Table des matières

1 Mécanique

Δ un axe fixe, $\mathscr{D} \in \Delta$, O, O', M des points de l'espace, et $H \in \Delta$ le un projeté orthogonal de M sur Δ

Référenciels non Galiléens

Formule de dérivation composée	$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{U}$
Vitesse	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e(M)$
Vitesse d'entrainement	$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_R(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$
Vitesse ref en translation uniforme	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e(M) = \vec{v}_R(O') + \vec{v}_R(O')$
Vitesse ref en rotation uniforme d'axe fixe	$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{HM}$
Accélération ref en translation uniforme	$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_R(O')$
Accélération ref en rotation uniforme d'axe fixe	$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M)$
Accélération de Coriolis	$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{R'}(M)$
Accélération d'entrainement	$\vec{a}_e(M) = -\Omega^2_{R'/R}\vec{HM}$
Théorème de la résultante dynamique	$\vec{a}_{R'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$
Théorème du moment cinétique	$\left(\frac{d\mathcal{L}_{A/R'}(M)}{dt}\right)_R = \sum \vec{\mathcal{M}}_A\left(\vec{F}_{ext}\right) + \vec{\mathcal{M}}_A\left(\vec{F}_{ie}\right) + \vec{\mathcal{M}}_A\left(\vec{F}_{ic}\right)$
Energie d'entrainement, cas translation rectiligne	$E_{p,ie} = ma_e x + C^{ste}$
Energie d'entrainement, cas rotation uniforme d'axe fixe	$E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2_{R'/R}r^2 + C^{ste}$

TABLE 1 – Formules relatives aux référentiels non inertiels.

Énergétique

Puissance d'une force	$\mathscr{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$
Travail élémentaire	$\delta W(\vec{f}) = \mathscr{P}(\vec{f})\mathrm{d}t = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{OM}$
Force conservative	$\exists E_p \mid \delta W(\vec{f}) = -\mathrm{d}E_p$
Travail d'une force	$W(\vec{f}) = \int_{M \in \overset{\frown}{AB}} \delta W(\vec{f})$
Condition pour qu'une force dérive d'une E_p	$\vec{\mathrm{rot}}\vec{F} = \vec{0}$
Théorème de l'énergie cinétique	$\Delta E_c = \sum_i W(\vec{f_i})$
Energie potentielle	$E_p = -\int_\Gamma \mathrm{d}E_p$
Energie mécanique	$E_m = E_p + E_c$
Théorème de l'énergie mécanique	$\Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_{i,\text{ non conservative}})$
Lien énergie potentielle / force	$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\vec{\mathrm{grad}}(E_p)$
Lien puissance / Energie	$\mathscr{P} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$
Théorème de la puissance cinétique	$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathscr{P}(\vec{f_i})$

TABLE 2 – Formules énergiétiques.

2 Ondes

Avec u une coordonnée de l'espace ($u = ax + by + cz$), et $\vec{r} = \vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z}$

Formules : Les ondes

D'Alembertien	$\square\Psi = \Delta\Psi - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$
Équation de D'Alembert	$\square\Psi = 0$
Cas 1D	$\square\Psi = \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$, avec $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$
Surface d'onde	Points M à t fixé tel que $\Psi(\mathrm{M}, t) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$
Solutions de l'EDA 1D	$\Psi(u,t) = f(u - tv) + g(u + vt)$ ou $f(t - \frac{u}{v}) + g(t + \frac{u}{v})$
Pour Ψ solution de l'EDA 1D	Avec $a(u) = \Psi(u,0)$ et $b(u) = \dfrac{\partial\Psi}{\partial t}(u,0) = b(u)$
On a	$\Psi(u,t) = \dfrac{1}{2}\left(a(u - vt) + a(u + vt) + \dfrac{1}{v}\displaystyle\int_{u-vt}^{u+vt} b(s)\mathrm{d}s\right)$
Onde progressive monochromatique	$\Psi(u,t) = \Psi_0 \cos\left(\omega t \pm ku + \varphi\right) = \Psi_0 \cos\left(\omega\left(t \pm \frac{u}{v}\right) + \varphi\right)$
Vecteur d'onde	$\vec{k} = k\vec{e_u}$
Norme du vecteur d'onde	$\lVert\vec{k}\rVert = k(\omega) = \dfrac{\omega}{v} = \vec{r}\cdot\vec{k}$
Longueur d'onde	$\lambda = \mathrm{T}^{-1} = \dfrac{2\pi}{k}$ (car $k(u + \lambda) = ku + 2\pi$)
Célérité d'une onde dans la matière	$v_{\mathrm{mat}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{K}a^2}{m}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{E}}{\rho}}$ Avec $\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{K}}{a}$ le module de Young et ρ sa masse volumique.
Célérité d'une onde dans une corde	$v_{\mathrm{corde}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{T}}{\mu_0}}$ Avec T la tension et μ_0 la masse linéique
Ondes stationnaires	$\Psi(u,t) = \gamma(t)\varphi(u)$
Sur une corde de longueur L,	$y_n(x,t) = \left[a_n \cos\left(\dfrac{n\pi v}{\mathrm{L}}t\right) + b_n \sin\left(\dfrac{n\pi v}{\mathrm{L}}t\right)\right]\sin\left(\dfrac{n\pi v}{\mathrm{L}}\right)$

TABLE 3 – Formules : Les Ondes

Paquets d'ondes

EDA :	$\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \omega_0^2\theta$
Forme recherchée :	$\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta}_0 e^{i(\omega t - kx)}$
Reformulation de l'EDA :	$-\omega^2\theta = v^2k^2\theta - \dfrac{1}{\tau}i\omega\theta - \omega_0\theta$
Relation de dispertion : ($\theta \neq 0$)	$\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{v^2} + \dfrac{1}{v^2\tau}i\omega = k^2$
Vecteur d'onde complexe :	$\underline{k} = k' - ik''$
Forme de l'onde :	$\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta}_0 e^{-k''x}e^{i(\omega t - kx)}$
Vitesse de phase :	$v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$
Distance caracteristique d'atténuation	$\dfrac{1}{\lvert k''(\omega)\rvert}$
Klein Gordon (Limite $\omega_0 \ll 1$)	$\underline{k}^2 = \dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{v^2}$
Vitesse de groupe	$v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}}$

TABLE 4 – Paquets d'onde

3 Éléctromagnétique

Électromagnétique

Vecteur densité de courant volumique	$\vec{\jmath} = qn^*\vec{v} = \rho\vec{v}$
Lien densité de courant volumique / Charge	$\mathrm{dQ} = \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\mathrm{d}t$
Maxwell Gauss	$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Maxwell Thomson / Flux	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$
Maxwell Faraday	$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Maxwell Ampère	$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\vec{\jmath} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
Ostrogradski	$\iiint_{\mathscr{V}_S} \mathrm{div}(\vec{F})\mathrm{d}\tau = \oint\!\!\oint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
Stokes	$\iint_S \vec{\mathrm{rot}}(\vec{F})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$
Théorème de Gauss	$\oint\!\!\oint_{\mathscr{S}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$
Théorème d'Ampère	$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\mathrm{enl}}$
Conservation de la charge (local)	$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\jmath}) = 0$
Conservation de la chage (Global)	$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}t} + \oint\!\!\oint_S \vec{\jmath}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$
Lien champ éléctrique potentiels	$\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}(V)$
Lien champ éléctrique potentiels	$\mathrm{dV} = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$

TABLE 5 – Formules électromagnétique.

Électromagnétique (Tableau 2)

Pour une variable d'état $\mathscr{E}$	$\Delta\mathscr{E} = \sum_i \mathscr{E}_{i,\text{échangé}} + \mathscr{E}_{\text{créée}}$
Pour une variable d'état (infinitésimal) $\mathscr{E}$	$d\mathscr{E} = \sum_i \delta\mathscr{E}_{i,\text{échangé}} + \delta\mathscr{E}_{\text{créée}}$
Relations de passage à l'interface conducteur-vide	$\begin{cases} \vec{E}_{\text{vide}}(M,t) = \dfrac{\sigma(M,t)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{\text{conducteur}\to\text{vide}} \\ \vec{B}_{\text{vide}} = \mu_0 \vec{J}_s(M,t) \wedge \vec{n}_{\text{conducteur}\to\text{vide}} \end{cases}$

TABLE 6 – Formules électromagnétique. (Tableau 2)

Dipôles non rayonnants

Moment dipolaire	$\vec{p} = q\vec{NP}$
Potentiel Dipôle	$V = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
Champ éléctrique, dipôle non rayonnant	$\vec{E} = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos(\theta)\vec{u}_r + \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$
Champ éléctrique dipôle non rayonnant, Forme intrinseque	$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p})$
Moment dûe à un champ éléctrostatique sur un dipôle *rigide* non rayonnant	$\vec{\mathscr{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$
Énergie potentielle dûe à l'action éléstrostatique d'un champ uniforme sur un dipôle *rigide* non rayonnant	$\mathscr{E}_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{\text{ext}}$
Force exercée par un champ electrostatique sur un dipôle non rayonnant au point O	$\vec{F}_{E_{\text{ext}\longrightarrow\text{dip}}} = \left(\vec{p}\cdot\vec{\text{grad}}\right)\vec{E}_{\text{ext}}(O)$
Analogie champ éléctrique / magnétique	$\dfrac{1}{\varepsilon_0} \longleftrightarrow \mu_0$ et $\vec{p} \longleftrightarrow \vec{M}$

TABLE 7 – Dipôles non rayonnants.

Formule d'énergétique électromagnétique

Force de Lorentz	$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{E}\right)$
Force de Lorentz volumique	$\vec{f}_{\text{Lorentz}} = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$
Force de Laplace	$\vec{F_{\mathscr{L}}} = i\vec{L} \wedge \vec{B}$
Force de Drude	$\vec{F}_{\text{Drude}} = -\dfrac{m_i}{\tau_i}\vec{v}_i$
Loi d'Ohm locale	$\vec{j} = \gamma\vec{E},\ \gamma = \sum_i \dfrac{n_i^* \tau_i q_i^2}{m_i}$
Lien puissance (Volumique) Lorentz / Drude	$p_{\text{lorentz}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -p_{\text{Drude}}$
Densité volumique énergétique éléctromagnétique	e_{em} tel que $\mathscr{E}_{\text{em}} = \iiint_{\text{M} \in \text{V}} e_{\text{em}} \text{d}\mathscr{V}$
Conservation de l'énergie éléctromagnétique (Globale)	$\dfrac{\text{d}\mathscr{E}_{\text{em}}}{\text{d}t} + \oiint_{\text{S}_{\mathscr{V}}} \vec{\Pi} \cdot \text{d}\vec{S} = -\mathscr{P}_{\text{Lorentz}}$
Conservation de l'énergie éléctromagnétique (Local)	$\dfrac{\partial e_{\text{em}}}{\partial dt} + \text{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{p}_{\text{Lorentz}}$
Formule pour e_{em}	$e_{\text{em}} = \dfrac{\varepsilon_0 \text{E}^2}{2} + \dfrac{\text{B}^2}{2\mu_0}$
Vecteur de Poynting	$\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

TABLE 8 – Energie éléctromagnétique

Dipôles Rayonnants

Moment dipôlaire atome soumis à un champ éléctrique	$\vec{p} = \dfrac{(Ze)^2}{m\omega_0^2} \mathrm{E}_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$
Approximation dipolaire	$r \gg a$
Dans l'approximation non relativiste	$a\omega \ll c$
Zone de rayonnement (Zone de champ lointaine)	$r \gg \lambda$
À l'onde exitatrice $\vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{ext}}$ est associé ω et λ tel que	$\lambda f = c \;\; \lambda \dfrac{\omega}{2\pi} = c \;\; \omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$
Pour prendre en compte le temps de propagation de l'onde, on définit	$\xi = t - \frac{r}{c}$
Expression des champs éléctromagnétiques dans cette zone	$\begin{cases} \vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M}, t) = \dfrac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^3}\left(\dfrac{r}{c}\right)^2 p''(\xi)\vec{e}_\theta \\ \hline \vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M}, t) = \dfrac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3 c}\left(\dfrac{r}{c}\right)^2 p''(\xi)\vec{e}_\varphi \end{cases}$
Puissance rayonnée	$\left\langle \vec{\Pi}(\mathrm{M}, t)\right\rangle_t = \dfrac{p_0^2\omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\vec{e}_r$
Puissance moyenne, sphère rayon r, centré sur le dipôle	$\mathscr{P} = \displaystyle\iint_{\text{Sphère}} \left\langle \vec{\Pi}(\mathrm{M}, t)\right\rangle_t \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \dfrac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$
Régime Rayleigh (Régime basse fréquence)	$\omega^2 \ll \omega_0^2$ et donc, $p_0(\omega) = \dfrac{(Ze)^2\mathrm{E}_0}{m\omega_0^2}$
Puissance de Larmor	$\mathscr{P}_{\text{Larmor}} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{2\left\langle p^2\right\rangle}{3c^2}$

TABLE 9 – Dipôles Rayonnants

Ondes éléctromagnétiques dans l'ionosphère

Hypothèses sur le plasma	Dilué : On néglige la force de drude Neutre : Il y a autant de charges + que de − Non relativistes : Vitesses faibles devant c
Équations de Maxwell dans le plasma	(MG) : $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ (MF) : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (MT) : $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ (MA) : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$
Conductivité complexe du plasma	$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}} = \dfrac{ne^2}{mi\omega}\underline{\vec{E}}$
Pulsation Plasma (Pulsation de coupure)	$\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$
Relation de dispersion dans le plasma (C'est Kleine Gordon!)	$\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$
Indice Optique	$n(\omega) = \dfrac{c}{\lvert v_\varphi(\omega)\rvert}$
Rappel : Formule de Rayleigh	$v_g = v_\varphi + k' \dfrac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}k'}$
Formule de Rayleigh, version avec n	$v_g = \dfrac{\pm c}{n + \omega \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}}$
Dispertion anormale (Impossible dans le plasma) : Dans ce cas, v_g ne définit pas la vitesse de transport de l'information	$\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} < 0$ et $v_\varphi > c$
Ordre de grandeur : Fréquence de coupure f_p dans l'ionosphère terrestre	$f_p \simeq 10\mathrm{MHz}$

TABLE 10 – Ondes éléctromagnétiques dans l'ionosphère

On se limite à des signaux lentements variables (En basse fréquence)

Ondes éléctromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques

<table>
<tr><td>TRD appliqué au porteur mobile moyen e^- libre :</td><td>$m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{\mathrm{E}} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$</td></tr>
<tr><td>Relation “ohmique”</td><td>$\underline{\vec{\mathrm{j}}} = \dfrac{\gamma_0}{1+i\tau\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}} = \dfrac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1+i\tau\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}$</td></tr>
<tr><td>Approximation basse fréquence</td><td>$\tau\omega \ll 1,\ \dfrac{\omega\varepsilon_0}{\gamma_0} \ll 1$</td></tr>
<tr><td>Ordre de grandeur de ω pour le cuivre à 100K</td><td>$1\times10^{14}\mathrm{rad/s}$</td></tr>
<tr><td>Cette approximation est vérifiée lorsque (Radiofréquences)</td><td>$\omega \ll 1\times10^{14}\mathrm{rad/s}$</td></tr>
<tr><td>Radiofréquences :</td><td>$f \lesssim 1\times10^{9}\mathrm{Hz}$</td></tr>
<tr><td>Équations de Maxwell dans l’ARQS</td><td>(MG) : $\mathrm{div}\vec{\mathrm{E}} = 0$ (MF) : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{\mathrm{E}} = -\dfrac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$
(MT) : $\mathrm{div}\vec{\mathrm{B}} = 0$ (MA) : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{\mathrm{B}} = \mu_0\gamma_0\vec{\mathrm{E}}$</td></tr>
<tr><td>Relation de dispertion (Obtenue en injectant (MF) dans (MA))</td><td>$\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$(On a posé$\underline{k} = k' - ik''$)</td></tr>
<tr><td>Expression du champ éléctrique</td><td>$\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M},t) = \vec{\mathrm{E}}_0 e^{-\frac{u}{\delta}}\cos\left(\omega t - \dfrac{u}{\delta} + \Phi\right)$</td></tr>
<tr><td>Rappel : Distance caractéristique d’atténuation :</td><td>$\delta = \dfrac{1}{|k''(\omega)|}$</td></tr>
<tr><td>Ordres de grandeur de δ</td><td><table><tr><td>mat / freq</td><td>1kHz</td><td>1GHz</td></tr><tr><td>cuivre</td><td>$\delta = 2\mathrm{mm}$</td><td>$\delta = 2\mu\mathrm{m}$</td></tr><tr><td>fonte</td><td>$\delta = 2\mathrm{cm}$</td><td>$\delta = 20\mu\mathrm{m}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Conducteur parfait :</td><td>$\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M},t) = 0$ au sein du conducteur</td></tr>
<tr><td>Une OemPPM en incidence normale réféchie vérifie</td><td>— même amplitude
— même pulsation
— même polarisation
— vecteurs d’ondes de même direction mais opposés
— La réfléction s’accompagne d’un déphasage de π</td></tr>
<tr><td>Coefficient de réfléction en amplitude</td><td>$\underline{\Omega} = \dfrac{\text{Amplitude complexe de } \underline{\mathrm{E}}_r \text{ à l'interface}}{\text{Amplitude complexe de } \underline{\mathrm{E}}_i \text{ à l'interface}}$</td></tr>
</table>

TABLE 11 – Ondes éléctromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques

Ondes éléctromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques (Tableau 2)

Transition	$\underline{t} = \dfrac{\underline{\mathrm{E}}_r(\text{interface})}{\underline{\mathrm{E}}_i(\text{interface})}$
Dans le modèle du conducteur parfait	$\delta = 0,\ \gamma \to +\infty,\ \ \underline{\Omega} = -1,\ \ \underline{t} = 0$
Stationairité des ondes du coté du vide	$\begin{cases} \vec{\mathrm{B}}_{\text{vide}} = \dfrac{2\mathrm{E}_0}{c}\cos(\omega t + \varphi)\cos(ku)(\vec{e_u} \wedge \vec{e_p}) \\ \hline \vec{\mathrm{E}}_{\text{vide}} = 2\mathrm{E}_0 \sin(\omega t + \varphi)\sin(ku)\vec{e_p} \end{cases}$
Densité d'énergie éléctromagnétique moyenne	$\langle e_{em}(\mathrm{M}, t)\rangle_t = \varepsilon_0 \mathrm{E}_0^2$
Vecteur de Poynting moyen	$\left\langle \vec{\Pi}(\mathrm{M}, t)\right\rangle_t = \vec{0}$

TABLE 12 – Ondes éléctromagnétiques dans les conducteurs Ohmiques (Tableau 2)

Avec j l'unité complexe de partie imaginaire positive. $\left(j^2 = -1, \Im(j) = 1\right)$. On pose $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

Filtrage

Fonction de transfert complexe	$\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$
FC [1] : Passe bas du premier ordre	$\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jx}$
FC : Passe haut du premier ordre	$\underline{H} = \dfrac{H_0 jx}{1 + jx}$
FC : Passe bas du second ordre	$\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 - (x)^2 + j\frac{x}{Q}}$
FC : Passe haut du second ordre	$\underline{H} = \dfrac{H_0 (x)^2}{1 - (x)^2 + j\frac{x}{Q}}$
FC : Passe bande	$\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$
Remarque	*Pour passer d'un filtre passe haut à un filtre passe bas, il suffit de multiplier le numérateur par le terme prédominant en x au denominateur !*
Bande passante	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ et $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$

TABLE 13 – Filtrage d'un signal periodique en RSF

4 Optique

Optique Ondulatoire

Longueur d'onde dans le vide (Resp. vecteur d'onde)	λ_0 (resp k_0)
Rappel : Relation de Plank Einstein :	$\mathscr{E} = \hbar\nu = \hbar\omega = \dfrac{2\pi\hbar}{\lambda_0}$
Onde lumineuse monochromatique :	$\underline{\psi}(\mathrm{M}, t) = \Psi(\mathrm{M})e^{i(\omega t - \varphi(\mathrm{M}))}$
Retard de phase :	$\varphi(\mathrm{M}) = \tau_{\mathrm{SM}} + \varphi(\mathrm{S})$
Retard de phase (2) :	$\tau_{\mathrm{SM}} = \int_{\Gamma_{\mathrm{SM}}} \dfrac{\mathrm{d}\ell}{v_\varphi} = \int_{\Gamma_{\mathrm{SM}}} \dfrac{n\mathrm{d}\ell}{c} = \dfrac{1}{c}\int_{\Gamma_{\mathrm{SM}}} n\mathrm{d}\ell = \dfrac{1}{c}(\mathrm{SM})$
Intensité lumineuse :	$\mathrm{I}(\mathrm{M}) = k \cdot \langle \psi^2(\mathrm{M}, t)\rangle_{\tau_r} = \dfrac{k}{\tau_r}\int_t^{t+\tau_r} \psi^2(\mathrm{M}, u)\mathrm{d}u,\ k = c\varepsilon_0$ Note : à l'usage, on ne prends pas en compte le k. τ_r le temps de réponse du capteur.
Ordre de grandeur de τ_r :	$\tau_{r,\text{oeuil humain}} = 1 \times 10^{-1} = 0{,}1\mathrm{s}$ $\tau_{r,\text{capteur CCD}} = 1 \times 10^{-6}\mathrm{s}$
Pour une onde monochromatique :	$\mathrm{I}(\mathrm{M}) = \dfrac{\psi^2(\mathrm{M})}{2}$
Durée de cohérence	$\tau_c = \dfrac{1}{\Delta\nu} = \pi\tau$

TABLE 14 – Optique ondulatoire

Dispositif interferenciels des trous d'Young || Dispositif interferenciels à élargissement des fronts d'onde

Interférences à grande distance : Dans l'hyposthèse où M *est à grande distance* des points S_1 et S_2	$a \ll D$ et $\lvert x\rvert, \lvert y\rvert \ll D$
Difference de marche à grande distance dans le dispositif des trous d'Young :	$\delta_{1/2}(M) = n\dfrac{ax}{D}$
Difference de marche à grande distance dans le montage de Frauhofer :	$\delta_{1/2}(M) = n\dfrac{ax}{f_2'}$
Critère de brouillage par extension spatiale d'une fente source primaire, et critère de brouillage par extension spectrale de la source :	$\lvert\Delta p\rvert \gtrsim 1$
Critère de brouillage	$l_c \simeq \delta_{1/2}$? (À vérifier)
Perte de contraste par élargissement angulaire de la source	$\theta_{\text{source}} \simeq \dfrac{\lambda}{a}$

TABLE 15 – Dispositif interferenciels des trous d'Young

Interferomètre à division d'amplitude || Dispositif interferenciels de Michelson

Difference de marche au point M par l'interferomètre :	$\delta_{1/2}(M) = 2ne\cos(i)$
Intensité en un point M de l'écran (Fresnel) :	$\mathscr{I}(M) = \frac{I_0}{2}\left(1+\cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot 2en\cos i)\right)$
Rappel : Dans les conditions de gauss, DL_2 :	$\cos(i) = 1 - \frac{i^2}{2} + \underset{i\to 0}{o}(i^2)$ $\sin(i) = i + \underset{i\to 0}{o}(i^2) = \tan(i)$
Reformulation de l'intensité en un point M de l'écran dans les conditions de gauss :	$\mathscr{I}(M) = \dfrac{I_0}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{4\pi en}{\lambda_0}\left(1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{f'}\right)^2\right)\right)\right]$
Rayon des anneaux :	$r = f'\sqrt{2\left(1-\frac{p}{p(O')}\right)}$

TABLE 16 – Dispositif interferenciels de Michelson

5 Quantique

Introduction aux equations de la physique quantique

Energie du photon	$\mathscr{E}_{\text{photon}} = \hbar\omega$
Amplitude de protobabilité de présence	$\psi(\text{M}, t), \text{Im}(\psi) \subset \mathbb{C}$
Amplitude de protobabilité de présence	$\text{dP}(u, t) = \psi^*(u, t)\psi(u, t)\text{d}u = \lvert\psi(u, t)\rvert^2\text{d}u$ (La dernière égalité dans le cas u coordonée cartésienne)
En cartésien 1D, on écrit la densité de probabilité de présence	$\rho(u, t) = \lvert\psi(u, t)\rvert^2$
La probabilité de trouver la particule dans $[a, b]$ s'écrit	$\text{P}(a \leq u \leq b, t) = \int_a^b \rho(u, t)\text{d}u$
Extension spatiale typique de la fonction d'onde	Δu
Longueur d'onde de Broglie (à prononcer *Breuil*)	λ_0 ou λ_{DB}
Pour u une variable aléatoire :	
Moyenne de u (*Esperance*)	$\langle u(t)\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} u\rho(u, t)\text{d}u$
Moments de u (*Théorème de transfert*)	$\langle u^n(t)\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} u^n\rho(u, t)\text{d}u,\ n \in \mathbb{N}^*$
Si u est en cartésien :	
Extension spatiale typique de la fonction d'onde (*Écart type*) :	$\Delta u = \sigma(u) = \sqrt{\mathbb{V}(u)} \underset{\text{K.H.}}{=} \sqrt{\mathbb{E}(u^2) - \mathbb{E}(u)^2} = \sqrt{\langle u^2(t)\rangle_\psi - \langle u(t)\rangle_\psi^2}$
Condition aux limites de Born	$\int_{\mathbb{R}} \rho(u, t)\text{d}u = 1$
Équation de Schrödinger	$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \text{V}\psi$
Terme d'énergie cinétique de la particule	$\frac{-\hbar}{2m}\delta\psi$
Terme lié à l'énergie potentielle	$\text{V}\psi$
Vitesse de la particule (def)	$\langle v_x(t)\rangle_\psi = \lim_{\text{d}t \to 0} \frac{\langle x(t + \text{d}t)\rangle_\psi - \langle x(t)\rangle_\psi}{\text{d}t}$
Vitesse de la particule	$\langle v_x(t)\rangle_\psi = \frac{\hbar}{im}\int_{\mathbb{R}} \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x}\text{d}x$

TABLE 17 – Introduction aux equations de la physique quantique

Introduction aux equations de la physique quantique (Tableau 2)

Quantité de mouvement	$\langle p_x \rangle_\psi = m \langle v_x \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathrm{d}x$
Quantité de mouvement (Moment d'ordre 2)	$\langle p_x^2 \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \mathrm{d}x$
Théorène d'Ehrenfest	$\frac{\mathrm{d}\langle p_x \rangle_\psi}{\mathrm{d}t} = -\left\langle \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right\rangle_\psi$
Dans la limite classique $\Delta x \ll \Lambda$ (Λ l'echelle de longueur typique sur laquelle x varie, i.e. $\mathrm{V}(x)$ peut être approché par sa tangente)	$\frac{\mathrm{d}\langle p_x \rangle_\psi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} (\langle x \rangle_{\psi,t})$ C'est le TRD!
Énergie cinétique	$\langle \mathrm{E}_c \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x$
Dans l'état stationnaire	φ
Longueur d'onde de De Broglie pour une onde (état) stationnaire	$\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2m\mathrm{E}}}$
Vitesse de phase pour une propagation libre	$v_\varphi = \frac{\hbar\omega}{2m}$
Vitesse de groupe pour une propagation libre	$v_g = \frac{\hbar k}{m}$
Remarque : $v_g \neq v_\varphi$, la propagation est dispersive	
Inégalité de Heisenberg (Cauchy-Schwartz)	$\Delta u \Delta p_u \geqslant \frac{\hbar}{2}$
Formule de diffraction pour les particules	$\Delta \sin\theta = \frac{\lambda_0}{a}$
Equation locale de conservation des probabilités de présence	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial u} = 0$
Vecteur densité de courant de probabilité de présence	$\vec{\mathrm{j}} = \frac{1}{m} \mathrm{Re}\left(\psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$
Vecteur densité de courant de probabilité de présence pour une onde de Broglie	$\vec{\mathrm{j}} = \rho \langle v \rangle_\psi = \|\psi\|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$

TABLE 18 – Introduction aux equations de la physique quantique (Tableau 2)

Avec η la taille du bord, λ_0 la longueur d'onde de De Broglie

Quantas et barrieres de potentiels

Approximation sur la taille du bord	$\lambda_0 \ll \eta$
Conditions de discontinuités	φ et φ' sont continues
Expression de la fonction d'onde, cas $E > V_0$	$\psi(x,t) = \begin{cases} A_1 e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\left(e^{ik_1x} + \dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{ik_1x}\right) & \text{si } x<0 \\ \hline A_1 e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\dfrac{2k_1}{k_1+k_2}e^{-ik_2x} \end{cases}$
Expression de la fonction d'onde, cas $E < V_0$	$\psi(x,t) = \{$
Probabilité de transmission en la marche de potentiel	$T = \dfrac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|}$
Probabilité de réfléction en la marche de potentiel	$R = \dfrac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|}$
Probabilité de transmission pour une barrière de potentiel épaisse	$T = \dfrac{\|\vec{J}_{t,\mathrm{III}}\|}{\|\vec{J}_{i,\mathrm{I}}\|}$
Probabilité de réfléction pour une barrière de potentiel épaisse	$T = \dfrac{\|\vec{J}_{r,\mathrm{I}}\|}{\|\vec{J}_{i,\mathrm{I}}\|}$
Dans l'approximation $L \simeq qq\delta$	$T = e^{-\dfrac{2L}{\delta}}$
Dans un puit de potentiel infini	$E_m = \dfrac{\hbar^2}{8mL^2}n^2,\ \ n \in \mathbb{N}^*$
Energie de confinement	$E_{\min} \simeq \dfrac{\hbar^2}{mL^2}$
Pulsation de Bohr	$\omega_{mn} = \dfrac{E_m - E_n}{\hbar}$

TABLE 19 – Quantas et barrieres de potentiels

6 Chimie

Transformations Chimiques & acide base

Potentiel Hydrogène pour un acide fort en solution	$p\mathrm{H} = -\log\left(\frac{[\mathrm{H_3O^+}]}{c_0}\right)$
Constante d'équilibre de la réaction d'autoprotolyse de l'eau	$2\mathrm{H_2O}_{(l)} \leftrightharpoons \mathrm{H_3O}^+_{(aq)} + \mathrm{HO}^-_{(aq)} \quad \mathrm{K}e = 1.0\times10^{-14}$
Potentiel Hydrogène pour une base forte en solution	$[\mathrm{H_3O^+}] = \frac{\mathrm{K}e(c_0)^2}{[\mathrm{HO^-}]}$ donc $p\mathrm{H} = -\log\left(\frac{\mathrm{K}e(c_0)}{[\mathrm{HO^-}]}\right)$
Formule d'Enderson (C'est $-\log$(Gulberg & Waage))	$-p\mathrm{H} = -p\mathrm{K}a + \log\left(\frac{[\mathrm{base}]}{[\mathrm{acide}]}\right)$
Approximation de la réaction très peu avancée	$c_0\mathrm{K}_a \ll c_a$
Approximation de la réaction très avancée	$c_0\mathrm{K}_a \gg c_a$

TABLE 20 – Transformations Chimiques & acide base

7 Thermodynamique

Thermodynamique

Premier principe de la thermodynamique (Pour un système fermé avec > 10^6 particules) :	$dU + dE_c = \delta W + \delta Q$
Rappel : G une grandeur extensive, $\Sigma_1 = \Sigma_2$	$G(\Sigma_1 + \Sigma_2) = G(\Sigma_1) + G(\Sigma_2)$
Rappel : G une grandeur intensive, $\Sigma_1 = \Sigma_2$	$G(\Sigma_1 + \Sigma_2) = 2G(\Sigma_1)$
Avertissement :	d ≡ variation, δ ≡ petite quantité. En forme intégré, on a $d \mapsto \Delta, \delta \mapsto \varepsilon$
Entalpie	$H = U + pV$
Transformation :	
Isobare	La pression interieure ne change pas
Monobare	Dans une atmosphère (i.e pression exterieure constante, le système doit pouvoir échanger du volume)
Adiabatique	Pas de transfert thermique
Isochore	Le volume est constant
Deuxième principe de la thermodynamique (Pour un système avec suffisement de particules)	$dS = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}}$
Propriétés de $S_{\text{créée}}$	$\delta S_{\text{créée}} > 0 J/K$
Propriétés de $S_{\text{échangée}}$	$\delta S_{\text{échangée}} = \sum_{k \in \text{Paroix}} \frac{\delta Q_k}{T_k}$
Exemple imbatable de la non-conservation de l'entropie	$\Omega = \{\text{Univers}\}, dS_{\text{Univers}} = \delta S_{\text{créée}} + \underbrace{\delta S_{échangé}}_{=0} > 0$
Rendement ou éfficacité de Carnot	$\eta = \frac{\text{grandeur énergétique utile}}{\text{grandeur énergétique coûteuse}}$
Transformation réversible	$S_{\text{créée}} = 0$

TABLE 21 – Formules Thermodynamique.

Thermodynamique (2)

Phase	Deux points A et B sont dans la même phase ⇔ ∃ chemin de A à B sans discontinuité mésoscopique pour une grandeur intensive
Équation d'état d'une phase	$f\left(p, \mathrm{V}_m, \mathrm{T}\right) = 0$
Première identité thermodynamique	$\mathrm{dU} = t\mathrm{dS} - p\mathrm{dV}$
Deuxième identité thermodynamique	$\mathrm{dH} = \mathrm{TdS} + \mathrm{Vd}p$
Équation d'état du gas parfait (GP)	$p\mathrm{V}_m = \mathrm{RT} \Longleftrightarrow p\mathrm{V} = n\mathrm{RT}$
Rappel : Constante des gazs parfaits	$\mathrm{R} = 8.314\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$
Première loi de Joule	Pour un GP, $\mathrm{dU}_m = \mathrm{C}_{\mathrm{V}m}\mathrm{dT} \quad \mathrm{d}u = c_v\mathrm{dT}$
Deuxième loi de joule	Pour un GP, $\mathrm{dH}_m = \mathrm{C}_{pm}\mathrm{dT} \quad \mathrm{d}h = c_{\mathrm{P}}\mathrm{dT}$
Relation de Mayer	Pour un GP, $\mathrm{C}_{pm} = \mathrm{C}_{\mathrm{V}m} + \mathrm{R} \quad c_p = c_v + \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}$
Pour un GP k-atomique	$\mathrm{C}_m = \dfrac{3+2k}{2}\mathrm{R} \quad \mathrm{C}_{pm} = \dfrac{5+2k}{2}\mathrm{R}$
Entropie molaire S_m du GP	$\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{m0} = \mathrm{C}_{vm}\ln\left(\dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0}\right) + \mathrm{R}\ln\left(\dfrac{\mathrm{V}_m}{\mathrm{V}_{m0}}\right)$
Lois de laplace pour un GP subissant une transformation isentropique (ou adiabatique + réversible)	$\begin{cases} p\mathrm{V}_m^{\gamma} = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \\ \mathrm{TV}_m^{\gamma-1} = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \\ \mathrm{T}^{\gamma}p^{1-\gamma} = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \end{cases}$
Équation d'état pour une PCII (Phase condensée indilatable incomprésible)	$\mathrm{V}_m = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \quad v = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \quad \mathrm{dU}_m = \mathrm{C}_m\mathrm{dT} \quad \mathrm{d}u = c\mathrm{dT}$
ODGS de C_m, c	$\mathrm{C}_{m,\text{eau liquide}} = 76\mathrm{Jmol}^{-1}\mathrm{K}^{-1} \quad c_{\text{eau liquide}} = 4,2\mathrm{Jg}^{-1}\mathrm{K}^{-1} \quad \mathrm{C}_{m,\text{habituel}} \simeq 3\mathrm{R}$
Dans de nombreuses situations	$\mathrm{dH}_m \simeq \mathrm{C}_m\mathrm{dT} = \mathrm{dU}_m$
Entropie molaire d'une PCII	$\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{m0} = \mathrm{C}_{\mathrm{V}m}\ln\left(\dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_{m0}}\right)$
ODG de l'enthalpie de vaporisation de l'eau	$h_{\text{vap, eau}} = 2\cdot 10^3\mathrm{J/g}$
Théorème de moment (En fait très visuel)	$x_g = \dfrac{v(\mathrm{M}) - v_{\mathrm{L}}}{v_{\mathrm{G}} - g_{\mathrm{L}}}$

TABLE 22 – Formules Thermodynamique (2).

8 Annexes

Quelques constantes

Constante de gravitation	$\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$
Vitesse de la lumière	$c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Constante de Planck	$h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Constante de Boltzmann	$k_\mathrm{B} = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Masse du proton	$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Constante de permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Constante de perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$
Champ de claquage de l'air sec	$\mathrm{E}_{\text{claquage, air sec}} = 10 \times 10^{5}\,\mathrm{V/m}$
Masse de la Terre	$\mathrm{M}_{\text{Terre}} = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Rayon moyen de la Terre	$\mathrm{R}_{\text{Terre}} = 6{,}37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2/K^4}$
Constante d'Avogadro	$\mathrm{N_A} = 6{,}022 \times 10^{23}\,\mathrm{1/mol}$
Constante des gaz parfaits	$\mathrm{R} = 8{,}31\,\mathrm{J/(mol\,K)}$
Masse du Soleil	$\mathrm{M}_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Rayon moyen du Soleil	$\mathrm{R}_\odot = 6{,}96 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
K standard de la réaction d'autoprotolise de l'eau ($2H_2O_{(l)} \leftrightharpoons H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$)	$\mathrm{K}_e = 10 \times 10^{-14}$

TABLE 23 – Quelques constantes physiques

Formulaire d'analyse vectorielle

TABLE 24 – Formulaire d'analyse vectorielle

9 Compléments X-ENS

Compléments

Loi de Biot et Savart	$\frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{\mathrm{I}d\vec{\ell}\wedge(\vec{r}-\vec{r'})}{\lvert\vec{r}-\vec{r'}\rvert^3}$

TABLE 25 – Compléments