

Table des matières

1 Mécanique	1
2 Ondes	4
3 Électromagnétique	6
4 Optique	14
5 Quantique	15
6 Chimie	19
7 Annexes	20
8 Compléments X-ENS	21

1 Mécanique

Δ un axe fixe, $\mathcal{D} \in \Delta$, O, O', M des points de l'espace, et $H \in \Delta$ le projeté orthogonal de M sur Δ

Référentiels non Galiléens

Formule de dérivation composée	$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{U}$
Vitesse	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e(M)$
Vitesse d'entraînement	$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_R(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M}$
Vitesse ref en translation uniforme	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e(M) = \vec{v}_R(O') + \vec{v}_{R'}(O')$
Vitesse ref en rotation uniforme d'axe fixe	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge H\vec{M}$
Accélération ref en translation uniforme	$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_R(O')$
Accélération ref en rotation uniforme d'axe fixe	$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M)$
Accélération de Coriolis	$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{R'}(M)$
Accélération d'entraînement	$\vec{a}_e(M) = -\Omega_{R'/R}^2 H\vec{M}$
Théorème de la résultante dynamique	$\vec{a}_{R'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$
Théorème du moment cinétique	$\left(\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{A/R'}(M)}{dt}\right)_R = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ext}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ic})$
Energie d'entraînement, cas translation rectiligne	$E_{p,ie} = m a_e x + C^{ste}$
Energie d'entraînement, cas rotation uniforme d'axe fixe	$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \Omega_{R'/R}^2 r^2 + C^{ste}$

TABLE 1 – Formules relatives aux référentiels non inertiels.

Énergétique

Puissance d'une force	$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$
Travail élémentaire	$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}(\vec{f}) dt = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$
Force conservative	$\exists E_p \mid \delta W(\vec{f}) = -dE_p$
Travail d'une force	$W(\vec{f}) = \int_{M \in \hat{AB}} \delta W(\vec{f})$
Condition pour qu'une force dérive d'une E_p	$\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$
Théorème de l'énergie cinétique	$\Delta E_c = \sum_i W(\vec{f}_i)$
Energie potentielle	$E_p = - \int_{\Gamma} dE_p$
Energie mécanique	$E_m = E_p + E_c$
Théorème de l'énergie mécanique	$\Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_i, \text{non conservative})$
Lien énergie potentielle / force	$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\vec{\text{grad}}(E_p)$
Lien puissance / Energie	$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt}$
Théorème de la puissance cinétique	$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$

TABLE 2 – Formules énergétiques.

2 Ondes

Avec u une coordonnée de l'espace ($u = ax + by + cz$), et $\vec{r} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$

Formules : Les ondes

D'Alembertien	$\square\Psi = \Delta\Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$
Équation de D'Alembert	$\square\Psi = 0$
Cas 1D	$\square\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$, avec $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$
Surface d'onde	Points M à t fixé tel que $\Psi(M, t) = C^{\text{ste}}$
Solutions de l'EDA 1D	$\Psi(u, t) = f(u - vt) + g(u + vt)$ ou $f(t - \frac{u}{v}) + g(t + \frac{u}{v})$
Pour Ψ solution de l'EDA 1D	Avec $a(u) = \Psi(u, 0)$ et $b(u) = \frac{\partial\Psi}{\partial t}(u, 0) = b(u)$
On a	$\Psi(u, t) = \frac{1}{2} \left(a(u - vt) + a(u + vt) + \frac{1}{v} \int_{u-vt}^{u+vt} b(s) ds \right)$
Onde progressive monochromatique	$\Psi(u, t) = \Psi_0 \cos(\omega t \pm ku + \varphi) = \Psi_0 \cos(\omega(t \pm \frac{u}{v}) + \varphi)$
Vecteur d'onde	$\vec{k} = k\vec{e}_u$
Norme du vecteur d'onde	$\ \vec{k}\ = k(\omega) = \frac{\omega}{v} = \vec{r} \cdot \vec{k}$
Longueur d'onde	$\lambda = T^{-1} = \frac{2\pi}{k}$ (car $k(u + \lambda) = ku + 2\pi$)
Célérité d'une onde dans la matière	$v_{\text{mat}} = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ Avec $E = \frac{K}{a}$ le module de Young et ρ sa masse volumique.
Célérité d'une onde dans une corde	$v_{\text{corde}} = \sqrt{\frac{T}{\mu_0}}$ Avec T la tension et μ_0 la masse linéique
Ondes stationnaires	$\Psi(u, t) = \gamma(t)\varphi(u)$
Sur une corde de longueur L,	$y_n(x, t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi v}{L} \right)$

TABLE 3 – Formules : Les Ondes

Paquets d'ondes

EDA :	$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \omega_0^2 \theta$
Forme recherchée :	$\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}_0 e^{i(\omega t - kx)}$
Reformulation de l'EDA :	$-\omega^2 \theta = v^2 k^2 \theta - \frac{1}{\tau} i \omega \theta - \omega_0^2 \theta$
Relation de dispersion : ($\theta \neq 0$)	$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{v^2} + \frac{1}{v^2 \tau} i \omega = k^2$
Vecteur d'onde complexe :	$\underline{k} = k' - i k''$
Forme de l'onde :	$\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}_0 e^{-k'' x} e^{i(\omega t - kx)}$
Vitesse de phase :	$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$
Distance caractéristique d'atténuation	$\frac{1}{ k''(\omega) }$
Klein Gordon (Limite $\omega_0 \ll 1$)	$\underline{k}^2 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{v^2}$
Vitesse de groupe	$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$

TABLE 4 – Paquets d'onde

3 Électromagnétique

Électromagnétique

Vecteur densité de courant volumique	$\vec{j} = qn^* \vec{v} = \rho \vec{v}$
Lien densité de courant volumique / Charge	$dQ = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$
Maxwell Gauss	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell Thomson / Flux	$\text{div}(\vec{B}) = 0$
Maxwell Faraday	$\text{rôt}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell Ampère	$\text{rôt}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Ostrogradski	$\iiint_{\mathcal{V}_S} \text{div}(\vec{F}) d\tau = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$
Stokes	$\iint_S \text{rôt}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$
Théorème de Gauss	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
Théorème d'Ampère	$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$
Conservation de la charge (local)	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$
Conservation de la charge (Global)	$\frac{dQ}{dt} + \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$
Lien champ électrique potentiels	$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$
Lien champ électrique potentiels	$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

TABLE 5 – Formules électromagnétique.

Électromagnétique (Tableau 2)

Pour une variable d'état \mathcal{E}	$\Delta\mathcal{E} = \sum_i \mathcal{E}_{i,\text{échangé}} + \mathcal{E}_{\text{créé}}$
Pour une variable d'état (infinitésimal) \mathcal{E}	$d\mathcal{E} = \sum_i \delta\mathcal{E}_{i,\text{échangé}} + \delta\mathcal{E}_{\text{créé}}$
Relations de passage à l'interface conducteur-vide	$\begin{cases} \vec{E}_{\text{vide}}(\mathbf{M}, t) = \frac{\sigma(\mathbf{M}, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{conducteur} \rightarrow \text{vide}} \\ \vec{B}_{\text{vide}} = \mu_0 \vec{J}_s(\mathbf{M}, t) \wedge \vec{n}_{\text{conducteur} \rightarrow \text{vide}} \end{cases}$

TABLE 6 – Formules électromagnétique. (Tableau 2)

Dipôles non rayonnants

Moment dipolaire	$\vec{p} = q\vec{N}\vec{P}$
Potentiel Dipôle	$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
Champ électrique, dipôle non rayonnant	$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$
Champ électrique dipôle non rayonnant, Forme intrinsèque	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p})$
Moment dû à un champ électrostatique sur un dipôle <i>rigide</i> non rayonnant	$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$
Énergie potentielle due à l'action électrostatique d'un champ uniforme sur un dipôle <i>rigide</i> non rayonnant	$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$
Force exercée par un champ électrostatique sur un dipôle non rayonnant au point O	$\vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow \text{dip}} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{\text{ext}}(\mathbf{O})$
Analogie champ électrique / magnétique	$\frac{1}{\epsilon_0} \longleftrightarrow \mu_0 \text{ et } \vec{p} \longleftrightarrow \vec{M}$

TABLE 7 – Dipôles non rayonnants.

Formule d'énergétique électromagnétique

Force de Lorentz	$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
Force de Lorentz volumique	$\vec{f}_{\text{Lorentz}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$
Force de Laplace	$\vec{F}_{\mathcal{L}} = i \vec{L} \wedge \vec{B}$
Force de Drude	$\vec{F}_{\text{Drude}} = -\frac{m_i}{\tau_i} \vec{v}_i$
Loi d'Ohm locale	$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \gamma = \sum_i \frac{n_i^* \tau_i q_i^2}{m_i}$
Lien puissance (Volumique) Lorentz / Drude	$p_{\text{Lorentz}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -p_{\text{Drude}}$
Densité volumique énergétique électromagnétique	e_{em} tel que $\mathcal{E}_{\text{em}} = \iiint_{M \in V} e_{\text{em}} d\mathcal{V}$
Conservation de l'énergie électromagnétique (Globale)	$\frac{d\mathcal{E}_{\text{em}}}{dt} + \oiint_{S_{\mathcal{V}}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = -\mathcal{P}_{\text{Lorentz}}$
Conservation de l'énergie électromagnétique (Local)	$\frac{\partial e_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{p}_{\text{Lorentz}}$
Formule pour e_{em}	$e_{\text{em}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$
Vecteur de Poynting	$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

TABLE 8 – Energie électromagnétique

Dipôles Rayonnants

Moment dipolaire atome soumis à un champ électrique	$\vec{p} = \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2} E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$
Approximation dipolaire	$r \gg a$
Dans l'approximation non relativiste	$a\omega \ll c$
Zone de rayonnement (Zone de champ lointaine)	$r \gg \lambda$
À l'onde exitatrice \vec{E}_{ext} est associé ω et λ tel que	$\lambda f = c \quad \lambda \frac{\omega}{2\pi} = c \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$
Pour prendre en compte le temps de propagation de l'onde, on définit	$\xi = t - \frac{r}{c}$
Expression des champs électromagnétiques dans cette zone	$\begin{cases} \vec{E}(\mathbf{M}, t) = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{r}{c}\right)^2 p''(\xi) \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(\mathbf{M}, t) = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3 c} \left(\frac{r}{c}\right)^2 p''(\xi) \vec{e}_\phi \end{cases}$
Puissance rayonnée	$\langle \vec{\Pi}(\mathbf{M}, t) \rangle_t = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \vec{e}_r$
Puissance moyenne, sphère rayon r , centré sur le dipôle	$\mathcal{P} = \iint_{\text{Sphère}} \langle \vec{\Pi}(\mathbf{M}, t) \rangle_t \cdot d\vec{S} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$
Régime Rayleigh (Régime basse fréquence)	$\omega^2 \ll \omega_0^2$ et donc, $p_0(\omega) = \frac{(Ze)^2 E_0}{m\omega_0^2}$
Puissance de Larmor	$\mathcal{P}_{\text{Larmor}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2\langle p^2 \rangle}{3c^2}$

TABLE 9 – Dipôles Rayonnants

Ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

Hypothèses sur le plasma	Dilué : On néglige la force de drude Neutre : Il y a autant de charges + que de - Non relativistes : Vitesses faibles devant c
Équations de Maxwell dans le plasma	(MG) : $\text{div} \vec{E} = 0$ (MF) : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (MT) : $\text{div} \vec{B} = 0$ (MA) : $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Conductivité complexe du plasma	$\vec{J} = \gamma \vec{E} = \frac{ne^2}{mi\omega} \vec{E}$
Pulsation Plasma (Pulsation de coupure)	$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$
Relation de dispersion dans le plasma (C'est Klein Gordon!)	$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$
Indice Optique	$n(\omega) = \frac{c}{ v_\varphi(\omega) }$
Rappel : Formule de Rayleigh	$v_g = v_\varphi + k' \frac{dv_\varphi}{dk'}$
Formule de Rayleigh, version avec n	$v_g = \frac{\pm c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$
Dispersion anormale (Impossible dans le plasma) : Dans ce cas, v_g ne définit pas la vitesse de transport de l'information	$\frac{dn}{d\omega} < 0$ et $v_\varphi > c$
Ordre de grandeur : Fréquence de coupure f_p dans l'ionosphère terrestre	$f_p \simeq 10\text{MHz}$

TABLE 10 – Ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

On se limite à des signaux lentement variables (En basse fréquence)

Ondes électromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques

TRD appliqué au porteur mobile moyen e^- libre :	$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$									
Relation “ohmique”	$\vec{j} = \frac{\gamma_0}{1 + i\tau\omega} \vec{E} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1 + i\tau\omega} \vec{E}$									
Approximation basse fréquence	$\tau\omega \ll 1, \frac{\omega\epsilon_0}{\gamma_0} \ll 1$									
Ordre de grandeur de ω pour le cuivre à 100K	$1 \times 10^{14}\text{rad/s}$									
Cette approximation est vérifiée lorsque (Radiofréquences)	$\omega \ll 1 \times 10^{14}\text{rad/s}$									
Radiofréquences :	$f \lesssim 1 \times 10^9\text{Hz}$									
Équations de Maxwell dans l'ARQS	<div>$(\text{MG}) : \text{div} \vec{E} = 0 \quad (\text{MF}) : \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$<hr/>$(\text{MT}) : \text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{MA}) : \text{rot} \vec{B} = \mu_0\gamma_0 \vec{E}$</div>									
Relation de dispersion (Obtenue en injectant (MF) dans (MA))	$\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$ (On a posé $\underline{k} = k' - ik''$)									
Expression du champ électrique	$\vec{E}(\text{M}, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{u}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{u}{\delta} + \Phi\right)$									
Rappel : Distance caractéristique d'atténuation :	$\delta = \frac{1}{ k''(\omega) }$									
Ordres de grandeur de δ	<table><tr><td>mat / freq</td><td>1kHz</td><td>1GHz</td></tr><tr><td>cuivre</td><td>$\delta = 2\text{mm}$</td><td>$\delta = 2\mu\text{m}$</td></tr><tr><td>fonte</td><td>$\delta = 2\text{cm}$</td><td>$\delta = 20\mu\text{m}$</td></tr></table>	mat / freq	1kHz	1GHz	cuivre	$\delta = 2\text{mm}$	$\delta = 2\mu\text{m}$	fonte	$\delta = 2\text{cm}$	$\delta = 20\mu\text{m}$
mat / freq	1kHz	1GHz								
cuivre	$\delta = 2\text{mm}$	$\delta = 2\mu\text{m}$								
fonte	$\delta = 2\text{cm}$	$\delta = 20\mu\text{m}$								
Conducteur parfait :	$\vec{E}(\text{M}, t) = 0$ au sein du conducteur									
Une OemPPM en incidence normale réfléchie vérifie	<div><div>— même amplitude</div><div>— même pulsation</div><div>— même polarisation</div><div>— vecteurs d'ondes de même direction mais opposés</div><div>— La réflexion s'accompagne d'un déphasage de π</div></div>									
Coefficient de réflexion en amplitude	$\underline{\Omega} = \frac{\text{Amplitude complexe de } \underline{E}_r \text{ à l'interface}}{\text{Amplitude complexe de } \underline{E}_i \text{ à l'interface}}$									

TABLE 11 – Ondes électromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques

Ondes électromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques (Tableau 2)

Transition	$\underline{t} = \frac{\underline{E}_r(\text{interface})}{\underline{E}_i(\text{interface})}$
Dans le modèle du conducteur parfait	$\delta = 0, \gamma \rightarrow +\infty, \underline{\Omega} = -1, \underline{t} = 0$
Stationairité des ondes du côté du vide	$\begin{cases} \vec{B}_{\text{vide}} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t + \varphi) \cos(ku) (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p) \\ \vec{E}_{\text{vide}} = 2E_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(ku) \vec{e}_p \end{cases}$
Densité d'énergie électromagnétique moyenne	$\langle e_{em}(M, t) \rangle_t = \varepsilon_0 E_0^2$
Vecteur de Poynting moyen	$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle_t = \vec{0}$

TABLE 12 – Ondes électromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques (Tableau 2)

Avec j l'unité complexe de partie imaginaire positive. ($j^2 = -1$, $\Im(j) = 1$). On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Filtrage

Fonction de transfert complexe	$\underline{H} = \frac{s}{e}$
FC ¹ : Passe bas du premier ordre	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$
FC : Passe haut du premier ordre	$\underline{H} = \frac{H_0 jx}{1 + jx}$
FC : Passe bas du second ordre	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - (x)^2 + j \frac{x}{Q}}$
FC : Passe haut du second ordre	$\underline{H} = \frac{H_0 (x)^2}{1 - (x)^2 + j \frac{x}{Q}}$
FC : Passe bande	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$
Remarque	<i>Pour passer d'un filtre passe haut à un filtre passe bas, il suffit de multiplier le numérateur par le terme prédominant en x au dénominateur!</i>
Bande passante	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ et $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$

TABLE 13 – Filtrage d'un signal periodique en RSF

4 Optique

Optique Ondulatoire

Longueur d'onde dans le vide (Resp. vecteur d'onde)	λ_0 (resp k_0)
Rappel : Relation de Plank Einstein :	$\mathcal{E} = \hbar\nu = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_0}$
Onde lumineuse monochromatique :	$\underline{\psi}(\mathbf{M}, t) = \Psi(\mathbf{M})e^{i(\omega t - \varphi(\mathbf{M}))}$
Retard de phase :	$\varphi(\mathbf{M}) = \tau_{\text{SM}} + \varphi(\mathbf{S})$
Retard de phase (2) :	$\tau_{\text{SM}} = \int_{\Gamma_{\text{SM}}} \frac{d\ell}{v_\varphi} = \int_{\Gamma_{\text{SM}}} \frac{nd\ell}{c} = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_{\text{SM}}} nd\ell = \frac{1}{c}(\text{SM})$
Intensité lumineuse :	$I(\mathbf{M}) = k \cdot \langle \psi^2(\mathbf{M}, t) \rangle_{\tau_r} = \frac{k}{\tau_r} \int_t^{t+\tau_r} \psi^2(\mathbf{M}, u) du$, $k = c\varepsilon_0$ Note : à l'usage, on ne prends pas en compte le k . τ_r le temps de réponse du capteur.
Ordre de grandeur de τ_r :	$\tau_{r,\text{oeuil humain}} = 1 \times 10^{-1} = 0,1\text{s}$ $\tau_{r,\text{capteur CCD}} = 1 \times 10^{-6}\text{s}$
Pour une onde monochromatique :	$I(\mathbf{M}) = \frac{\psi^2(\mathbf{M})}{2}$
Durée de cohérence	$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu} = \pi\tau$

TABLE 14 – Optique ondulatoire

Dispositif interférentiels des trous d'Young || Dispositif interférentiels à élargissement des fronts d'onde

Interférences à grande distance : Dans l'hypothèse où M est à grande distance des points S ₁ et S ₂	$a \ll D$ et $ x , y \ll D$
Difference de marche à grande distance dans le dispositif des trous d'Young :	$\delta_{1/2}(M) = n \frac{ax}{D}$
Difference de marche à grande distance dans le montage de Fraunhofer :	$\delta_{1/2}(M) = n \frac{ax}{f_2}$
Critère de brouillage par extension spatiale d'une fente source primaire, et critère de brouillage par extension spectrale de la source :	$ \Delta p \gtrsim 1$
Perte de contraste par élargissement angulaire de la source	$\theta_{\text{source}} \simeq \frac{\lambda}{a}$

TABLE 15 – Dispositif interférentiels des trous d'Young

Interferomètre à division d'amplitude || Dispositif interférentiels de Michelson

Difference de marche au point M par l'interferomètre :	$\delta_{1/2}(M) = 2ne \cos(i)$
Intensité en un point M de l'écran (Fresnel) :	$\mathcal{I}(M) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2en \cos i\right) \right)$
Rappel : Dans les conditions de gauss, DL ₂ :	$\cos(i) = 1 - \frac{i^2}{2} + o_{i \rightarrow 0}(i^2) \quad \sin(i) = i + o_{i \rightarrow 0}(i^2) = \tan(i)$
Reformulation de l'intensité en un point M de l'écran dans les conditions de gauss :	$\mathcal{I}(M) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi en}{\lambda_0} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{f'} \right)^2 \right) \right) \right]$
Rayon des anneaux :	$r = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{p(O')} \right)}$

TABLE 16 – Dispositif interférentiels de Michelson

5 Quantique

Introduction aux equations de la physique quantique

Energie du photon	$\mathcal{E}_{\text{photon}} = \hbar\omega$
Amplitude de protobabilité de présence	$\psi(M, t), \text{Im}(\psi) \subset \mathbb{C}$
Amplitude de protobabilité de présence	$dP(u, t) = \psi^*(u, t)\psi(u, t)du = \psi(u, t) ^2 du$ (La dernière égalité dans le cas u coordonnée cartésienne)
En cartésien 1D, on écrit la densité de probabilité de présence	$\rho(u, t) = \psi(u, t) ^2$
La probabilité de trouver la particule dans $[a, b]$ s'écrit	$P(a \leq u \leq b, t) = \int_a^b \rho(u, t)du$
Extension spatiale typique de la fonction d'onde	Δu
Longueur d'onde de Broglie (à prononcer <i>Breuil</i>)	λ_0 ou λ_{DB}
Pour u une variable aléatoire :	
Moyenne de u (<i>Esperance</i>)	$\langle u(t) \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} u\rho(u, t)du$
Moments de u (<i>Théorème de transfert</i>)	$\langle u^n(t) \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} u^n \rho(u, t)du, n \in \mathbb{N}^*$
Si u est en cartésien :	
Extension spatiale typique de la fonction d'onde (<i>Écart type</i>) :	$\Delta u = \sigma(u) = \sqrt{\mathbb{V}(u)} \underset{\text{K.H.}}{=} \sqrt{\mathbb{E}(u^2) - \mathbb{E}(u)^2} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle_\psi - \langle u(t) \rangle_\psi^2}$
Condition aux limites de Born	$\int_{\mathbb{R}} \rho(u, t)du = 1$
Équation de Schrödinger	$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi$
Terme d'énergie cinétique de la particule	$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi$
Terme lié à l'énergie potentielle	$V\psi$
Vitesse de la particule (def)	$\langle v_x(t) \rangle_\psi = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\langle x(t+dt) \rangle_\psi - \langle x(t) \rangle_\psi}{dt}$
Vitesse de la particule	$\langle v_x(t) \rangle_\psi = \frac{\hbar}{im} \int_{\mathbb{R}} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$

TABLE 17 – Introduction aux equations de la physique quantique

Introduction aux equations de la physique quantique (Tableau 2)

Quantité de mouvement	$\langle p_x \rangle_\psi = m \langle v_x \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$
Quantité de mouvement (Moment d'ordre 2)	$\langle p_x^2 \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$
Théorème d'Ehrenfest	$\frac{d\langle p_x \rangle_\psi}{dt} = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle_\psi$
Dans la limite classique $\Delta x \ll \Lambda$ (Λ l'échelle de longueur typique sur laquelle x varie, i.e. $V(x)$ peut être approché par sa tangente)	$\frac{d\langle p_x \rangle_\psi}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial x} (\langle x \rangle_{\psi,t})$ C'est le TRD!
Énergie cinétique	$\langle E_c \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dx$
Dans l'état stationnaire	φ
Longueur d'onde de De Broglie pour une onde (état) stationnaire	$\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$
Vitesse de phase pour une propagation libre	$v_\varphi = \frac{\hbar\omega}{2m}$
Vitesse de groupe pour une propagation libre	$v_g = \frac{\hbar k}{m}$
Remarque : $v_g \neq v_\varphi$, la propagation est dispersive	
Inégalité de Heisenberg (Cauchy-Schwartz)	$\Delta u \Delta p_u \geq \frac{\hbar}{2}$
Formule de diffraction pour les particules	$\Delta \sin \theta = \frac{\lambda_0}{a}$
Equation locale de conservation des probabilités de présence	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial u} = 0$
Vecteur densité de courant de probabilité de présence	$\vec{j} = \frac{1}{m} \text{Re} \left(\psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)$
Vecteur densité de courant de probabilité de présence pour une onde de Broglie	$\vec{j} = \rho \langle v \rangle_\psi = \psi ^2 \frac{\hbar k}{m}$

TABLE 18 – Introduction aux equations de la physique quantique (Tableau 2)

Avec η la taille du bord, λ_0 la longueur d'onde de De Broglie

Quantas et barrières de potentiels

Approximation sur la taille du bord	$\lambda_0 \ll \eta$
Conditions de discontinuités	φ et φ' sont continues
Expression de la fonction d'onde, cas $E > V_0$	$\psi(x, t) = \begin{cases} A_1 e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \left(e^{ik_1 x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{ik_1 x} \right) & \text{si } x < 0 \\ A_1 e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-ik_2 x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
Expression de la fonction d'onde, cas $E < V_0$	$\psi(x, t) = \{$
Probabilité de transmission en la marche de potentiel	$T = \frac{ \vec{j}_t }{ \vec{j}_i }$
Probabilité de transmission en la marche de potentiel	$R = \frac{ \vec{j}_r }{ \vec{j}_i }$

TABLE 19 – Quantas et barrières de potentiels

6 Chimie

Transformations Chimiques & acide base

Potentiel Hydrogène pour un acide fort en solution	$pH = -\log\left(\frac{[H_3O^+]}{c_0}\right)$
Constante d'équilibre de la réaction d'autoprotolyse de l'eau	$2H_2O_{(l)} \rightleftharpoons H_3O_{(aq)}^+ + HO_{(aq)}^- \quad Ke = 1.0 \times 10^{-14}$
Potentiel Hydrogène pour une base forte en solution	$[H_3O^+] = \frac{Ke(c_0)^2}{[HO^-]} \text{ donc } pH = -\log\left(\frac{Ke(c_0)}{[HO^-]}\right)$
Formule d'Enderson (C'est $-\log(\text{Gulberg \& Waage})$)	$-pH = -pKa + \log\left(\frac{[base]}{[acide]}\right)$
Approximation de la réaction très peu avancée	$c_0 K_a \ll c_a$
Approximation de la réaction très avancée	$c_0 K_a \gg c_a$

TABLE 20 – Transformations Chimiques & acide base

7 Annexes

Quelques constantes

Constante de gravitation	$\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$
Vitesse de la lumière	$c = 3,00 \times 10^8 \text{m/s}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{Js}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{C}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{J/K}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{kg}$
Constante de permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{F/m}$
Constante de perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$
Champ de claquage de l'air sec	$E_{\text{claquage, air sec}} = 10 \times 10^5 \text{V/m}$
Masse de la Terre	$M_{\text{Terre}} = 5,97 \times 10^{24} \text{kg}$
Rayon moyen de la Terre	$R_{\text{Terre}} = 6,37 \times 10^6 \text{m}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2/\text{K}^4$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{l/mol}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{J/(molK)}$
Masse du Soleil	$M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{kg}$
Rayon moyen du Soleil	$R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{m}$
K standard de la réaction d'autoprotolise de l'eau ($2\text{H}_2\text{O}_{(l)} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+ + \text{HO}_{(aq)}^-$)	$K_e = 10 \times 10^{-14}$

TABLE 21 – Quelques constantes physiques

Formulaire d’analyse vectorielle

TABLE 22 – Formulaire d’analyse vectorielle

8 Compléments X-ENS

Compléments

Loi de Biot et Savart	$\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\vec{\ell} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3}$
-----------------------	--

TABLE 23 – Compléments