

Table des matières

1 Mécanique	1
2 Ondes	4
3 Électromagnétique	6
4 Optique	14
5 Quantique	15
6 Chimie	19
7 Thermodynamique	20
8 Annexes	23
9 Compléments X-ENS	24

1 Mécanique

Δ un axe fixe, $\mathcal{D} \in \Delta$, O, O', M des points de l'espace, et $H \in \Delta$ le projeté orthogonal de M sur Δ

Référentiels non Galiléens

Formule de dérivation composée	$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{U}$
Vitesse	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e(M)$
Vitesse d'entraînement	$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_R(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M}$
Vitesse ref en translation uniforme	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e(M) = \vec{v}_R(O') + \vec{v}_{R'}(O')$
Vitesse ref en rotation uniforme d'axe fixe	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge H\vec{M}$
Accélération ref en translation uniforme	$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_R(O')$
Accélération ref en rotation uniforme d'axe fixe	$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M)$
Accélération de Coriolis	$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{R'}(M)$
Accélération d'entraînement	$\vec{a}_e(M) = -\Omega_{R'/R}^2 H\vec{M}$
Théorème de la résultante dynamique	$\vec{a}_{R'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$
Théorème du moment cinétique	$\left(\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{A/R'}(M)}{dt}\right)_R = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ext}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ic})$
Energie d'entraînement, cas translation rectiligne	$E_{p,ie} = m a_e x + C^{ste}$
Energie d'entraînement, cas rotation uniforme d'axe fixe	$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \Omega_{R'/R}^2 r^2 + C^{ste}$

TABLE 1 – Formules relatives aux référentiels non inertiels.

Énergétique

Puissance d'une force	$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$
Travail élémentaire	$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}(\vec{f}) dt = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$
Force conservative	$\exists E_p \mid \delta W(\vec{f}) = -dE_p$
Travail d'une force	$W(\vec{f}) = \int_{M \in \hat{AB}} \delta W(\vec{f})$
Condition pour qu'une force dérive d'une E_p	$\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$
Théorème de l'énergie cinétique	$\Delta E_c = \sum_i W(\vec{f}_i)$
Energie potentielle	$E_p = \int_{\Gamma} dE_p$
Energie mécanique	$E_m = E_p + E_c$
Théorème de l'énergie mécanique	$\Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_i, \text{non conservative})$
Lien énergie potentielle / force	$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\vec{\text{grad}}(E_p)$
Lien puissance / Energie	$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt}$
Théorème de la puissance cinétique	$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$

TABLE 2 – Formules énergétiques.

2 Ondes

Avec u une coordonnée de l'espace ($u = ax + by + cz$), et $\vec{r} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$

Formules : Les ondes

D'Alembertien	$\square\Psi = \Delta\Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$
Équation de D'Alembert	$\square\Psi = 0$
Cas 1D	$\square\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$, avec $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$
Surface d'onde	Points M à t fixé tel que $\Psi(M, t) = C^{\text{ste}}$
Solutions de l'EDA 1D	$\Psi(u, t) = f(u - vt) + g(u + vt)$ ou $f(t - \frac{u}{v}) + g(t + \frac{u}{v})$
Pour Ψ solution de l'EDA 1D	Avec $a(u) = \Psi(u, 0)$ et $b(u) = \frac{\partial\Psi}{\partial t}(u, 0) = b(u)$
On a	$\Psi(u, t) = \frac{1}{2} \left(a(u - vt) + a(u + vt) + \frac{1}{v} \int_{u-vt}^{u+vt} b(s) ds \right)$
Onde progressive monochromatique	$\Psi(u, t) = \Psi_0 \cos(\omega t \pm ku + \varphi) = \Psi_0 \cos(\omega(t \pm \frac{u}{v}) + \varphi)$
Vecteur d'onde	$\vec{k} = k\vec{e}_u$
Norme du vecteur d'onde	$\ \vec{k}\ = k(\omega) = \frac{\omega}{v} = \vec{r} \cdot \vec{k}$
Longueur d'onde	$\lambda = T^{-1} = \frac{2\pi}{k}$ (car $k(u + \lambda) = ku + 2\pi$)
Célérité d'une onde dans la matière	$v_{\text{mat}} = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ Avec $E = \frac{K}{a}$ le module de Young et ρ sa masse volumique.
Célérité d'une onde dans une corde	$v_{\text{corde}} = \sqrt{\frac{T}{\mu_0}}$ Avec T la tension et μ_0 la masse linéique
Ondes stationnaires	$\Psi(u, t) = \gamma(t)\varphi(u)$
Sur une corde de longueur L,	$y_n(x, t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi v}{L} \right)$

TABLE 3 – Formules : Les Ondes

Paquets d'ondes

EDA :	$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \omega_0^2 \theta$
Forme recherchée :	$\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}_0 e^{i(\omega t - kx)}$
Reformulation de l'EDA :	$-\omega^2 \theta = v^2 k^2 \theta - \frac{1}{\tau} i \omega \theta - \omega_0^2 \theta$
Relation de dispersion : ($\theta \neq 0$)	$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{v^2} + \frac{1}{v^2 \tau} i \omega = k^2$
Vecteur d'onde complexe :	$\underline{k} = k' - i k''$
Forme de l'onde :	$\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}_0 e^{-k'' x} e^{i(\omega t - kx)}$
Vitesse de phase :	$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$
Distance caractéristique d'atténuation	$\frac{1}{ k''(\omega) }$
Klein Gordon (Limite $\omega_0 \ll 1$)	$\underline{k}^2 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{v^2}$
Vitesse de groupe	$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$

TABLE 4 – Paquets d'onde

3 Électromagnétique

Électromagnétique

Vecteur densité de courant volumique	$\vec{j} = qn^* \vec{v} = \rho \vec{v}$
Lien densité de courant volumique / Charge	$dQ = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$
Maxwell Gauss	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell Thomson / Flux	$\text{div}(\vec{B}) = 0$
Maxwell Faraday	$\text{rôt}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell Ampère	$\text{rôt}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Ostrogradski	$\iiint_{\mathcal{V}_S} \text{div}(\vec{F}) d\tau = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$
Stokes	$\iint_S \text{rôt}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$
Théorème de Gauss	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
Théorème d'Ampère	$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$
Conservation de la charge (local)	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$
Conservation de la charge (Global)	$\frac{dQ}{dt} + \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$
Lien champ électrique potentiels	$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$
Lien champ électrique potentiels	$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

TABLE 5 – Formules électromagnétique.

Électromagnétique (Tableau 2)

Pour une variable d'état \mathcal{E}	$\Delta\mathcal{E} = \sum_i \mathcal{E}_{i,\text{échangé}} + \mathcal{E}_{\text{créée}}$
Pour une variable d'état (infinitésimal) \mathcal{E}	$d\mathcal{E} = \sum_i \delta\mathcal{E}_{i,\text{échangé}} + \delta\mathcal{E}_{\text{créée}}$
Relations de passage à l'interface conducteur-vide	$\begin{cases} \vec{E}_{\text{vide}}(\mathbf{M}, t) = \frac{\sigma(\mathbf{M}, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{conducteur} \rightarrow \text{vide}} \\ \vec{B}_{\text{vide}} = \mu_0 \vec{J}_s(\mathbf{M}, t) \wedge \vec{n}_{\text{conducteur} \rightarrow \text{vide}} \end{cases}$

TABLE 6 – Formules électromagnétique. (Tableau 2)

Dipôles non rayonnants

Moment dipolaire	$\vec{p} = q\vec{N}\vec{P}$
Potentiel Dipôle	$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
Champ électrique, dipôle non rayonnant	$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$
Champ électrique dipôle non rayonnant, Forme intrinsèque	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p})$
Moment dû à un champ électrostatique sur un dipôle <i>rigide</i> non rayonnant	$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$
Énergie potentielle due à l'action électrostatique d'un champ uniforme sur un dipôle <i>rigide</i> non rayonnant	$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$
Force exercée par un champ électrostatique sur un dipôle non rayonnant au point O	$\vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow \text{dip}} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{\text{ext}}(\mathbf{O})$
Analogie champ électrique / magnétique	$\frac{1}{\epsilon_0} \longleftrightarrow \mu_0 \text{ et } \vec{p} \longleftrightarrow \vec{M}$

TABLE 7 – Dipôles non rayonnants.

Formule d'énergétique électromagnétique

Force de Lorentz	$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
Force de Lorentz volumique	$\vec{f}_{\text{Lorentz}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$
Force de Laplace	$\vec{F}_{\mathcal{L}} = i \vec{L} \wedge \vec{B}$
Force de Drude	$\vec{F}_{\text{Drude}} = -\frac{m_i}{\tau_i} \vec{v}_i$
Loi d'Ohm locale	$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \gamma = \sum_i \frac{n_i^* \tau_i q_i^2}{m_i}$
Lien puissance (Volumique) Lorentz / Drude	$p_{\text{Lorentz}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -p_{\text{Drude}}$
Densité volumique énergétique électromagnétique	e_{em} tel que $\mathcal{E}_{\text{em}} = \iiint_{M \in V} e_{\text{em}} d\mathcal{V}$
Conservation de l'énergie électromagnétique (Globale)	$\frac{d\mathcal{E}_{\text{em}}}{dt} + \oiint_{S_{\mathcal{V}}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = -\mathcal{P}_{\text{Lorentz}}$
Conservation de l'énergie électromagnétique (Local)	$\frac{\partial e_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{p}_{\text{Lorentz}}$
Formule pour e_{em}	$e_{\text{em}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$
Vecteur de Poynting	$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

TABLE 8 – Energie électromagnétique

Dipôles Rayonnants

Moment dipolaire atome soumis à un champ électrique	$\vec{p} = \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2} E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$
Approximation dipolaire	$r \gg a$
Dans l'approximation non relativiste	$a\omega \ll c$
Zone de rayonnement (Zone de champ lointaine)	$r \gg \lambda$
À l'onde exitatrice \vec{E}_{ext} est associé ω et λ tel que	$\lambda f = c \quad \lambda \frac{\omega}{2\pi} = c \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$
Pour prendre en compte le temps de propagation de l'onde, on définit	$\xi = t - \frac{r}{c}$
Expression des champs électromagnétiques dans cette zone	$\begin{cases} \vec{E}(\mathbf{M}, t) = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{r}{c}\right)^2 p''(\xi) \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(\mathbf{M}, t) = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3 c} \left(\frac{r}{c}\right)^2 p''(\xi) \vec{e}_\phi \end{cases}$
Puissance rayonnée	$\langle \vec{\Pi}(\mathbf{M}, t) \rangle_t = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \vec{e}_r$
Puissance moyenne, sphère rayon r , centré sur le dipôle	$\mathcal{P} = \iint_{\text{Sphère}} \langle \vec{\Pi}(\mathbf{M}, t) \rangle_t \cdot d\vec{S} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$
Régime Rayleigh (Régime basse fréquence)	$\omega^2 \ll \omega_0^2$ et donc, $p_0(\omega) = \frac{(Ze)^2 E_0}{m\omega_0^2}$
Puissance de Larmor	$\mathcal{P}_{\text{Larmor}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2\langle p^2 \rangle}{3c^3}$

TABLE 9 – Dipôles Rayonnants

Ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

Hypothèses sur le plasma	Dilué : On néglige la force de drude Neutre : Il y a autant de charges + que de - Non relativistes : Vitesses faibles devant c
Équations de Maxwell dans le plasma	(MG) : $\text{div} \vec{E} = 0$ (MF) : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (MT) : $\text{div} \vec{B} = 0$ (MA) : $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Conductivité complexe du plasma	$\vec{J} = \gamma \vec{E} = \frac{ne^2}{mi\omega} \vec{E}$
Pulsation Plasma (Pulsation de coupure)	$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$
Relation de dispersion dans le plasma (C'est Klein Gordon!)	$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$
Indice Optique	$n(\omega) = \frac{c}{ v_\varphi(\omega) }$
Rappel : Formule de Rayleigh	$v_g = v_\varphi + k' \frac{dv_\varphi}{dk'}$
Formule de Rayleigh, version avec n	$v_g = \frac{\pm c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$
Dispersion anormale (Impossible dans le plasma) : Dans ce cas, v_g ne définit pas la vitesse de transport de l'information	$\frac{dn}{d\omega} < 0$ et $v_\varphi > c$
Ordre de grandeur : Fréquence de coupure f_p dans l'ionosphère terrestre	$f_p \simeq 10\text{MHz}$

TABLE 10 – Ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

On se limite à des signaux lentement variables (En basse fréquence)

Ondes électromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques

TRD appliqué au porteur mobile moyen e^- libre :	$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$									
Relation “ohmique”	$\vec{j} = \frac{\gamma_0}{1 + i\tau\omega} \vec{E} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1 + i\tau\omega} \vec{E}$									
Approximation basse fréquence	$\tau\omega \ll 1, \frac{\omega\epsilon_0}{\gamma_0} \ll 1$									
Ordre de grandeur de ω pour le cuivre à 100K	$1 \times 10^{14}\text{rad/s}$									
Cette approximation est vérifiée lorsque (Radiofréquences)	$\omega \ll 1 \times 10^{14}\text{rad/s}$									
Radiofréquences :	$f \lesssim 1 \times 10^9\text{Hz}$									
Équations de Maxwell dans l'ARQS	<div>$(\text{MG}) : \text{div} \vec{E} = 0 \quad (\text{MF}) : \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$(\text{MT}) : \text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{MA}) : \text{rot} \vec{B} = \mu_0\gamma_0 \vec{E}$</div>									
Relation de dispersion (Obtenue en injectant (MF) dans (MA))	$\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$ (On a posé $\underline{k} = k' - ik''$)									
Expression du champ électrique	$\vec{E}(\text{M}, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{u}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{u}{\delta} + \Phi\right)$									
Rappel : Distance caractéristique d'atténuation :	$\delta = \frac{1}{ k''(\omega) }$									
Ordres de grandeur de δ	<table><tr><td>mat / freq</td><td>1kHz</td><td>1GHz</td></tr><tr><td>cuivre</td><td>$\delta = 2\text{mm}$</td><td>$\delta = 2\mu\text{m}$</td></tr><tr><td>fonte</td><td>$\delta = 2\text{cm}$</td><td>$\delta = 20\mu\text{m}$</td></tr></table>	mat / freq	1kHz	1GHz	cuivre	$\delta = 2\text{mm}$	$\delta = 2\mu\text{m}$	fonte	$\delta = 2\text{cm}$	$\delta = 20\mu\text{m}$
	mat / freq	1kHz	1GHz							
	cuivre	$\delta = 2\text{mm}$	$\delta = 2\mu\text{m}$							
fonte	$\delta = 2\text{cm}$	$\delta = 20\mu\text{m}$								
Conducteur parfait :	$\vec{E}(\text{M}, t) = 0$ au sein du conducteur									
Une OemPPM en incidence normale réfléchie vérifie	<div><div>— même amplitude</div><div>— même pulsation</div><div>— même polarisation</div><div>— vecteurs d'ondes de même direction mais opposés</div><div>— La réflexion s'accompagne d'un déphasage de π</div></div>									
Coefficient de réflexion en amplitude	$\underline{\Omega} = \frac{\text{Amplitude complexe de } \underline{E}_r \text{ à l'interface}}{\text{Amplitude complexe de } \underline{E}_i \text{ à l'interface}}$									

TABLE 11 – Ondes électromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques

Ondes électromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques (Tableau 2)

Transition	$\underline{t} = \frac{\underline{E}_r(\text{interface})}{\underline{E}_i(\text{interface})}$
Dans le modèle du conducteur parfait	$\delta = 0, \gamma \rightarrow +\infty, \underline{\Omega} = -1, \underline{t} = 0$
Stationairité des ondes du côté du vide	$\begin{cases} \vec{B}_{\text{vide}} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t + \varphi) \cos(ku) (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p) \\ \vec{E}_{\text{vide}} = 2E_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(ku) \vec{e}_p \end{cases}$
Densité d'énergie électromagnétique moyenne	$\langle e_{em}(M, t) \rangle_t = \varepsilon_0 E_0^2$
Vecteur de Poynting moyen	$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle_t = \vec{0}$

TABLE 12 – Ondes électromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques (Tableau 2)

Avec j l'unité complexe de partie imaginaire positive. ($j^2 = -1, \Im(j) = 1$). On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Filtrage

Fonction de transfert complexe	$\underline{H} = \frac{s}{e}$
FC ¹ : Passe bas du premier ordre	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$
FC : Passe haut du premier ordre	$\underline{H} = \frac{H_0 jx}{1 + jx}$
FC : Passe bas du second ordre	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - (x)^2 + j \frac{x}{Q}}$
FC : Passe haut du second ordre	$\underline{H} = \frac{H_0 (x)^2}{1 - (x)^2 + j \frac{x}{Q}}$
FC : Passe bande	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$
Remarque	<i>Pour passer d'un filtre passe haut à un filtre passe bas, il suffit de multiplier le numérateur par le terme prédominant en x au dénominateur!</i>
Bande passante	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ et $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$

TABLE 13 – Filtrage d'un signal periodique en RSF

4 Optique

Optique Ondulatoire

Longueur d'onde dans le vide (Resp. vecteur d'onde)	λ_0 (resp k_0)
Rappel : Relation de Plank Einstein :	$\mathcal{E} = \hbar\nu = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_0}$
Onde lumineuse monochromatique :	$\underline{\psi}(\mathbf{M}, t) = \Psi(\mathbf{M})e^{i(\omega t - \varphi(\mathbf{M}))}$
Retard de phase :	$\varphi(\mathbf{M}) = \tau_{\text{SM}} + \varphi(\mathbf{S})$
Retard de phase (2) :	$\tau_{\text{SM}} = \int_{\Gamma_{\text{SM}}} \frac{d\ell}{v_\varphi} = \int_{\Gamma_{\text{SM}}} \frac{nd\ell}{c} = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_{\text{SM}}} nd\ell = \frac{1}{c}(\text{SM})$
Intensité lumineuse :	$I(\mathbf{M}) = k \cdot \langle \psi^2(\mathbf{M}, t) \rangle_{\tau_r} = \frac{k}{\tau_r} \int_t^{t+\tau_r} \psi^2(\mathbf{M}, u) du$, $k = c\varepsilon_0$ Note : à l'usage, on ne prends pas en compte le k . τ_r le temps de réponse du capteur.
Ordre de grandeur de τ_r :	$\tau_{r,\text{oeuil humain}} = 1 \times 10^{-1} = 0,1\text{s}$ $\tau_{r,\text{capteur CCD}} = 1 \times 10^{-6}\text{s}$
Pour une onde monochromatique :	$I(\mathbf{M}) = \frac{\psi^2(\mathbf{M})}{2}$
Durée de cohérence	$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu} = \pi\tau$

TABLE 14 – Optique ondulatoire

Dispositif interférentiels des trous d'Young || Dispositif interférentiels à élargissement des fronts d'onde

Interférences à grande distance : Dans l'hypothèse où M est à grande distance des points S_1 et S_2	$a \ll D$ et $ x , y \ll D$
Difference de marche à grande distance dans le dispositif des trous d'Young :	$\delta_{1/2}(M) = n \frac{ax}{D}$
Difference de marche à grande distance dans le montage de Fraunhofer :	$\delta_{1/2}(M) = n \frac{ax}{f_2}$
Critère de brouillage par extension spatiale d'une fente source primaire, et critère de brouillage par extension spectrale de la source :	$ \Delta p \gtrsim 1$
Critère de brouillage	$l_c \simeq \delta_{1/2}$? (À vérifier)
Perte de contraste par élargissement angulaire de la source	$\theta_{\text{source}} \simeq \frac{\lambda}{a}$

TABLE 15 – Dispositif interférentiels des trous d'Young

Interferomètre à division d'amplitude || Dispositif interférentiels de Michelson

Difference de marche au point M par l'interferomètre :	$\delta_{1/2}(M) = 2ne \cos(i)$
Intensité en un point M de l'écran (Fresnel) :	$\mathcal{I}(M) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2en \cos i\right) \right)$
Rappel : Dans les conditions de gauss, DL_2 :	$\cos(i) = 1 - \frac{i^2}{2} + o(i^2) \quad \sin(i) = i + o(i^2) = \tan(i)$
Reformulation de l'intensité en un point M de l'écran dans les conditions de gauss :	$\mathcal{I}(M) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi en}{\lambda_0} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{f'}\right)^2\right)\right) \right]$
Rayon des anneaux :	$r = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{p(O')}\right)}$

TABLE 16 – Dispositif interférentiels de Michelson

5 Quantique

Introduction aux equations de la physique quantique

Energie du photon	$\mathcal{E}_{\text{photon}} = \hbar\omega$
Amplitude de protobabilité de présence	$\psi(M, t), \text{Im}(\psi) \subset \mathbb{C}$
Amplitude de protobabilité de présence	$dP(u, t) = \psi^*(u, t)\psi(u, t)du = \psi(u, t) ^2 du$ (La dernière égalité dans le cas u coordonnée cartésienne)
En cartésien 1D, on écrit la densité de probabilité de présence	$\rho(u, t) = \psi(u, t) ^2$
La probabilité de trouver la particule dans $[a, b]$ s'écrit	$P(a \leq u \leq b, t) = \int_a^b \rho(u, t)du$
Extension spatiale typique de la fonction d'onde	Δu
Longueur d'onde de Broglie (à prononcer <i>Breuil</i>)	λ_0 ou λ_{DB}
Pour u une variable aléatoire :	
Moyenne de u (<i>Esperance</i>)	$\langle u(t) \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} u\rho(u, t)du$
Moments de u (<i>Théorème de transfert</i>)	$\langle u^n(t) \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} u^n \rho(u, t)du, n \in \mathbb{N}^*$
Si u est en cartésien :	
Extension spatiale typique de la fonction d'onde (<i>Écart type</i>) :	$\Delta u = \sigma(u) = \sqrt{\mathbb{V}(u)} \underset{\text{K.H.}}{=} \sqrt{\mathbb{E}(u^2) - \mathbb{E}(u)^2} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle_\psi - \langle u(t) \rangle_\psi^2}$
Condition aux limites de Born	$\int_{\mathbb{R}} \rho(u, t)du = 1$
Équation de Schrödinger	$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi$
Terme d'énergie cinétique de la particule	$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi$
Terme lié à l'énergie potentielle	$V\psi$
Vitesse de la particule (def)	$\langle v_x(t) \rangle_\psi = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\langle x(t+dt) \rangle_\psi - \langle x(t) \rangle_\psi}{dt}$
Vitesse de la particule	$\langle v_x(t) \rangle_\psi = \frac{\hbar}{im} \int_{\mathbb{R}} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$

TABLE 17 – Introduction aux equations de la physique quantique

Introduction aux equations de la physique quantique (Tableau 2)

Quantité de mouvement	$\langle p_x \rangle_\psi = m \langle v_x \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$
Quantité de mouvement (Moment d'ordre 2)	$\langle p_x^2 \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$
Énergie moyenne	$\langle E \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(-\frac{\hbar}{i} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} dx$
Énergie moyenne (Moment d'ordre 2)	$\langle E^2 \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(-\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dx$
Théorème d'Ehrenfest	$\frac{d\langle p_x \rangle_\psi}{dt} = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle_\psi$
Dans la limite classique $\Delta x \ll \Lambda$ (Λ l'échelle de longueur typique sur laquelle x varie, i.e. $V(x)$ peut être approché par sa tangente)	$\frac{d\langle p_x \rangle_\psi}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial x} (\langle x \rangle_\psi, t)$ C'est le TRD!
Énergie cinétique	$\langle E_c \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dx$
Dans l'état stationnaire	$\Psi(x, t) = \zeta(t)\varphi(x)$
Longueur d'onde de De Broglie pour une onde (état) stationnaire	$\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$
Vitesse de phase pour une propagation libre	$v_\varphi = \frac{\hbar\omega}{2m}$
Vitesse de groupe pour une propagation libre	$v_g = \frac{\hbar k}{m}$
Remarque : $v_g \neq v_\varphi$, la propagation est dispersive	
Inégalité de Heisenberg (Cauchy-Schwartz avec $\int_{\mathbb{R}} \left u\psi + \hbar\lambda \frac{\partial \psi}{\partial u} \right du$ et SPDG $\langle u \rangle = 0$, $\langle p_u \rangle = 0$)	$\Delta u \Delta p_u \geq \frac{\hbar}{2}$
Formule de diffraction pour les particules	$\Delta \sin \theta = \frac{\lambda_0}{a}$
Equation locale de conservation des probabilités de présence	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial u} = 0$
Vecteur densité de courant de probabilité de présence	$\vec{j} = \frac{1}{m} \text{Re} \left(\psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)$
Vecteur densité de courant de probabilité de présence pour une onde de Broglie	$\vec{j} = \rho \langle v \rangle_\psi = \psi ^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$

TABLE 18 – Introduction aux equations de la physique quantique (Tableau 2)

Avec η la taille du bord, λ_0 la longueur d'onde de De Broglie

Quantas et barrières de potentiels

Approximation sur la taille du bord	$\lambda_0 \ll \eta$
Conditions de discontinuités	φ et φ' sont continues
Expression de la fonction d'onde, cas $E > V_0$	$\psi(x, t) = \begin{cases} A_1 e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \left(e^{ik_1 x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{ik_1 x} \right) & \text{si } x < 0 \\ A_1 e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-ik_2 x} & \end{cases}$
Expression de la fonction d'onde, cas $E < V_0$	$\psi(x, t) = \{$
Probabilité de transmission en la marche de potentiel	$T = \frac{ \vec{j}_t }{ \vec{j}_i }$
Probabilité de réflexion en la marche de potentiel	$R = \frac{ \vec{j}_r }{ \vec{j}_i }$
Probabilité de transmission pour une barrière de potentiel épaisse	$T = \frac{ \vec{j}_{t,II} }{ \vec{j}_{i,I} }$
Probabilité de réflexion pour une barrière de potentiel épaisse	$T = \frac{ \vec{j}_{r,I} }{ \vec{j}_{i,I} }$
Dans l'approximation $L \simeq \eta \delta$	$T = e^{-\frac{2L}{\delta}}$
Dans un puit de potentiel infini	$E_m = \frac{\hbar^2}{8mL^2} n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*$
Energie de confinement	$E_{\min} \simeq \frac{\hbar^2}{mL^2}$
Pulsation de Bohr	$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$

TABLE 19 – Quantas et barrières de potentiels

6 Chimie

Transformations Chimiques & acide base

Potentiel Hydrogène pour un acide fort en solution	$pH = -\log\left(\frac{[H_3O^+]}{c_0}\right)$
Constante d'équilibre de la réaction d'autoprotolyse de l'eau	$2H_2O_{(l)} \rightleftharpoons H_3O_{(aq)}^+ + HO_{(aq)}^- \quad Ke = 1.0 \times 10^{-14}$
Potentiel Hydrogène pour une base forte en solution	$[H_3O^+] = \frac{Ke(c_0)^2}{[HO^-]} \text{ donc } pH = -\log\left(\frac{Ke(c_0)}{[HO^-]}\right)$
Formule d'Enderson (C'est $-\log(\text{Gulberg \& Waage})$)	$-pH = -pKa + \log\left(\frac{[base]}{[acide]}\right)$
Approximation de la réaction très peu avancée	$c_0 K_a \ll c_a$
Approximation de la réaction très avancée	$c_0 K_a \gg c_a$

TABLE 20 – Transformations Chimiques & acide base

7 Thermodynamique

Thermodynamique

Premier principe de la thermodynamique (Pour un système fermé avec $> 10^6$ particules) :	$dU + dE_c = \delta W + \delta Q$
Rappel : G une grandeur extensive, $\Sigma_1 = \Sigma_2$	$G(\Sigma_1 + \Sigma_2) = G(\Sigma_1) + G(\Sigma_2)$
Rappel : G une grandeur intensive, $\Sigma_1 = \Sigma_2$	$G(\Sigma_1 + \Sigma_2) = 2G(\Sigma_1)$
Avertissement :	$d \equiv$ variation, $\delta \equiv$ petite quantité. En forme intégré, on a $d \mapsto \Delta, \delta \mapsto \epsilon$
Entalpie	$H = U + pV$
Transformation :	
Isobare	La pression interieure ne change pas
Monobare	Dans une atmosphère (i.e pression extérieure constante, le système doit pouvoir échanger du volume)
Adiabatique	Pas de transfert thermique
Isochore	Le volume est constant
Deuxième principe de la thermodynamique (Pour un système avec suffisamment de particules)	$dS = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}}$
Propriétés de $S_{\text{créée}}$	$\delta S_{\text{créée}} > 0 \text{ J/K}$
Propriétés de $S_{\text{échangée}}$	$\delta S_{\text{échangée}} = \sum_{k \in \text{Paroi}} \frac{\delta Q_k}{T_k}$
Exemple imbatale de la non-conservation de l'entropie	$\Omega = \{\text{Univers}\}, dS_{\text{Univers}} = \delta S_{\text{créée}} + \underbrace{\delta S_{\text{échangée}}}_{=0} > 0$
Rendement ou efficacité de Carnot	$\eta = \frac{\text{grandeur énergétique utile}}{\text{grandeur énergétique coûteuse}}$
Transformation réversible	$S_{\text{créée}} = 0$

TABLE 21 – Formules Thermodynamique.

Thermodynamique (2)

Phase	Deux points A et B sont dans la même phase $\Leftrightarrow \exists$ chemin de A à B sans discontinuité mésoscopique pour une grandeur intensive
Équation d'état d'une phase	$f(p, V_m, T) = 0$
Première identité thermodynamique	$dU = TdS - pdV$
Deuxième identité thermodynamique	$dH = TdS + Vdp$
Équation d'état du gas parfait (GP)	$pV_m = RT \Leftrightarrow pV = nRT$
Rappel : Constante des gaz parfaits	$R = 8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Première loi de Joule	Pour un GP, $dU_m = C_{Vm}dT$ $du = c_vdT$
Deuxième loi de joule	Pour un GP, $dH_m = C_{pm}dT$ $dh = c_pdT$
Relation de Mayer	Pour un GP, $C_{pm} = C_{Vm} + R$ $c_p = c_v + \frac{R}{M}$
Pour un GP k -atomique	$C_m = \frac{3+2k}{2}R$ $C_{pm} = \frac{5+2k}{2}R$
Entropie molaire S_m du GP	$S_m - S_{m0} = C_{Vm} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{V_m}{V_{m0}}\right)$
Coefficient de Laplace	$\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} = \frac{c_p}{c_v}$
Ordre de grandeur de γ	$\gamma \approx 1.4$
Lois de laplace pour un GP subissant une transformation isentropique (ou adiabatique + réversible)	$\begin{cases} pV_m^\gamma = C^{\text{ste}} \\ TV_m^{\gamma-1} = C^{\text{ste}} \\ T^\gamma p^{1-\gamma} = C^{\text{ste}} \end{cases}$
Équation d'état pour une PCII (Phase condensée indilatable incompressible)	$V_m = C^{\text{ste}}$ $v = C^{\text{ste}}$ $dU_m = C_m dT$ $du = c dT$
ODGS de C_m, c	$C_{m,\text{eau liquide}} = 76 \text{ Jmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ $c_{\text{eau liquide}} = 4,2 \text{ Jg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ $C_{m,\text{habituel}} \approx 3R$
Dans de nombreuses situations	$dH_m \approx C_m dT = dU_m$
Entropie molaire d'une PCII	$S_m - S_{m0} = C_{Vm} \ln\left(\frac{T}{T_{m0}}\right)$
ODG de l'enthalpie de vaporisation de l'eau	$h_{\text{vap, eau}} = 2 \cdot 10^3 \text{ J/g}$
Théorème des moment (En fait très visuel)	$2F_g = \frac{v(M) - v_L}{v_G - g_L}$

TABLE 22 – Formules Thermodynamique (2).

Transferts Thermiques

Loi du fourier	$\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$
Flux Thermique	$\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$
Equation de la chaleur	$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T + \frac{p_{th}}{\rho c}, \quad (\Delta \text{ le laplacien})$
Coefficient de diffusion thermique	$D = \frac{\lambda}{\rho c}$
durée typique du régime transitoire	$\tau = \frac{L^2}{D}$
Hypothèses pour l'utilisation de résistances thermiques	(1) Les champs sont independants du temps (2) Unidimensionnel (3) Pas de sources au sein des materiaux (4) Sans pertes thermiques latérales
Resistance Thermique	$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} \text{ en K/W}$
Association série, parallèle	$R_{eq, \text{ série}} = R_1 + R_2 \quad R_{eq, \text{ parallèle}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$
Loi de Newton	$\vec{j}_{th} = h (T_p - T_f) n_{p \rightarrow f} \quad h : \text{Coef. de conducto-convection}$
Lien Newton-Fourier	$h = \frac{\lambda}{\delta}, \quad \delta \text{ la longueur de la couche conducto-convective}$
Flux électromagnétiques	$\Phi_{incident} = \Phi_{réfléchi} + \Phi_{transmi} + \Phi_{absorbé}$
Corps parfaitement transparent	$\Phi_{réfléchi} = \Phi_{transmi} = 0$
Corps parfaitement réfléchissant	$\Phi_{transmi} = \Phi_{absorbé} = 0$
Flux radiatif	$\Phi_{radiatif} = \Phi_{émis} - \Phi_{asborbé}$
Corps noir	$\Phi_{abosrbé} = \Phi_{incident}$
Loi de plank (Admise)	$u_\nu(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h \nu} - 1} d\nu$
Loi de Wien	$\lambda_m T = 2,898 \cdot 10^3 \text{ m K}$
Loi de Stefan	$j_{émis} = \sigma T^4 \text{ avec } \sigma = 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{K}^4)$

TABLE 23 – Transferts Thermiques

8 Annexes

Quelques constantes

Constante de gravitation	$\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$
Vitesse de la lumière	$c = 3,00 \times 10^8 \text{m/s}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{Js}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{C}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{J/K}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{kg}$
Constante de permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{F/m}$
Constante de perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$
Champ de claquage de l'air sec	$E_{\text{claquage, air sec}} = 10 \times 10^5 \text{V/m}$
Masse de la Terre	$M_{\text{Terre}} = 5,97 \times 10^{24} \text{kg}$
Rayon moyen de la Terre	$R_{\text{Terre}} = 6,37 \times 10^6 \text{m}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2/\text{K}^4$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{l/mol}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{J/(molK)}$
Masse du Soleil	$M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{kg}$
Rayon moyen du Soleil	$R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{m}$
K standard de la réaction d'autoprotolise de l'eau ($2\text{H}_2\text{O}_{(l)} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+ + \text{HO}_{(aq)}^-$)	$K_e = 10 \times 10^{-14}$

TABLE 24 – Quelques constantes physiques

Formulaire d’analyse vectorielle

TABLE 25 – Formulaire d’analyse vectorielle

9 Compléments X-ENS

Compléments

Loi de Biot et Savart	$\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\vec{\ell} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3}$
-----------------------	--

TABLE 26 – Compléments