$$P_{x0x1}=\frac{P_{x0}(x-x_1)-P_{x1}(x-x_0)}{x_0-x_1}=\frac{1\cdot(2.56-2)-1.4142\cdot(2.56-1)}{1-2}=1.6462$$

$$P_{x1x2}=\frac{P_{x1}(x-x_2)-P_{x2}(x-x_1)}{x_1-x_2}=\frac{1.4142\cdot(2.56-3)-1.7321\cdot(2.56-2)}{2-3}=1.5922$$

$$P_{x2x3}=\frac{P_{x2}(x-x_3)-P_{x3}(x-x_2)}{x_2-x_3}=\frac{1.7321\cdot(2.56-4)-2\cdot(2.56-3)}{3-4}=1.6142$$

$$P_{x0x1x2}=\frac{P_{x0x1}(x-x_2)-P_{x1x2}(x-x_0)}{x_0-x_2}=\frac{1.6462\cdot(2.56-3)-1.5922\cdot(2.56-1)}{1-3}=1.604$$

$$P_{x1x2x3}=\frac{P_{x1x2}(x-x_3)-P_{x2x3}(x-x_1)}{x_1-x_3}=\frac{1.5922\cdot(2.56-4)-1.6142\cdot(2.56-2)}{2-4}=1.5984$$

$$P_{x0x1x2x3}=\frac{P_{x0x1x2}(x-x_3)-P_{x1x2x3}(x-x_0)}{x_0-x_3}=\frac{1.604\cdot(2.56-4)-1.5984\cdot(2.56-1)}{1-4}=1.6011$$

$y_0=1.0000$

$y_1=1.4142$ $\quad P_{x0x1}(x)=1.6462$ $\quad P_{x0x1x2}(x)=1.604$

$P_{x1x2}(x)=1.5922$ $\quad P_{x0x1x2x3}(x)=1.6011$

$y_2=1.7321$ $\quad P_{x2x3}(x)=1.6142$ $\quad P_{x1x2x3}(x)=1.5984$

$y_3=2.0000$

Формула Ньютона (ДЗ)

x	y
1	1.0000
1.5	1.2247
2	1.4142
2.5	1.5811

Найти *y* для **x = 1.69**

Составим таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1	0.2247	-0.0352	0.0126
1.5	1.2247	0.1895	-0.0226	
2	1.4142	0.1669		
2.5	1.5811			

Первая формула Ньютона:

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}q+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1)+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\ldots(q-n+1),\text{где } q=\frac{x-x_0}{h}$$

$$q=\frac{1.69-1}{0.5}=1.38$$

$$P_3(1.69)=1+\frac{0.2247}{1!}\cdot 1.38+\frac{-0.0352}{2!}\cdot 1.38(1.38-1)+\frac{0.0126}{3!}\cdot 1.38(1.38-1)(1.38-2)=$$
$$=1+0.310086-0.00922944-0.00068276=1.3002$$

Вторая формула Ньютона:

$$P_n(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{1!}q+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}q(q+1)+\ldots+\frac{\Delta^m y_{n-m}}{m!}q(q+1)\ldots(q+m-1),\text{где } q=\frac{x-x_n}{h}$$

$$q=\frac{1.69-2.5}{0.5}=-1.62$$

$$P_3(1.69)=1.5811+\frac{0.1669}{1!}\cdot(-1.62)+\frac{-0.0226}{2!}\cdot(-1.62)(-1.62+1)+\frac{0.0126}{3!}\cdot(-1.62)(-1.62+1)(-1.62+2)=$$
$$=1.5811-0.270378-0.01134972+0.00080151=1.3002$$

Интерполяция кубическими сплайнами(ДЗ)

x	y
1	2
3	5
5	2
7	-1
9	2

Найти S(2) и S(4)

$CM = D$

$$\boldsymbol{h_i = x_i - x_{i-1}}$$

$$\boldsymbol{d_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}}$$

$$\mathbf{S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(y_{i-1} - \frac{M_{i-1} * h_i^2}{6}\right)\left(\frac{x_i - x}{h_i}\right) + (y_i - \frac{M_i * h_i^2}{6})(\frac{x - x_{i-1}}{h_i})}$$

Точка x = 2 лежит в промежутке [1;3] → i = 1
Точка x = 4 лежит в промежутке [3;5] → i = 2

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}M_1 & \frac{1}{3}M_2 & 0 \\ \frac{1}{3}M_1 & \frac{4}{3}M_2 & \frac{1}{3}M_3 \\ 0 & \frac{1}{3}M_2 & \frac{4}{3}M_3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{2-5}{2} - \frac{5-2}{2} \\ \frac{-1-2}{2} - \frac{2-5}{2} \\ \frac{2+1}{2} - \frac{-1-2}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

CM = D → решим полученную систему методом Гаусса → $M = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 0 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$

Теперь подставляем значения и считаем

$$S_1(2) = 0\frac{(3-2)^3}{12} + \frac{9}{4}\frac{(2-1)^3}{12} + \left(2 - \frac{0*4}{6}\right)\left(\frac{3-2}{2}\right) + \left(5 - \frac{-\frac{9}{4}*4}{6}\right)\left(\frac{2-1}{2}\right) = 4.0625$$

$$S_2(4) = -\frac{9}{4}\frac{(5-4)^3}{12} + 0\frac{(4-3)^3}{12} + \left(5 - \frac{-\frac{9}{4}*4}{6}\right)\left(\frac{5-4}{2}\right) + \left(2 - \frac{0*4}{6}\right)\left(\frac{4-3}{2}\right) = 4.0625$$

Обратная интерполяция (ДЗ)

$\boldsymbol{x^2 - 2x - 9 = 0}$ (x = -3, -2, -1)

Интерполируем обратную функцию по трём точкам

(по инвертированной формуле Лангранжа)

$$P_2(y) = x_0 \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)} + x_1 \frac{(y - y_0)(y - y_2)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)} + x_2 \frac{(y - y_0)(y - y_1)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)}$$

Найдём все значения функции $f(x)$:

x	y
3	6
-2	-1
-1	-6

$f(x) = x^2 - 2x - 9$

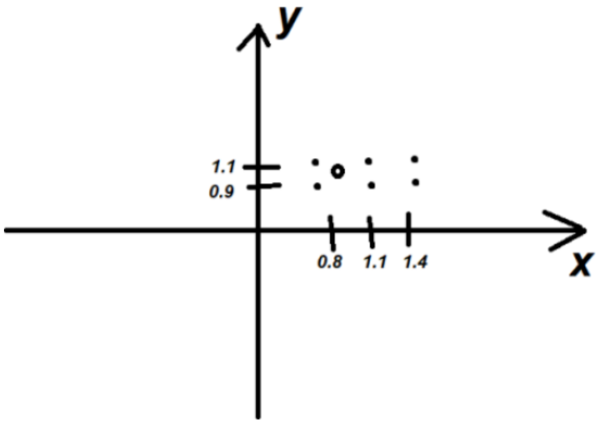
Т.к. нужно найти корень, то: y = 0

$$P_2(0) = -3\,\frac{(0+1)(0+6)}{(6+1)(6+6)} - 2\,\frac{(0-6)(0+6)}{(-1-6)(-1+6)} - 1\,\frac{(0-6)(0-1)}{(-6-6)(-6+1)} = -2{,}1714$$

Многомерная интерполяция (ДЗ)

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$
$$f(1, 1) = ?$$

x	y
0,8	0,9
1,1	1,1
1,4	



Вычислим все возможные значения функции:

$$y_0 = 0{,}9 \begin{cases} f(x_0, y_0) = \frac{1}{0{,}8+0{,}9} = 0{,}5882 \\ f(x_1, y_0) = \frac{1}{1{,}1+0{,}9} = 0{,}5 \\ f(x_2, y_0) = \frac{1}{1{,}4+0{,}9} = 0{,}4348 \end{cases} \qquad y_1 = 1{,}1 \begin{cases} f(x_0, y_1) = 0{,}5263 \\ f(x_1, y_1) = 0{,}45 \\ f(x_2, y_1) = 0{,}4 \end{cases}$$

Способ 1: Сначала интерполируем функцию по x. Затем при фиксированном x - 1 раз интерполируем по y

$$P_2(x, y_i) = f(x_o, y_i)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} + f(x_1, y_i)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2, y_i)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x, y_0) = 0{,}5882\frac{(1-1{,}1)(1-1{,}4)}{(0{,}8-1{,}1)(0{,}8-1{,}4)} + 0{,}5\frac{(1-0{,}8)(1-1{,}4)}{(1{,}1-0{,}8)(1{,}1-1{,}4)} + 0{,}4348\frac{(1-0{,}8)(1-1{,}1)}{(1{,}4-0{,}8)(1{,}4-1{,}1)} = 0{,}52684$$

$$P_2(x, y_1) = 0{,}47251$$

$$P_1(x, y) = f(x, y_0)\frac{y - y_1}{y_0 - y_1} + f(x, y_1)\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = 0{,}52684\frac{1 - 1{,}1}{0{,}9 - 1{,}1} + 0{,}47251\frac{1 - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 0{,}4997$$

Способ 2: Сначала интерполируем функцию по y. Затем при фиксированном y - 1 раз интерполируем по x

$$P_1(x_i, y) = f(x_i, y_0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f(x_i, y_1)\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

$$P_1(x_0, y) = 0{,}5882\frac{1-1{,}1}{0{,}9-1{,}1} + 0{,}5263\frac{1-0{,}9}{1{,}1-0{,}9} = 0{,}55725$$

$$P_1(x_1, y) = 0{,}475$$

$$P_1(x_2, y) = 0{,}4174$$

$$P_2(x, y) = f(x_o, y)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} + f(x_1, y)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2, y)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 0{,}55725\frac{(1-1{,}1)(1-1{,}4)}{(0{,}8-1{,}1)(0{,}8-1{,}4)} + 0{,}475\frac{(1-0{,}8)(1-1{,}4)}{(1{,}1-0{,}8)(1{,}1-1{,}4)} + 0{,}4174\frac{(1-0{,}8)(1-1{,}1)}{(1{,}4-0{,}8)(1{,}4-1{,}1)} = 0{,}4997$$

Тригонометрическая интерполяция (ДЗ)

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Найти *y* (1.5)

n = 4
T = 4
h = 1

$$y(x)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{\frac{-n}{2}<j\leq\frac{n}{2}} A_j\cdot\exp(2\pi ij\frac{x-x_0}{nh})$$

$$A_j=\sum_{k=0}^{n-1} y_k\cdot\exp(-2\pi i\frac{kj}{n}),\text{где}\, nh=T$$

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$$

Решение:

$$y(1.5)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{-2<j\leq2} A_j\cdot\exp(2\pi ij\frac{1.5-0}{4})=\frac{1}{n}\cdot\sum_{-2<j\leq2} A_j\cdot\exp(\frac{3}{4}\pi ij)$$

$$A_{-1}=0+1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+4(\cos(\pi)+i\sin(\pi))+9\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=i-4-9i=-8i-4$$

$$A_0=0+1+4+9=14$$

$$A_1=0+1(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))+4(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))+9(\cos(-\frac{3\pi}{2})+i\sin(-\frac{3\pi}{2}))=-i-4+9i=8i-4$$

$$A_2=0+1(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))+4(\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi))+9(\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi))=-1+4-9=-6$$

$$A_{-1}\,exp\left(-\frac{3}{4}\pi i\right)=(-8i-4)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\sqrt{2}i\ -4\sqrt{2}+\ 2\sqrt{2}=6\sqrt{2i}-2\sqrt{2}$$

$$A_0\,exp(0)=A_0\ =14$$

$$A_1\,exp\left(\frac{3}{4}\pi i\right)=(8i-4)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-6\sqrt{2}i-2\sqrt{2}$$

$$A_2\,exp\left(\frac{3}{2}\pi i\right)=-6(0-i)=6i$$

$$y(1.5)=\frac{1}{4}(6\sqrt{2}i-2\sqrt{2}+14-6\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6i)=\frac{1}{4}(14-4\sqrt{2}+6i)=\frac{8.3431+6i}{4}=2.0858+1.5i$$

Численное дифференцирование функции (ДЗ)

$y(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad h = 0{,}2$

x	0,6	0,8	1	1,2	1,4
y	1,6667	1,25	1	0,8333	0,7143

$$(5.5)\colon y'(x_0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \frac{0{,}8333 - 1{,}25}{0{,}4} = -1{,}0418$$

$$(5.6)\colon y'(x_0) = \frac{y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2}{12h} = \frac{1{,}6667 - 10 + 6{,}6664 - 0{,}7143}{2{,}4} = -0{,}9922$$

$$(5.7)\colon y''(x_0) = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} = \frac{1{,}25 - 2 + 08333}{0{,}04} = 2{,}08025$$

Численное интегрирование: формула трапеций (ДЗ)

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad h = 0{,}1$$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7142	0,6667	0,625	0,5882	0,5556	0,5263	0,5

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{i+1} - x_i)(\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}y_{i+1})}$$

$$\int_1^{1,1} \frac{1}{x}dx = (1{,}1 - 1)(\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 0{,}9091) = 0{,}0955$$

$$\int_{1,1}^{1,2} \frac{1}{x}dx = (1{,}2 - 1{,}1)(\frac{1}{2} * 0{,}9091 + \frac{1}{2} * 0{,}8333) = 0{,}0877$$

$\int_{1,2}^{1,3} \frac{1}{x}dx = 0{,}0798$ $\int_{1,3}^{1,4} \frac{1}{x}dx = 0{,}0742$ $\int_{1,4}^{1,5} \frac{1}{x}dx = 0{,}0691$

$\int_{1,5}^{1,6} \frac{1}{x}dx = 0{,}0646$ $\int_{1,6}^{1,7} \frac{1}{x}dx = 0{,}0607$ $\int_{1,7}^{1,8} \frac{1}{x}dx = 0{,}0572$

$\int_{1,8}^{1,9} \frac{1}{x}dx = 0{,}0541$ $\int_{1,9}^{2} \frac{1}{x}dx = 0{,}0513$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = 0{,}0955 + 0{,}0877 + 0{,}0798 + 0{,}0742 + 0{,}0691 + 0{,}0646 + 0{,}0607 + 0{,}0572 + 0{,}0541 + 0{,}0513 = 0{,}6939$$

Численное интегрирование: формула Симпсона (ДЗ)

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad h = 0,1$$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7142	0,6667	0,625	0,5882	0,5556	0,5263	0,5

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = (x_{i+2} - x_i)(\tfrac{1}{6}y_i + \tfrac{2}{3}y_{i+1} + \tfrac{1}{6}y_{i+2})}$$

$$\int_1^{1,2} \frac{1}{x}dx = (1,2 - 1)(\frac{1}{6} * 1 + \frac{2}{3} * 0,9091 + \frac{1}{6} * 0,8333) = 0,1823$$

$$\int_{1,2}^{1,4} \frac{1}{x}dx = (1,4 - 1,2)(\frac{1}{6} * 0,8333 + \frac{2}{3} * 07692 + \frac{1}{6} * 0,7142) = 0,1541$$

$$\int_{1,4}^{1,6} \frac{1}{x}dx = (1,6 - 1,4)(\frac{1}{6} * 0,7142 + \frac{2}{3} * 0,6667 + \frac{1}{6} * 0,625) = 0,1335$$

$$\int_{1,6}^{1,8} \frac{1}{x}dx = (1,8 - 1,2)(\frac{1}{6} * 0,625 + \frac{2}{3} * 0,5882 + \frac{1}{6} * 0,5556) = 0,1178$$

$$\int_{1,8}^{2} \frac{1}{x}dx = (2 - 1,8)(\frac{1}{6} * 0,5556 + \frac{2}{3} * 0,5263 + \frac{1}{6} * 0,5) = 0,1054$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = 0,1823 + 0,1541 + 0,1335 + 0,1178 + 0,1054 = 0,6931$$

Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера (ДЗ)

$\begin{cases} y' = 2 \cdot x - y \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $\quad f(x;\, y) = 2 \cdot x - y$

$x_0 = 1 \quad y_0 = 3$

$h = 0{,}2$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(x_i;\, y_i) \cdot h}$$

Шаг 1:

$f(x_0; y_0) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$y_1 = y_0 + f(x_0;\, y_0) \cdot h = 3 + (-1) \cdot 0{,}2 = 2{,}8$

Шаг 2:

$f(x_1;\, y_1) = 2 \cdot 1{,}2 - 2{,}8 = -0{,}4$

$y_2 = y_1 + f(x_1;\, y_1) \cdot h = 2{,}8 + (-0{,}4) \cdot 0{,}2 = 2{,}72$

Шаг 3:

$f(x_2, y_2) = 2 \cdot 1{,}4 - 2{,}72 = 0{,}08$

$y_3 = y_2 + f(x_2;\, y_2) \cdot h = 2{,}72 + 0{,}08 \cdot 0{,}2 = 2{,}736$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка: с усреднением по времени (ДЗ)

$$\begin{cases} y' = 2 \cdot x - y \\ y(1) = 3 \end{cases} \qquad f(x, y) = 2 \cdot x - y \qquad x_0 = 1 \quad y_0 = 3$$

$h = 0{,}2$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2};\ \overline{y_{i+\frac{1}{2}}}\right) \\ \overline{y_{i+\frac{1}{2}}} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i;\ y_i) \end{aligned}}$$

Шаг 1:

$$f(x_0; y_0) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$\overline{y_{0,5}} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0;\ y_0) = 0{,}1 * (-1) = 2{,}9$$

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{0,5}}\right) = 2 \cdot 1{,}1 - 2{,}9 = -0{,}7$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{0,5}}\right) = 3 + 0{,}2 \cdot (-0{,}7) = 2{,}86$$

Шаг 2:

$$f(x_1;\ y_1) = 2 \cdot 1{,}2 - 2{,}86 = -0{,}46$$

$$\overline{y_{1,5}} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1;\ y_1) = 2{,}86 + 0{,}1 * -0{,}46 = 2{,}814$$

$$f\left(x_1 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{1,5}}\right) = 2 \cdot 1{,}3 - 2{,}814 = -0{,}216$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{1,5}}\right) = 2{,}86 + 0{,}2 \cdot (-0{,}216) = 2{,}8168$$

Шаг 3:

$$f(x_2;\ y_2) = 2 \cdot 1{,}4 - 2{,}8138 = -0{,}0138$$

$$\overline{y_{2,5}} = y_2 + \frac{h}{2} \cdot f(x_2;\ y_2) = 2{,}8138 + 0{,}1 * (-0{,}0138) = 2{,}8124$$

$$f\left(x_2 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{2,5}}\right) = 2 \cdot 1{,}5 - 2{,}8124 = 0{,}1876$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{2,5}}\right) = 2{,}8138 + 0{,}2 \cdot 0{,}1876 = 2{,}8513$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка: с усреднением по производной (ДЗ)

$\begin{cases} y' = 2 \cdot x - y \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $\quad$ $f(x, y) = 2 \cdot x - y$, $\quad x_0 = 1 \quad y_0 = 3$

$h = 0{,}2$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_i;\ y_i) + f(x_i + h;\ \overline{y_{i+1}}\,) \right) \\ \overline{y_{i+1}} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i;\ y_i) \end{aligned}}$$

Шаг 1:

$f(x_0; y_0) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$\overline{y_1} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0;\ y_0) = 3 + 0{,}1 * (-1) = 2{,}9$

$f(x_0 + h;\ \overline{y_1}) = 2 \cdot 1{,}2 - 2{,}9 = -0{,}5$

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0;\ y_0) + f(x_0 + h;\ \overline{y_1}) \right) = 3 + 0{,}1 \cdot (-1 + (-0{,}5)\ ) = 2{,}85$

Шаг 2:

$f(x_1; y_1) = 2 \cdot 1{,}2 - 2{,}85 = -0{,}45$

$\overline{y_2} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1;\ y_1) = 2{,}85 + 0{,}1 * (-0{,}45) = 2{,}805$

$f(x_1 + h;\ \overline{y_2}) = 2 \cdot 1{,}4 - 2{,}805 = -0{,}005$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_1;\ y_1) + f(x_1 + h;\ \overline{y_2}) \right) = 2{,}85 + 0{,}1 \cdot (-0{,}45 + (-0{,}005)\ ) = 2{,}8045$

Шаг 3:

$f(x_2; y_2) = 2 \cdot 1{,}4 - 2{,}8045 = -0{,}0045$

$\overline{y_3} = y_2 + \frac{h}{2} \cdot f(x_2;\ y_2) = 2{,}8045 + 0{,}1 * (-0{,}0045) = 2{,}80405$

$f(x_2 + h;\ \overline{y_3}) = 2 \cdot 1{,}6 - 2{,}80405 = 0{,}39595$

$y_3 = y_2 + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_2;\ y_2) + f(x_2 + h;\ \overline{y_3}) \right) = 2{,}8045 + 0{,}1 \cdot (-0{,}0045 + 0{,}39595\ ) = 2{,}84365$

ДУ Высших порядков

Метод Эйлера (ДЗ)

$$\begin{cases} y'' = xy' + y \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \qquad h = 0.2$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)}$$

Начальноеусловие

$$y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \cdot -1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.8 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{y_2 = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.8 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.8 \\ 1.2 \cdot -0.8 + 1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.64 \\ -0.632 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{y_3 = \begin{pmatrix} 1.64 \\ -0.632 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.632 \\ 1.4 \cdot -0.632 + 1.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5136 \\ -0.48096 \end{pmatrix}}$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка с усреднением по времени (ДЗ)

$$\begin{cases} y'' = xy' + y \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \qquad h = 0.2$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, \overline{y_{i+1/2}}\right)$$
$$\overline{y_{i+1/2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$$

Начальноеусловие

$$y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Шаг первый

$$\overline{y_{0.5}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \cdot -1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -0.9 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.9 \\ 1.1 \cdot -0.9 + 1.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.82 \\ -0.818 \end{pmatrix}$$

Шаг второй

$$\overline{y_{1.5}} = \begin{pmatrix} 1.82 \\ -0.818 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -0.818 \\ 1.2 \cdot -0.818 + 1.82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7382 \\ -0.73416 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1.82 \\ -0.818 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.73416 \\ 1.3 \cdot -0.73416 + 1.7382 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6732 \\ -0.66124 \end{pmatrix}$$

Шаг третий

$$\overline{y_{2.5}} = \begin{pmatrix} 1.6732 \\ -0.66124 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -0.66124 \\ 1.4 \cdot -0.66124 + 1.6732 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6071 \\ -0.58649 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1.6732 \\ -0.66124 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.58649 \\ 1.5 \cdot -0.58649 + 1.6071 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5559 \\ -0.51577 \end{pmatrix}$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка с усреднением по производной (ДЗ)

$$\begin{cases} y''=xy'+y \\ y(1)=2 \\ y'(1)=-1 \end{cases} \qquad h=0.2$$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left(f(x_i,y_i)+f(x_i+h,\overline{y_{i+1}})\right)$$

$$\overline{y_{i+1}}=y_i+\frac{h}{2}\cdot f(x_i,y_i)$$

Начальноеусловие

$$y_0=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

Шаг первый

$$\overline{y_1}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+0.1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\cdot-1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.9\\-0.9\end{pmatrix}$$

$$y_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+0.1\cdot\left(\begin{pmatrix}-1\\1\cdot-1+2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.9\\1.2\cdot-0.9+1.9\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1.81\\-0.818\end{pmatrix}$$

Шаг второй

$$\overline{y_2}=\begin{pmatrix}1.81\\-0.818\end{pmatrix}+0.1\cdot\begin{pmatrix}-0.818\\1.2\cdot-0.818+1.81\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.7282\\-0.73516\end{pmatrix}$$

$$y_2=\begin{pmatrix}1.81\\-0.818\end{pmatrix}+0.1\cdot\left(\begin{pmatrix}-0.818\\1.2\cdot-0.818+1.81\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.73516\\1.4\cdot-0.73516+1.7282\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1.6547\\-0.66526\end{pmatrix}$$

Шаг третий

$$\overline{y_3}=\begin{pmatrix}1.6547\\-0.66526\end{pmatrix}+0.1\cdot\begin{pmatrix}-0.66526\\1.4\cdot-0.66526+1.6547\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5882\\-0.59293\end{pmatrix}$$

$$y_3=\begin{pmatrix}1.6547\\-0.66526\end{pmatrix}+0.1\cdot\left(\begin{pmatrix}-0.66526\\1.4\cdot-0.66526+1.6547\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.59293\\1.6\cdot-0.59293+1.5882\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1.5289\\-0.52898\end{pmatrix}$$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка. 5 шагов. Метод Милна (ДЗ)

$$\begin{cases} y'' = xy' + y \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \qquad h = 0.2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Начальноеусловие

$$y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Шаг первый

$$k_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \cdot -1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_0 + 0.1\, k_1 = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -0.9 \end{pmatrix} \qquad k_2 = \begin{pmatrix} -0.9 \\ 1.1 \cdot -0.9 + 1.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9 \\ 0.91 \end{pmatrix}$$

$$y_0 + 0.1\, k_2 = \begin{pmatrix} 1.91 \\ -0.909 \end{pmatrix} \qquad k_3 = \begin{pmatrix} -0.909 \\ 1.1 \cdot -0.909 + 1.91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.909 \\ 0.9101 \end{pmatrix}$$

$$y_0 + 0.2\, k_3 = \begin{pmatrix} 1.8182 \\ -0.81798 \end{pmatrix} \qquad k_4 = \begin{pmatrix} -0.81798 \\ 1.2 \cdot -0.81798 + 1.8182 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.81798 \\ 0.83662 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.9 \\ 0.91 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.909 \\ 0.9101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.81798 \\ 0.83662 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.8188 \\ -0.81744 \end{pmatrix}$$

Шаг второй

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.81744 \\ 1.2 \cdot -0.81744 + 1.8188 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.81744 \\ 0.83787 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + 0.1\, k_1 = \begin{pmatrix} 1.7371 \\ -0.73365 \end{pmatrix} \qquad k_2 = \begin{pmatrix} -0.73365 \\ 1.3 \cdot -0.73365 + 1.7371 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.73365 \\ 0.78336 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + 0.1\, k_2 = \begin{pmatrix} 1.7454 \\ -0.7391 \end{pmatrix} \qquad k_3 = \begin{pmatrix} -0.7391 \\ 1.3 \cdot -0.7391 + 1.7454 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7391 \\ 0.78457 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + 0.2\, k_3 = \begin{pmatrix} 1.671 \\ -0.66053 \end{pmatrix} \qquad k_4 = \begin{pmatrix} -0.66053 \\ 1.4 \cdot -0.66053 + 1.671 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.66053 \\ 0.74626 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1.8188 \\ -0.81744 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6}\left(\begin{pmatrix} -0.81744 \\ 0.83787 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.73365 \\ 0.78336 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.7391 \\ 0.78457 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.66053 \\ 0.74626 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.6714 \\ -0.66011 \end{pmatrix}$$

Шаг третий

$$k_1=\begin{pmatrix}-0.66011\\1.4\cdot-0.66011+1.6714\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.66011\\0.74725\end{pmatrix}$$

$$y_2+0.1\,k_1=\begin{pmatrix}1.6054\\-0.58538\end{pmatrix}$$

$$k_2=\begin{pmatrix}-0.58538\\1.5\cdot-0.58538+1.6054\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.58538\\0.72733\end{pmatrix}$$

$$y_2+0.1\,k_2=\begin{pmatrix}1.6129\\-0.58738\end{pmatrix}$$

$$k_3=\begin{pmatrix}-0.58738\\1.5\cdot-0.58738+1.6129\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.58738\\0.73183\end{pmatrix}$$

$$y_2+0.2\,k_3=\begin{pmatrix}1.5539\\-0.51374\end{pmatrix}$$

$$k_4=\begin{pmatrix}-0.51374\\1.6\cdot-0.51374+1.5539\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.51374\\0.73192\end{pmatrix}$$

$$y_3=\begin{pmatrix}1.6714\\-0.66011\end{pmatrix}+\frac{0.2}{6}\left(\begin{pmatrix}-0.66011\\0.74725\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-0.58538\\0.72733\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-0.58738\\0.73183\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.51374\\0.73192\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1.5541\\-0.51352\end{pmatrix}$$

Метод Рунге-Кутта 4 порядка: 4 и 5 шаг (ДЗ)

Шаг четвёртый

$$k_1=\begin{pmatrix}-0.51352\\1.6\cdot-0.51352+1.5541\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.51352\\0.73247\end{pmatrix}$$

$$y_3+0.1\,k_1=\begin{pmatrix}1.5027\\-0.44027\end{pmatrix}$$

$$k_2=\begin{pmatrix}-0.44027\\1.7\cdot-0.44027+1.5027\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.44027\\0.75424\end{pmatrix}$$

$$y_3+0.1\,k_2=\begin{pmatrix}1.5101\\-0.4381\end{pmatrix}$$

$$k_3=\begin{pmatrix}-0.4381\\1.7\cdot-0.4381+1.5101\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.4381\\0.76533\end{pmatrix}$$

$$y_3+0.2\,k_3=\begin{pmatrix}1.4665\\-0.36045\end{pmatrix}$$

$$k_4=\begin{pmatrix}-0.36045\\1.8\cdot-0.36045+1.4665\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.36045\\0.81769\end{pmatrix}$$

$$y_4=\begin{pmatrix}1.5541\\-0.51352\end{pmatrix}+\frac{0.2}{6}\left(\begin{pmatrix}-0.51352\\0.73247\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-0.44027\\0.75424\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-0.4381\\0.76533\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.36045\\0.81769\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1.4664\\-0.36054\end{pmatrix}$$

Шаг пятый

$$k_1=\begin{pmatrix}-0.36054\\1.8\cdot-0.36054+1.4664\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.36054\\0.81743\end{pmatrix}$$

$$y_4+0.1k_1=\begin{pmatrix}1.4303\\-0.2788\end{pmatrix}$$

$$k_2=\begin{pmatrix}-0.2788\\1.9\cdot-0.2788+1.4303\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.2788\\0.90058\end{pmatrix}$$

$$y_4+0.1k_2=\begin{pmatrix}1.4385\\-0.27048\end{pmatrix}$$

$$k_3=\begin{pmatrix}-0.27048\\1.9\cdot-0.27048+1.4385\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.27048\\0.92459\end{pmatrix}$$

$$y_4+0.2k_3=\begin{pmatrix}1.4123\\-0.17562\end{pmatrix}$$

$$k_4=\begin{pmatrix}-0.17562\\2\cdot-0.17562+1.4123\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.17562\\1.0611\end{pmatrix}$$

$$y_5=\begin{pmatrix}1.4664\\-0.36054\end{pmatrix}+\frac{0.2}{6}\left(\begin{pmatrix}-0.36054\\0.81743\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-0.2788\\0.90058\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-0.27048\\0.92459\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.17562\\1.0611\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1.4119\\-0.17625\end{pmatrix}$$

Метод Милна. 2 шага (ДЗ)

(4 и 5 шаги метода Рунге-Кутта 4 порядка)

$$\overline{y_{i+1}} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left(2\cdot f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2\cdot f(x_i, y_i)\right)$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4\cdot f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overline{y_{i+1}})\right)$$

Шаг первый

$$\overline{y_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4\cdot 0.2}{3}\left(2\cdot\begin{pmatrix} -0.81744 \\ 1.2\cdot -0.81744 + 1.8188 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 1.4\cdot -0.66011 + 1.6714 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} -0.51352 \\ 1.6\cdot -0.51352 + 1.5541 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.4662 \\ -0.36175 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = \begin{pmatrix} 1.6714 \\ 0.66011 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{3}\left(\begin{pmatrix} -0.66011 \\ 1.4\cdot -0.66011 + 1.6714 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -0.51352 \\ 1.6\cdot -0.51352 + 1.5541 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.36175 \\ 1.8\cdot -0.36175 + 1.4662 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.4664 \\ -0.36064 \end{pmatrix}$$

Шаг второй

$$\overline{y_5} = \begin{pmatrix} 1.8188 \\ -0.81744 \end{pmatrix} + \frac{4\cdot 0.2}{3}\left(2\cdot\begin{pmatrix} -0.66011 \\ 1.4\cdot -0.66011 + 1.6714 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.51352 \\ 1.6\cdot -0.51352 + 1.5541 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} -0.36064 \\ 1.8\cdot -0.36064 + 1.4664 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.4114 \\ -0.17826 \end{pmatrix}$$

$$y_5 = \begin{pmatrix} 1.5541 \\ -0.51352 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{3}\left(\begin{pmatrix} -0.51352 \\ 1.6\cdot -0.51352 + 1.5541 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -0.36064 \\ 1.8\cdot -0.36064 + 1.4664 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.17826 \\ 2\cdot -0.17826 + 1.4114 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.4118 \\ -0.17637 \end{pmatrix}$$

Метод наименьших квадратов: через полиномы (ДЗ)

Про аппроксимировать функцию , заданную в точках *(**x** , **y**)* функциями вида: $a+bx+c\sqrt{x}$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Базисные функции:

$g_0(x) = 1$

$g_1(x) = x$

$g_2(x) = \sqrt{x}$

Составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} 1 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} + b\sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{x_i} + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\, y_i \end{cases}$$

Для определения коэффициентов этой системы составим расчетную таблицу

n	x_i	y_i	$\sqrt{x_i}$	$x_i\sqrt{x_i}$	x_i^2	$\sqrt{x_i}\,y_i$	$x_i y_i$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1
3	2	4	1,4142	2,8284	4	5,6568	8
4	3	9	1,732	5,196	9	15,588	27
Сумма	6	14	4,1462	9,0244	14	22,2448	36

В результате получим систему:

$$\begin{cases} 4a + 6b + 4{,}1462c = 14 \\ 6a + 14b + 9{,}0244c = 36 \\ 4{,}1462a + 9{,}0244b + 6c = 22{,}2448 \end{cases}$$

Решаем систему линейных уравнений методом Гаусса, получаем коэффициенты:

$$\begin{cases} \mathbf{a = 0,037} \\ \mathbf{b = 5,980} \\ \mathbf{c = -5,32} \end{cases}$$

Подставляем коэффициенты в исходную функцию аппроксимации, получаем:

0.037+5.98 *x* −5.32 $\sqrt{x}$

Теперь можно подставить любое допустимое значение x (*x*≥0)
и найти значение функции аппроксимации в точке

Метод наименьших квадратов: через частные производные (ДЗ)

Про аппроксимировать функцию, заданную в точках ***(x , y)*** функциями вида: ***a+bx+c***$\sqrt{x}$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Базисные функции:

$g_0(x) = 1$

$g_1(x) = x$

$g_2(x) = \sqrt{x}$

Выпишем сумму квадратов:

$$(a+0\cdot b+\sqrt{0}\cdot c-0)^2+(a+1\cdot b+\sqrt{1}\cdot c-1)^2+(a+2\cdot b+\sqrt{2}\cdot c-4)^2+(a+3\cdot b+\sqrt{3}\cdot c-9)^2$$

После возведения в квадрат, упрощения выражения, получаем следующее:

$$\lambda=4a^2+12ab+2ac+2\sqrt{2}ac+2\sqrt{3}ac+14b^2+2bc+4\sqrt{2}bc$$
$$+6\sqrt{3}bc+6c^2-28a-72b-2c-8\sqrt{2}c-18\sqrt{3}c+98$$

Найдём частные производные и составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{da}=8a+12b+2c+2\sqrt{2}c+2\sqrt{3}c-28=\mathbf{8a+12b+8.292529c-28} \\ \dfrac{d\lambda}{db}=12a+28b+6\sqrt{3}c+4\sqrt{2}c+2c-72=\mathbf{12a+28b+18.049159c-72} \\ \dfrac{d\lambda}{dc}=2\sqrt{3}a+2\sqrt{2}a+2a+6\sqrt{3}b+4\sqrt{2}b+2b+12c-18\sqrt{3}-8\sqrt{2}-2= \\ =\mathbf{8.292529\,a+18.049159b+12\,c-44.490623} \end{cases}$$

Решаем систему линейных уравнений методом Гаусса, получаем коэффициенты:

$$\begin{cases} \mathbf{a=0.037} \\ \mathbf{b=5.98} \\ \mathbf{c=-5.32} \end{cases}$$

Подставляем коэффициенты в исходную функцию аппроксимации, получаем:

$$\mathbf{0.037+5.98\,x-5.32\sqrt{x}}$$

Теперь можно подставить любое допустимое значение x ($x\geq 0$)
и найти значение функции аппроксимации в точке

Нелинейная оптимизация

Методы Золотого сечения (ДЗ)

$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x}$
интервал [0,5]
сделать 4шага

λ_1=a+0.382 (b−a)
λ_2=a+0.618 (b−a)
Если f (λ_1) > f (λ_2), то a=λ_1
Иначе, b=λ_2

Итерация 1

λ_1 = 0+0.382· (5−0) = 1.91

λ_2 = 0+0.618·(5−0) = 3.09

f (λ_1) = −7.8119

f (λ_2) = −8.9919

f (λ_1) > f (λ_2), *значит a* = λ_1

Итерация 2

λ_1 = 1.91+0.382· (5−1.91) = 3.09038

λ_2 = 1.91+0.618· (5−1.91) = 3.81962

f (λ_1) = −8.991831

f (λ_2) = −8.328223

f (λ_1) < f (λ_2), *значит b* = λ_2

Итерация 3

λ_1 = 1.91+0.382· (3.81962−1.91) = 2.639475

λ_2 = 1.91+0.618· (3.81962−1.91) = 3.090145

f (λ_1) = −8.870022

f (λ_2) = −8.991874

f (λ_1) > f (λ_2), *значит a* = λ_1

Итерация 4

λ_1 = 2.639475+0.382· (3.81962−2.639475) = 3.090290

λ_2 = 2.639475+0.618· (3.81962−2.639475) = 3.368805

f (λ_1) = −8.991848

f (λ_2) = −8.863983

f (λ_1) < f (λ_2), *значит b* = λ_2

Результаты вычислений

$$x = \frac{(a+b)}{2} = \frac{(2.639475 + 3.368805)}{2} = 3.00414$$

$$f(x) = x^2 - 6x = 9.024857 - 18.02484 = -8.999983$$