Autour des diagrammes de décision quantiques

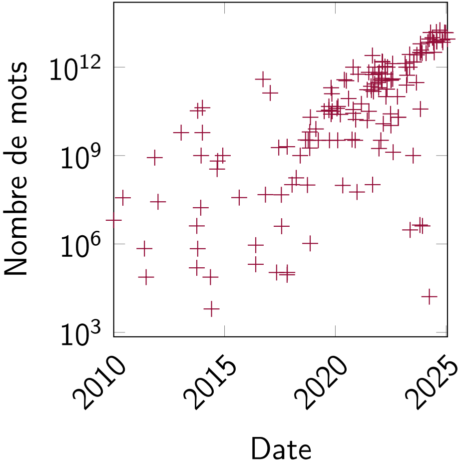
Malo Leroy

Parcours recherche – CentraleSupélec

17 février 2025

Les bases de données croissent rapidement

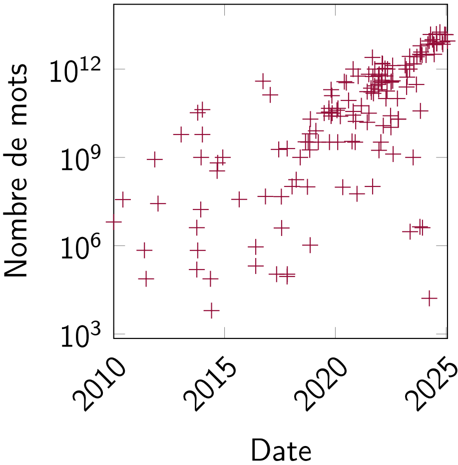
Les algorithmes classiques sont parfois inefficaces



. Nombre de mots utilisés pour l'entraînement des modèles de langage

Les bases de données croissent rapidement

Les algorithmes classiques sont parfois inefficaces



Les **algorithmes quantiques** permettent de résoudre certains problèmes plus efficacement

. Nombre de mots utilisés pour l'entraînement des modèles de langage

Les machines quantiques sont en développement et resteront coûteuses financièrement

$$\Downarrow$$

Il y a un besoin d'outils de simulation et de vérification d'algorithmes quantiques

Les simulations sont très coûteuses en temps de calcul

Grover	Classique	Quantique	Simulation
Complexité	N	$\sqrt{N}$	$N\sqrt{N}$

Elles nécessitent une **structure de données** adaptée

État de l'art

- Interprétation abstraite
- Arithmétique des intervalles réels
- Diagrammes de décision quantiques

État de l'art

- Interprétation abstraite
- Arithmétique des intervalles réels
- Diagrammes de décision quantiques

Solution : <u>diagrammes additifs abstraits</u>

L'**interprétation abstraite** permet de déterminer des propriétés ou d'accélérer des calculs

Exemple : signe d'une expression $e = (3 + 2) \times (-5)$

$$\begin{aligned} \text{signe}(e) &= (\text{signe}(3) + \text{signe}(2)) \times \text{signe}(-5) \\ &= (\oplus + \oplus) \times \ominus \\ &= \oplus \times \ominus \\ &= \ominus \end{aligned}$$

L'interprétation abstraite permet de déterminer des propriétés ou d'**accélérer des calculs**

Elle peut être exacte ou **approximative**

L'interprétation abstraite est applicable aux **intervalles réels**

$$[1,2] * [-1,1] = [-2,2]$$
$$[1,2] + [-1,1] = [0,3]$$
$$[1,2] \wedge [-1,1] = [1,1]$$

Le résultat de l'opération est **le plus petit intervalle** contenant tous les résultats élément par élément

Une **fonction booléenne**

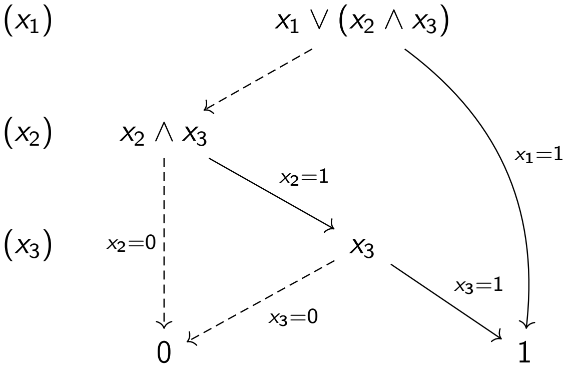
$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

peut être représentée par une **table de vérité**

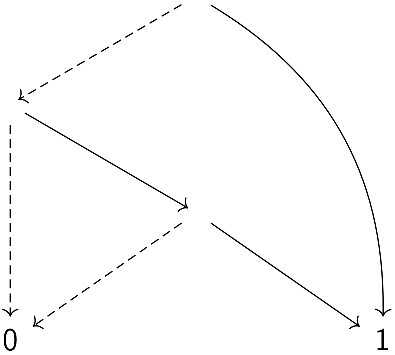
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

pour $f(x_1,x_2) = x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$

Les **diagrammes de décision** permettent de représenter des fonctions booléennes



Les **diagrammes de décision** permettent de représenter des fonctions booléennes



On tire parti de la **structure** de la fonction

Un **état quantique** est une superposition d'états incompatibles

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad \text{(un qubit)}$$

Un **état quantique** est une superposition d'états incompatibles

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad \text{(un qubit)}$$

$$n \text{ qubits} \Rightarrow 2^n \text{ états incompatibles}$$

On note les états sous forme de **vecteurs**

$$\alpha\,|01\rangle + \beta\,|10\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

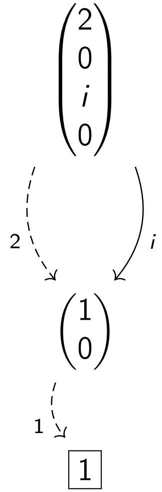
La représentation usuelle est proche des **tables de vérité**

x_1	x_2	$\langle x_1 x_2 \vert \psi \rangle$
0	0	α
0	1	0
1	0	β
1	1	0

$$\text{pour } |\psi\rangle = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|10\rangle$$

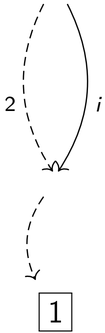
Les états peuvent être représentés par des **diagrammes de décision quantiques**

On tire parti de la **structure** de l'état



Les états peuvent être représentés par des **diagrammes de décision quantiques**

Dans le pire cela reste **exponentiel**



Retour sur l'état de l'art

- ✓ Interprétation abstraite
- ✓ Arithmétique des intervalles réels
- ✓ Diagrammes de décision quantiques

On va utiliser ces concepts <u>ensemble</u>,
avec une nouveauté : l'**additivité**

$$\begin{tikzcd} & \Psi \arrow[dl, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & \\ \phi_1 & \phi_2 & \psi \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} & \Psi \arrow[dl, dashed] \arrow[dr] & \\ \phi_1 + \phi_2 & & \psi \end{tikzcd}$$

Retour sur l'état de l'art

- ✓ Interprétation abstraite
- ✓ Arithmétique des intervalles réels
- ✓ Diagrammes de décision quantiques
- + Nouveauté : additivité

Solution : <u>diagrammes additifs abstraits</u>

Objectifs

- **Modèle formel** de diagrammes de décision additifs abstraits
- **Implémentation** du modèle

Méthodologie

$$\begin{tikzcd}
\longrightarrow \text{Documentation} \arrow[rr, "\text{cas usuels}"] \arrow[dr, "\text{état de l'art}"'] & & \text{Exemples} \arrow[dl, bend left, "\text{modèle}"'] \arrow[dr, "\text{tests}"] & \\
& \text{Théorie} \arrow[ur, bend left] \arrow[rr, "\text{code}"] & & \text{Code}
\end{tikzcd}$$

GitHub pour la gestion de projet

- **Issues** pour les tâches et le bugs
- Priorités, tailles, et deadlines
- Branches et **merge requests**

Modèle

- S6 Intervalles de $\mathbb{C}$ cartésiens & polaires
- S6 Diagrammes
- S6 Approximation locale, globale
- S6 Fusion forcée
- S6 Algorithmes de réduction
- S7 Erreur
- S7 Application de portes

Exemple : on considère l'état $\begin{pmatrix} 10i+2 \\ 4i+1 \\ 2i \\ i \end{pmatrix}$

Exemple : on considère l'état $\begin{pmatrix} 10i + 2 \\ 4i + 1 \\ 2i \\ i \end{pmatrix}$

Il existe des **régularités**.

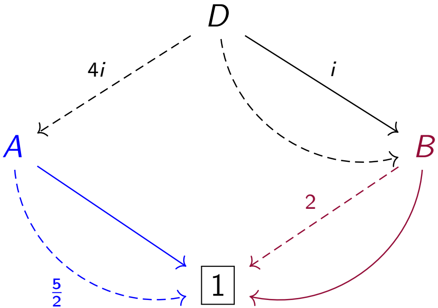
Exemple : on considère l'état $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 10i \\ 4i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ i \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Il existe des **régularités**.

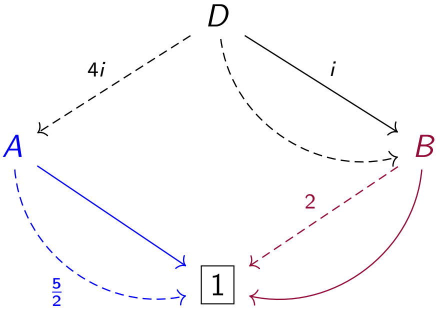
Exemple : on considère l'état $\begin{pmatrix} 4i \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ i \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Il existe des **régularités**.

Exemple : on obtient le diagramme additif

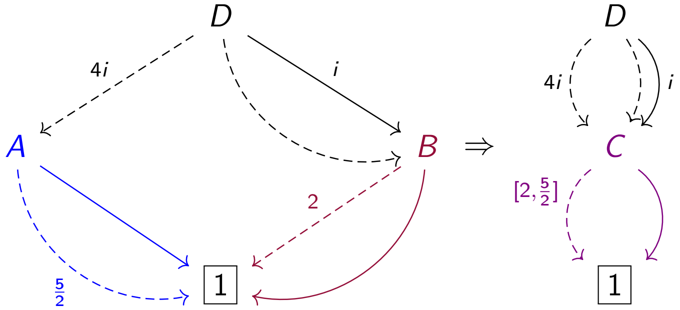


Exemple : on obtient le diagramme additif

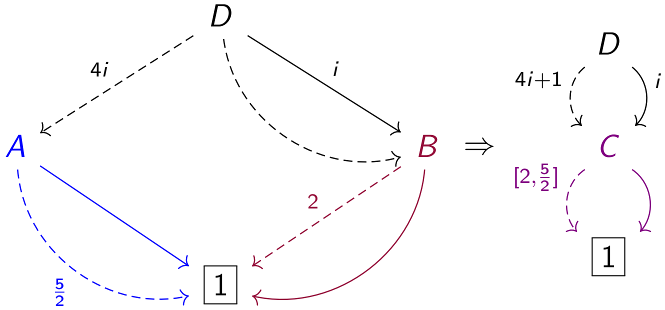


Réduisons ce diagramme

On peut forcer la fusion de A et B



On peut forcer la fusion de A et B



On peut toujours plus réduire les diagrammes

$$\Downarrow$$

Gain en espace arbitrairement grand (jusqu'à exponentiel)

Comment choisir quels diagrammes fusionner ?

$$\Downarrow$$

Erreur : on peut calculer l'erreur induite par un diagramme

Les circuits quantiques sont basés sur des **portes**

On les modélise par des **matrices**

Les circuits quantiques sont basés sur des **portes**

On les modélise par des **matrices**

Exemple : Hadamard

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On veut appliquer une porte M à un diagramme D

On veut appliquer une porte M à un diagramme D

Si $\mathcal{E}(D) =$ évaluation du diagramme

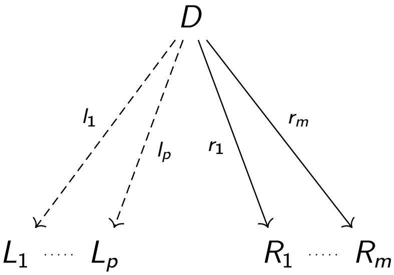
On *veut* $\mathcal{E}(M(D)) = M\ \mathcal{E}(D)$

On veut appliquer une porte M à un diagramme D

Si $\mathcal{E}(D) =$ évaluation du diagramme

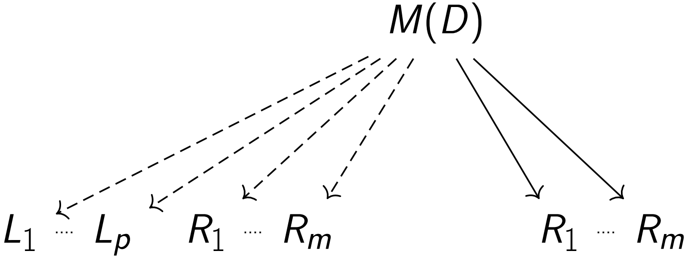
On *veut* $\mathcal{E}(M(D)) = M\ \mathcal{E}(D)$

$$D = (\{(l_1,L_1),\ldots,(l_p,L_p)\},\{(r_1,R_1),\ldots,(r_m,R_m)\})$$

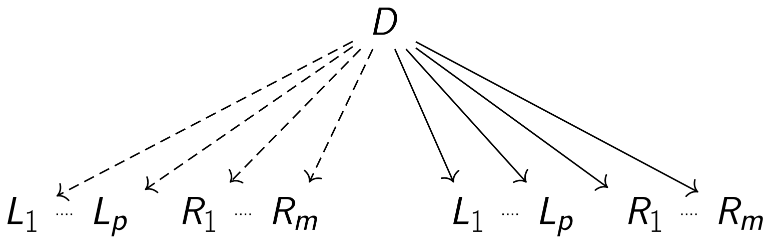


Avant application de la porte

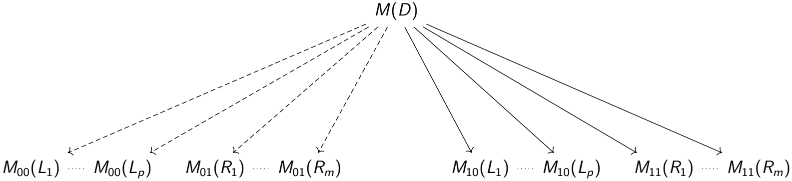
1.



2.



3.



$$M = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & M(D) \arrow[dllllll, dashed] \arrow[dllll, dashed] \arrow[dlll, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[dr] \arrow[drrr] \arrow[drrrr] \arrow[drrrrrr] & & & & & & \\
M_{00}(L_1) & \cdots & M_{00}(L_p) & M_{01}(R_1) & \cdots & M_{01}(R_m) & & M_{10}(L_1) & \cdots & M_{10}(L_p) & M_{11}(R_1) & \cdots & M_{11}(R_m)
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{E}(M(D)) = \begin{pmatrix} \sum l_i M_{00}\mathcal{E}(L_i) + \sum r_j M_{01}\mathcal{E}(R_j) \\ \sum l_i M_{10}\mathcal{E}(L_i) + \sum r_j M_{11}\mathcal{E}(R_j) \end{pmatrix} = M\ \mathcal{E}(D)$$

Implémentation

- S6 Intervalles de $\mathbb{C}$ cartésiens & polaires
- S6 Diagrammes : construction, évaluation
- S6 Fusion forcée
- S6 Algorithmes de réduction
- S7 Diagrammes aléatoires
- S7 Erreur
- S7 Application de portes
- S7 QASM

Suite du projet

- **Implémentation**
  - Interface graphique
  - Benchmarks
- **Ajustements**
  - Fonctions d'erreur
  - Algorithmes de réduction
- Nouveaux concepts
  - Automates d'arbres
  - Diagrammes de décisions et applications localement inversibles (LIMDD)

Cadre du projet
Formation future

- **Encadrant** : Renaud Vilmart
- **Équipe** : QuaCS
- **Laboratoire** : Laboratoire Méthodes Formelles

Année de césure *Digital Tech Year*

- Semestre au Paris Digital Lab
- Projets tech variés en équipe
- Stage de 6 mois en entreprise ou laboratoire, en France ou à l'international

Année de césure *Digital Tech Year*

- Semestre au Paris Digital Lab
- Projets tech variés en équipe
- Stage de 6 mois en entreprise ou laboratoire, en France ou à l'international

Après la césure

- S8 à CentraleSupélec
- S8 Pro (stage)
- S8 académique international

Dominantes / mentions

- **Informatique et numérique**
  - Sciences du logiciel
  - Architecture des systèmes informatiques
- **Physique et nanotechnologies**
  - Quantum engineering

Autres formations

- ARTeQ (ENS Paris-Saclay)
- QMI M2 (Télécom Paris, entre autres)

Conclusion

Questions

Implémentation

- **Code** (4,9k lignes)
  - Langage C++
  - LLVM / Clang
  - Ninja
  - CMake
- **Tests**
  - Google Test
  - GitHub Actions

Mise en forme

- **Versionnage**
  - Git
  - GitHub
- **Documentation**

  Doxygen

$$\rho(\boxed{1}) = \{1\}$$

$$\varepsilon(\boxed{1}) = \{0\})$$

$$\forall G,D \in \mathscr{P}_f(\mathcal{A}_0 \times \mathcal{D}_n), \rho((G,D)) = \left(\sum_{(l,L)\in G} l\rho(L)\right) \bigsqcup \left(\sum_{(r,R)\in D} r\rho(R$$

$$\forall G,D \in \mathscr{P}_f(\mathcal{A}_0 \times \mathcal{D}_n),$$

$$\varepsilon((G,D)) = \left(\sum_{(l,L)\in G} l \max|\rho(L) \ominus \varepsilon(L)| + \varepsilon(L)\right) \bigsqcup \left(\sum_{(r,R)\in D} r \max|$$