Table des matières

1 Mécanique

Δ un axe fixe, $\mathscr{D} \in \Delta$, $\mathrm{O}, \mathrm{O}', \mathrm{M}$ des points de l'espace, et $\mathrm{H} \in \Delta$ le un projeté orthogonal de M sur Δ

Référenciels non Galiléens

Formule de dérivation composée	$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{U}$
Vitesse	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e(M)$
Vitesse d'entrainement	$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_R(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$
Vitesse ref en translation uniforme	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e(M) = \vec{v}_R(O') + \vec{v}_R(O')$
Vitesse ref en rotation uniforme d'axe fixe	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{HM}$
Accélération ref en translation uniforme	$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_R(O')$
Accélération ref en rotation uniforme d'axe fixe	$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M)$
Accélération de Coriolis	$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{R'}(M)$
Accélération d'entrainement	$\vec{a}_e(M) = -\Omega^2_{R'/R}\vec{HM}$
Théorème de la résultante dynamique	$\vec{a}_{R'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$
Théorème du moment cinétique	$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mathscr{L}}_{A/R'}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_R = \sum \vec{\mathscr{M}}_A\left(\vec{F}_{ext}\right) + \vec{\mathscr{M}}_A\left(\vec{F}_{ie}\right) + \vec{\mathscr{M}}_A\left(\vec{F}_{ic}\right)$
Energie d'entrainement, cas translation rectiligne	$E_{p,ie} = m a_e x + C^{ste}$
Energie d'entrainement, cas rotation uniforme d'axe fixe	$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m\Omega^2_{R'/R} r^2 + C^{ste}$

TABLE 1 – Formules relatives aux référentiels non inertiels.

Énergétique

Puissance d'une force	$\mathscr{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$
Travail élémentaire	$\delta \mathrm{W}(\vec{f}) = \mathscr{P}(\vec{f})\mathrm{d}t = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{OM}}$
Force conservative	$\exists \mathrm{E}_p \mid \delta \mathrm{W}(\vec{f}) = -\mathrm{dE}_p$
Travail d'une force	$\mathrm{W}(\vec{f}) = \int_{\mathrm{M} \in \overset{\frown}{\mathrm{AB}}} \delta \mathrm{W}(\vec{f})$
Condition pour qu'une force dérive d'une E_p	$\vec{\mathrm{rot}}\vec{\mathrm{F}} = \vec{0}$
Théorème de l'énergie cinétique	$\Delta \mathrm{E}_c = \sum_i \mathrm{W}(\vec{f_i})$
Energie potentielle	$\mathrm{E}_p = -\int_\Gamma \mathrm{dE}_p$
Energie mécanique	$\mathrm{E}_m = \mathrm{E}_p + \mathrm{E}_c$
Théorème de l'énergie mécanique	$\Delta \mathrm{E}_m = \sum_i \mathrm{W}(\vec{\mathrm{F}}_{i,\ \text{non conservative}})$
Lien énergie potentielle / force	$\vec{\mathrm{F}} = -\vec{\nabla}\mathrm{E}_p = -\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{E}_p)$
Lien puissance / Energie	$\mathscr{P} = \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t}$
Théorème de la puissance cinétique	$\frac{\mathrm{dE}_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathscr{P}(\vec{f_i})$

TABLE 2 – Formules énergiétiques.

2 Ondes

Avec u une coordonnée de l'espace ($u = ax + by + cz$), et $\vec{r} = \vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z}$

Formules : Les ondes

D'Alembertien	$\square\Psi = \Delta\Psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$
Équation de D'Alembert	$\square\Psi = 0$
Cas 1D	$\square\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$, avec $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$
Surface d'onde	Points M à t fixé tel que $\Psi(\mathrm{M}, t) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$
Solutions de l'EDA 1D	$\Psi(u,t) = f(u - tv) + g(u + vt)$ ou $f(t - \frac{u}{v}) + g(t + \frac{u}{v})$
Pour Ψ solution de l'EDA 1D	Avec $a(u) = \Psi(u, 0)$ et $b(u) = \frac{\partial\Psi}{\partial t}(u, 0) = b(u)$
On a	$\Psi(u,t) = \frac{1}{2}\left(a(u - vt) + a(u + vt) + \frac{1}{v}\int_{u-vt}^{u+vt} b(s)\mathrm{d}s\right)$
Onde progressive monochromatique	$\Psi(u,t) = \Psi_0\cos\left(\omega t \pm ku + \varphi\right) = \Psi_0\cos\left(\omega\left(t \pm \frac{u}{v}\right) + \varphi\right)$
Vecteur d'onde	$\vec{k} = k\vec{e_u}$
Norme du vecteur d'onde	$\lVert\vec{k}\rVert = k(\omega) = \frac{\omega}{v} = \vec{r}\cdot\vec{k}$
Longueur d'onde	$\lambda = \mathrm{T}^{-1} = \frac{2\pi}{k}$ (car $k(u + \lambda) = ku + 2\pi$)
Célérité d'une onde dans la matière	$v_{\mathrm{mat}} = \sqrt{\frac{\mathrm{K}a^2}{m}} = \sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\rho}}$ Avec $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{K}}{a}$ le module de Young et ρ sa masse volumique.
Célérité d'une onde dans une corde	$v_{\mathrm{corde}} = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu_0}}$ Avec T la tension et μ_0 la masse linéique
Ondes stationnaires	$\Psi(u,t) = \gamma(t)\varphi(u)$
Sur une corde de longueur L,	$y_n(x,t) = \left[a_n\cos\left(\frac{n\pi v}{\mathrm{L}}t\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi v}{\mathrm{L}}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi v}{\mathrm{L}}\right)$

TABLE 3 – Formules : Les Ondes

Paquets d'ondes

EDA :	$\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \omega_0^2\theta$
Forme recherchée :	$\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta}_0 e^{i(\omega t - kx)}$
Reformulation de l'EDA :	$-\omega^2\theta = v^2k^2\theta - \dfrac{1}{\tau}i\omega\theta - \omega_0\theta$
Relation de dispertion : $(\theta \neq 0)$	$\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{v^2} + \dfrac{1}{v^2\tau}i\omega = k^2$
Vecteur d'onde complexe :	$\underline{k} = k' - ik''$
Forme de l'onde :	$\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta}_0 e^{-k''x}e^{i(\omega t - kx)}$
Vitesse de phase :	$v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$
Distance caracteristique d'atténuation	$\dfrac{1}{\lvert k''(\omega)\rvert}$
Klein Gordon (Limite $\omega_0 \ll 1$)	$\underline{k}^2 = \dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{v^2}$
Vitesse de groupe	$v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}}$

TABLE 4 – Paquets d'onde

3 Éléctromagnétique

Électromagnétique

Vecteur densité de courant volumique	$\vec{\mathrm{j}} = qn^* \vec{v} = \rho \vec{v}$
Lien densité de courant volumique / Charge	$\mathrm{dQ} = \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}\mathrm{d}t$
Maxwell Gauss	$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{E}}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
Maxwell Thomson / Flux	$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{B}}) = 0$
Maxwell Faraday	$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{E}}) = -\dfrac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$
Maxwell Ampère	$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{B}}) = \mu_0 \vec{\mathrm{j}} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$
Ostrogradski	$\iiint_{\mathscr{V}_\mathrm{S}} \mathrm{div}(\vec{\mathrm{F}}) \mathrm{d}\tau = \oiint_\mathrm{S} \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$
Stokes	$\iint_\mathrm{S} \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{F}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \oint_\Gamma \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$
Théorème de Gauss	$\oiint_\mathscr{S} \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \dfrac{\mathrm{Q_{int}}}{\varepsilon_0}$
Théorème d'Ampère	$\oint_\Gamma \vec{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \mathrm{I_{enl}}$
Conservation de la charge (local)	$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\mathrm{j}}) = 0$
Conservation de la chage (Global)	$\dfrac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}t} + \oiint_\mathrm{S} \vec{\mathrm{j}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = 0$
Lien champ éléctrique potentiels	$\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{V})$
Lien champ éléctrique potentiels	$\mathrm{dV} = -\vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$

TABLE 5 – Formules électromagnétique.

Électromagnétique (Tableau 2)

Pour une variable d'état $\mathscr{E}$	$\Delta\mathscr{E} = \sum_i \mathscr{E}_{i,\text{échangé}} + \mathscr{E}_{\text{crée}}$
Pour une variable d'état (infinitésimal) $\mathscr{E}$	$\mathrm{d}\mathscr{E} = \sum_i \delta\mathscr{E}_{i,\text{échangé}} + \delta\mathscr{E}_{\text{crée}}$
Relations de passage à l'interface conducteur-vide	$\begin{cases} \vec{\mathrm{E}}_{\text{vide}}(\mathrm{M}, t) = \dfrac{\sigma(\mathrm{M}, t)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{\text{conducteur}\to\text{vide}} \\ \vec{\mathrm{B}}_{\text{vide}} = \mu_0 \vec{\mathrm{J}}_s(\mathrm{M}, t) \wedge \vec{n}_{\text{conducteur}\to\text{vide}} \end{cases}$

TABLE 6 – Formules électromagnétique. (Tableau 2)

Dipôles non rayonnants

Moment dipolaire	$\vec{p} = q\vec{\mathrm{NP}}$
Potentiel Dipôle	$\mathrm{V} = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
Champ éléctrique, dipôle non rayonnant	$\vec{\mathrm{E}} = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos(\theta)\vec{u}_r + \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$
Champ éléctrique dipôle non rayonnant, Forme intrinseque	$\vec{\mathrm{E}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p})$
Moment dûe à un champ éléctrostatique sur un dipôle *rigide* non rayonnant	$\vec{\mathscr{M}}_{\mathrm{O}} = \vec{p} \wedge \vec{\mathrm{E}}_{\text{ext}}$
Énergie potentielle dûe à l'action éléstrostatique d'un champ uniforme sur un dipôle *rigide* non rayonnant	$\mathscr{E}_{\mathrm{p}} = -\vec{p}\cdot\vec{\mathrm{E}}_{\text{ext}}$
Force exercée par un champ electrostatique sur un dipôle non rayonnant au point O	$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{E}_{\text{ext}}\longrightarrow\text{dip}} = \left(\vec{p}\cdot\vec{\mathrm{grad}}\right)\vec{\mathrm{E}}_{\text{ext}}(\mathrm{O})$
Analogie champ éléctrique / magnétique	$\dfrac{1}{\varepsilon_0} \longleftrightarrow \mu_0$ et $\vec{p} \longleftrightarrow \vec{\mathrm{M}}$

TABLE 7 – Dipôles non rayonnants.

Formule d'énergétique électromagnétique

Force de Lorentz	$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{E}\right)$
Force de Lorentz volumique	$\vec{f}_{\text{Lorentz}} = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$
Force de Laplace	$\vec{F_{\mathscr{L}}} = i\vec{L} \wedge \vec{B}$
Force de Drude	$\vec{F}_{\text{Drude}} = -\dfrac{m_i}{\tau_i}\vec{v}_i$
Loi d'Ohm locale	$\vec{j} = \gamma\vec{E},\ \gamma = \sum_i \dfrac{n_i^* \tau_i q_i^2}{m_i}$
Lien puissance (Volumique) Lorentz / Drude	$p_{\text{lorentz}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -p_{\text{Drude}}$
Densité volumique énergétique éléctromagnétique	e_{em} tel que $\mathscr{E}_{\text{em}} = \iiint_{M \in V} e_{\text{em}} \mathrm{d}\mathscr{V}$
Conservation de l'énergie éléctromagnétique (Globale)	$\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} + \oiint_{S_{\mathscr{V}}} \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\mathscr{P}_{\text{Lorentz}}$
Conservation de l'énergie éléctromagnétique (Local)	$\dfrac{\partial e_{\text{em}}}{\partial d t} + \mathrm{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{p}_{\text{Lorentz}}$
Formule pour e_{em}	$e_{\text{em}} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}$
Vecteur de Poynting	$\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

TABLE 8 – Energie éléctromagnétique

Dipôles Rayonnants

Moment dipôlaire atome soumis à un champ éléctrique	$\vec{p} = \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2} E_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$
Approximation dipolaire	$r \gg a$
Dans l'approximation non relativiste	$a\omega \ll c$
Zone de rayonnement (Zone de champ lointaine)	$r \gg \lambda$
À l'onde exitatrice $\vec{E}_{ext}$ est associé ω et λ tel que	$\lambda f = c \;\; \lambda \frac{\omega}{2\pi} = c \;\; \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$
Pour prendre en compte le temps de propagation de l'onde, on définit	$\xi = t - \frac{r}{c}$
Expression des champs éléctromagnétiques dans cette zone	$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^3}\left(\frac{r}{c}\right)^2 p''(\xi)\vec{e}_\theta \\ \hline \vec{B}(M,t) = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3 c}\left(\frac{r}{c}\right)^2 p''(\xi)\vec{e}_\varphi \end{cases}$
Puissance rayonnée	$\left\langle \vec{\Pi}(M,t)\right\rangle_t = \frac{p_0^2\omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\vec{e}_r$
Puissance moyenne, sphère rayon r, centré sur le dipôle	$\mathscr{P} = \iint_{\text{Sphère}} \left\langle \vec{\Pi}(M,t)\right\rangle_t \cdot \vec{dS} = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$
Régime Rayleigh (Régime basse fréquence)	$\omega^2 \ll \omega_0^2$ et donc, $p_0(\omega) = \frac{(Ze)^2 E_0}{m\omega_0^2}$
Puissance de Larmor	$\mathscr{P}_{\text{Larmor}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{2\left\langle p^2\right\rangle}{3c^2}$

TABLE 9 – Dipôles Rayonnants

Ondes éléctromagnétiques dans l'ionosphère

Hypothèses sur le plasma	Dilué : On néglige la force de drude Neutre : Il y a autant de charges + que de − Non relativistes : Vitesses faibles devant c
Équations de Maxwell dans le plasma	(MG) : $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ (MF) : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (MT) : $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ (MA) : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$
Conductivité complexe du plasma	$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}} = \frac{ne^2}{mi\omega}\underline{\vec{E}}$
Pulsation Plasma (Pulsation de coupure)	$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$
Relation de dispersion dans le plasma (C'est Kleine Gordon!)	$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$
Indice Optique	$n(\omega) = \frac{c}{\lvert v_\varphi(\omega)\rvert}$
Rappel : Formule de Rayleigh	$v_g = v_\varphi + k' \frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}k'}$
Formule de Rayleigh, version avec n	$v_g = \frac{\pm c}{n + \omega \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}}$
Dispertion anormale (Impossible dans le plasma) : Dans ce cas, v_g ne définit pas la vitesse de transport de l'information	$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} < 0$ et $v_\varphi > c$
Ordre de grandeur : Fréquence de coupure f_p dans l'ionosphère terrestre	$f_p \simeq 10\mathrm{MHz}$

TABLE 10 – Ondes éléctromagnétiques dans l'ionosphère

On se limite à des signaux lentements variables (En basse fréquence)

Ondes éléctromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques

TRD appliqué au porteur mobile moyen e^- libre :	$m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{\mathrm{E}} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$
Relation “ohmique”	$\underline{\vec{\mathrm{j}}} = \dfrac{\gamma_0}{1+i\tau\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}} = \dfrac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1+i\tau\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}$
Approximation basse fréquence	$\tau\omega \ll 1,\ \dfrac{\omega\varepsilon_0}{\gamma_0} \ll 1$
Ordre de grandeur de ω pour le cuivre à 100K	$1\times10^{14}\mathrm{rad/s}$
Cette approximation est vérifiée lorsque (Radiofréquences)	$\omega \ll 1\times10^{14}\mathrm{rad/s}$
Radiofréquences :	$f \lesssim 1\times10^{9}\mathrm{Hz}$
Équations de Maxwell dans l’ARQS	(MG) : $\mathrm{div}\vec{\mathrm{E}} = 0$ (MF) : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{\mathrm{E}} = -\dfrac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$ (MT) : $\mathrm{div}\vec{\mathrm{B}} = 0$ (MA) : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{\mathrm{B}} = \mu_0\gamma_0\vec{\mathrm{E}}$
Relation de dispertion (Obtenue en injectant (MF) dans (MA))	$\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$(On a posé$\underline{k} = k' - ik''$)
Expression du champ éléctrique	$\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M},t) = \vec{\mathrm{E}}_0 e^{-\frac{u}{\delta}}\cos\left(\omega t - \dfrac{u}{\delta} + \Phi\right)$
Rappel : Distance caractéristique d’atténuation :	$\delta = \dfrac{1}{\lvert k''(\omega)\rvert}$
Ordres de grandeur de δ	mat / freq ‖ 1kHz ‖ 1GHz cuivre ‖ $\delta = 2\mathrm{mm}$ ‖ $\delta = 2\mu\mathrm{m}$ fonte ‖ $\delta = 2\mathrm{cm}$ ‖ $\delta = 20\mu\mathrm{m}$
Conducteur parfait :	$\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M},t) = 0$ au sein du conducteur
Une OemPPM en incidence normale réféchie vérifie	— même amplitude — même pulsation — même polarisation — vecteurs d’ondes de même direction mais opposés — La réfléction s’accompagne d’un déphasage de π
Coefficient de réfléction en amplitude	$\underline{\Omega} = \dfrac{\text{Amplitude complexe de } \underline{\mathrm{E}}_r \text{ à l'interface}}{\text{Amplitude complexe de } \underline{\mathrm{E}}_i \text{ à l'interface}}$

TABLE 11 – Ondes éléctromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques

Ondes éléctromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques (Tableau 2)

Transition	$\underline{t} = \dfrac{\underline{E}_r(\text{interface})}{\underline{E}_i(\text{interface})}$
Dans le modèle du conducteur parfait	$\delta = 0,\ \gamma \to +\infty,\ \ \underline{\Omega} = -1,\ \ \underline{t} = 0$
Stationairité des ondes du coté du vide	$\begin{cases} \vec{B}_{\text{vide}} = \dfrac{2E_0}{c}\cos(\omega t + \varphi)\cos(ku)(\vec{e_u} \wedge \vec{e_p}) \\ \vec{E}_{\text{vide}} = 2E_0 \sin(\omega t + \varphi)\sin(ku)\vec{e_p} \end{cases}$
Densité d'énergie éléctromagnétique moyenne	$\langle e_{em}(M,t)\rangle_t = \varepsilon_0 E_0^2$
Vecteur de Poynting moyen	$\left\langle \vec{\Pi}(M,t)\right\rangle_t = \vec{0}$

TABLE 12 – Ondes éléctromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques (Tableau 2)

Avec j l'unité complexe de partie imaginaire positive. $\left(j^2=-1, \Im(j)=1\right)$. On pose $x=\dfrac{\omega}{\omega_0}$

Filtrage

Fonction de transfert complexe	$\underline{\mathrm{H}}=\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$
FC [1] : Passe bas du premier ordre	$\underline{\mathrm{H}}=\dfrac{\mathrm{H}_0}{1+jx}$
FC : Passe haut du premier ordre	$\underline{\mathrm{H}}=\dfrac{\mathrm{H}_0 jx}{1+jx}$
FC : Passe bas du second ordre	$\underline{\mathrm{H}}=\dfrac{\mathrm{H}_0}{1-(x)^2+j\frac{x}{\mathrm{Q}}}$
FC : Passe haut du second ordre	$\underline{\mathrm{H}}=\dfrac{\mathrm{H}_0\,(x)^2}{1-(x)^2+j\frac{x}{\mathrm{Q}}}$
FC : Passe bande	$\underline{\mathrm{H}}=\dfrac{\mathrm{H}_0}{1+j\mathrm{Q}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$
Remarque	*Pour passer d'un filtre passe haut à un filtre passe bas, il suffit de multiplier le numérateur par le terme prédominant en x au denominateur!*
Bande passante	$\Delta\omega=\frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}$ et $\Delta f=\frac{f_0}{\mathrm{Q}}$

TABLE 13 – Filtrage d'un signal periodique en RSF

4 Optique

Optique Ondulatoire

Longueur d'onde dans le vide (Resp. vecteur d'onde)	λ_0 (resp k_0)
Rappel : Relation de Plank Einstein :	$\mathscr{E} = \hbar\nu = \hbar\omega = \dfrac{2\pi\hbar}{\lambda_0}$
Onde lumineuse monochromatique :	$\underline{\psi}(\mathrm{M}, t) = \Psi(\mathrm{M})e^{i(\omega t - \varphi(\mathrm{M}))}$
Retard de phase :	$\varphi(\mathrm{M}) = \tau_{\mathrm{SM}} + \varphi(\mathrm{S})$
Retard de phase (2) :	$\tau_{\mathrm{SM}} = \displaystyle\int_{\Gamma_{\mathrm{SM}}} \frac{\mathrm{d}\ell}{v_\varphi} = \int_{\Gamma_{\mathrm{SM}}} \frac{n\mathrm{d}\ell}{c} = \frac{1}{c}\int_{\Gamma_{\mathrm{SM}}} n\mathrm{d}\ell = \frac{1}{c}(\mathrm{SM})$
Intensité lumineuse :	$\mathrm{I}(\mathrm{M}) = k \cdot \langle\psi^2(\mathrm{M}, t)\rangle_{\tau_r} = \dfrac{k}{\tau_r}\displaystyle\int_t^{t+\tau_r} \psi^2(\mathrm{M}, u)\mathrm{d}u,\ k = c\varepsilon_0$ Note : à l'usage, on ne prends pas en compte le k. τ_r le temps de réponse du capteur.
Ordre de grandeur de τ_r :	$\tau_{r,\text{oeuil humain}} = 1 \times 10^{-1} = 0{,}1\mathrm{s}\ \ \tau_{r,\text{capteur CCD}} = 1 \times 10^{-6}\mathrm{s}$
Pour une onde monochromatique :	$\mathrm{I}(\mathrm{M}) = \dfrac{\psi^2(\mathrm{M})}{2}$
Durée de cohérence	$\tau_c = \dfrac{1}{\Delta\nu} = \pi\tau$

TABLE 14 – Optique ondulatoire

Dispositif interferenciels des trous d'Young || Dispositif interferenciels à élargissement des fronts d'onde

Interférences à grande distance : Dans l'hyposthèse où M *est à grande distance* des points S_1 et S_2	$a \ll D$ et $\lvert x\rvert, \lvert y\rvert \ll D$
Difference de marche à grande distance dans le dispositif des trous d'Young :	$\delta_{1/2}(M) = n\dfrac{ax}{D}$
Difference de marche à grande distance dans le montage de Frauhofer :	$\delta_{1/2}(M) = n\dfrac{ax}{f_2'}$
Critère de brouillage par extension spatiale d'une fente source primaire, et critère de brouillage par extension spectrale de la source :	$\lvert\Delta p\rvert \gtrsim 1$
Perte de contraste par élargissement angulaire de la source	$\theta_{\text{source}} \simeq \dfrac{\lambda}{a}$

TABLE 15 – Dispositif interferenciels des trous d'Young

Interferomètre à division d'amplitude || Dispositif interferenciels de Michelson

Difference de marche au point M par l'interferomètre :	$\delta_{1/2}(M) = 2ne\cos(i)$
Intensité en un point M de l'écran (Fresnel) :	$\mathscr{I}(M) = \frac{I_0}{2}\left(1+\cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot 2en\cos i)\right)$
Rappel : Dans les conditions de gauss, DL_2 :	$\cos(i) = 1 - \frac{i^2}{2} + \underset{i\to 0}{o}(i^2) \quad \sin(i) = i + \underset{i\to 0}{o}(i^2) = \tan(i)$
Reformulation de l'intensité en un point M de l'écran dans les conditions de gauss :	$\mathscr{I}(M) = \dfrac{I_0}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{4\pi en}{\lambda_0}\left(1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{f'}\right)^2\right)\right)\right]$
Rayon des anneaux :	$r = f'\sqrt{2\left(1-\frac{p}{p(O')}\right)}$

TABLE 16 – Dispositif interferenciels de Michelson

5 Quantique

Introduction aux equations de la physique quantique

Energie du photon	$\mathscr{E}_{\text{photon}} = \hbar\omega$
Amplitude de protobabilité de présence	$\psi(\mathrm{M}, t), \mathrm{Im}(\psi) \subset \mathbb{C}$
Amplitude de protobabilité de présence	$\mathrm{dP}(u,t) = \psi^*(u,t)\psi(u,t)\mathrm{d}u = \lvert\psi(u,t)\rvert^2\mathrm{d}u$ (La dernière égalité dans le cas u coordonée cartésienne)
En cartésien 1D, on écrit la densité de probabilité de présence	$\rho(u,t) = \lvert\psi(u,t)\rvert^2$
La probabilité de trouver la particule dans $[a,b]$ s'écrit	$\mathrm{P}(a \leq u \leq b, t) = \int_a^b \rho(u,t)\mathrm{d}u$
Extension spatiale typique de la fonction d'onde	Δu
Longueur d'onde de Broglie (à prononcer *Breuil*)	λ_0 ou λ_{DB}
Pour u une variable aléatoire :	
Moyenne de u (*Esperance*)	$\langle u(t)\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} u\rho(u,t)\mathrm{d}u$
Moments de u (*Théorème de transfert*)	$\langle u^n(t)\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} u^n\rho(u,t)\mathrm{d}u,\ n \in \mathbb{N}^*$
Si u est en cartésien :	
Extension spatiale typique de la fonction d'onde (*Écart type*) :	$\Delta u = \sigma(u) = \sqrt{\mathbb{V}(u)} \underset{\text{K.H.}}{=} \sqrt{\mathbb{E}(u^2) - \mathbb{E}(u)^2} = \sqrt{\langle u^2(t)\rangle_\psi - \langle u(t)\rangle_\psi^2}$
Condition aux limites de Born	$\int_{\mathbb{R}} \rho(u,t)\mathrm{d}u = 1$
Équation de Schrödinger	$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \mathrm{V}\psi$
Terme d'énergie cinétique de la particule	$\frac{-\hbar}{2m}\delta\psi$
Terme lié à l'énergie potentielle	$\mathrm{V}\psi$
Vitesse de la particule (def)	$\langle v_x(t)\rangle_\psi = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\langle x(t+\mathrm{d}t)\rangle_\psi - \langle x(t)\rangle_\psi}{\mathrm{d}t}$
Vitesse de la particule	$\langle v_x(t)\rangle_\psi = \frac{\hbar}{im}\int_{\mathbb{R}} \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x$

TABLE 17 – Introduction aux equations de la physique quantique

Introduction aux equations de la physique quantique (Tableau 2)

Quantité de mouvement	$\langle p_x \rangle_\psi = m \langle v_x \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathrm{d}x$
Quantité de mouvement (Moment d'ordre 2)	$\langle p_x^2 \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \mathrm{d}x$
Théorène d'Ehrenfest	$\frac{\mathrm{d}\langle p_x \rangle_\psi}{\mathrm{d}t} = -\left\langle \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right\rangle_\psi$
Dans la limite classique $\Delta x \ll \Lambda$ (Λ l'echelle de longueur typique sur laquelle x varie, i.e. $\mathrm{V}(x)$ peut être approché par sa tangente)	$\frac{\mathrm{d}\langle p_x \rangle_\psi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\left(\langle x \rangle_{\psi,t}\right)$ C'est le TRD!
Énergie cinétique	$\langle \mathrm{E}_c \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x$
Dans l'état stationnaire	φ
Longueur d'onde de De Broglie pour une onde (état) stationnaire	$\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2m\mathrm{E}}}$
Vitesse de phase pour une propagation libre	$v_\varphi = \frac{\hbar \omega}{2m}$
Vitesse de groupe pour une propagation libre	$v_g = \frac{\hbar k}{m}$
Remarque : $v_g \neq v_\varphi$, la propagation est dispersive	
Inégalité de Heisenberg (Cauchy-Schwartz)	$\Delta u \Delta p_u \geqslant \frac{\hbar}{2}$
Formule de diffraction pour les particules	$\Delta \sin\theta = \frac{\lambda_0}{a}$
Equation locale de conservation des probabilités de présence	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial u} = 0$
Vecteur densité de courant de probabilité de présence	$\vec{\mathrm{j}} = \frac{1}{m} \mathrm{Re}\left(\psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$
Vecteur densité de courant de probabilité de présence pour une onde de Broglie	$\vec{\mathrm{j}} = \rho \langle v \rangle_\psi = \lvert\psi\rvert^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$

TABLE 18 – Introduction aux equations de la physique quantique (Tableau 2)

Avec η la taille du bord, λ_0 la longueur d'onde de De Broglie

Quantas et barrieres de potentiels

Approximation sur la taille du bord	$\lambda_0 \ll \eta$
Conditions de discontinuités	φ et φ' sont continues
Expression de la fonction d'onde, cas $E > V_0$	$\psi(x,t) = \begin{cases} A_1 e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\left(e^{ik_1x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{ik_1x}\right) \text{ si } x < 0 \\ \hline A_1 e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-ik_2x} \end{cases}$
Expression de la fonction d'onde, cas $E < V_0$	$\psi(x,t) = \{$
Probabilité de transmission en la marche de potentiel	$T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|}$
Probabilité de rélféction en la marche de potentiel	$R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|}$
Probabilité de transmission pour une barrière de potentiel épaisse	$T = \frac{\|\vec{J}_{t,\mathrm{III}}\|}{\|\vec{J}_{i,\mathrm{I}}\|}$
Probabilité de rélféction pour une barrière de potentiel épaisse	$T = \frac{\|\vec{J}_{r,\mathrm{I}}\|}{\|\vec{J}_{i,\mathrm{I}}\|}$
Dans l'approximation $L \simeq qq\delta$	$T = e^{-\frac{2L}{\delta}}$
Dans un puit de potentiel infini	$E_m = \frac{\hbar^2}{8mL^2} n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*$
Energie de confinement	$E_{\min} \simeq \frac{\hbar^2}{mL^2}$
Pulsation de Bohr	$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$

TABLE 19 – Quantas et barrieres de potentiels

6 Chimie

Transformations Chimiques & acide base

Potentiel Hydrogène pour un acide fort en solution	$p\mathrm{H} = -\log\left(\frac{[\mathrm{H_3O^+}]}{c_0}\right)$
Constante d'équilibre de la réaction d'autoprotolyse de l'eau	$2\mathrm{H_2O}_{(l)} \leftrightharpoons \mathrm{H_3O}^+_{(aq)} + \mathrm{HO}^-_{(aq)} \quad \mathrm{K}e = 1.0 \times 10^{-14}$
Potentiel Hydrogène pour une base forte en solution	$[\mathrm{H_3O^+}] = \frac{\mathrm{K}e(c_0)^2}{[\mathrm{HO^-}]}$ donc $p\mathrm{H} = -\log\left(\frac{\mathrm{K}e(c_0)}{[\mathrm{HO^-}]}\right)$
Formule d'Enderson (C'est $-\log$(Gulberg & Waage))	$-p\mathrm{H} = -p\mathrm{K}a + \log\left(\frac{[\mathrm{base}]}{[\mathrm{acide}]}\right)$
Approximation de la réaction très peu avancée	$c_0\mathrm{K}_a \ll c_a$
Approximation de la réaction très avancée	$c_0\mathrm{K}_a \gg c_a$

TABLE 20 – Transformations Chimiques & acide base

7 Annexes

Quelques constantes

Constante de gravitation	$\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$
Vitesse de la lumière	$c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Constante de Planck	$h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Constante de Boltzmann	$k_\mathrm{B} = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Masse du proton	$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Constante de permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Constante de perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$
Champ de claquage de l'air sec	$\mathrm{E}_{\text{claquage, air sec}} = 10 \times 10^{5}\,\mathrm{V/m}$
Masse de la Terre	$\mathrm{M}_{\text{Terre}} = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Rayon moyen de la Terre	$\mathrm{R}_{\text{Terre}} = 6{,}37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2/K^4}$
Constante d'Avogadro	$\mathrm{N_A} = 6{,}022 \times 10^{23}\,\mathrm{1/mol}$
Constante des gaz parfaits	$\mathrm{R} = 8{,}31\,\mathrm{J/(mol\,K)}$
Masse du Soleil	$\mathrm{M}_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Rayon moyen du Soleil	$\mathrm{R}_\odot = 6{,}96 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
K standard de la réaction d'autoprotolise de l'eau ($2H_2O_{(l)} \leftrightharpoons H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$)	$\mathrm{K}_e = 10 \times 10^{-14}$

TABLE 21 – Quelques constantes physiques

Formulaire d'analyse vectorielle

TABLE 22 – Formulaire d'analyse vectorielle

8 Compléments X-ENS

Compléments

Loi de Biot et Savart	$\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint \dfrac{\mathrm{I}d\vec{\ell} \wedge (\vec{r}-\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}$

TABLE 23 – Compléments