

通信原理实验五

何德轩 521030910063

F2103002

日期: December 9, 2023

1 实验目的

1. 熟练掌握统计试验法在通信理论和工程问题求解中的应用。
2. 通过实验加深对最佳判决理论的认识和理解。
3. 通过实验探究数字信号检测中单次观测、多次观测等技术的特点和适用场景。

2 实验主要器材和设备

LabVIEW2018 程序开发和应用环境。

3 实验任务完成情况

3.1 5-1

第一次实验的实验数据记录如下表所示，可以看到在先验不等概的情况下，使用蒙特卡罗方法可以有效地逼近理论的最佳门限，并且样本数越高，统计最佳门限越接近理论最佳门限，实验误码率也越接近理论误码率。一个有趣的现象是，在实验样本较少的情况下，实验误码率可能会小于理论误码率，可以认为这是实验得到的统计最佳门限对数据过拟合导致的。下面是随

| 噪声方差 | 样本数 1e6 | | | | 样本数 1e7 | | | | 理论值 | |
|------|---------|----------|-------|----------|---------|----------|-------|---------|-------|----------|
| | 第一次实验 | | 第二次实验 | | 第一次实验 | | 第二次实验 | | | |
| | 最佳门限 | 误码率 | 最佳门限 | 误码率 | 最佳门限 | 误码率 | 最佳门限 | 误码率 | 最佳门限 | 误码率 |
| 0.02 | 0.497 | 0.000192 | 0.496 | 0.000191 | 0.498 | 0.000206 | 0.495 | 0.00199 | 0.497 | 0.000203 |
| 0.06 | 0.490 | 0.0207 | 0.489 | 0.0204 | 0.493 | 0.0206 | 0.488 | 0.0206 | 0.490 | 0.0205 |
| 0.10 | 0.488 | 0.0567 | 0.484 | 0.0566 | 0.485 | 0.0567 | 0.481 | 0.0568 | 0.484 | 0.0567 |
| 0.14 | 0.474 | 0.0905 | 0.473 | 0.0903 | 0.479 | 0.0904 | 0.478 | 0.0904 | 0.478 | 0.0903 |
| 0.18 | 0.464 | 0.119 | 0.471 | 0.119 | 0.473 | 0.119 | 0.471 | 0.119 | 0.471 | 0.119 |

表 1: 5-1 实验结果表

噪声方差变化时最佳统计门限与误码率的变化曲线，可以看出门限随方差增大而下降，误码率随方差增大而上升。

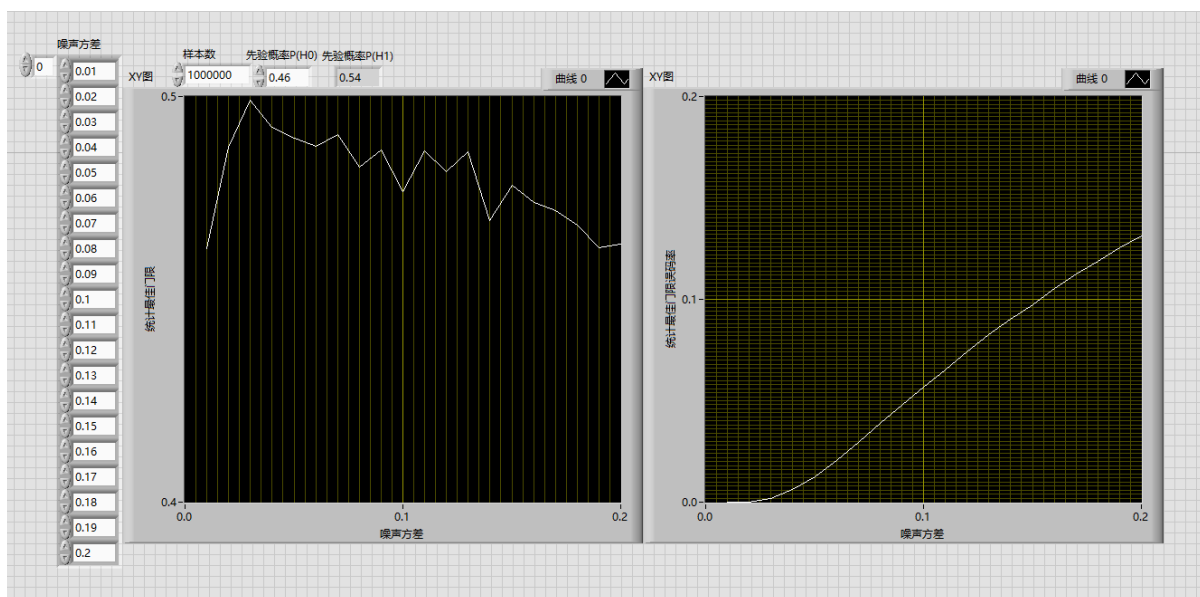


图 1: 统计最佳门限与误码率随噪声方差变化曲线

3.2 5-2

本次实验中我们测量先验等概的条件下采用最佳理论门限的判决系统的设计误码率，取 $1e8$ 个样本点，碍于双精度浮点数的除法精度部分实验误码率仅能显示两位有效数字，下表为实验结果。统计的设计误码率与理论误码率基本一致。

| 噪声方差 | 实验 1 误码率 | 实验 2 误码率 | 实验 3 误码率 | 理论误码率 |
|------|----------|----------|----------|-----------|
| 0.5 | 0.240 | 0.240 | 0.240 | 0.240 |
| 0.1 | 0.0570 | 0.0569 | 0.0569 | 0.0569 |
| 0.01 | $3.5e-7$ | $3.2e-7$ | $1.9e-7$ | $2.87e-7$ |

表 2: 5-2 实验结果表

3.3 5-3

在这一实验中我们验证多次观测对于高斯白噪声误码率的效果（取 $1e7$ 个样本点）。可以明显地看到，在观测点噪声独立的条件下，相比实验 5-2 中方差同为 0.5 的高斯白噪声，多次观测能显著减小判决误码率（设计误码率和理论误码率），实验给出的设计误码率也与理论误码率基本一致，结果如下表：

| 检测次数 m | 实验 1 误码率 | 实验 2 误码率 | 实验 3 误码率 | 理论误码率 |
|--------|----------|----------|----------|-----------|
| 5 | 0.0570 | 0.0569 | 0.0569 | 0.0569 |
| 50 | $5e-7$ | $3e-7$ | $1e-7$ | $2.87e-7$ |

表 3: 5-3 实验结果表

3.4 5-4

在该实验中，我们的噪声不再是加性高斯白噪声，而是采用了一种具有时序相关性的加性噪声。由于不同判决时刻的噪声可能具有相关性，因而我们需要找到最优的判决时刻序列，以下是两次统计实验给出的判决时间序列以及对应的实验结果。

$$n(t) = \begin{cases} n_i & \text{when } t = \frac{i}{11}T, i = 0, \dots, 11 \\ \left[\left(j + 1 - \frac{11t}{T} \right) \cdot n_j + \left(\frac{11t}{T} - j \right) \cdot n_{j+1} \right] & \text{when } \frac{j}{11}T < t < \frac{j+1}{11}T, j = 0, \dots, 10 \end{cases}$$

其中 n_i 是彼此统计独立的高斯随机变量，均值为零，方差为 σ^2 。

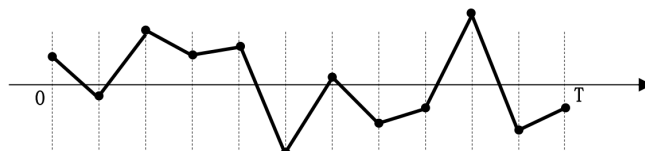


图 2: 相关噪声模型

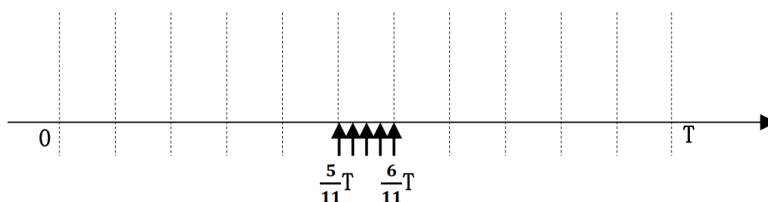


图 5-3 第 1 种 5 次取样观测时点分布示意图

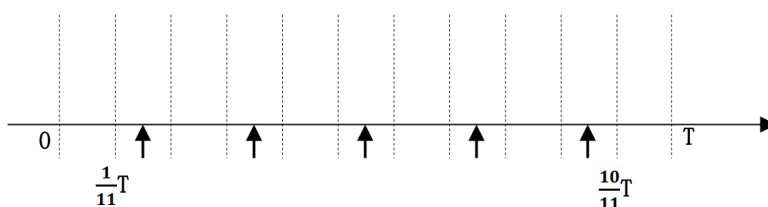


图 5-4 第 2 种 5 次取样观测时点分布示意图

图 3: 判决时间序列

| 取样观测方式 | 实验 1 误码率 | 实验 2 误码率 | 实验 3 误码率 |
|--------|----------|----------|----------|
| 第一种 | 0.159 | 0.159 | 0.159 |
| 第二种 | 0.0126 | 0.0127 | 0.0126 |

表 4: 5-4 实验结果表

可以看到，相比实验 5-2 中方差同为 0.5 的高斯白噪声，两种取样方法都降低了误码率，且第二种取样方法的误码率明显优于第一种，在这里先定性的给出原因：第一种取样方法时间间

隔过紧，相邻噪声样点的相关性强，当间隔过近时相当于只取了这一个样点，因而无法有效降噪；第二种方法间隔大，噪声样点相关性低，因而能够通过多次观测有效降噪。

事实上，由于第二种采样方法都在独立高斯噪声点中间观测，采到的五个值为这些高斯噪声两两的均值，且这些均值相互独立，取均值这一步使 $\sigma^2 \rightarrow \frac{\sigma^2}{2}$ ， m 次取样使 $\frac{\sigma^2}{2} \rightarrow \frac{\sigma^2}{2m}$ ，将这一方差代入理论误码率公式计算得到的是 0.01267，正如第二种观测方式给出的结果。

4 主要程序框图

4.1 理论值计算

理论最优门限：

$$y_T = \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln \left[\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right] \quad (1)$$

理论误码率：

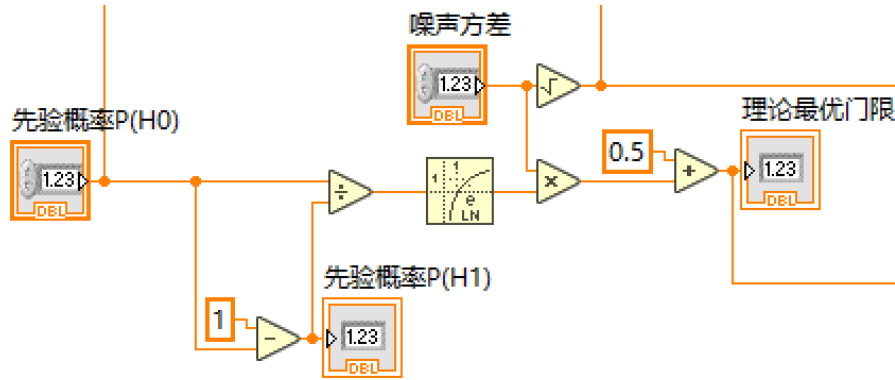


图 4: 理论最优门限

$$P_e = P(D_1 | H_0) P(H_0) + P(D_0 | H_1) P(H_1) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{y_T}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2\sigma^2} \right\} dy \cdot P(H_0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{y_T} \exp \left\{ -\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2} \right\} dy \cdot P(H_1) \quad (3)$$

$$= P(H_0) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{y_T}{\sqrt{2}\sigma} \right) + P(H_1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{y_T - 1}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \quad (4)$$

4.2 统计实验

基本思想是使用高斯白噪声（逐点） v_i 生成独立的高斯噪声，再用随机数 v_i 生成满足先验概率的信号。下面以 5-3 为例：

5-4 较为特别，为了在 5-5 中探究最优观测模式，我们搭建了一个子 v_i ，输入为一组观测时间点（数组），输出为对应相关噪声观测值的均值（加性故可取均值）。在此基础上将先前 5-3 的程序框图稍作修改即可。

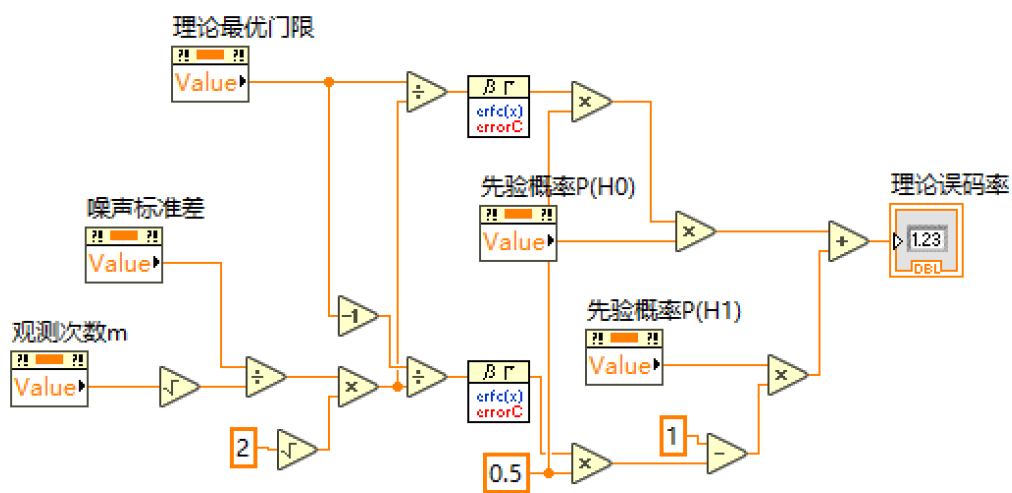


图 5: 理论误码率

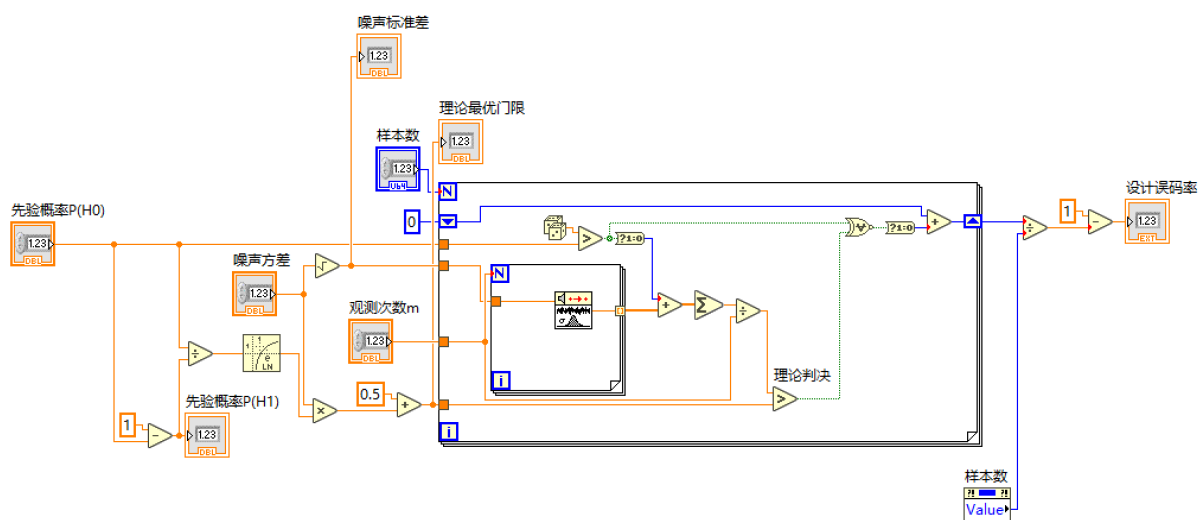


图 6: 5-3 程序框图

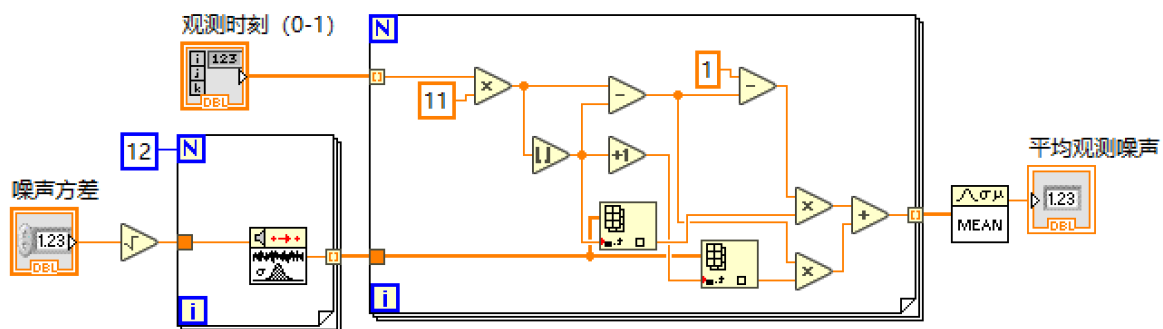


图 7: 相关噪声生成 vi

5 拓展探究

5.1 5-5.1

在实验 5-4 中我们讨论了不同观测模式对于降噪性能的影响，而降噪性能的不佳主要由观测点随机变量不独立导致，因此一个朴素的想法是：**最优的取样模式的必要条件是使观测点间相关函数最小**。（严格来说是互协方差，但是均值为 0 时等价）。下面我们进行理论推导：

假定我们选取了 m 个取样点 x_1, x_2, \dots, x_m ，记上述 5-4 相关信号中的高斯分布点为 n_0, n_1, \dots, n_{11} 满足 $i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ，因为每个 x_i 都是相邻两个高斯分布 n_j, n_{j+1} 的加权和，故定义插值比 $k_i = 11t_i - \lfloor 11t_i \rfloor$ ，其中 t_i 为观察时间 $(0,1)$ ，则 $x_i = (1 - k_i)n_j + k_i n_{j+1} \sim \mathcal{N}(0, (2k_i^2 - 2k_i + 1)\sigma^2)$ 。判决变量为信号加上噪声的均值，噪声均值

$$\bar{x} = \sum_0^{11} c_j n_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \sum_0^{11} c_j^2) \quad (5)$$

$$\sum_0^{11} c_j = 1, c_j \geq 0 \quad (6)$$

$$\sqrt{\frac{\sum_0^{11} c_j^2}{12}} \leq \frac{\sum_0^{11} c_j}{12} = \frac{1}{12} \quad (7)$$

$$\sum_0^{11} c_j^2 \leq \frac{1}{12}, i.f.f. c_j = \frac{1}{12} \quad (8)$$

因此，最优的降噪效果为 $\frac{\sigma^2}{12}$ ，也就是说即使无限的增大观测次数 m ，也无法再降低信噪比，而 5-4 中的取法 2 仅用 5 个点就达到了 $\frac{\sigma^2}{10}$ 的效果，也恰恰说明并非观测次数越多，观测效果就越好，只要选取恰当，少数几个观测点也能有不错的降噪性能。而最佳取法也非常明显，即选取 12 个观测点恰好为 12 个独立同分布高斯变量即可。用 labview 统计该取法的误码率与理论推演基本一致，并且的确高于 5-4 中的取法 2。

| 实验 1 误码率 | 实验 2 误码率 | 实验 3 误码率 | 理论最优误码率 |
|----------|----------|----------|----------|
| 0.007219 | 0.007123 | 0.007170 | 0.007153 |

表 5: 最优误码率观测

但是为了达到最优误码率我们比 5-4 多取了 7 个观测点，但误码率的提升仅有 0.005，这在工程上或许是不必要的，我们可以考虑定义一个 trade-off 的目标函数 $\mathcal{L} = \sqrt[k]{m} \cdot P_e$ ，其中 $\sqrt[k]{m}$ 是观测点数目的惩罚项， k 为对应的惩罚因子，通过优化这个函数来得到实践上最优的观测数。

6 实验心得

本次实验我们采用蒙特卡罗方法，通过仿真实现数字通讯的取样判决过程，了解和熟悉了取样判决的数学表达，具体实现和性能特点，在以误码率为优化目标的前提下探索了单次取样和多次取样的降噪性能，并详细讨论了噪声的时相关性对取样判决的影响，对于给定的相关噪声，我们通过理论推导给出了其多次观测的最优降噪性能以及最优取样点的分布，并实验验证了其降噪性能与理论一致，提高了自主探究、理论分析和解决实际问题的能力。