5. 实验[5] 统计试验法求解最佳判决问题

5.1 实验目的

熟练掌握统计试验法在通信理论和工程问题求解中的应用。
通过实验加深对最佳判决理论的认识和理解。
通过实验探究数字信号检测中单次观测、多次观测等技术的特点和适用场景。

5.2 实验主要器材和设备

电脑，LabVIEW 程序开发和应用环境。
本实验中建议（但非强制）使用的部分函数 VI 及调用路径：
　　数学 VI-初等与特殊函数和 VI-指数函数-自然对数（函数）
　　数学 VI-初等与特殊函数和 VI-误差函数 VI-补余误差函数 VI
　　数学 VI-数值函数-随机数（0-1）（函数）
　　信号处理 VI-逐点 VI-信号生成（逐点）VI-高斯白噪声（逐点）VI

5.3 实验原理

5.3.1 统计试验法

统计试验法又称蒙特卡洛法（Monte Carlo method），或概率模拟法。它是以概率论数理统计理论作为指导的一类计算方法和求随机问题数值解的方法。它的基本思想是：欲求一个问题的数值解，可先构造一个概率模型，使得要求的数值解正好重合于该模型的某个数值特征或概率，而这个数值特征或概率又可用随机试验的统计结果得到其估计值，我们可把这个估计值作为问题的近似解。

蒙特卡洛法的应用领域很多，但是仅靠人工去做随机试验，工作量太大，很多时候几乎难以实现。由于电子计算机技术的发展，为该方法的实用化提供了强大支撑。基于计算机自动产生大量随机数（伪随机数），利用计算机程序模拟开展随机试验，可以高效实现很多问题的求解。

在通信工程技术系统中，信号和噪声本来就是带随机性的，数学上是随机变量或随机过程，有各自的概率模型，也就有了为整个通信系统构建相应概率模型的可能。通过概率模型的统计试验可以研究系统的某些性能，以及各项系统参量与这些性能的关系。

在本实验中，我们利用统计试验法开展实验，验证最佳判决理论的几个经典结论。而在工程实践中，对一些理论尚未完全给出明确结论的问题，应用该方法甚至也能得出有用结果，比如用来检验某项工程方法的有效程度。

5.3.2 最大后验概率准则与似然比检验

对于二进制信号，若使用事件符号H_1表示发送 1 码，符号H_0表示发送 0 码，符号y表示接收端观察到的叠加有噪声的信号值。定义$P(H_1|y)$表示接收观察到y时，事件H_1为真（即H_0为假）的概率；同理，$P(H_0|y)$表示观察值y时，事件H_0为真（即H_1为假）的概率。$P(H_1|y)$、$P(H_0|y)$称为后验条件概率。

所谓最大后验概率准则就是指，接收机通过比较两个后验条件概率的大小，依据如式 5-1 所示的逻辑开展判决，选择后验概率最大的那种可能，从而认定所传输的是哪一个二进制符号码。

$$\frac{P(H_1|y)}{P(H_0|y)} \underset{\text{判}H_0}{\overset{\text{判}H_1}{\gtrless}} 1 \qquad \text{（式 5-1）}$$

理论教材论证了最大后验概率准则与最小差错概率准则是等价的；当有大量码元连续传输时，该准则可以导向误码率最小的最佳接收效果。

当通信系统发送端符号先验概率$P(H_1)$、$P(H_0)$可知时，可以进一步通过所谓似然比检验，将最大后验概率准则加以落实。

5.3.3 接收机简易模型

本实验中，我们将按照图 5-1 所示的接收机简易模型，来搭建虚拟仿真实验系统。该模型中，发送信号为二进制，具有单极性数字电平波形；符号 0 对应$s_0(t)$信号，符号 1 对应$s_1(t)$，表达式为

$$\begin{matrix} s_0(t)=0 \\ s_1(t)=1 \end{matrix}\text{，其中 } 0 \le t \le T \qquad \text{（式 5-2）}$$

两种符号分别有先验概率$P(H_1)$和$P(H_0)$。信道存在加性噪声$n(t)$。

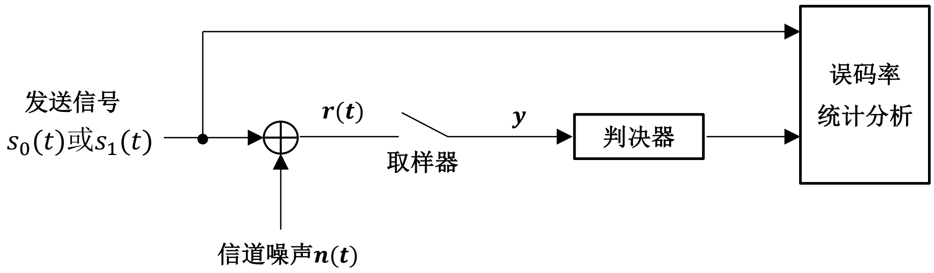

图 5-1 接收机简易模型

当接收机以单次观测模式工作时，取样器在$t=t_0$时获得观测值$y=r(t_0)$，其中$0 \le t_0 \le T$。当接收机以多次观测模式工作时，取样器在$t=t_1,t_2,..,t_m$时获得取样观测值$y_i=r(t_i)$，$i=1..m$，m是观测次数，其中$0 \le t_1,t_2,..,t_m \le T$。判决器基于一定电平门限，对观测值进行判断，认定所传输的符号。

误码率统计模块对接收判决结果进行检查分析，统计误码情况。信道噪声$n(t)$可以是常规的高斯噪声，电平均值为零，方差为σ^2；也可以是其他类型的噪声。

从理论上，我们可以推导出判决器的最佳门限电平y_T（即在其他条件同等时，使误码率最低）

$$y_T=\frac{1}{2}+\sigma^2\ln\left[\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right] \qquad \text{（式 5-3）}$$

当$n(t)$是常规高斯噪声，接收机的平均错误概率P_e为

$$\begin{aligned} P_e &= P(D_1|H_0)P(H_0)+P(D_0|H_1)P(H_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{y_T}^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}dy\ \cdot P(H_0)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{y_T}\exp\left\{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right\}dy\ \cdot P(H_1) \end{aligned} \qquad \text{（式 5-4）}$$

式中积分可通过误差函数 erf(*)或补余误差函数 erfc(*)查表求数值，在 LabVIEW 或 MATLAB 中有相应的函数可调用。

以下实验任务中，运用统计试验法，我们将对上述理论结论开展一定的实验验证。

5.3.4 多次观测对接收机性能的提升效果

图 5-1 的接收机可以按多次观测模式工作。即对同一符号码元，在码元信号持续时间内，开展 m 次取样并综合分析判决。

理论教材告诉我们，当信道噪声是常规高斯噪声（零均值，方差σ^2），且 m 次取样值中各自所含噪声成分两两间互不统计相关时，通过多次观测可以有效降低接收机平均差错概率。从理论结果看，效果相当于仍使用单次观测，而噪声方差（即功率）从σ^2降为$\frac{\sigma^2}{m}$。从而削弱了噪声对通信的影响，降低了误码率，提升了接收机性能。

在其他课程电路实验中，用单片机 ADC 对模拟电压信号进行采样和测量，常常运用多次采样取平均的做法（所谓滑动平均算法），可以获得更稳定的测量结果。其内在原理是相似的。

不过，要获得上述提升效果，显然是有一些前提条件的。我们设计了一些实验引导大家关注。

实验任务 5_4 引导研究——当信道噪声是某种模式的相关噪声时，多次观测所选择的取样时间点有何讲究？

“拓展探究”部分，进一步启发探索——随着观测次数 m 取值不断增大，接收误码率是否可以无限制减小（直至差错概率趋于零）？

5.3.5 相关噪声简易模型

为了达到本实验中某些项目的实际效果，在此专门构建一种简易的、前后时间点电平取值有一定相关性的噪声模型，应用于仿真实验中。其数学表达式如下

$$n(t)=\begin{cases} n_i & when\ \ t=\frac{i}{11}T,\ i=0,..,11 \\ \left[(j+1)-\frac{11t}{T}\right]\cdot n_j+\left[\frac{11t}{T}-j\right]\cdot n_{j+1} & when\ \ \frac{j}{11}T<t<\frac{j+1}{11}T,\ \ j=0,..,10 \end{cases} \quad \text{（式 5-5）}$$

其中n_i是彼此统计独立的高斯随机变量，均值为零，方差为σ^2。

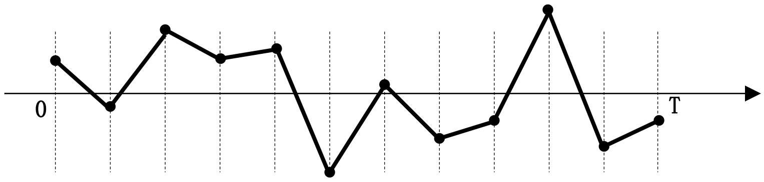

图 5-2 相关噪声波形举例示意图

5.4 实验内容与要求

按图 5-1 模型搭建虚拟仿真实验系统，主要基于蒙特卡洛法完成实验任务。

5.4.1 实验任务 5_1

先验概率$P(H_0)=0.46$和$P(H_1)=0.54$，高斯噪声方差σ^2取值在[0.02，0.20]范围，取样判决模式为单次观测。请通过统计试验，求系统判决门限的最佳取值，即最低统计误码率所对应的判决门限数值。要求：

（1） 根据表 5-1 提示，设计和开展试验；

（2） 最佳判决门限数值解精确到 0.001；

（3） 统计试验次数，即模拟发送信号码元样本个数，取 10^6 个或 10^7 个，开展若干次试验，记录不同噪声强度下，最佳判决门限的数值解和对应的误码率；

（4） 在表 5-1 中记录实验结果，填写相关问题的理论值，做对比分析；

（5） 除表 5-1 要求的实验之外，让噪声方差σ^2取值在[0.02，0.20]范围内以步长 0.02 变化，在系统前面板以曲线图示形式展示最佳判决门限时误码率随噪声方差的变化曲线，在实验报告中记录展示一次典型的实验结果曲线图示。

表 5-1 实验 5_1 记录表

噪声方差σ^2	样本数 10^6				样本数 10^7				理论值	
	第 1 次试验		第 2 次试验		第 1 次试验		第 2 次试验			
	最佳门限	误码率	最佳门限	误码率	最佳门限	误码率	最佳门限	误码率	最佳门限	误码率
0.02										
0.06										
0.10										
0.14										
0.18										

5.4.2 实验任务 5_2

先验概率$P(H_0)=P(H_1)=0.5$，高斯噪声方差$\sigma^2=0.5$，0.1，0.01。取样判决模式为单次观测。请通过统计试验，求判决门限处于理论最佳值 0.5 时，系统的统计误码率。要求：

（1） 根据表 5-2 提示，设计和开展试验；

（2） 统计试验次数，即模拟发送信号码元样本个数不小于 10^7，开展若干次试验，记录不同噪声强度下的统计试验误码率；

（3） 在表 5-2 中记录实验结果，填写相关问题的理论值，做对比分析。

表 5-2 实验 5_2 记录表

噪声方差σ^2	第 1 次统计试验误码率	第 2 次统计试验误码率	第 3 次统计试验误码率	误码率理论值
0.5				
0.1				
0.01				

5.4.3 实验任务 5_3

先验概率$P(H_0)=P(H_1)=0.5$，高斯噪声方差$\sigma^2=0.5$。取样判决模式为多次观测，假设所有观测点（取样点）的噪声彼此间不相关。请通过统计试验，求判决门限处于理论最佳值 0.5 时，系统的统计误码率。要求：

（1） 根据表 5-3 提示，设计和开展试验；

（2） 统计试验次数，即模拟发送信号码元样本个数不小于 10^7，开展若干次试验，记录检测次数不同情况下的统计试验误码率；

（3） 在表 5-3 中记录实验结果，填写相关问题的理论值，做对比分析；与实验 5_2 结果也做适当对比分析。

表 5-3 实验 5_3 记录表

检测次数m	第 1 次统计试验误码率	第 2 次统计试验误码率	第 3 次统计试验误码率	误码率理论值
5				
50				

5.4.4 实验任务 5_4

先验概率$P(H_0)=P(H_1)=0.5$，信道噪声为 5.3.4 所描述的相关噪声，其中的参数$\sigma^2=0.5$。取样判决模式为多次观测，检测 5 次。请通过统计试验，求判决门限处于理论最佳值 0.5 时，系统的统计误码率。要求：

（1） 分别按示意图 5-3 和图 5-4 布置 5 次取样观测的时间位点（等间隔）；

（2） 根据表 5-4 提示，设计和开展试验；

（3） 统计试验次数，即模拟发送信号码元样本个数不小于 10^7，开展若干次试验，记录检测次数不同情况下的统计试验误码率；

（4） 在表 5-4 中记录实验结果，与实验 5_2 相应结果做适当对比，定性分析在该形式噪声下哪种取样方式更能发挥多次观测的效果。

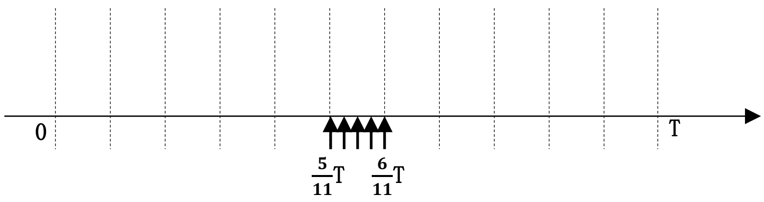

图 5-3 第 1 种 5 次取样观测时点分布示意图

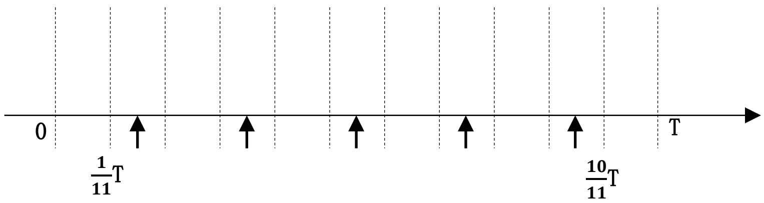

图 5-4 第 2 种 5 次取样观测时点分布示意图

表 5-4 实验 5_4 记录表

取样观测方式	第 1 次统计试验误码率	第 2 次统计试验误码率	第 3 次统计试验误码率
第 1 种			
第 2 种			

5.5 拓展探究

请学有余力的学习者考虑。

5.5.1 实验探究

在实验任务 5_4 的基本条件下，如果进一步增加观测次数m，能否达到理想中$\frac{\sigma^2}{m}$的降噪效果？或者说，m最大可取多少，取样时点位置如何布设，可达到$\frac{\sigma^2}{m}$的降噪效果？

并请基于蒙特卡洛方法的思想，设计仿真实验，在一定程度上验证和展示你的观点和方案。

5.5.2 原理辨析

在数字通信接收机的多次观测机制中，随着观测次数m取值不断增大，能否无限削弱加性高斯噪声的影响，以至于接近或达成零噪声效果，使因噪声引起的误码减至零？

以下有几条提示供参考，但请不要简单直接回答提示中所列问题，希望将观点融合在辨析上述问题的陈述中。如果选择忽略这些提示，从自己认为更合适的其他角度开展陈述，也是可以的。

✧ 关于虚拟实验中使用的零均值、方差σ^2的高斯噪声信号，请思考：

（1）它是严格意义的“白”噪声吗？

（2）以该信号模拟信道加性噪声，对符号码元做多次观测，不同时点的取样值所含噪声成分是否严格满足统计不相关？

✧ 关于严格意义上的高斯白噪声，若均值为零、谱密度为$\frac{N_0}{2}$，请思考：

（1）若其作为信道加性噪声，且接收信号未被滤波限带，对符号码元做多次观测时，不同时点的取样值所含噪声成分是否严格满足统计不相关？

（2）这个噪声的幅度方差σ^2是多大，能否用N_0表示它？

（3）这个噪声信号在实际当中存在吗？在虚拟仿真实验环境中，能被模拟产生吗？

✧　关于多次观测机制取样速率问题

有些同学可能从多次观测机制对信号的取样，联想到模数转换器件（ADC）的使用；继而认为观测次数m的增加在工程实现时会受制于 ADC 器件高速采样性能的上限，因而不能无限增大。

工程知识丰富的同学很可能听说过，先进的超高速 ADC 器件是当今芯片设计制造厂商技术能力的一项标志性指标。但是有必要指出，此处讨论的问题并不与此密切关联。

当m无限增大时，意味着从离散观测过渡为连续观测。而依靠模拟电路技术实现的相关积分器、匹配滤波器等，都是典型的工程可实现的连续观测案例，并不需要用到 ADC 器件。

5.6 实验报告要求

根据自己的实验结果记录，编写实验报告。课程提供实验报告模板作为参考。其中标题等组织结构，学习者根据实际情况灵活调整。英文教学班报告写作的语种要求，由理论课教师规定。

5.7 考评重点

本实验的考评重点如下：

（1）　实验各项结果，含波形图示、量化结果、分析结论等；

（2）　定量求解问题所使用方法的数学表达和编程要点，比如按蒙特卡洛法设计的仿真实验算法的总体流程步骤；

（3）　人机界面设计的合理性、独到性；

（4）　拓展探究工作。

考评时预留约 8%的评分空间（包括但不限于对拓展探究的评价），用于奖励个性化强、别具匠心的设计。

（袁焱 杨晓 编写 2023 年 11 月 13 日）