

Modélisation et Programmation 3D

Représentation surfaciques, polyèdres et quadriques

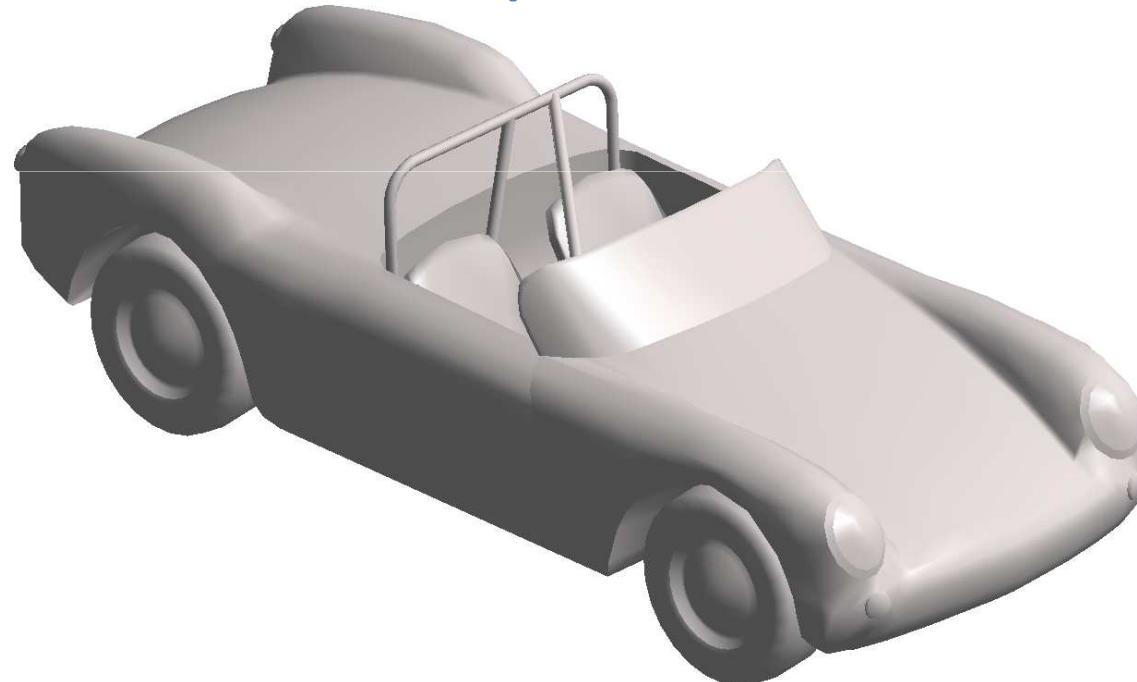
Cours du 12/02/2018

Plan

- Introduction
- Rappel de trigonométrie
- Représentation polyédrique ≠ continue
- Quadriques
- Rappel OpenGL

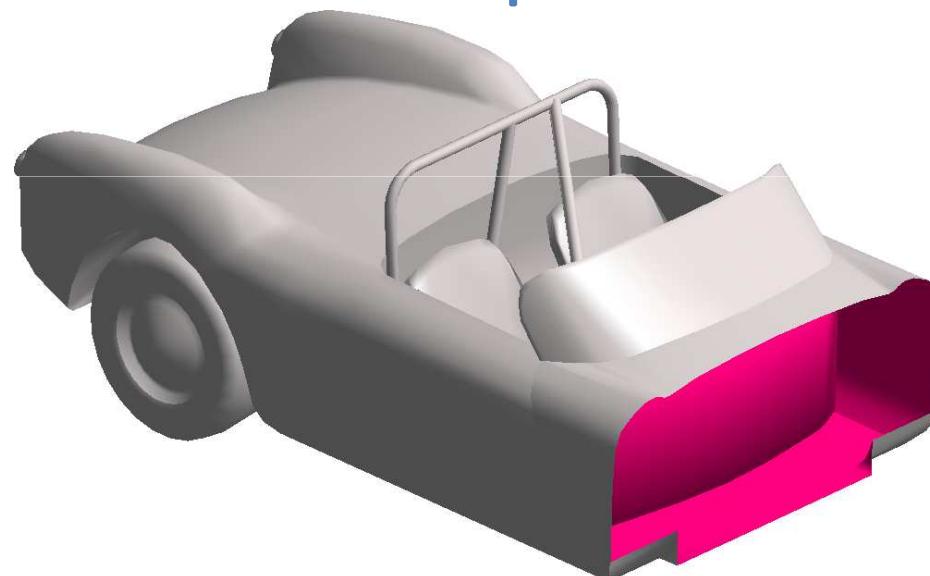
Introduction

- Représentation surfacique :
→ le modèle est défini par sa surface extérieure



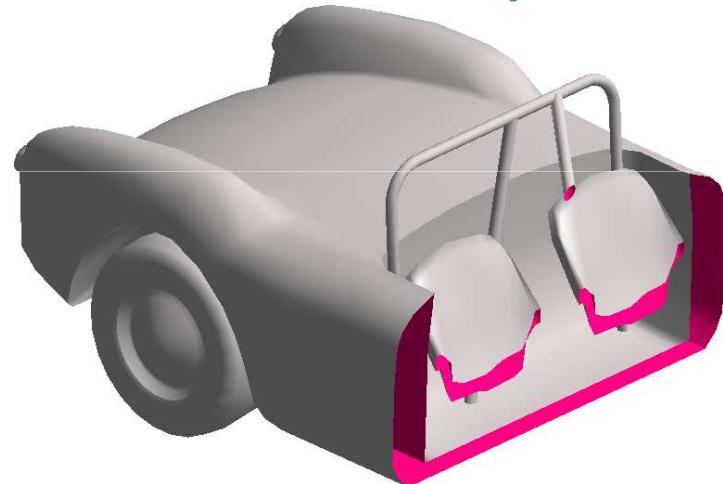
Introduction

- Représentation surfacique :
→ le modèle est défini par sa surface extérieure



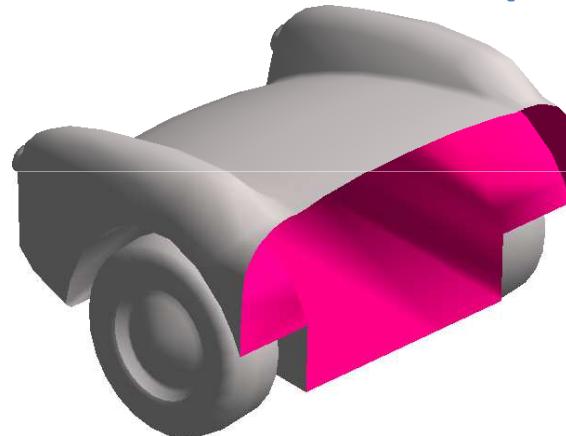
Introduction

- Représentation surfacique :
→ le modèle est défini par sa surface extérieure



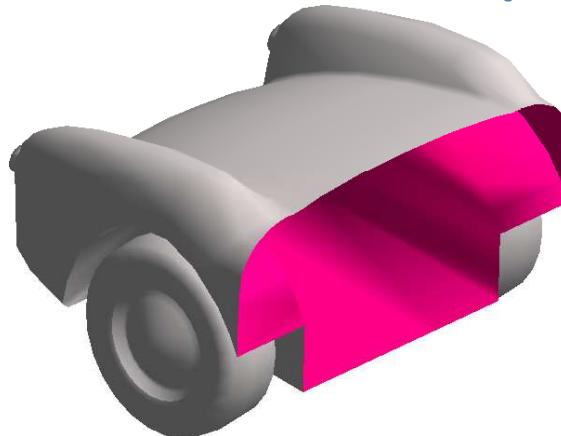
Introduction

- Représentation surfacique :
→ le modèle est défini par sa surface extérieure



Introduction

- Représentation surfacique :
→ le modèle est défini par sa surface extérieure



→ Comment représenter la surface d'un objet ??

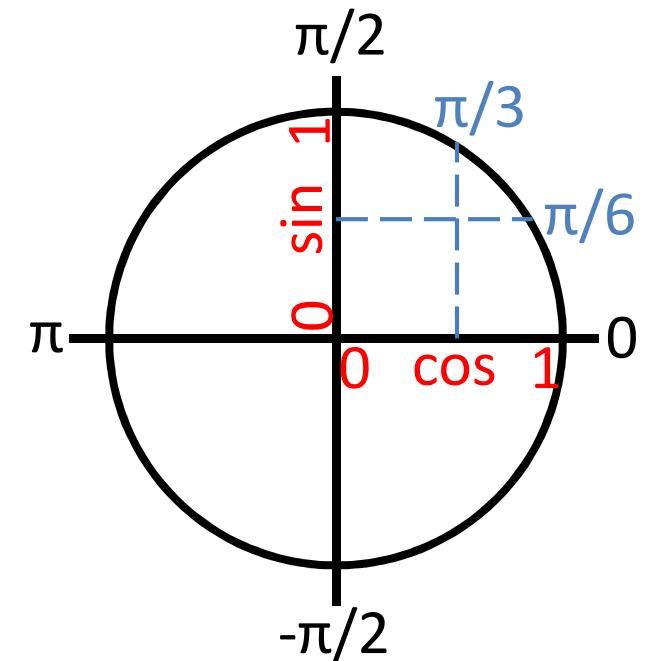
Rappel trigonométrie

- Propriétés du triangle rectangle :
 - Triangle ABC rectangle en A
 - BC est l'hypoténuse
 - Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$
 - Pour l'angle \widehat{ABC} , entre les vecteurs \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{BC} :
 - $\cos(ABC) = BA/BC$: adjacent/hypoténuse
 - $\sin(ABC) = AC/BC$: opposé/hypoténuse
 - $\tan(ABC) = AC/BA$: opposé/adjacent

Rappel trigonométrie

- Angles et cercle trigonométrique :

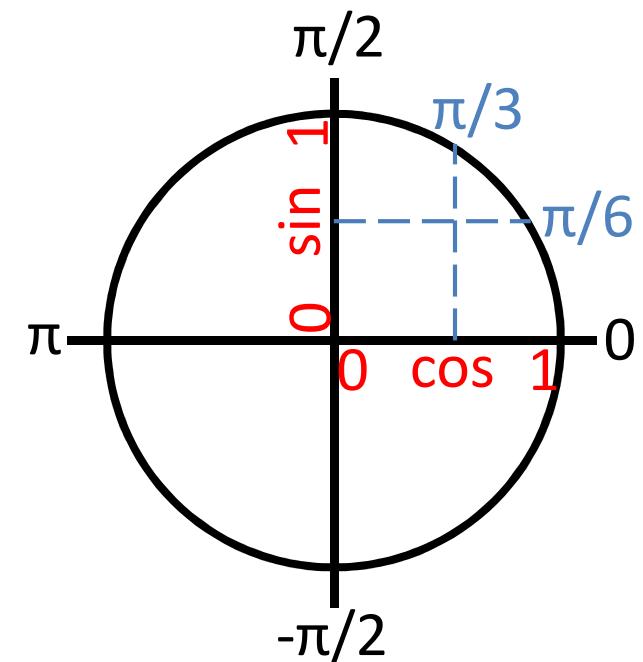
- $\cos(0) = 1 \quad \cos(\pi) = -1$
- $\cos(\pi/2) = 0 \quad \cos(\pi/3) = 1/2$
- $\sin(\pi/2) = 1 \quad \sin(-\pi/2) = -1$
- $\sin(0) = 0 \quad \sin(\pi/6) = 1/2$



Rappel trigonométrie

- Angles et cercle trigonométrique :

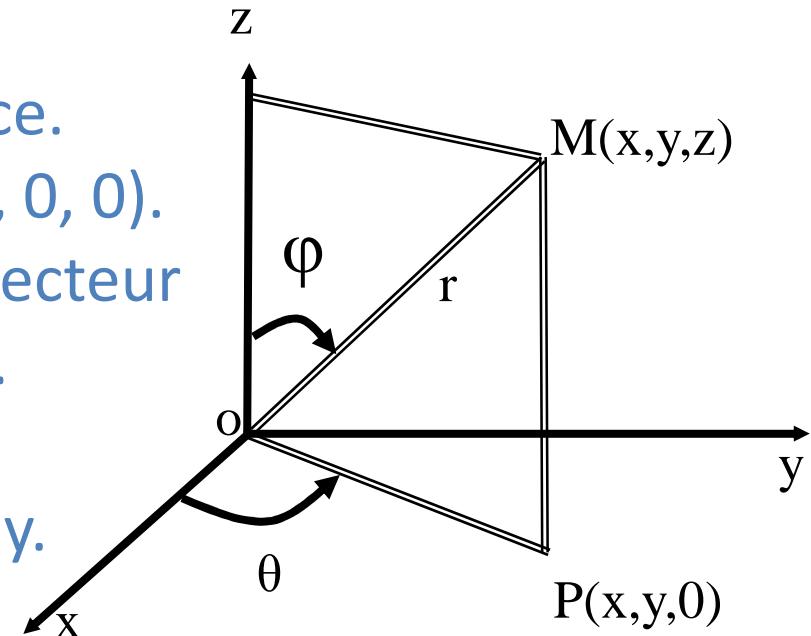
- $\cos(0) = 1 \quad \cos(\pi) = -1$
- $\cos(\pi/2) = 0 \quad \cos(\pi/3) = 1/2$
- $\sin(\pi/2) = 1 \quad \sin(-\pi/2) = -1$
- $\sin(0) = 0 \quad \sin(\pi/6) = 1/2$
- $\cos(\pi/2 - A) = \sin(A)$
- $\sin(\pi/2 - A) = \cos(A)$
- $\cos(A) \neq 1 - \cos(\pi/2 - A)$
- $\sin(A) \neq 1 - \sin(\pi/2 - A)$



Rappel trigonométrie

- Coordonnées sphériques :

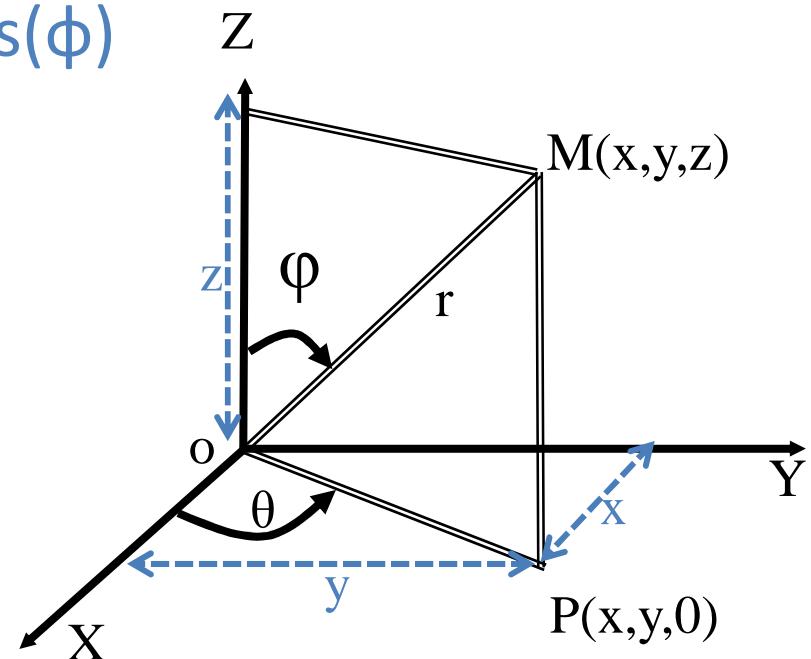
- Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.
- Soit r la distance entre M et $O(0, 0, 0)$.
- Soit ϕ l'angle entre l'axe Z et le vecteur \overrightarrow{OM} qui est compris entre 0 et π .
- Soit $P(x, y, 0)$ la projection orthogonale de M sur le plan xOy .
- Soit θ l'angle entre l'axe X et le vecteur \overrightarrow{OP} qui est compris entre 0 et 2π .
- Le triplet (r, ϕ, θ) constitue les *coordonnées sphériques* de M .



Rappel trigonométrie

- Coordonnées sphériques :

➤ $\cos(\phi) = PM/OM \rightarrow z = r\cos(\phi)$

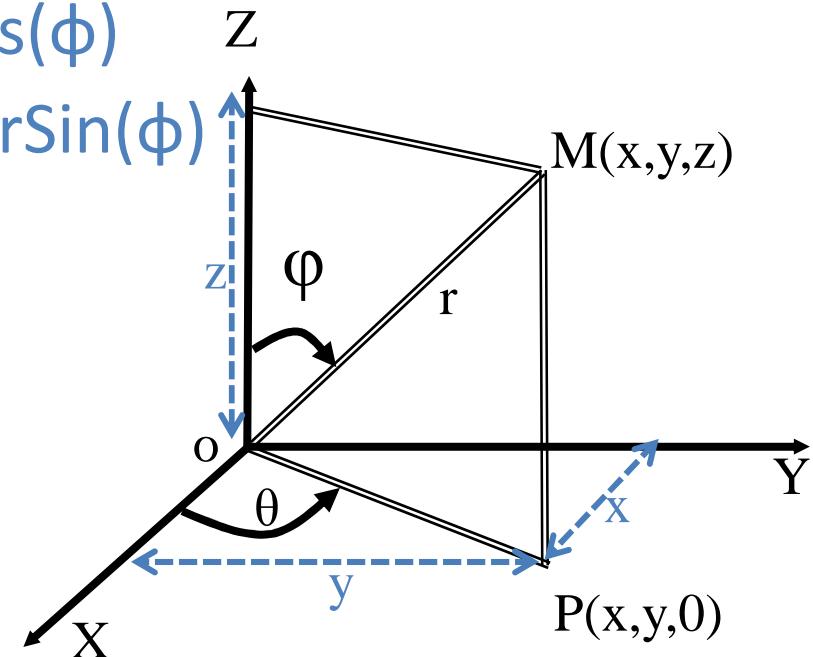


Rappel trigonométrie

- Coordonnées sphériques :

$$\triangleright \cos(\phi) = PM/OM \rightarrow z = r\cos(\phi)$$

$$\triangleright \cos(90-\phi) = OP/OM \rightarrow OP = r\sin(\phi)$$



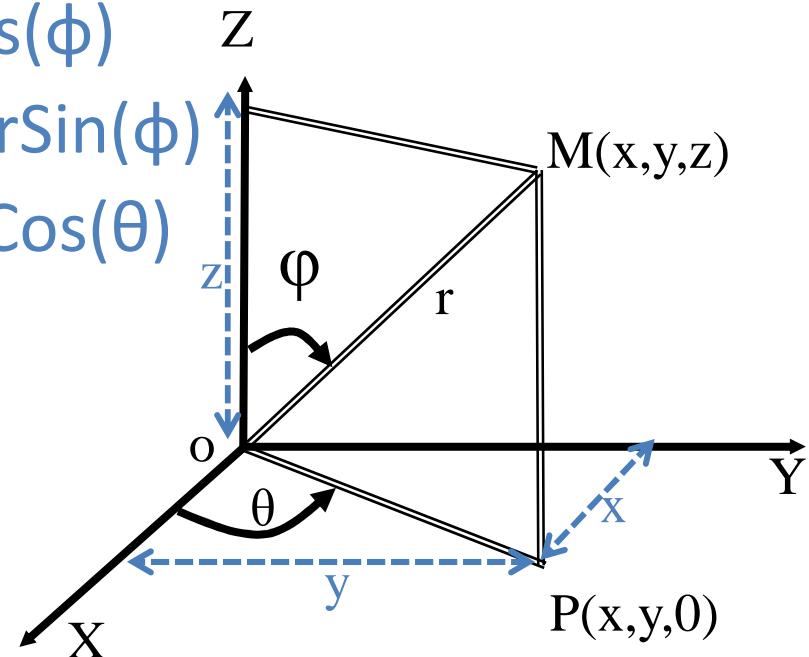
Rappel trigonométrie

- Coordonnées sphériques :

$$\triangleright \cos(\phi) = PM/OM \rightarrow z = r\cos(\phi)$$

$$\triangleright \cos(90-\phi) = OP/OM \rightarrow OP = r\sin(\phi)$$

$$\triangleright x/OP = \cos(\theta) \rightarrow x = r\sin(\phi)\cos(\theta)$$



Rappel trigonométrie

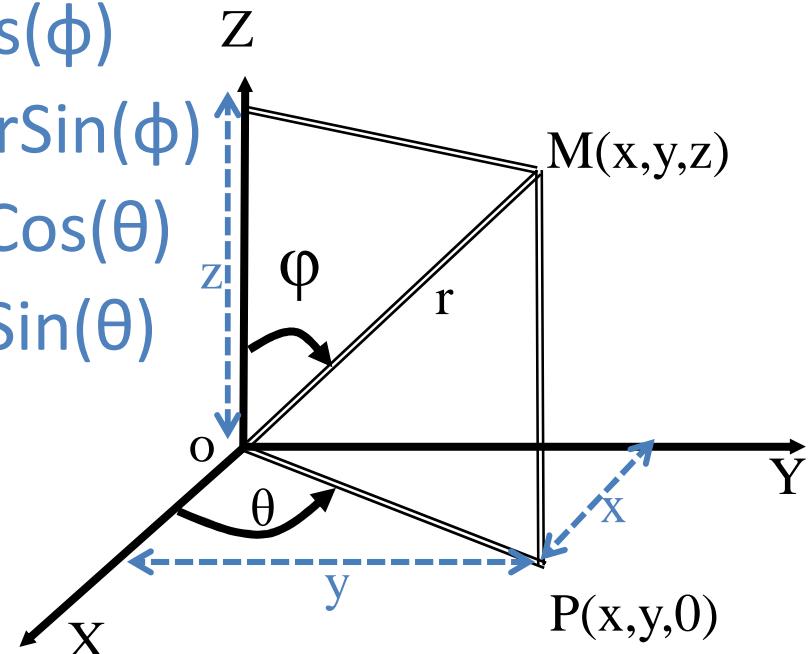
- Coordonnées sphériques :

$$\triangleright \cos(\phi) = PM/OM \rightarrow z = r\cos(\phi)$$

$$\triangleright \cos(90-\phi) = OP/OM \rightarrow OP = r\sin(\phi)$$

$$\triangleright x/OP = \cos(\theta) \rightarrow x = r\sin(\phi)\cos(\theta)$$

$$\triangleright y/OP = \sin(\theta) \rightarrow y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$$



Rappel trigonométrie

- Coordonnées sphériques :

$$\triangleright \cos(\phi) = PM/OM \rightarrow z = r\cos(\phi)$$

$$\triangleright \cos(90-\phi) = OP/OM \rightarrow OP = r\sin(\phi)$$

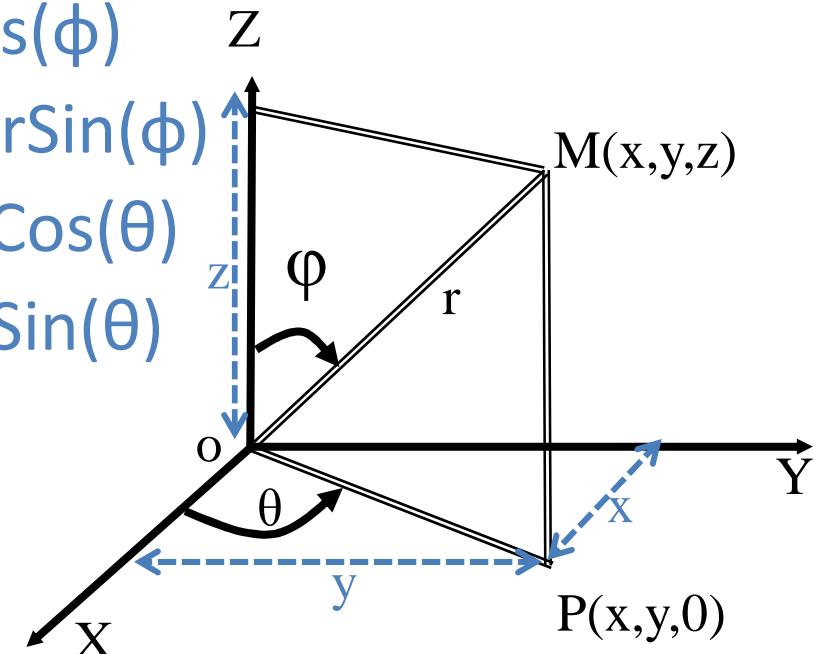
$$\triangleright x/OP = \cos(\theta) \rightarrow x = r\sin(\phi)\cos(\theta)$$

$$\triangleright y/OP = \sin(\theta) \rightarrow y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$$

$$\triangleright x = r\sin(\phi)\cos(\theta)$$

$$\triangleright y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$$

$$\triangleright z = r\cos(\phi)$$



Polyèdre \neq Surface continue

- Définir une surface de manière finie.
- Un polyèdre est défini par :
 - Par un ensemble de points de \mathbb{R}^3 appelés sommets du polyèdres.
 - Par un ensemble de faces définies chacune par une suite de sommets.

Polyèdres \neq Surface continue

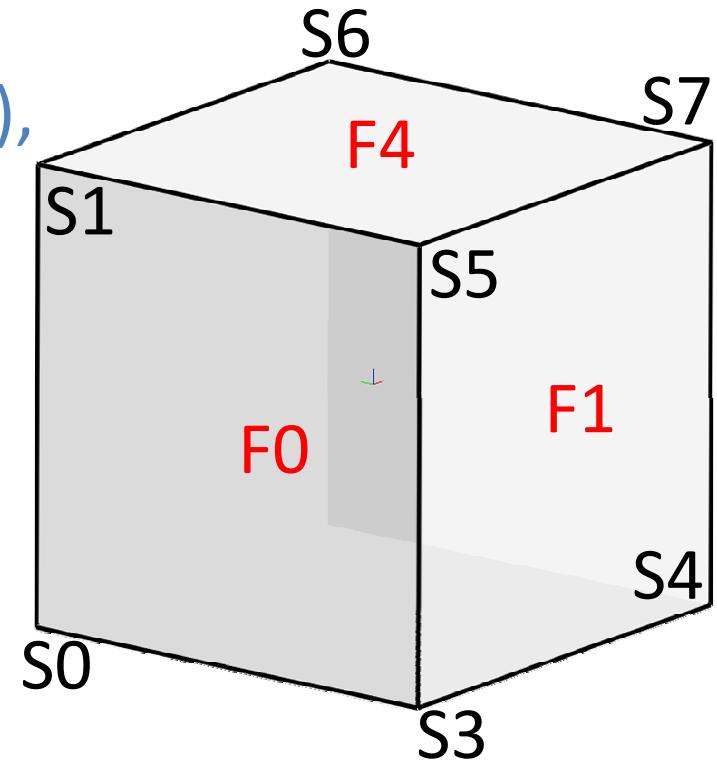
- Exemple du cube :

➤ L'ensemble de sommet :

{ $S_0(-5,-5,-5)$; $S_1(-5,-5,5)$; $S_2(-5,5,-5)$,
 $S_3(5,-5,-5)$; $S_4(5,5,-5)$; $S_5(5,-5,5)$
 $S_6(-5,5,5)$; $S_7(5,5,5)$ }

➤ L'ensemble de face :

{ $F_0(S_0, S_1, S_5, S_3)$; $F_1(S_5, S_7, S_4, S_3)$;
 $F_2(S_7, S_4, S_2, S_6)$; $F_3(S_6, S_2, S_0, S_1)$;
 $F_4(S_1, S_5, S_7, S_6)$; $F_5(S_0, S_3, S_4, S_2)$ }



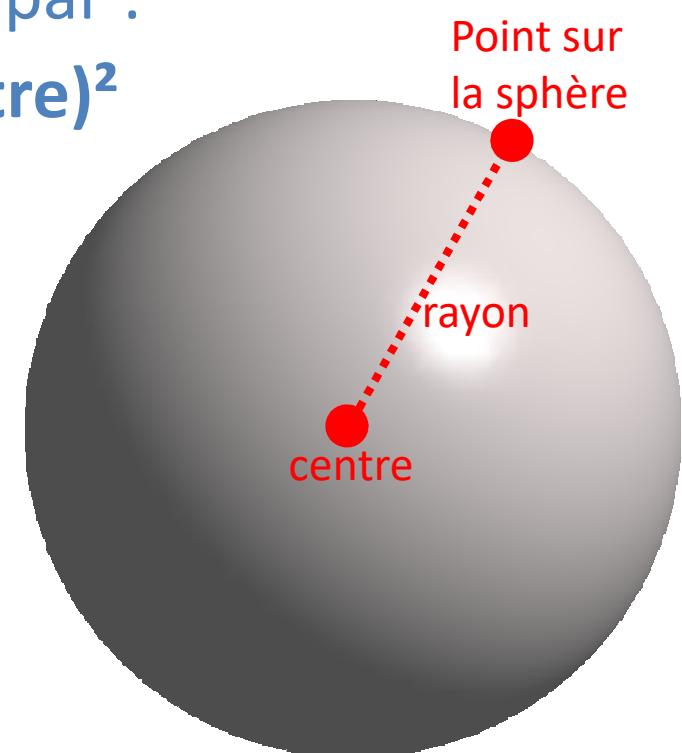
Polyèdres \neq Surface continue

- Définir une surface de manière continue :

➤ La surface est décrite par une équation

➤ Exemple : une sphère est définie par :

$$(X-X\text{centre})^2 + (Y-Y\text{centre})^2 + (Z-Z\text{centre})^2 = \text{Rayon}^2$$



Polyèdres \neq Surface continue

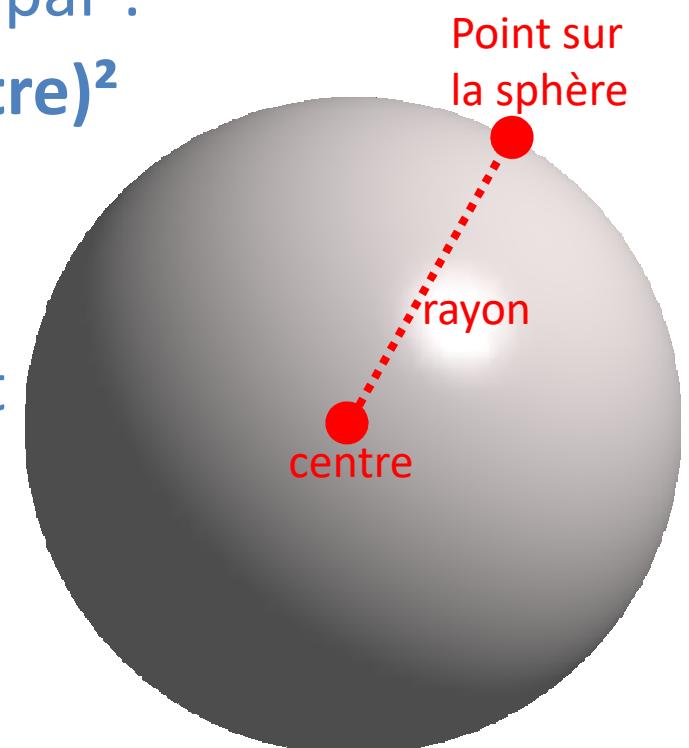
- Définir une surface de manière continue :

- La surface est décrite par une équation

- Exemple : une sphère est définie par :

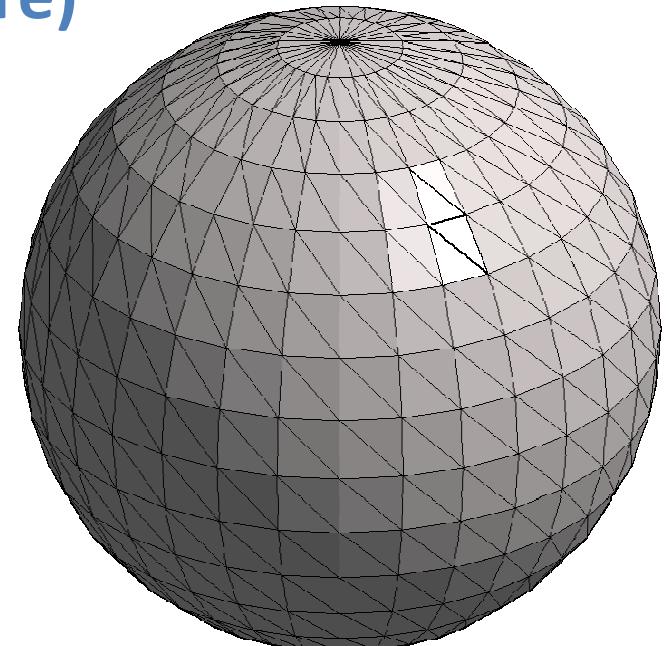
$$(X-X\text{centre})^2 + (Y-Y\text{centre})^2 + (Z-Z\text{centre})^2 = \text{Rayon}^2$$

- On peut ainsi définir la surface par autant de point que l'on veut et n'importe où sur la surface



Polyèdres \neq Surface continue

- Définir une surface de manière continue :
 - La surface est décrite par une équation
 - Exemple : une sphère est définie par :
$$(X-X\text{centre})^2 + (Y-Y\text{centre})^2 + (Z-Z\text{centre})^2 = \text{Rayon}^2$$
 - On peut ainsi définir la surface par autant de point que l'on veut et n'importe où sur la surface
 - contrairement au polyèdre



Quadriques

- La classe de surfaces quadriques contient les cylindres, les cônes, les sphères, les ellipsoïdes, les paraboloïdes, les hyperboloides ...
- Une quadrique a une équation implicite de degré 2 de la forme $F(x,y,z)=0$ avec : $F(x,y,z)=Ax^2+2Bxy+2Cxz+2Dx+Ey^2+2Fyz+2Gy+Hz^2+2Iz+J$

Quadriques

- La classe de surfaces quadriques contient les cylindres, les cônes, les sphères, les ellipsoïdes, les paraboloïdes, les hyperboloides ...
- Une quadrique a une équation implicite de degré 2 de la forme $F(x,y,z)=0$ avec : $F(x,y,z)=Ax^2+2Bxy+2Cxz+2Dx+Ey^2+2Fyz+2Gy+Hz^2+2Iz+J$
Sphère $\rightarrow (X-X_c)^2 + (Y-Y_c)^2 + (Z-Z_c)^2 = \text{rayon}^2$

Quadriques

- La classe de surfaces quadriques contient les cylindres, les cônes, les sphères, les ellipsoïdes, les paraboloïdes, les hyperboloides ...
- Une quadrique a une équation implicite de degré 2 de la forme $F(x,y,z)=0$ avec : $F(x,y,z)=Ax^2+2Bxy+2Cxz+2Dx+Ey^2+2Fyz+2Gy+Hz^2+2Iz+J$
Sphère $\rightarrow (X-X_c)^2 + (Y-Y_c)^2 + (Z-Z_c)^2 = \text{rayon}^2$
 $\rightarrow X^2 - 2XX_c + Y^2 - 2YY_c + Z^2 - 2ZZ_c + X_c^2 + Y_c^2 + Z_c^2 - r^2 = 0$

Quadriques

- La classe de surfaces quadriques contient les cylindres, les cônes, les sphères, les ellipsoïdes, les paraboloïdes, les hyperboloides ...
- Une quadrique a une équation implicite de degré 2 de la forme $F(x,y,z)=0$ avec : $F(x,y,z)=Ax^2+2Bxy+2Cxz+2Dx+Ey^2+2Fyz+2Gy+Hz^2+2Iz+J$

Sphère $\rightarrow (X-X_c)^2 + (Y-Y_c)^2 + (Z-Z_c)^2 = \text{rayon}^2$

$$\rightarrow X^2 - 2XX_c + Y^2 - 2YY_c + Z^2 - 2ZZ_c + X_c^2 + Y_c^2 + Z_c^2 - r^2 = 0$$

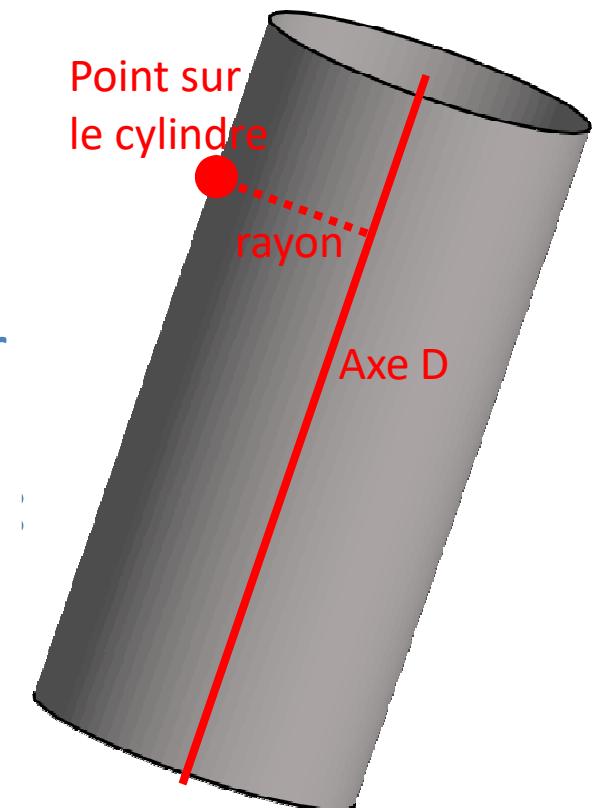
\rightarrow On retrouve $F(x,y,z)$ avec $A=1$, $E=1$, $H=1$,

$$D=X_c \ , \ G=Y_c, \ I=Z_c$$

$$\text{et } J = X_c^2 + Y_c^2 + Z_c^2 - r^2$$

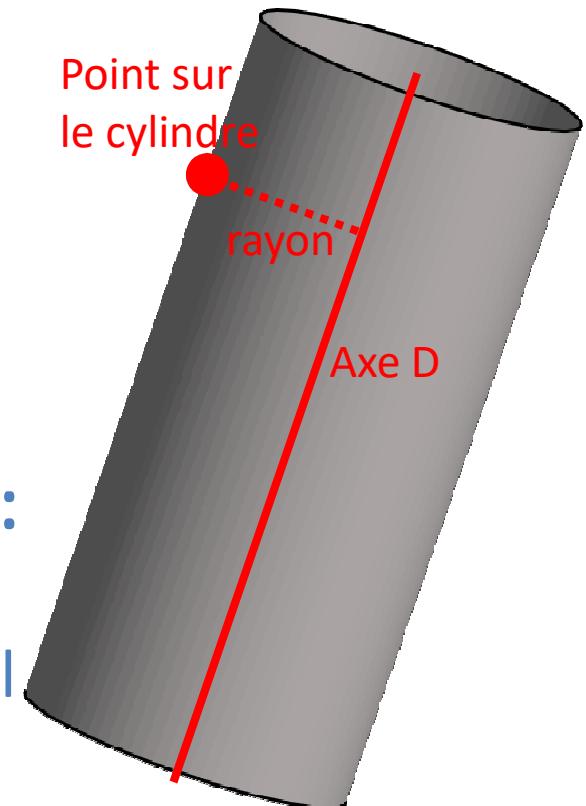
Quadriques : cylindres

- Un cylindre est défini:
 - par une droite et un rayon,
 - le cylindre de révolution d'axe D et de rayon r est constitué de l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 qui sont situés à distance r de la droite D.



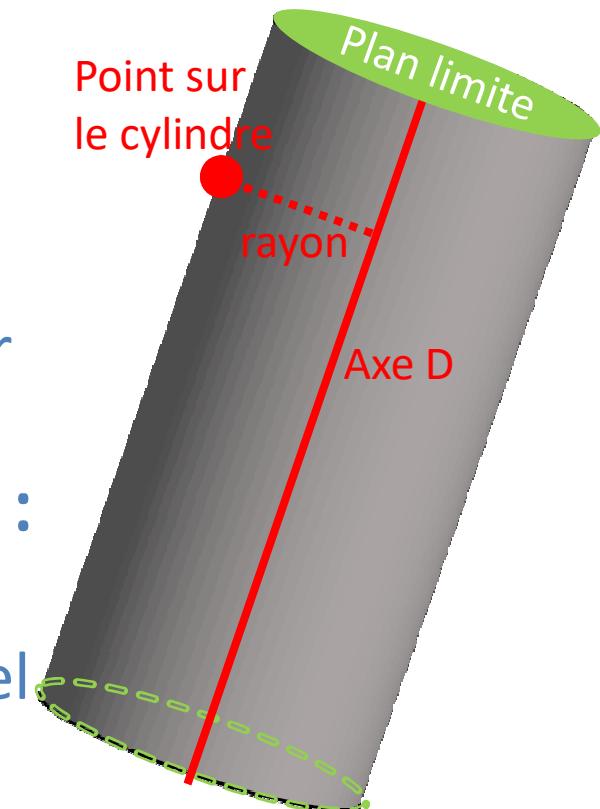
Quadriques : cylindres

- **Un cylindre est défini:**
 - par une droite et un rayon,
 - le cylindre de révolution d'axe D et de rayon r est constitué de l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 qui sont situés à distance r de la droite D.
- **Le cylindre qui coïncide avec l'axe Oz :**
 - a pour équation $x^2 + y^2 = r^2$
 - sa hauteur est défini par un nombre réel positif : h ,



Quadriques : cylindres

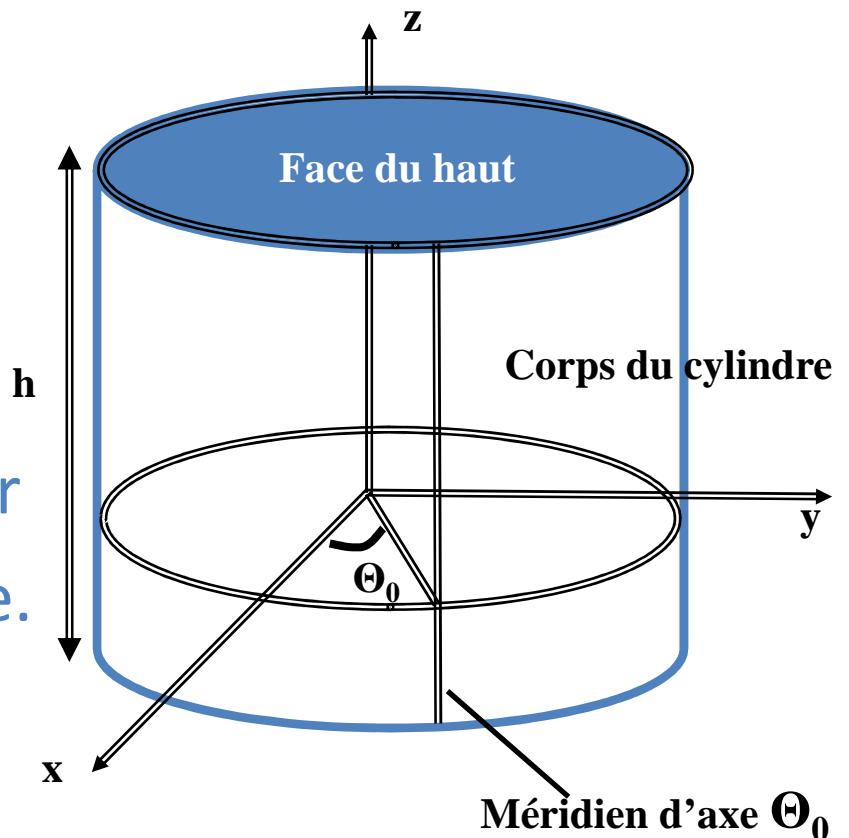
- **Un cylindre est défini:**
 - par une droite et un rayon,
 - le cylindre de révolution d'axe D et de rayon r est constitué de l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 qui sont situés à distance r de la droite D .
- **Le cylindre qui coïncide avec l'axe Oz :**
 - a pour équation $x^2 + y^2 = r^2$
 - sa hauteur est défini par un nombre réel positif : h ,
 - h permet de définir les deux plans limites du cylindres à $-h/2$ et $h/2$.



Quadriques : cylindres

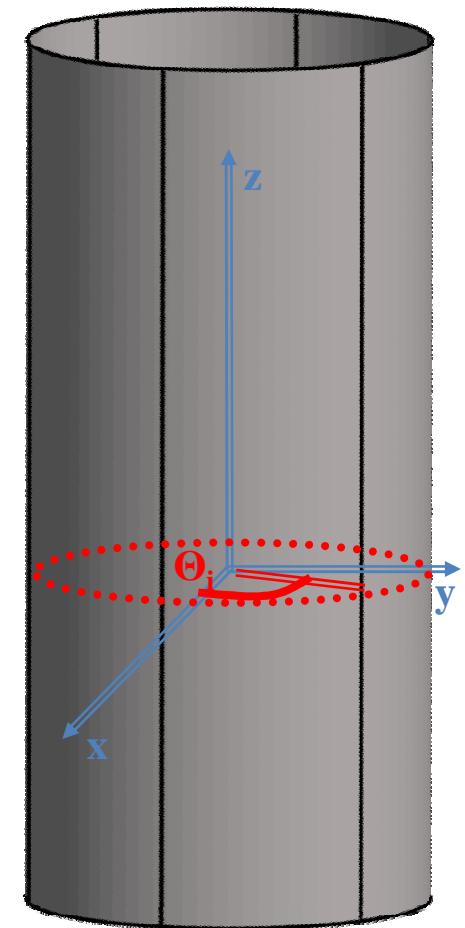
- Mériadiens d'un cylindre :

➤ Les *mériadiens* sur un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h sont les segments de droites contenus dans le corps du cylindre, de longueur h , parallèles à l'axe du cylindre.



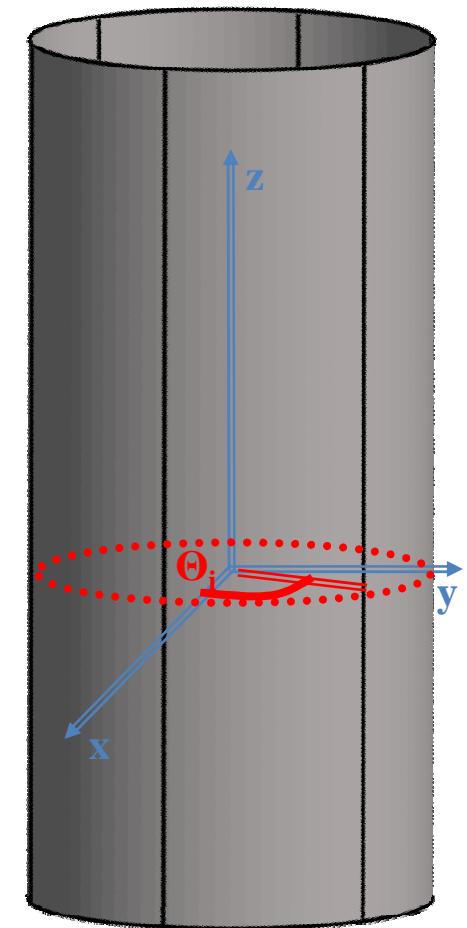
Quadriques : cylindres

- **Facettisation d'un cylindre :**
 - Etant donné un nombre de méridien m , nous allons considérer des méridiens M_i d'angle θ_i , pour $i=0,\dots,m$ régulièrement disposé sur le corps du cylindre.



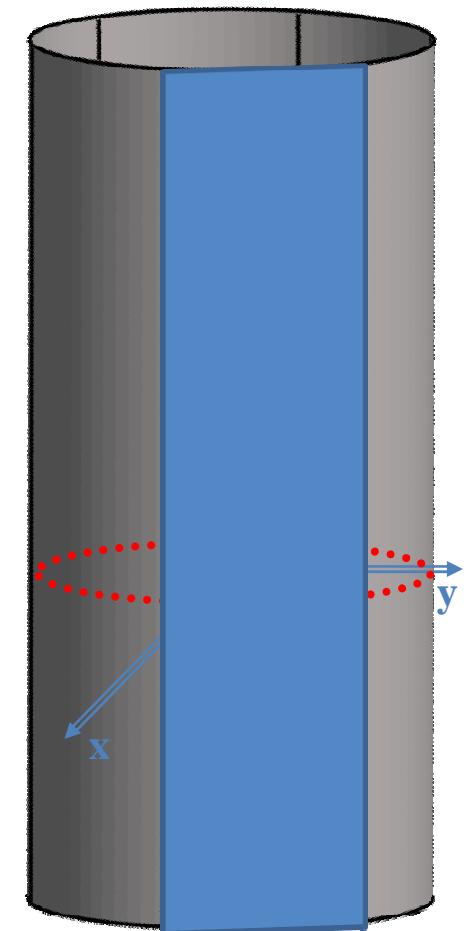
Quadriques : cylindres

- **Facettisation d'un cylindre :**
 - Etant donné un nombre de méridien m , nous allons considérer des méridiens M_i d'angle θ_i , pour $i=0, \dots, m$ régulièrement disposé sur le corps du cylindre.
 - Construire ensuite des facettes rectangulaires entre les méridiens M_i et M_{i+1} , pour $i=0, \dots, m-1$.



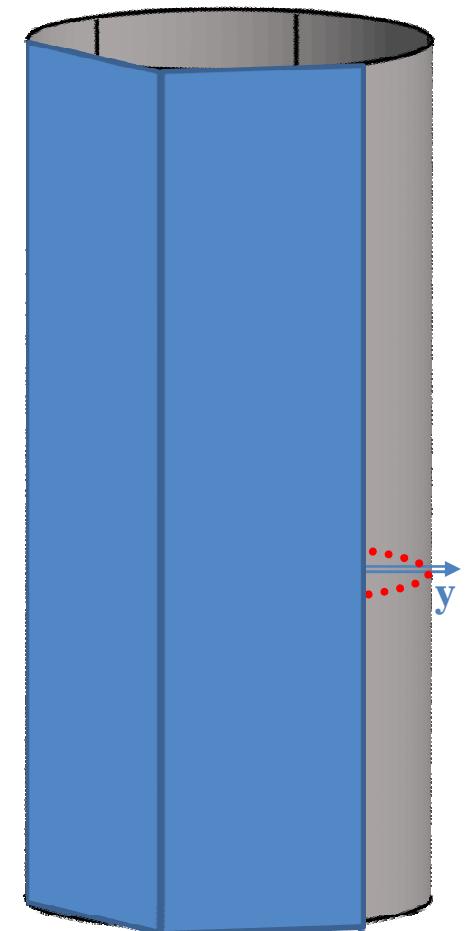
Quadriques : cylindres

- **Facettisation d'un cylindre :**
 - Etant donné un nombre de méridien m , nous allons considérer des méridiens M_i d'angle θ_i , pour $i=0, \dots, m$ régulièrement disposé sur le corps du cylindre.
 - Construire ensuite des facettes rectangulaires entre les méridiens M_i et M_{i+1} , pour $i=0, \dots, m-1$.



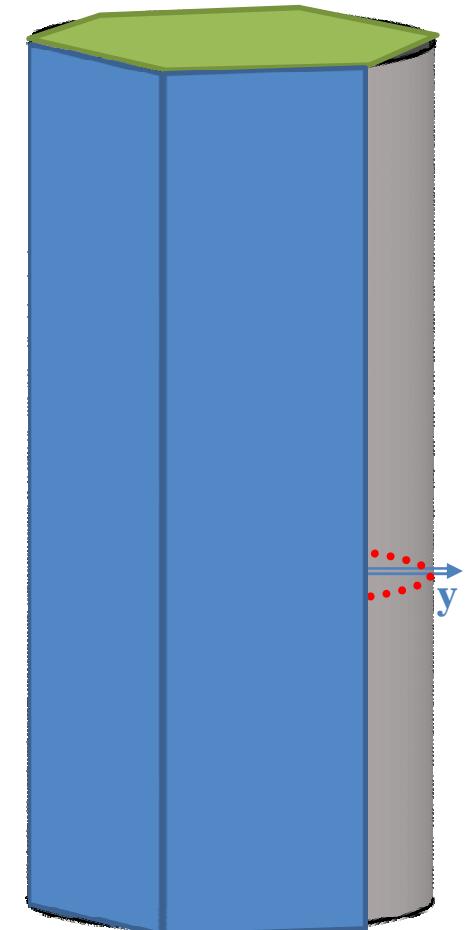
Quadriques : cylindres

- **Facettisation d'un cylindre :**
 - Etant donné un nombre de méridien m , nous allons considérer des méridiens M_i d'angle θ_i , pour $i=0, \dots, m$ régulièrement disposé sur le corps du cylindre.
 - Construire ensuite des facettes rectangulaires entre les méridiens M_i et M_{i+1} , pour $i=0, \dots, m-1$.



Quadriques : cylindres

- **Facettisation d'un cylindre :**
 - Etant donné un nombre de méridien m , nous allons considérer des méridiens M_i d'angle θ_i , pour $i=0, \dots, m$ régulièrement disposé sur le corps du cylindre.
 - Construire ensuite des facettes rectangulaires entre les méridiens M_i et M_{i+1} , pour $i=0, \dots, m-1$.
 - Construire ensuite deux facettes pour les faces du haut et du bas du cylindre.



Quadriques : cylindres

- **Création du polyèdre correspondant (sommets):**
 - Il contient $2m^2$ sommets par mérique utilisés chacun 3 fois : 2 fois pour les faces issues des mériadiens et 1 fois pour les plans limites.
 - Pour les construire : on étudie chaque mérique dont les angles varient entre 0 et 2π tel que $\theta_i = 2\pi i/m$ avec $i=0, \dots, m-1$.
Soit M_i le mérique d'angle θ_i : on définit deux sommets :
Coordonnées cartésiennes de P_i (en $-h/2$)
 - $x = r\cos(\theta_i)$
 - $y = r\sin(\theta_i)$
 - $z = -h/2$Coordonnées cartésiennes de P'_i (en $h/2$)
 - $x = r\cos(\theta_i)$
 - $y = r\sin(\theta_i)$
 - $z = h/2$

Quadriques : cylindres

- **Création du polyèdre correspondant (facettes):**

➤ Facettes entre les méridiens:

Pour $i=0, \dots, m-1$ la facette numéro i est composée des 2 sommets du méridien M_i et de ceux du méridien M_{i+1} Facette $i = P_i, P'_i, P'_{i+1}, P_{i+1}$

➤ Facette du bas :

Une face ➔ P_0, P_1, \dots, P_{m-1}

➤ Facette du haut :

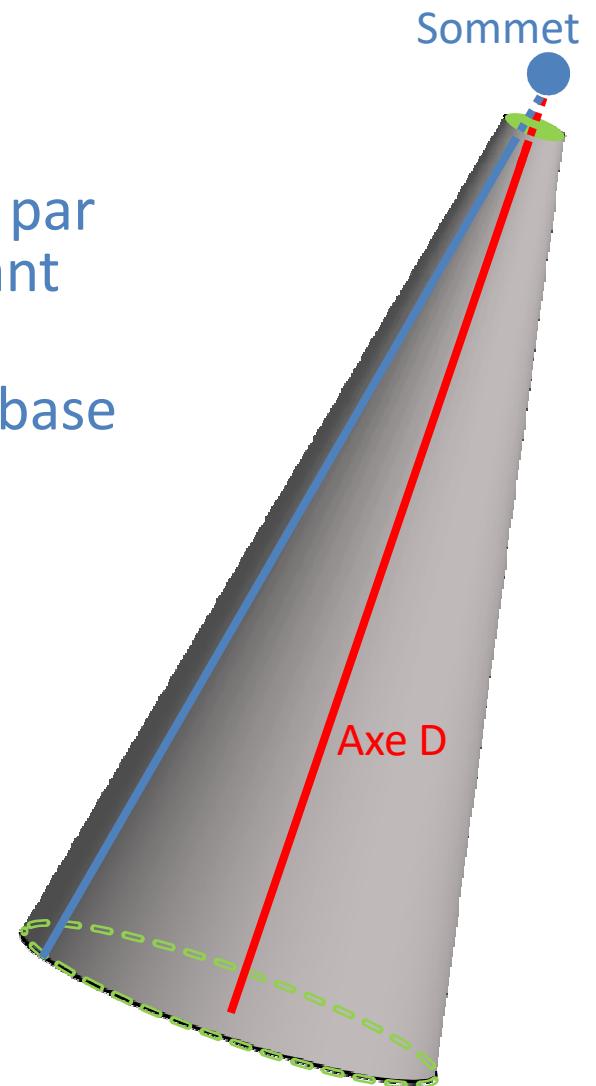
Une face ➔ $P'_{m-1}, \dots, P'_1, P'_0$

(Ordre d'énumération inversé pour garder une orientation cohérente).

Quadriques : cônes

- **Un cône est défini:**

- par un ensemble de droite passant toutes par un sommet (sommet du cône) et s'appuyant sur une courbe (base),
- dans le cas d'un cylindre de révolution, la base est un cercle.



Quadriques : cônes

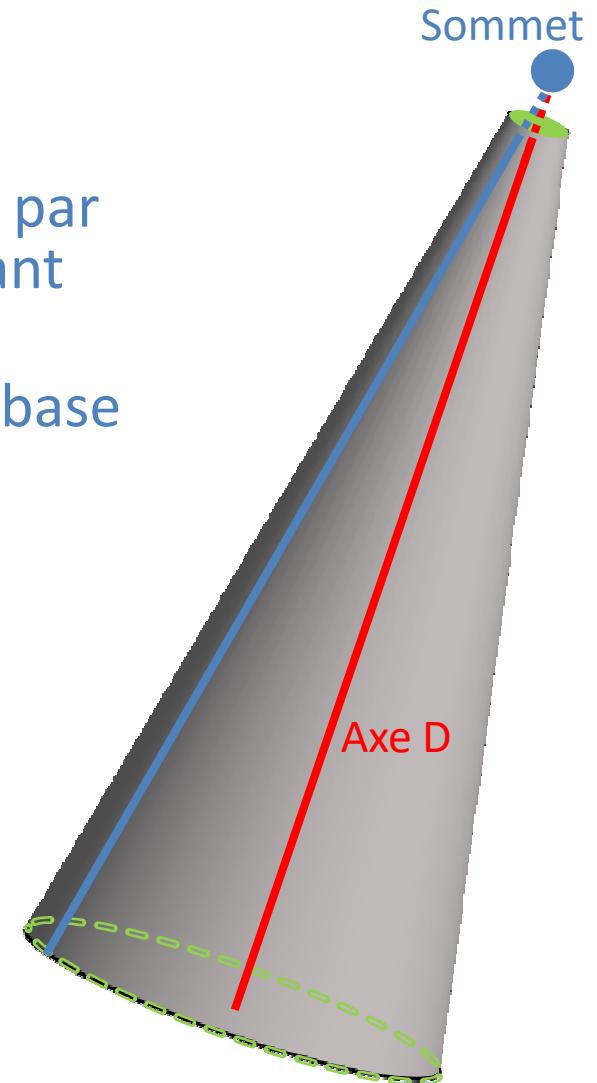
- **Un cône est défini:**

- par un ensemble de droite passant toutes par un sommet (sommet du cône) et s'appuyant sur une courbe (base),
- dans le cas d'un cylindre de révolution, la base est un cercle.

- **Equation du cône d'axe Z :**

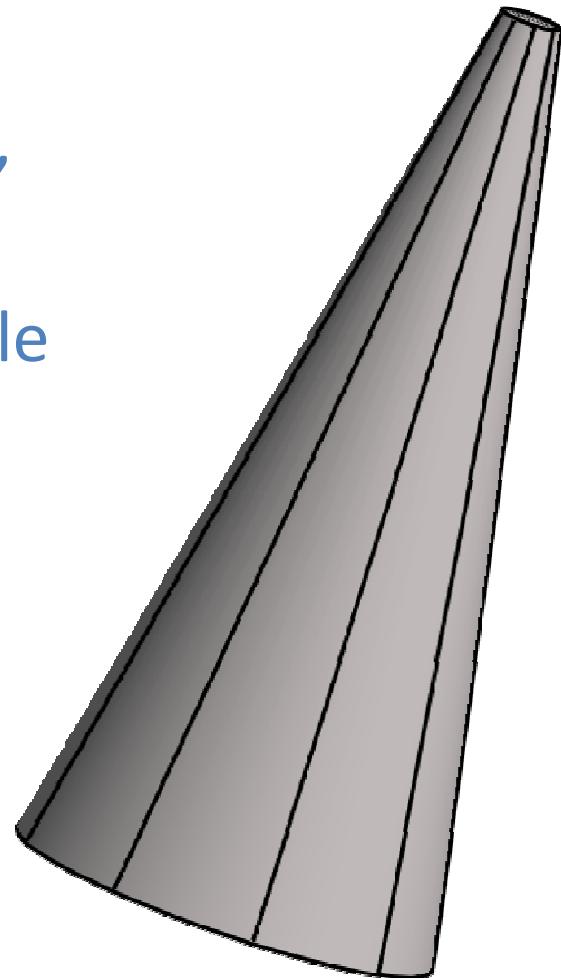
- le sommet S (0, 0, z_{sommet}),
- le cercle de rayon r est centré en O et appartient au plan xOy ,
- il a pour équation :

$$(z - z_{\text{sommet}})^2 = z_{\text{sommet}}^2 / r^2 * (x^2 + y^2)$$



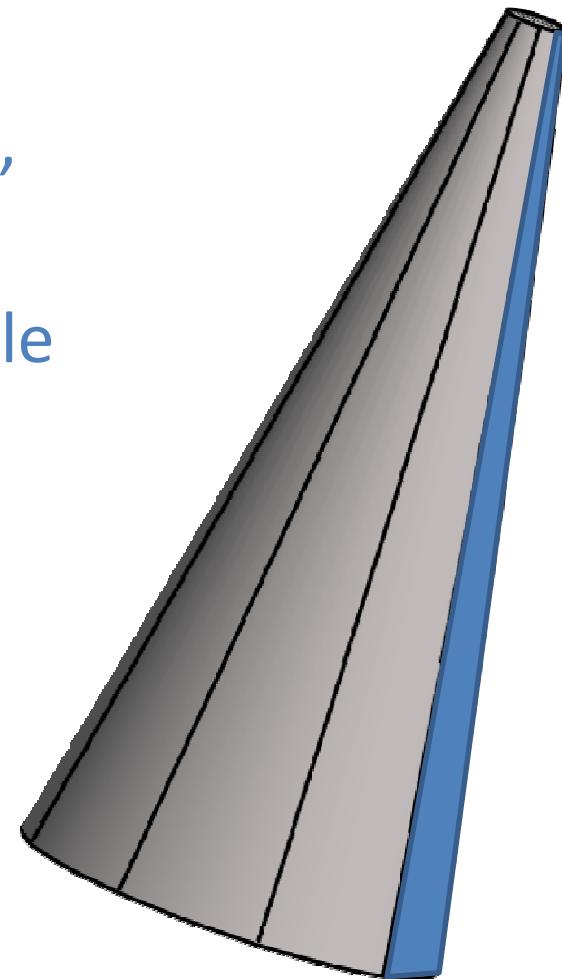
Quadriques : cônes

- Facettisation d'un cône :
 - À partir des méridiens définis par Θ_i ,
 - 2m sommets sont nécessaires,
 - leur construction est identique à celle de la construction des sommets du cylindres,



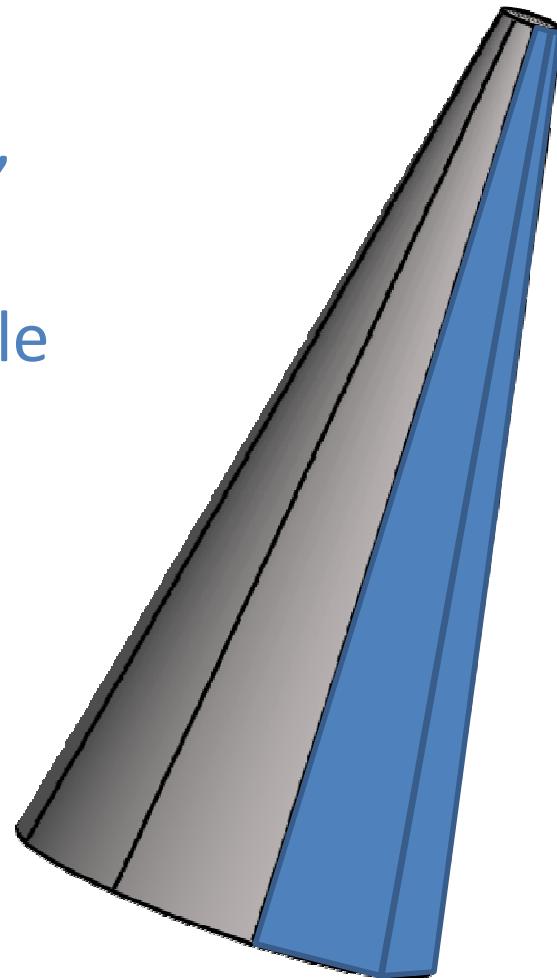
Quadriques : cônes

- **Facettisation d'un cône :**
 - À partir des méridiens définis par Θ_i ,
 - 2m sommets sont nécessaires,
 - leur construction est identique à celle de la construction des sommets du cylindres,
 - on construit des faces trapézoïdales entre les méridiens,



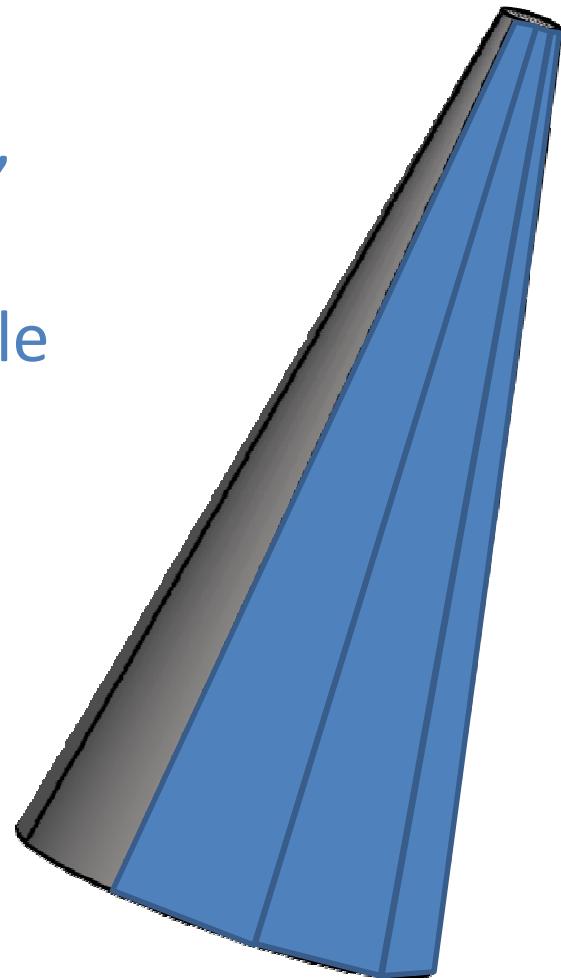
Quadriques : cônes

- **Facettisation d'un cône :**
 - À partir des méridiens définis par Θ_i ,
 - 2m sommets sont nécessaires,
 - leur construction est identique à celle de la construction des sommets du cylindres,
 - on construit des faces trapézoïdales entre les méridiens,



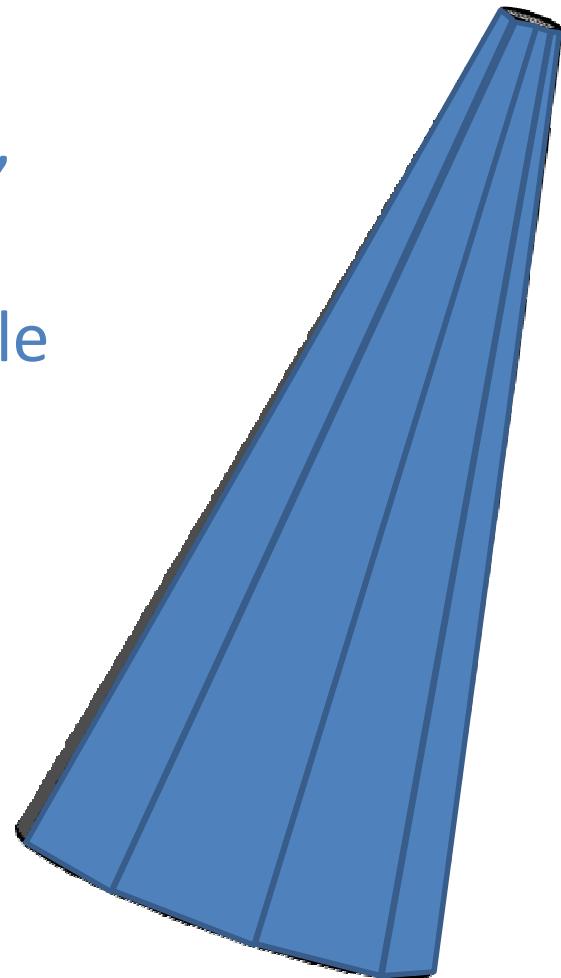
Quadriques : cônes

- **Facettisation d'un cône :**
 - À partir des méridiens définis par Θ_i ,
 - 2m sommets sont nécessaires,
 - leur construction est identique à celle de la construction des sommets du cylindres,
 - on construit des faces trapézoïdales entre les méridiens,



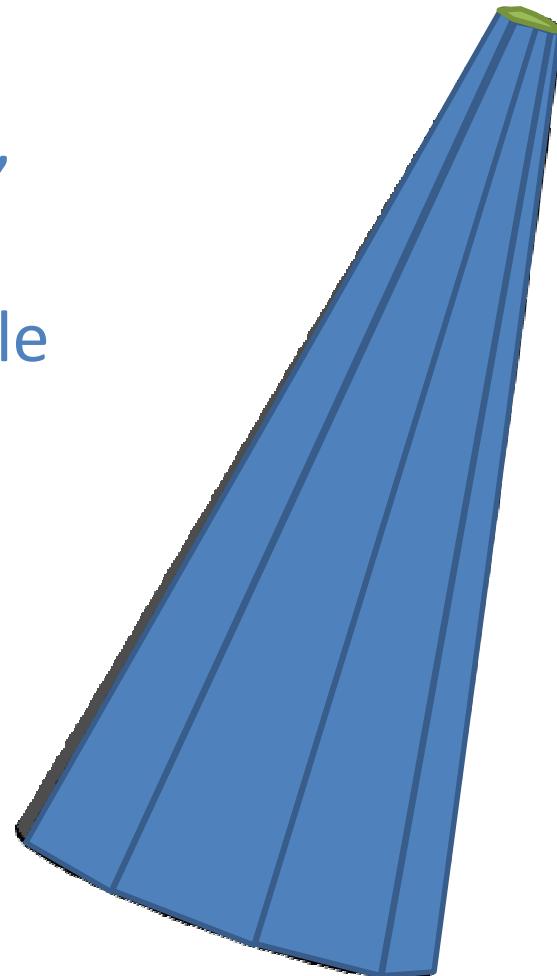
Quadriques : cônes

- **Facettisation d'un cône :**
 - À partir des méridiens définis par Θ_i ,
 - 2m sommets sont nécessaires,
 - leur construction est identique à celle de la construction des sommets du cylindres,
 - on construit des faces trapézoïdales entre les méridiens,



Quadriques : cônes

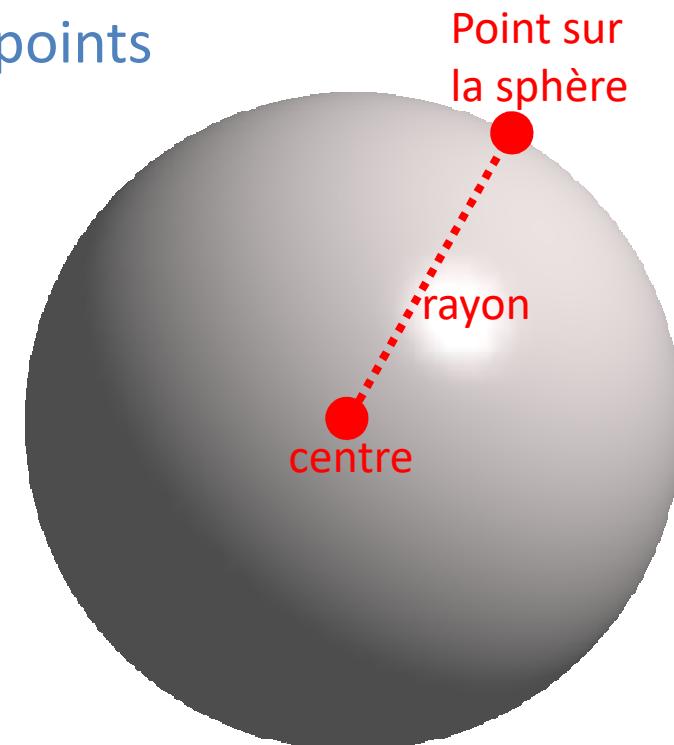
- **Facettisation d'un cône :**
 - À partir des méridiens définis par Θ_i ,
 - 2m sommets sont nécessaires,
 - leur construction est identique à celle de la construction des sommets du cylindres,
 - on construit des faces trapézoïdales entre les méridiens,
 - construction de 2 faces pour les plans limites.



Quadriques : sphère

- Une sphère est définie :
 - par un centre et un rayon,
 - elle est constituée d'un ensemble de points à distance r du centre.
- Equation de la sphère de centre O :
 - le sommet O (0, 0, 0),
 - il s'agit de l'ensemble des points $M = (x_m, y_m, z_m)$ de l'espace, de coordonnées sphériques (r_m, ϕ_m, θ_m) ,
 - elle a pour équation :

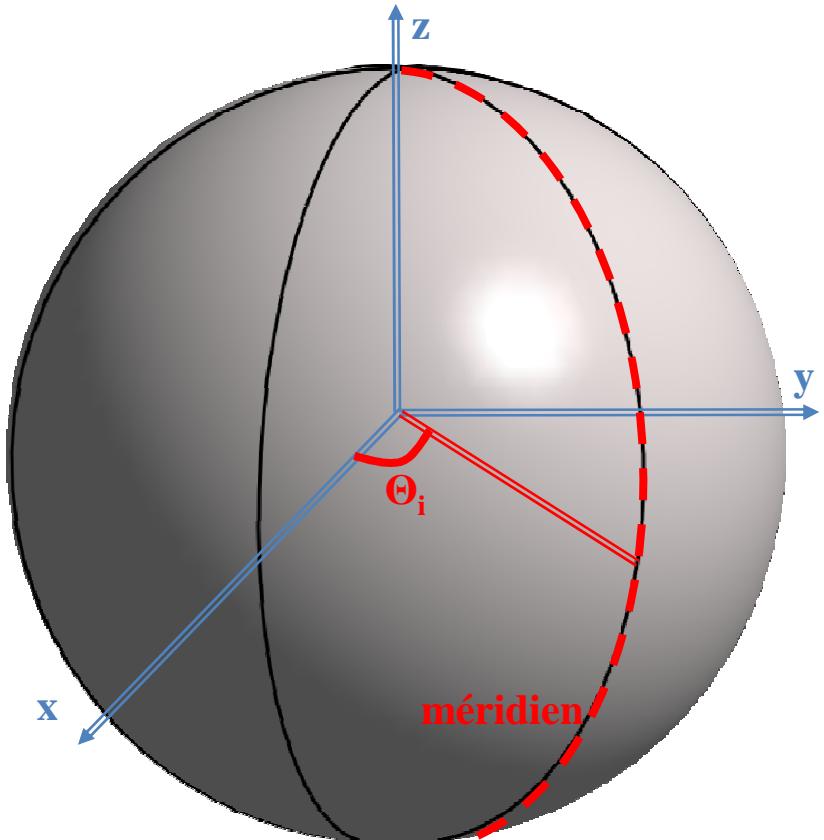
$$x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = r^2$$



Quadriques : sphère

- Les méridiens :

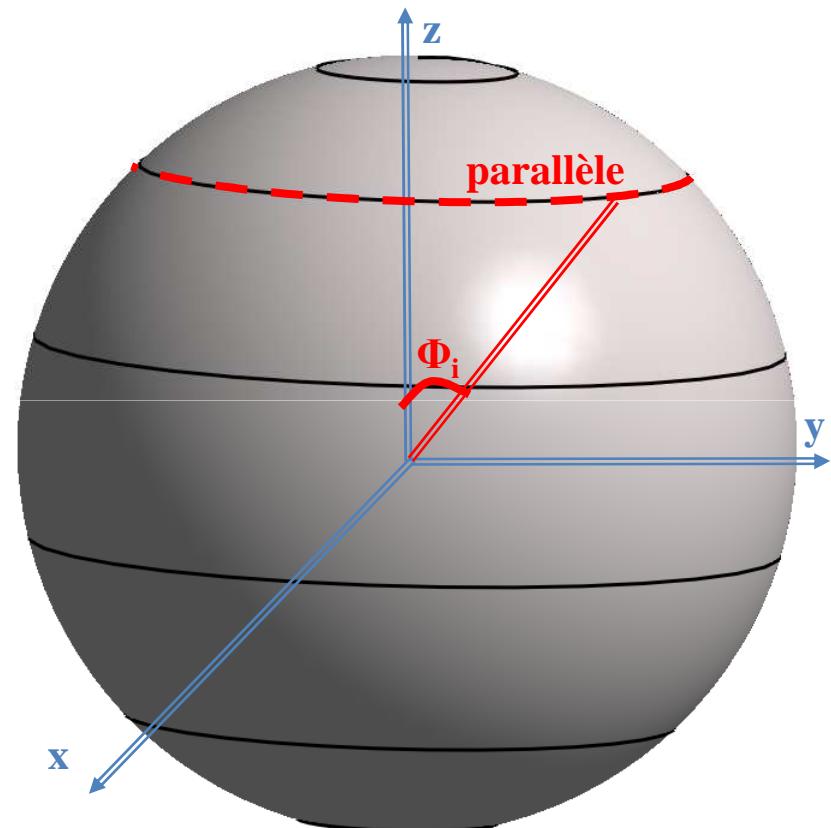
- Un *méridien* sur la sphère S_r est un demi- cercle formé de l'ensemble des points M de coordonnées sphériques (r, ϕ_m, θ_m) tels que l'angle θ_m soit fixé égal à une certaine valeur.
- Soit $\theta_i \in [0, 2\pi[$, le méridien i de S_r d'angle θ_i est constitué de l'ensemble des points M tels que $\theta_m = \theta_i$.



Quadriques : sphère

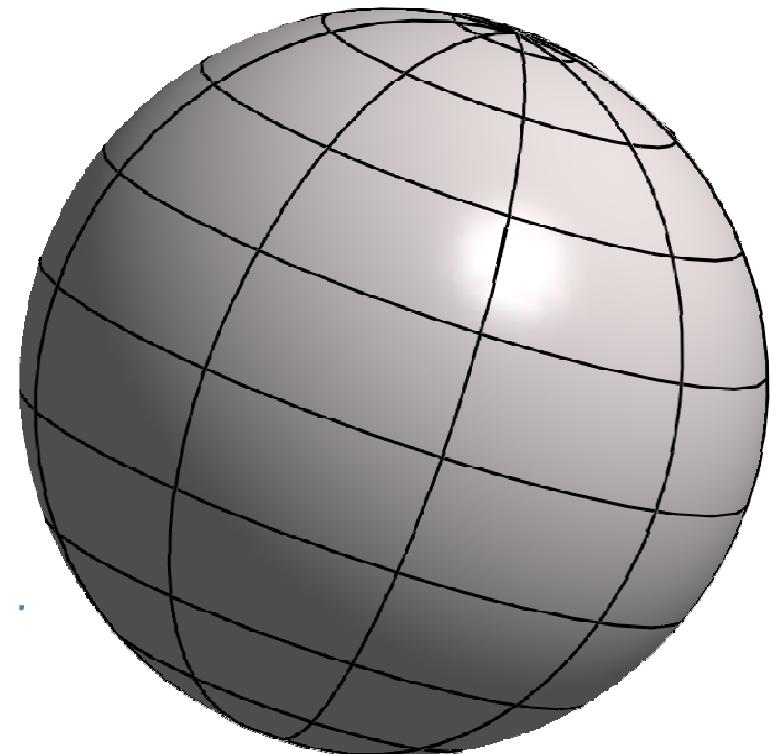
- **Les parallèles :**

➤ Etant donné $\phi_i \in]0, \pi[$, le *parallèle* d'angle ϕ_i de la sphère S_r est le cercle constitué de l'ensemble des points $M (r, \phi_m, \theta_m)$ de S_r tels que $\phi_m = \phi_i$.



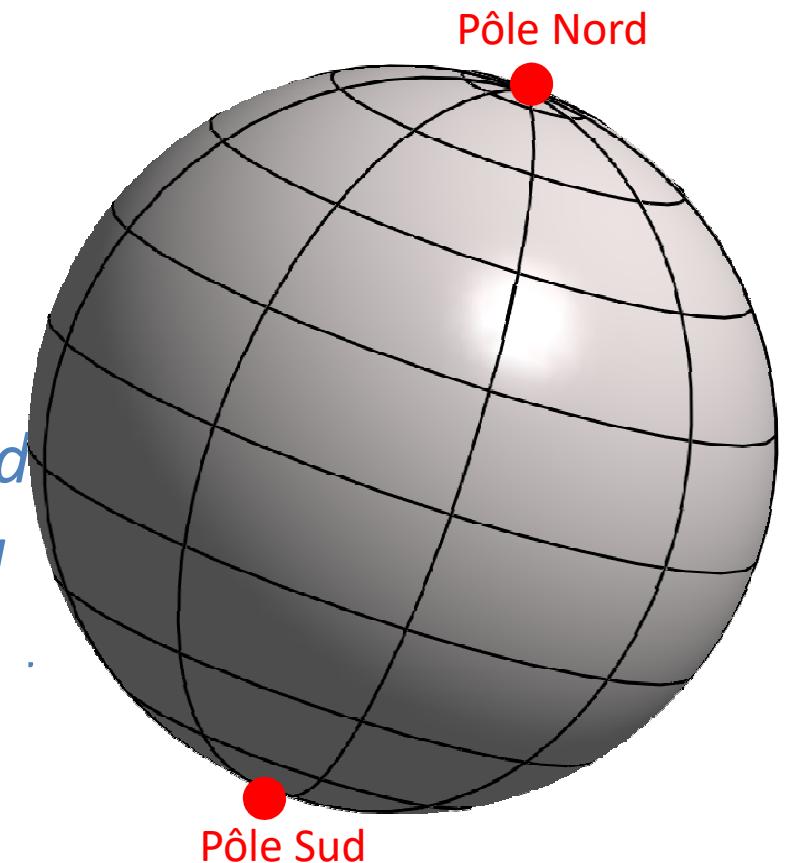
Quadriques : sphère

- Facettisation de la sphère :
 - on découpe la sphère en m méridiens et p parallèles,
 - avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$



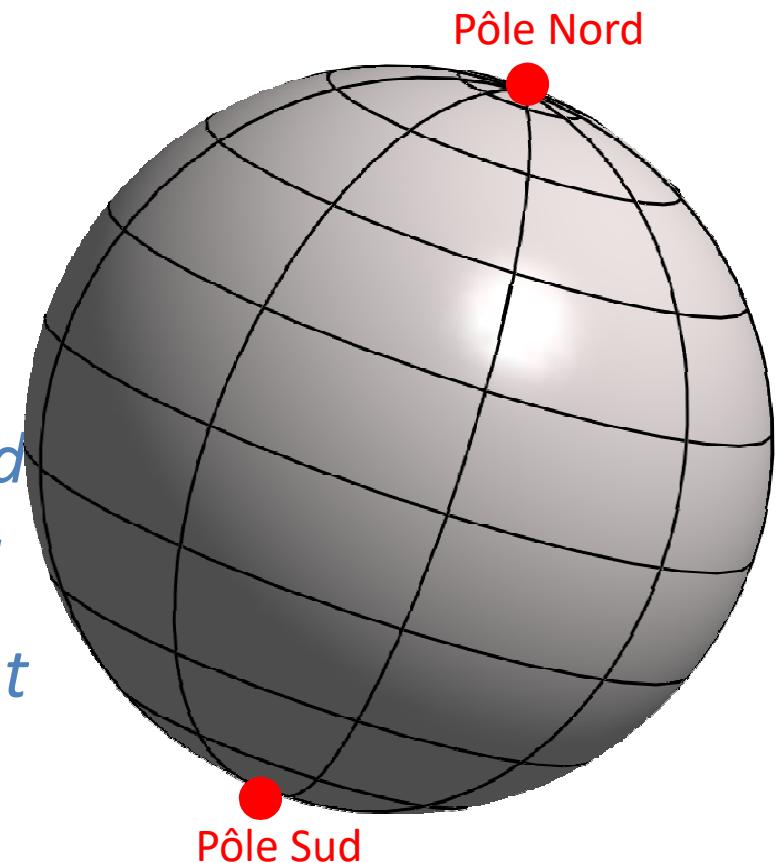
Quadriques : sphère

- **Facettisation de la sphère :**
 - on découpe la sphère en m méridiens et p parallèles,
 - avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$
 - $N=(0,0,r)$ est appelé le *pôle nord*
 - $S=(0,0,-r)$ est appelé le *pôle sud*



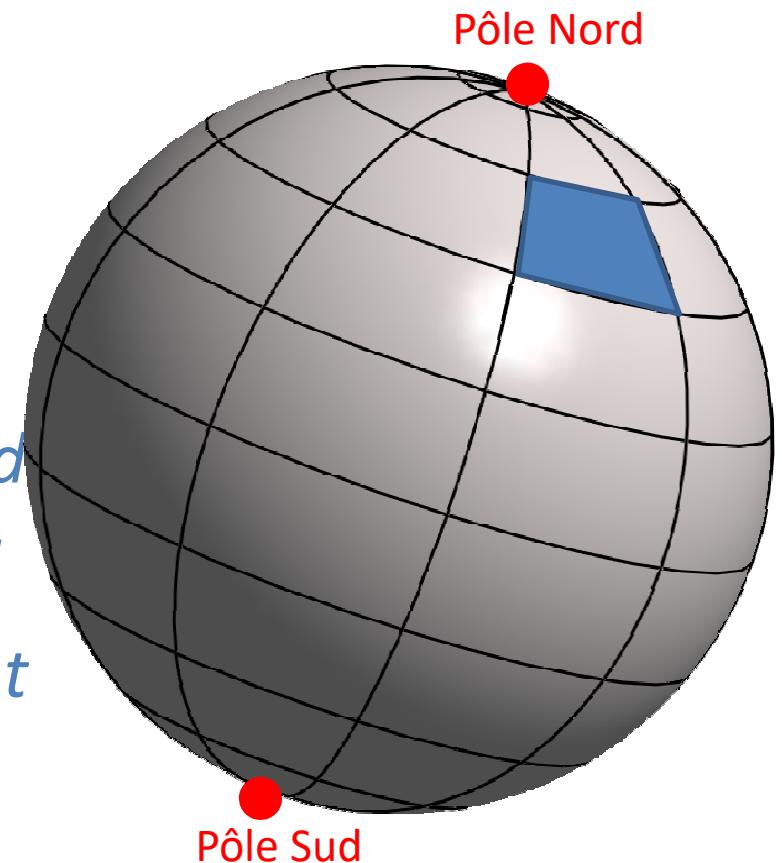
Quadriques : sphère

- Facettisation de la sphère :
 - on découpe la sphère en m méridiens et p parallèles,
 - avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$
 - $N=(0,0,r)$ est appelé le *pôle nord*
 - $S=(0,0,-r)$ est appelé le *pôle sud*
 - *des faces à 3 ou 4 sommets sont créées.*



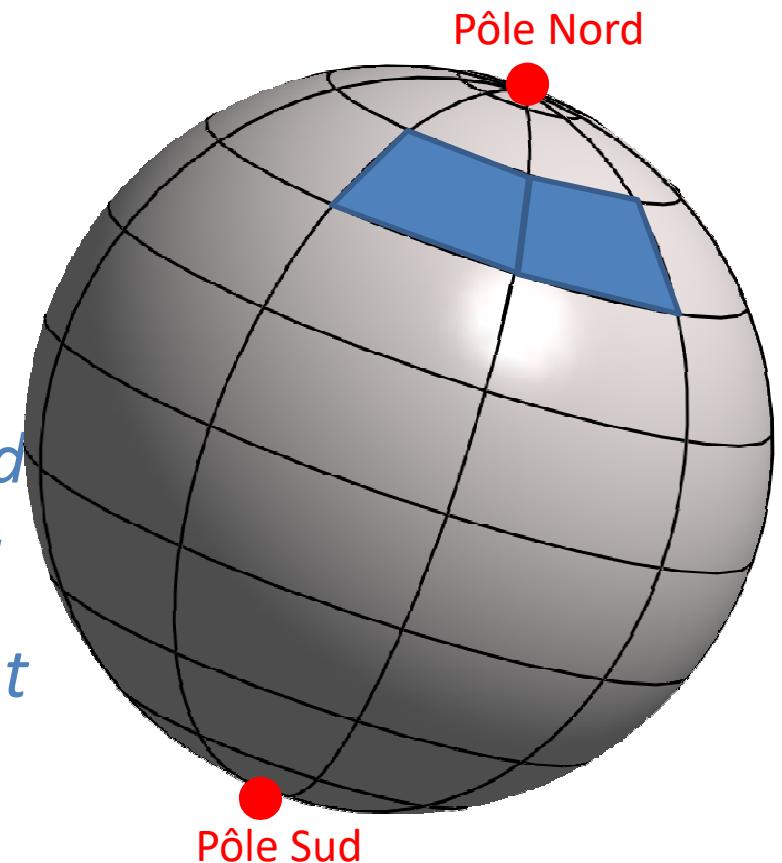
Quadriques : sphère

- Facettisation de la sphère :
 - on découpe la sphère en m méridiens et p parallèles,
 - avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$
 - $N=(0,0,r)$ est appelé le *pôle nord*
 - $S=(0,0,-r)$ est appelé le *pôle sud*
 - *des faces à 3 ou 4 sommets sont créées.*



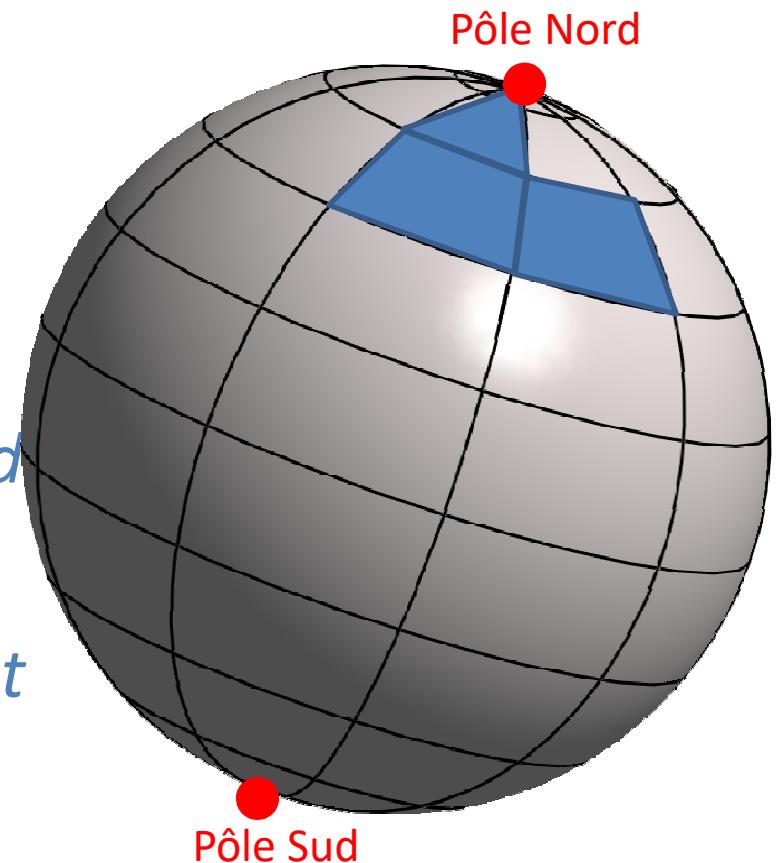
Quadriques : sphère

- Facettisation de la sphère :
 - on découpe la sphère en m méridiens et p parallèles,
 - avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$
 - $N=(0,0,r)$ est appelé le *pôle nord*
 - $S=(0,0,-r)$ est appelé le *pôle sud*
 - *des faces à 3 ou 4 sommets sont créées.*



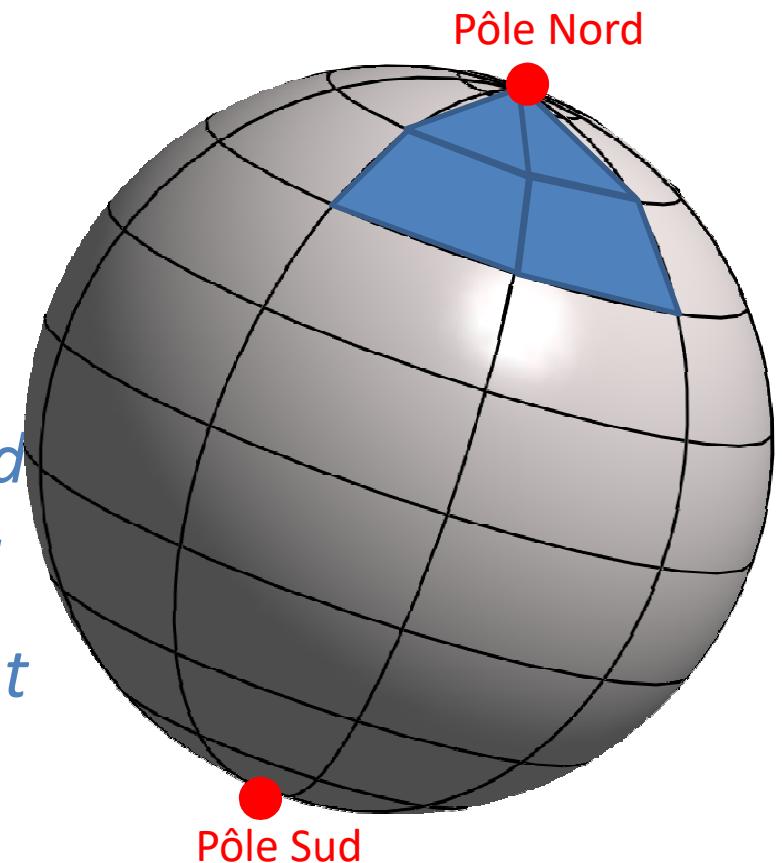
Quadriques : sphère

- Facettisation de la sphère :
 - on découpe la sphère en m méridiens et p parallèles,
 - avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$
 - $N=(0,0,r)$ est appelé le *pôle nord*
 - $S=(0,0,-r)$ est appelé le *pôle sud*
 - *des faces à 3 ou 4 sommets sont créées.*



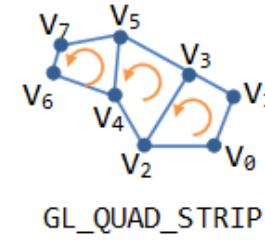
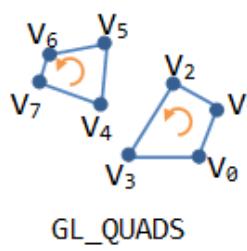
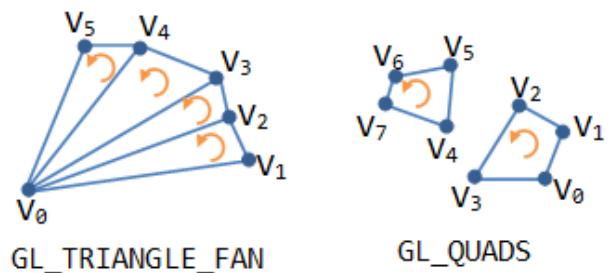
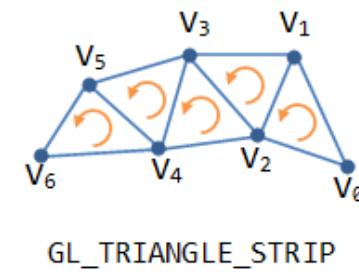
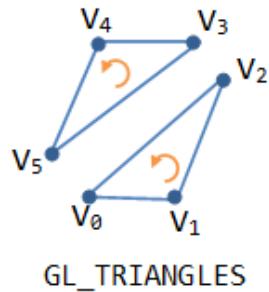
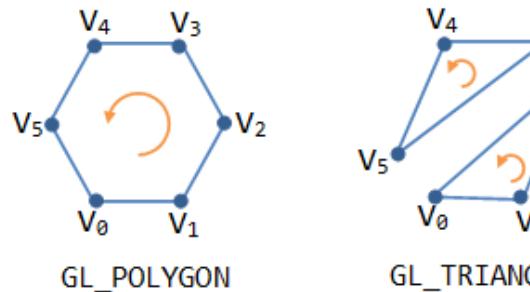
Quadriques : sphère

- Facettisation de la sphère :
 - on découpe la sphère en m méridiens et p parallèles,
 - avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$
 - $N=(0,0,r)$ est appelé le *pôle nord*
 - $S=(0,0,-r)$ est appelé le *pôle sud*
 - *des faces à 3 ou 4 sommets sont créées.*

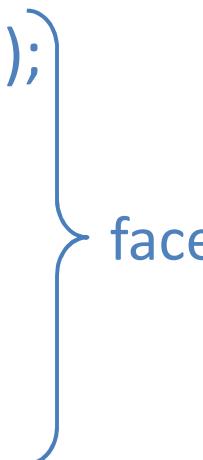


Rappel OpenGL

- Type de face :
 - triangle : *GL_TRIANGLES*
 - quadrangles : *GL_QUADS*
 - polygones : *GL_POLYGON*



Rappel OpenGL

- On énonce les sommets à la suite les uns des autres:
 - `glBegin(GL_QUADS);`
 - `glColor3f(0.0F, 1.0F, 0.0F);`
 - `glVertex3f(x, y, z);`
 - `glVertex3f(x,y,z);`
 - `glVertex3f(x, y, z);`
 - `glVertex3f(x,y,z);`
 - ...
 - `glEnd();`
- 
- The diagram consists of a brace on the right side of the list, spanning from the third line to the eighth line. The word "face" is written in blue next to the brace.

Conclusion

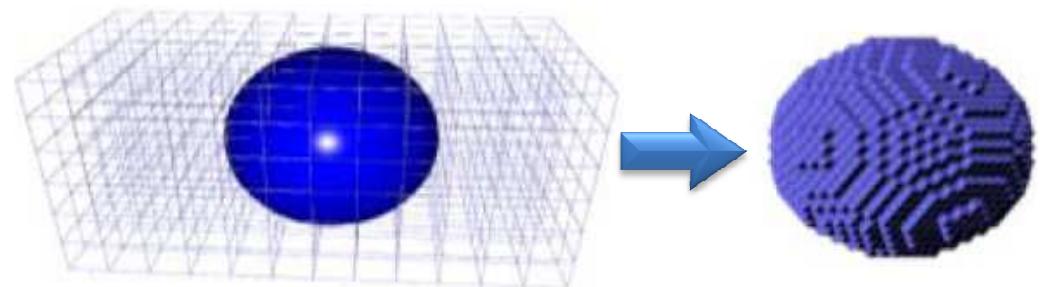
- **Représentation surfacique :**
 - soit de manière continue,
 - soit de manière polyédrique.

Conclusion

- **Représentation surfacique :**
 - soit de manière continue,
 - soit de manière polyédrique.
- **Passage continue → facettisation :**
 - à partir de l'équation d'une surface, on peut construire une facettisation de la surface,
 - l'équation mathématique sous-jacente peut permettre de faire varier la résolution du modèle facettisé.

FIN

Modèles volumiques
lundi 26/02



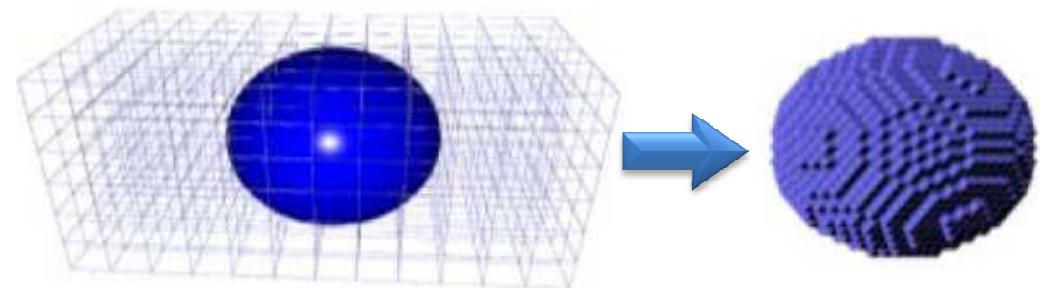
Pour récupérer les cours et le TD/TP:
MOODLE => HMIN212

roseline.beniere@c4w.com / roseline.beniere@umontpellier.fr

FIN

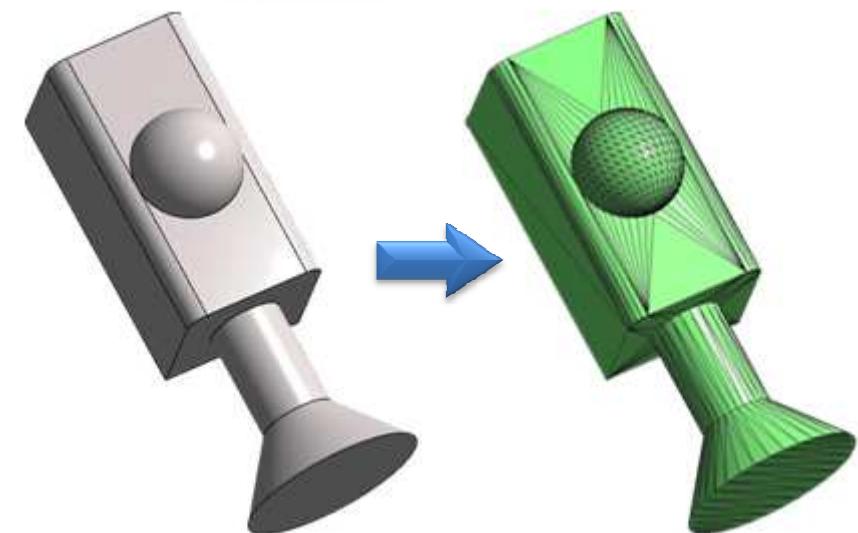
Modèles volumiques

lundi 26/02



Maillages

lundi 05/03



Pour récupérer les cours et le TD/TP:

MOODLE => HMIN212

Sources

- Cours utilisés pour ce support :
 - Gilles Gesquière (Gamagora Lyon)