1 Grundlagen

1.1 Approximative Ableitung zweiter Ordnung

Rechter Differenzenquotient

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Zentraler Differenzenquotient Zeiter Ordnung

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+\frac{h}{2}) - f'(x-\frac{h}{2})}{h}$$

Zentraler Differenzenquotient 1

$$f'(x+\frac{h}{2}) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Zentraler Differenzenquotient 2

$$f'(x-\frac{h}{2}) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Zentraler Differenzenquotient Zeiter Ordnung

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

1.2 Laplace Operator

$$\Delta f = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

2 2D Wellen Simulation

2.1 Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbf{x}} u(t, \mathbf{x}) = 0$$

2.2 Differentialdarstellung einer 1D Wellengleichung

$$z = u(t, x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Einsetzen der Approximativen Ableitung zweiter Ordnung (Verlet Methode)

$$\frac{u(t+\tau, x) - 2u(t, x) + u(t-\tau, x)}{\tau^2} = \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{h^2}$$

Umgeformt

$$u(t+\tau, x) = 2u(t, x) + u(t-\tau, x) + \frac{\tau^2}{h^2}(u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h))$$

2.3 Differentialdarstellung einer 2D Wellengleichung

$$z = u(t, x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Einsetzen der Approximativen Ableitung zweiter Ordnung (Verlet Methode)

$$\frac{u(t+\tau, x) - 2u(t,x,y) + u(t-\tau, x, y)}{\tau^2} =$$

$$\frac{u(t, x+h, y) - 2u(t,x,y) + u(t, x-h, y)}{h^2} + \frac{u(t, x, y+h) - 2u(t,x,y) + u(t, x, y-h)}{h^2}$$

Umgeformt

$$u(t+\tau, x, y) =$$

$$2u(t,x,y) - u(t-\tau, x, y) + \frac{\tau^2}{h^2}[u(t, x+h, y) + u(t, x-h, y) + u(t, x, y+h) + u(t, x, y-h) - 4u(t,x,y)]$$

Kernel

$$u(t+\tau, x, y) = 2u(t,x,y) - u(t-\tau, x, y) + \frac{\tau^2}{h^2}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

2.4 Startbedingung

Gegeben u_0, v_0

$$u_1 = u_0 + (u_0 - u_1) + \tau^2 u_0''$$

$$(u_0 - u_1) \approx \tau v_0$$

2.5 Randbedingungen

Normalableitung ist 0

n ... Einheitsnormalenvektor, welcher nach außen zeigt

n ist der Normalenvektor zu Γ

Γ ist eine Linie, welche das Quadrat umgrenzt

Γ...*Boundary*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$$

$$\forall x, y \in \Gamma$$

Approximativen Ableitung zweiter Ordnung am unteren Rand

$$u(t+\tau, x, y) =$$

$$2u(t,x,y) - u(t-\tau, x, y) + \frac{\tau^2}{h^2}[u(t, x+h, y) + u(t, x-h, y) + u(t, x, y+h) + 0 - 3u(t,x,y)]$$

Kernel am unteren Rand

$$u(t+\tau,x,y) = 2u(t,x,y) - u(t-\tau,x,y) + \frac{\tau^2}{h^2}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & -3 & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$