Mesh Processing

Master 2 IMAGINA 2018-2019

Noura Faraj

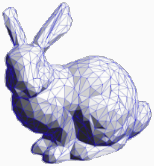
4 Octobre 2018

LIRMM, Université Montpellier, France

Mesh Processing (Geometry processing)

Définition

- Domaine de recherche appliquant des concepts de mathématique, d'informatique et d'ingénierie afin de construire des algorithmes d'acquisition, de reconstruction, d'analyse, de manipulation, de simulation et de transmission de modèles 3D complexes.
- Analogie au traitement du signal / d'image



Catégories d'algorithme

1. Structure
2. Représentation
3. Lissage
4. Remaillage
5. Déformation
6. Réparation
7. Paramétrisation
8. Simplification

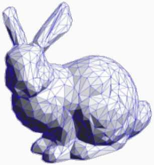
Catégories d'algorithme

1. Structure
2. Représentation
3. Lissage
4. Remaillage
5. Déformation
6. Réparation
7. Paramétrisation
8. Simplification

Objets considérés

Maillages triangulaires

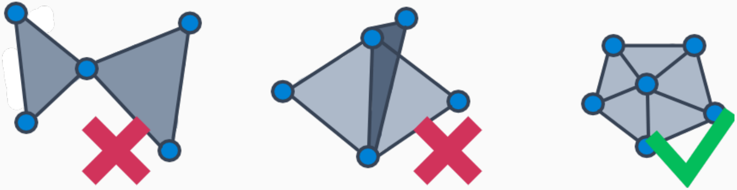
- fermés
- 2-manifolds



Objets considérés

Maillages triangulaires

- fermés
- 2-manifolds



Rappel sur les maillages

Définition

- Maillage $M = (V,\ T)$
- Ensemble de sommets $V = \{v_i\}_{i=1..|V|}$
- Ensemble de triangles $T = \{t_k = (v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3})\}_{k=1..|T|}$
- **Géométrie** définie par les positions $\mathbf{P}(v_i), v_i \in V$
- **Topologie** définie par T
- Voisinage des sommets $\mathbf{N}(v_i) = \{v_j | \exists t \in T, v_i \in t, v_j \in t\}$

Qualité ?

Qualité d'un maillage

Définition de la qualité

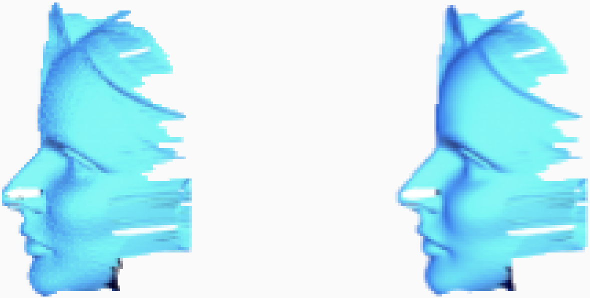
- **Régularité** de la surface représentée
- **Régularité** de la représentation de la surface
- Quantité d'information représentée

Évaluations

- Distance sur maillage (Distance de Haussdorff, *3DWPM*, Mesh Structural Distorsion Measure)
- Topologie (irrégulier, semi-régulier, régulier)

Réduction du bruit

Éliminer les composantes de **"haute-fréquences"**



M. Desbrun, M. Meyer, P. Schroder, A.H. Barr : Implicit Fairing of Irregular Meshes using Diffusion and Curvature Flow, SIGGRAPH, 1999.

- Filtrage appliqué à la **géométrie** du maillage (lissage)
- Analogie au traitement du signal (fréquentiel)

Régularisation de maillage

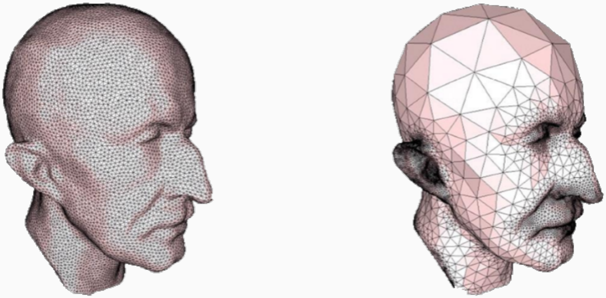
Améliorer la **régularité** des éléments du maillage

P. Alliez, G.Ucelli, C. Gotsman, M. Attene : Recent Advances in Remeshing of Surfaces, Shape Analysis and Structuring, Mathematics and Visualization, 2008.

- Critère de forme des triangles
- Valence des sommets
- Changements **topologiques** de la connectivité

Compression de maillage

Réduire le nombre d'éléments pour représenter la surface



P. Alliez, C. Gotsman, Recent Advances in Compression of 3D Meshes, Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, 2005.

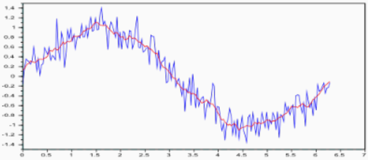
- **Remaillage** de la surface pour supprimer des éléments
- Variations locales pour adapter le nombre d'éléments

Lissage

Objectif du lissage

Filtrage du bruit

- Filtrage des hautes fréquences
- Analogie au traitement du signal / d'image



- Convolution par un filtre (propriété fréquentielle)
- Filtrage sur géométrie discrète

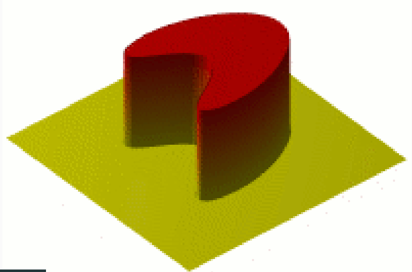
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



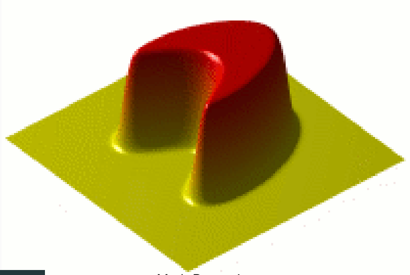
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



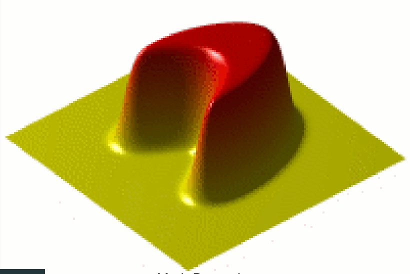
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



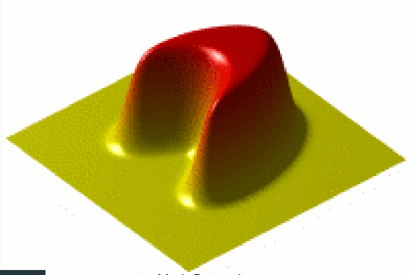
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



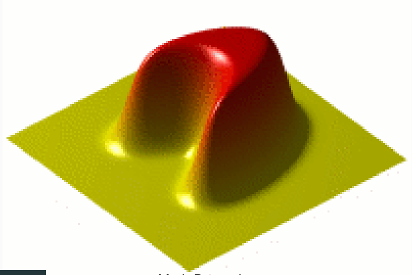
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



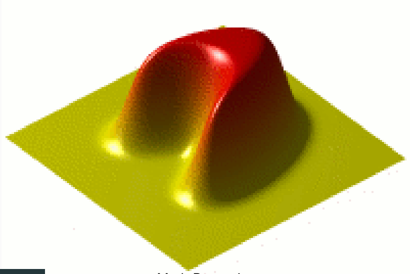
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



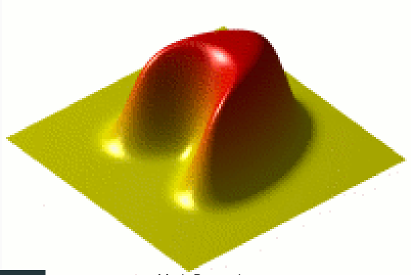
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



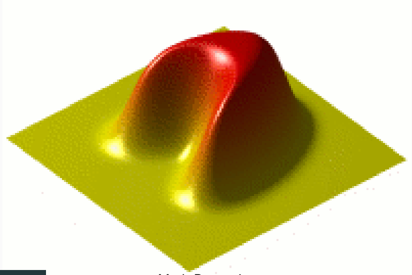
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



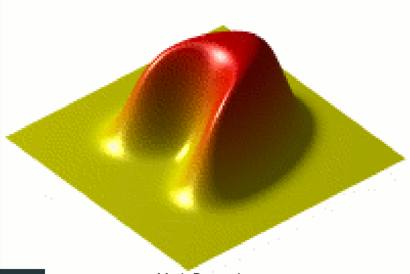
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



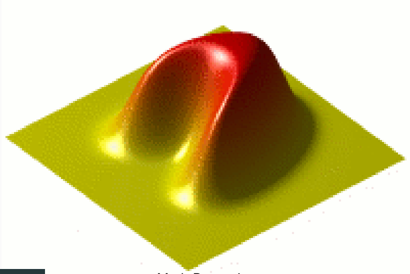
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



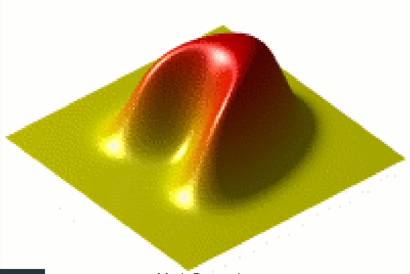
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



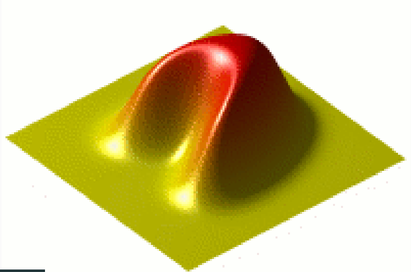
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



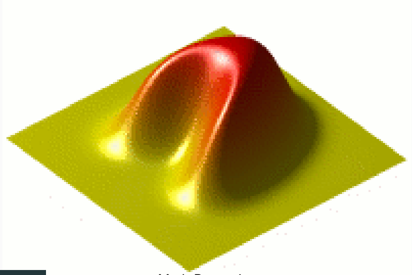
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



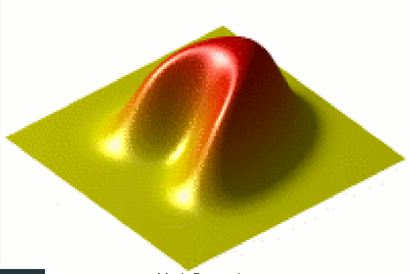
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



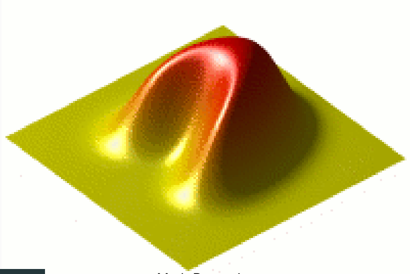
Lissage Laplacien

Origine

Basé sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}x = \lambda \Delta x$$

- Modélisation de la conduction thermique (Fourier)
- Effet de régularisation d'un champs de température



Lissage Laplacien

Opérateur Laplacien

$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (+ \frac{\partial^2}{\partial z^2})$

Lissage Laplacien

Opérateur Laplacien

$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(+\frac{\partial^2}{\partial z^2})$ Problème ?

Lissage Laplacien

Opérateur Laplacien

$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (+ \frac{\partial^2}{\partial z^2})$ Problème ? **C'est défini dans un domaine continu !**

Discrétisation

Discrétisation de l'équation pour filtrer une géométrie

$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(v_i) = \lambda \Delta \mathbf{P}(v_i)$

Lissage Laplacien

Opérateur Laplacien discret

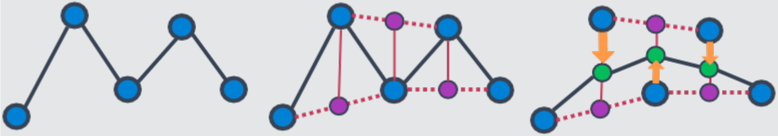
$$\Delta \mathbf{P}(v_i) = \sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} w_{ij}(\mathbf{P}(v_j) - \mathbf{P}(v_i))$$

Mise à jour itérative : $\mathbf{P}(v_i)^{(t+1)} \leftarrow \mathbf{P}(v_i)^{(t)} + \lambda \Delta \mathbf{P}(v_i)$

Exemple : Courbe 2D

$$w_{ij} = \frac{1}{\mathbf{N}(v_i)} = \frac{1}{2} \text{ : Milieu des deux voisins}$$

A $t = 0$



$$\Delta \mathbf{P}(v_i) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}(v_{i-1}) + \mathbf{P}(v_{i+1})) - \mathbf{P}(v_i)$$

Lissage Laplacien

Opérateur Laplacien discret

$$\Delta \mathbf{P}(v_i) = \sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} w_{ij}(\mathbf{P}(v_j) - \mathbf{P}(v_i))$$

Mise à jour itérative : $\mathbf{P}(v_i)^{(t+1)} \leftarrow \mathbf{P}(v_i)^{(t)} + \lambda \Delta \mathbf{P}(v_i)$

Exemple : Courbe 2D

$$w_{ij} = \frac{1}{\mathbf{N}(v_i)} = \frac{1}{2} : \text{Milieu des deux voisins}$$

A $t = 1$

$$\Delta \mathbf{P}(v_i) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}(v_{i-1}) + \mathbf{P}(v_{i+1})) - \mathbf{P}(v_i)$$

Lissage Laplacien

Opérateur Laplacien discret

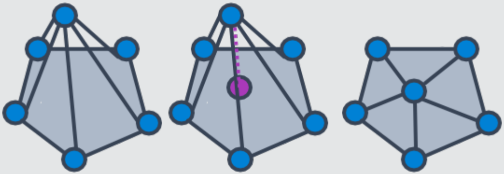
$$\Delta \mathbf{P}(v_i) = \sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} w_{ij}(\mathbf{P}(v_j) - \mathbf{P}(v_i))$$

Mise à jour itérative : $\mathbf{P}(v_i)^{(t+1)} \leftarrow \mathbf{P}(v_i)^{(t)} + \lambda \Delta \mathbf{P}(v_i)$

Cas : Maillage 3D

$w_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{N}(v_i)|}$ **:Isobarycentre du voisinage**

$$\Delta \mathbf{P}(v_i) = \frac{1}{|\mathbf{N}(v_i)|}\Big(\sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} \mathbf{P}(v_j)\Big) - \mathbf{P}(v_i)$$



Lissage Laplacien

Démonstration

Lissage Laplacien

Avantages

- **Régularisation** forte de la surface (filtrage)
- Harmonisation locale de la **courbure**

Lissage Laplacien

Avantages

- **Régularisation** forte de la surface (filtrage)
- Harmonisation locale de la **courbure**

Inconvénients

- Effet de **rétrécissement** sur des surfaces fermées
- **Sensible à la résolution** de la surface

Lissage par flot de courbure

Limite du lissage Laplacien

Lissage non uniforme

- Influence de la résolution ?
- Estimation de la fréquence ?

Lissage par **flot de courbure**

- Indépendante de la **résolution** (ou paramétrisation)
- Eliminer la **composante tangentielle** (selon la normale $\vec{n}$)
- Intensité en fonction de la **courbure** $\overline{\kappa}$ (fréquence)

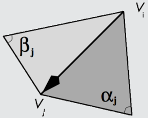
$$\Delta \mathbf{P}(v_i) = -\overline{\kappa}(v_i)\vec{n}(v_i)$$

Lissage par flot de courbure

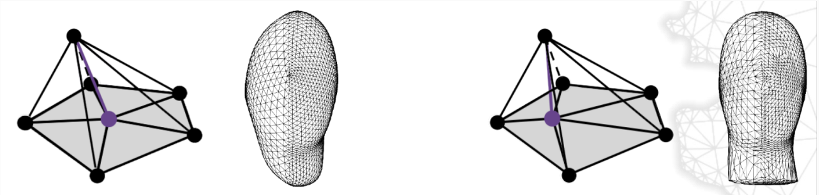
Opérateur Laplace-Beltrami

$$\Delta \mathbf{P}(v_i) = \sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} w_{ij}(\mathbf{P}(v_j) - \mathbf{P}(v_i))$$

$$cot(\rho) = \frac{1}{tan(\rho)} = \frac{cos(\rho)}{sin(\rho)}$$



$$w_{ij} = \frac{1}{\sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} cot(\alpha_j) + cot(\beta_j)} (cot(\alpha_j) + cot(\beta_j))$$



Lissage par flot de courbure

Démonstration

Lissage par flot de courbure

- Lissage globalement homogène
- Plus de glissement des sommets sur la surface
- Toujours un problème de rétrécissement

Lissage de Taubin

Principe

- Lissage sans perte de volume, filtre passe-bas

Filtrage **Gaussien** d'un maillage

- Convolution d'un signal par une Gaussienne
- Evaluation discrète des coefficients

$$g_{ij} = e^{-\frac{||\mathbf{P}(v_j)-\mathbf{P}(v_i)||^2}{2\pi\sigma^2}}$$

- Formulé comme un lissage Laplacien (barycentre)

$$w_{ij}(\sigma) = \frac{g_{ij}(\sigma)}{1+\sum\limits_{j\in\mathbf{N}(v_i)} g_{ij}(\sigma)}$$

Lissage de Taubin

Principe

- Lissage sans perte de volume, filtre passe-bas

Lissage de Taubin

Deux lissages Gaussiens successifs : $+\lambda / -\mu$

$$\mathbf{P}(v_i)^{(*)} \leftarrow \mathbf{P}(v_i)^{(t)} + \lambda \sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} w_{ij}^{(t)}(\sigma)(\mathbf{P}(v_j)^{(t)} - \mathbf{P}(v_i)^{(t)})$$

$$\mathbf{P}(v_i)^{(t+1)} \leftarrow \mathbf{P}(v_i)^{(t)} - \mu \sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} w_{ij}^{(*)}(\sigma)(\mathbf{P}(v_j)^{(*)} - \mathbf{P}(v_i)^{(*)})$$

- Avec $\lambda < \mu$, mais des valeurs proches ($\lambda = 0.50$, $\mu = 0.53$)

Lissage de Taubin

Démonstration

Lissage de Taubin

- Harmonisation de la courbure de la surface
- Quasiment plus de rétrécissement
- Préservation de la qualité des triangles ?

Optimisation topologique

Optimisation topologique

Amélioration de la représentation

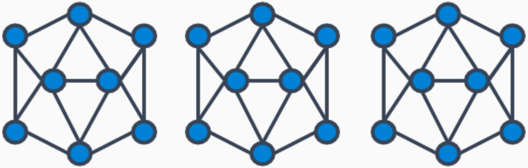
- Se diriger vers un maillage **régulier**
- Régularisation du nombre d'éléments

- Transformation de la topologie du maillage
- Utilisation de **transformations topologiques locales**

Opérations topologiques élémentaires

Transformations locales

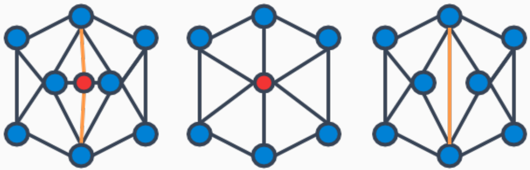
- Modifier la topologie du maillage autour d'une arête



Opérations topologiques élémentaires

Transformations locales

- Modifier la topologie du maillage autour d'une arête
- Trois méthodes : Split, Collapse, Flip



Edge Split

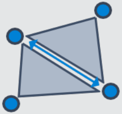
Actions

Partager en deux l'arête (et tous ses triangles adjacents)

- Insertion d'un sommet v^* au milieu de l'arête
- Recomposition des triangles autour du sommet

Math lang

- $V \leftarrow V \cup v^*, \mathbf{P}(v^*) = \frac{\mathbf{P}(v_i)+\mathbf{P}(v_j)}{2}$
- $T_{ij} = \{t \in T | v_i, v_j \in t\}$
- $T^*_{ij} = \bigcup_{t=(v_i,v_j,v_k)\in T_{ij}} \{(v_i, v^*, v_j), (v_j, v^*, v_k)\}$
- $T \leftarrow (T \setminus T_{ij}) \cup T^*_{ij}$



Edge Split

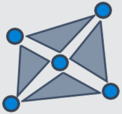
Actions

Partager en deux l'arête (et tous ses triangles adjacents)

- Insertion d'un sommet v^* au milieu de l'arête
- Recomposition des triangles autour du sommet

Math lang

- $V \leftarrow V \cup v^*, \mathbf{P}(v^*) = \frac{\mathbf{P}(v_i)+\mathbf{P}(v_j)}{2}$
- $T_{ij} = \{t \in T | v_i, v_j \in t\}$
- $T^*_{ij} = \bigcup_{t=(v_i,v_j,v_k)\in T_{ij}} \{(v_i, v^*, v_j), (v_j, v^*, v_k)\}$
- $T \leftarrow (T \setminus T_{ij}) \cup T^*_{ij}$



Edge Collapse

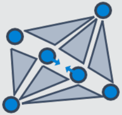
Actions

Effondrer l'arête (et recoller les triangles)

- Suppression d'un des sommets de l'arête
- Recollage des triangles du sommet supprimé

Math lang

- $T_{ij} = \{t \in T | v_i, v_j \in t\}$
- $T \leftarrow T \setminus T_{ij}$
- $\forall t = (v_j, v_u, v_k) \in T, t \leftarrow (v_i, v_u, v_k)$
- $V \leftarrow V \setminus v_j, \mathbf{P}(v_i) \leftarrow \frac{\mathbf{P}(v_i)+\mathbf{P}(v_j)}{2}$



Edge Collapse

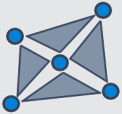
Actions

Effondrer l'arête (et recoller les triangles)

- Suppression d'un des sommets de l'arête
- Recollage des triangles du sommet supprimé

Math lang

- $T_{ij} = \{t \in T | v_i, v_j \in t\}$
- $T \leftarrow T \setminus T_{ij}$
- $\forall t = (v_j, v_u, v_k) \in T, t \leftarrow (v_i, v_u, v_k)$
- $V \leftarrow V \setminus v_j, \mathbf{P}(v_i) \leftarrow \frac{\mathbf{P}(v_i)+\mathbf{P}(v_j)}{2}$



Edge Collapse

Question : Existe-t-il des configurations illégales pour un "collapse" ?

Edge Flip

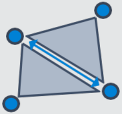
Actions

Basculement de l'arête (et transformation des triangles

- Identification des deux sommets voisins de l'arête
- Recomposition des triangles autour des sommets

Math lang

- $T_{ij} = \{t \in T | v_i, v_j \in t\}$
- $V_{ij} = \{v_k | t = (v_i, v_j, v_k) \in T_{ij}\} = \{v_1, v_2\}$
- $T^*_{ij} = \{(v_1, v_2, v_i), (v_1, v_2, v_j)\}$
- $T \leftarrow (T \setminus T_{ij}) \cup T^*_{ij}$



Edge Flip

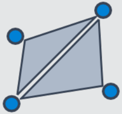
Actions

Basculement de l'arête (et transformation des triangles

- Identification des deux sommets voisins de l'arête
- Recomposition des triangles autour des sommets

Math lang

- $T_{ij} = \{t \in T | v_i, v_j \in t\}$
- $V_{ij} = \{v_k | t = (v_i, v_j, v_k) \in T_{ij}\} = \{v_1, v_2\}$
- $T^*_{ij} = \{(v_1, v_2, v_i), (v_1, v_2, v_j)\}$
- $T \leftarrow (T \setminus T_{ij}) \cup T^*_{ij}$



Edge Flip

Question : Existe-t-il des configurations illégales pour un "flip" ?

Opérations topologiques élémentaires

Effets des opérations

Edge split

- **Augmentation** du nombre d'éléments (raffinement)
- Création d'un sommet de valence 4 (**irrégularité**)

Edge collapse

- **Diminution** du nombre d'éléments (simplification)
- Risque de mauvaise topologie (résultat **non-manifold**)

Edge flip

- Pas de changement du nombre d'éléments
- Modification de la connectivité (**nombre de voisins**)

Que faire avec ces opérations ?

Optimisation topologique

Que faire avec ces opérations ? Choix des arêtes ?

Optimisation topologique

Que faire avec ces opérations ? Choix des arêtes ?

- **Automatisation** du processus

Optimisation topologique

Que faire avec ces opérations ? Choix des arêtes ?

- **Automatisation** du processus
- Définition de **critères** de sélection

Optimisation topologique

Que faire avec ces opérations ? Choix des arêtes ?

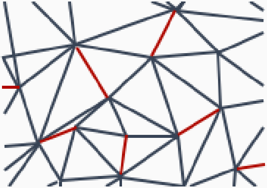
- **Automatisation** du processus
- Définition de **critères** de sélection
- Minimisation de l'**énergie**

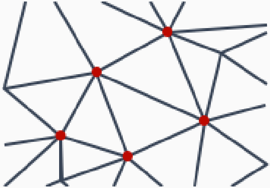
Décimation de maillage

Décimation de maillage

Réduire la complexité en préservant la géométrie

- Supprimer progressivement des éléments du maillage
- Quels éléments pour ne pas affecter la surface ?





- Ordonner les arêtes selon un critère
- Réaliser des **edge collapses** successifs selon l'ordre établi

Décimation de maillage

Critère de longueur

Modifier toujours les arêtes **les plus courtes** par **edge collapse**

- Ordonnancement des arêtes dans une pile
- Suppression des arêtes dans l'ordre de la pile
- Risque de perte d'information de la surface

Critère d'erreur

Modifier toujours les arêtes **les moins "nécessaires"** par **edge collapse**

- Trier en fonction de l'erreur créée par le **collapse**
- Distance des nouveaux points à la surface initiale
- Surface mieux préservée,adaptativité locale

Minimisation d’énergie

Minimisation d'énergie

Concept d'énergie (fonctionnelle d'énergie)

- Mesure globale définie sur l'**espace des maillages**
- Représente un **aspect particulier à optimiser**
- Fonction de "**fitness**"

Définie pour **pénaliser ce que l'on cherche à minimiser**

Exemples de fonctionnelle d'énergie

- Énergie à minimiser pour **augmenter les sommets réguliers**

$$E_{valence}(V, T) = \sum_{v_i \in V} (|\mathbf{N}(v_i)| - 6)^2$$

- Énergie à minimiser pou **réduire la courbure**

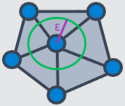
$$E_{courbure}(V, T) = \int_{S(V,T)} \overline{\kappa}^2 dS \approx \sum_{v_i \in V} (A(v_i)\overline{\kappa}(v_i))^2$$

Lissage par minimisation d'énergie

Déplacement de sommets (vertex shifting)

Opération élémentaire pour la minimisation d'énergie

- Géométrique (affecte seulement $\mathbf{P}$)
- Direction donnée par l'énergie E
- Contraint dans une sphère de rayon ϵ



Minimisation par **descente de gradient**

- Direction induit par la diminution d'énergie
- Estimer en chaque sommet le gradient de l'énergie
- Déplacement dans la direction opposée

$$\mathbf{P}^{(t+1)}(v_i) \leftarrow \mathbf{P}^{(t)}(v_i) - min(1, \frac{\epsilon}{||\frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}}(v_i)||}).\frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}}(v_i)$$

Lissage et énergies

Quelles énergies les méthodes de lissage précédentes minimisent-elles ?

Lissage par flot de courbure

- Minimisation de la **surface totale**

$$E_{surface}(V, T) = \int_{S(V,T)} dS \approx \sum_{t_k \in T} (A(t_k))$$

- Gradient d'énergie selon $\overline{\kappa}(v_i)\vec{n}(v_i)$

Lissage de Taubin

- Minimisation de la **courbure totale**

$$E_{courbure}(V, T) = \int_{S(V,T)} \overline{\kappa}^2 dS \approx \sum_{v_i \in V} (A(v_i)\overline{\kappa}(v_i))^2$$

Exemple de minimisation d'énergie

Régularisation des longueurs

Optimiser les longueurs des arêtes vers l^*

- Définition d'une énergie appropriée

$$E_{longueur} = ?$$

- Gradient d'énergie en v_i en dérivant E par rapport à $\mathbf{P}(v_i)$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}}(v_i) = ?$$

Exemple de minimisation d'énergie

Régularisation des longueurs

Optimiser les longueurs des arêtes vers l^*

- Définition d'une énergie appropriée

$$E_{longueur} = \sum_{v_i, v_j \in V | v_j \in \mathbf{N}(v_i)} (||\mathbf{P}(v_j) - \mathbf{P}(v_i)|| - l^*)^2$$

- Gradient d'énergie en v_i en dérivant E par rapport à $\mathbf{P}(v_i)$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}}(v_i) = ?$$

Exemple de minimisation d'énergie

Régularisation des longueurs

Optimiser les longueurs des arêtes vers l^*

- Définition d'une énergie appropriée

$$E_{longueur} = \sum_{v_i inV} \frac{1}{2} \sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} (l_{ij} - l^*)^2$$

- Gradient d'énergie en v_i en dérivant E par rapport à $\mathbf{P}(v_i)$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}}(v_i) = ?$$

Exemple de minimisation d'énergie

Régularisation des longueurs

Optimiser les longueurs des arêtes vers l^*

- Définition d'une énergie appropriée

$$E_{longueur} = \sum_{v_i in V} \frac{1}{2} \sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} (l_{ij} - l^*)^2$$

- Gradient d'énergie en v_i en dérivant E par rapport à $\mathbf{P}(v_i)$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}}(v_i) = \sum_{v_j \in \mathbf{N}(v_i)} (\frac{l^*}{l_{ij}} - 1)(\mathbf{P}(v_j) - \mathbf{P}(v_i))$$

Énergie de régularisation

Optimiser la régularité des triangles

Mesurer l'**excentricité** (anisotropie) des triangles

- Dissemblance ($\neq$ Ressemblance) avec un triangle "parfait" (équilatéral)

Comment estimer l'excentricité d'un triangle ?

Énergie de régularisation

Optimiser la régularité des triangles

Mesurer l'**excentricité** (anisotropie) des triangles

- Dissemblance ($\neq$ Ressemblance) avec un triangle "parfait" (équilatéral)

- Plusieurs mesures possibles

$$\eta(t) = 1 - \frac{L_{min}(t)}{L_{max}(t)} \qquad \eta(t) = 1 - 6\sqrt{3}\frac{A(t)}{P(t)^2} \qquad \eta(t) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \sum sin\alpha_i$$

- Entre 0 et 1, toutes **minimales** dans le cas équilatéral

Énergie de régularisation

Optimiser la régularité des triangles

Mesurer l'**excentricité** (anisotropie) des triangles

- Dissemblance ($\neq$ Ressemblance) avec un triangle "parfait" (équilatéral)

Excentricité pour définir une énergie de régularisation

$$E_{regularisation}(V, T) = \sum_{t_k \in T} (\eta(t_k))$$

- Minimale quand tous les triangles sont équilatéraux

Énergie de régularisation

Descente de gradient

Estimer le **gradient de l'énergie** en chaque sommet v_i

- Décomposer l'énergie des triangles sur les **sommets**
  $E_{regularisation}(V, T) = \sum_{t_k \in T} (\eta(t_k)) = \sum_{v_i \in V} \frac{1}{3} \sum_{t_k \in T(v_i)} (\eta(t_k))$
- Simplification de la dérivation en un sommet
  $\frac{\partial E_{regularisation}}{\partial \mathbf{P}}(v_i) = \frac{1}{3} \sum_{t_k \in T(v_i)} (\frac{\partial \eta(t_k)}{\partial \mathbf{P}}(v_i))$

- Optimisation de la régularité des triangles
- ... mais sans aucune prise en compte de la forme
- Comment prendre en compte tous les aspects ?

Multiples énergies

Énergie composite

- Objectif : minimiser une **somme d'énergies**
  $E(V,T) = \omega_r E_{regularisation}(V,T) + \omega_c E_{courbure}(V,T) + \ldots$
- Combinaison optimisation de forme + lissage de Taubin
- Opérations élémentaires : **Vertex shifting** + opérations topologiques

- Déplacement suivant plusieurs **"forces"** en compétition
- **Équilibre** des différents coefficients ω déterminant

Remaillage

Remaillage isotrope

But

Améliorer l'*isotropie* avec une taille cible

- Application des principes précédents
- Éliminer les arêtes trop courtes/trop longues
- Éliminer les sommets irréguliers (valence 6)
- Homogénéiser la distribution des sommets

Algorithme de remaillage topologique (longueur cible l)

- **Edge split** sur les arêtes de **longueur** $< l_{min}$
- **Edge collapse** sur les arêtes de **longueur** $> l_{max}$
- **Edge flip** pour **minimiser l'énergie** $E_{valence}$
- **Lissage** pour régulariser la **position des sommets**

$$l_{min} = \frac{4}{5} l \qquad l_{max} = \frac{4}{3} l$$

Remaillage isotrope

- Modification complète de la topologie du maillage
- Amélioration de la régularité à tous les niveaux
- Préservation de la surface (avec un certain lissage)

Références

Inspiré des présentations de Sébastien Beugnon, Guillaume Cerutti, Loic Barthe et David Vanderhaeghe.