Mathématiques et Mécanique Quantique

1 Espace Vectoriel :

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni d'une loi interne $+$ telle que $(E,+)$ est un groupe abélien et d'une loi externe $\cdot$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E telle que:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (a+b)\cdot x = a\cdot x + b \cdot x$$
$$\forall a \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y$$
$$\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, a\cdot(b\cdot x) = (ab)\cdot x$$
$$\forall x \in E, 1\cdot x = x$$

2 Produit Scalaire :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est un application φ de $E\times E$ dans $\mathbb{K}$ qui vérifie ces propriétés :

$$\text{Bilinéaire} : \forall (x,x') \in E^2, \forall (y,y') \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} \varphi(x+x,y) = \varphi(x,y) + \varphi(x',y) \\ \varphi(x,y+y') = \varphi(x,y) + \varphi(x,y') \\ \varphi(\lambda x,y) = \varphi(x,\lambda y) = \lambda\varphi(x,y) \end{cases}$$

$$\text{Symétrique} : \forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

$$\text{Définie Positive} : \forall x \in E, \varphi(x,x) \geq 0 \; et \; \varphi(x,x) = 0 \iff x = 0$$

Le produit scalaire permet d'exploiter les notions de longueurs, d'angles et d'orthogonalité.

2.1 Produit scalaire Euclidien :

Un produit scalaire défini sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, appelé espace vectoriel Euclidien, est appelé produit scalaire Euclidien.

2.2 Produit scalaire Hermitien :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ est dite sequilinéaire à gauche si elle satisfait ces deux propriétés :

$$\text{Semi}-\text{Linéaire à gauche} : \forall x,y,z \in E, \forall a \in \mathbb{C}, \varphi(ax+y,z) = \bar{a}\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$$

$$\text{Linéaire à droite} : \forall x,y,z \in E, \forall a \in \mathbb{C}, \varphi(x,ay+z) = a\varphi(x,y) + \varphi(x,z)$$

Une telle application est dite Hermitienne si, de plus :

$$\forall x,y \in E, \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$$

3 Espace de Hilbert :

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire Euclidien qui permet de mesurer des longueurs et des angles et qui permet de définir un orthogonalité.
Exemple : l'espace euclidien R^n muni du produit scalaire usuel.

3.1 Espace préhilbertien :

On appelle espace préhilbertien un espace vectioriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire. Il s'agit d'une généralisation de la notion d'espace Euclidien et Hermitien de dimension éventuellement infinie.