# Дополнительная лекция

Вектора и операции над ними. Градиентный спуск. Понижение размерности. Статистические тесты.

**Даниил Корбут**
Специалист по Анализу Данных

**Даниил Корбут**
DL Researcher
Insilico Medicine, Inc

Окончил бакалавриат ФИВТ МФТИ (Анализ данных) в 2018г
Учусь на 2-м курсе магистратуры ФИВТ МФТИ
Работал в Statsbot и Яндекс. Алиса.
Сейчас в Insilico Medicine, Inc, занимаюсь генерацией активных молекул и исследованиями старения с помощью DL.

НЕТОЛОГИЯ

# Векторы

Вектор — упорядоченный конечный список чисел.
Вектора обычно записываются как вертикальный список, например:

$$\begin{bmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{pmatrix}$$

Вектор может быть записан также в следующем виде:

$$(-1.1, 0.0, 3.6, -7.2)$$

# Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов (dot product по англ.) - это скаляр (число), полученное в результате перемножения длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos(\alpha)$$

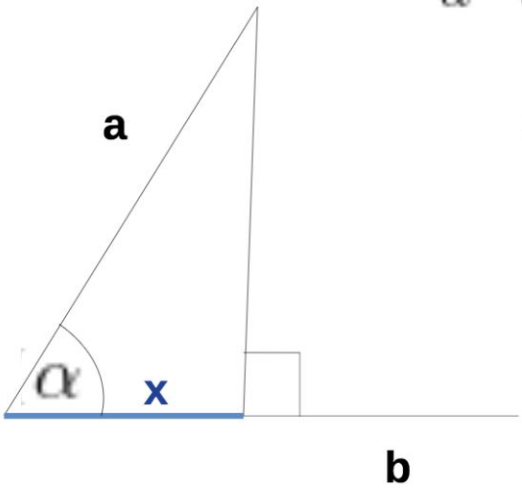
Если известны координаты векторов, то скалярное произведение можно посчитать по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

где $\vec{a}(x_a; y_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b)$ вектора в двумерном пространвнстве

# Проекция одного вектора на другой

Длина вектора x, полученного в результате проекции вектора a на вектор b, равна делению скалярного произведения вектора **a** на вектор **b** на длину b.




$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos(\alpha)$$

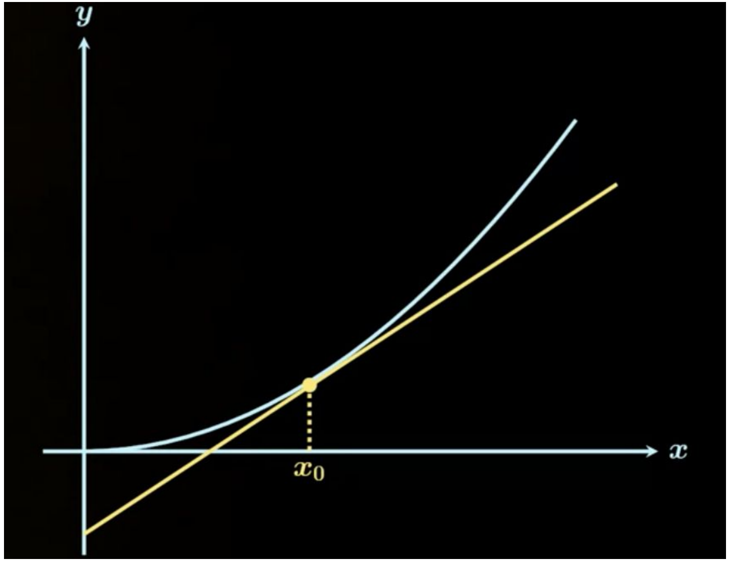
$$cos(\alpha) = \frac{|x|}{|a|}$$

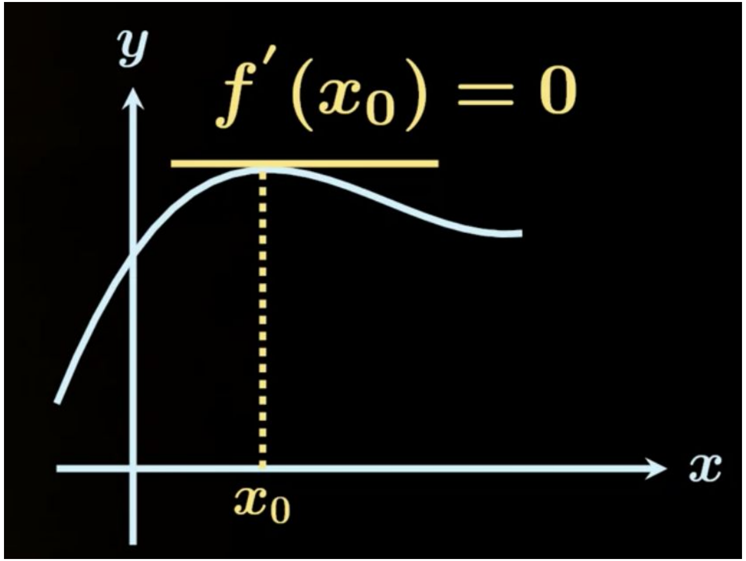
$$|x| = cos(\alpha) \cdot |a|$$

$$cos(\alpha) \cdot |a| = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|b|}$$

$$|x| = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|b|}$$

# Экстремум функции и производная




В точках локальных экстремумов производная (если она определена (!), пример дальше) обязана равняться нулю.
Это **необходимое** условие.

# Выпуклость функции и вторая производная

Помните **необходимое** условие локального экстремума?

!

Наложив некоторые условия на вторую производную, можно сделать их **достаточными**!

**Достаточное условие экстремума** Пусть выполнено необходимое условие экстремума, то есть в некоторой точке $x_0$ значение $f'(x_0) = 0$. Если в таком случае

1. $f''(x) > 0$ — функция будет строго выпукла и реализуется строгий минимум.
2. $f''(x) < 0$ — функция будет строго вогнута и реализуется строгий максимум.

# Градиент и линии уровня функции

Если f(x1, . . . , xn) — функция n переменных x1, ..., xn, то n-мерный вектор из частных производных:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

!

называется **градиентом функции**.

!

**Линией уровня функции** называется множество точек, в которых функция принимает одно и то же фиксированное значение. Оказывается, что **градиент перпендикулярен линии уровня**.

# Градиент в задачах оптимизации

Задачей оптимизации называется задача по нахождению экстремума функции, например минимума:

$$f(x_1, ..., x_n) \to \min$$

Такая задача часто встречается в приложениях, например при выборе оптимальных параметров рекламной компании, а также в задачах классификации.

Вспомним необходимые условия экстремума из прошлой лекции!

# Градиент в задачах оптимизации

Но не всегда задачу можно решать аналитически. В таком случае используется численная оптимизация. Наиболее простым в реализации из всех методов численной оптимизации является метод градиентного спуска.

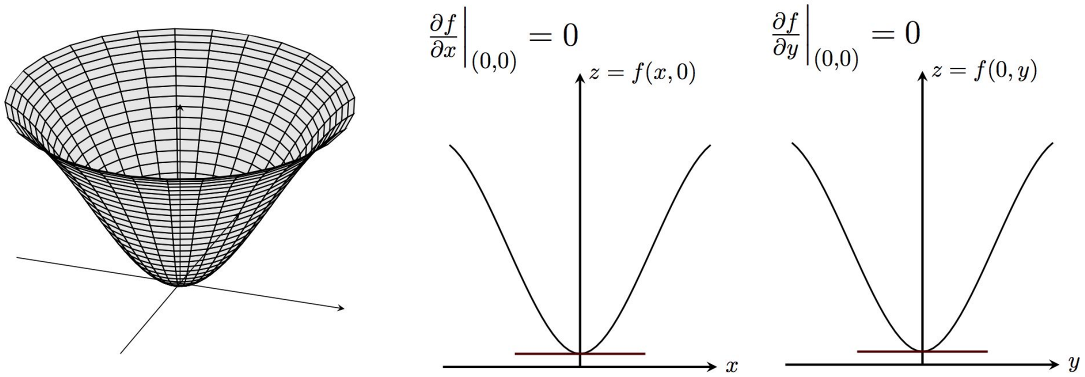



Рис. 2: Функция двух переменных достигает минимума в начале координат.

НЕТОЛОГИЯ

# Градиентный спуск

Это итерационный метод. Решение задачи начинается с выбора начального приближения $\vec{x}^{[0]}$

После вычисляется приблизительное значение $\vec{x}^{1}$

Затем $\vec{x}^{2}$

и так далее…

!

$$\vec{x}^{[j+1]} = \vec{x}^{[j]} - \gamma^{[j]} \nabla F(\vec{x}^{[j]}), \qquad \text{где } \gamma^{[j]} \text{ — шаг градиентного спуска.}$$

Идея: идти в направлении наискорейшего спуска, а это направление задаётся антиградиентом $-\nabla F$.

# Градиентный спуск

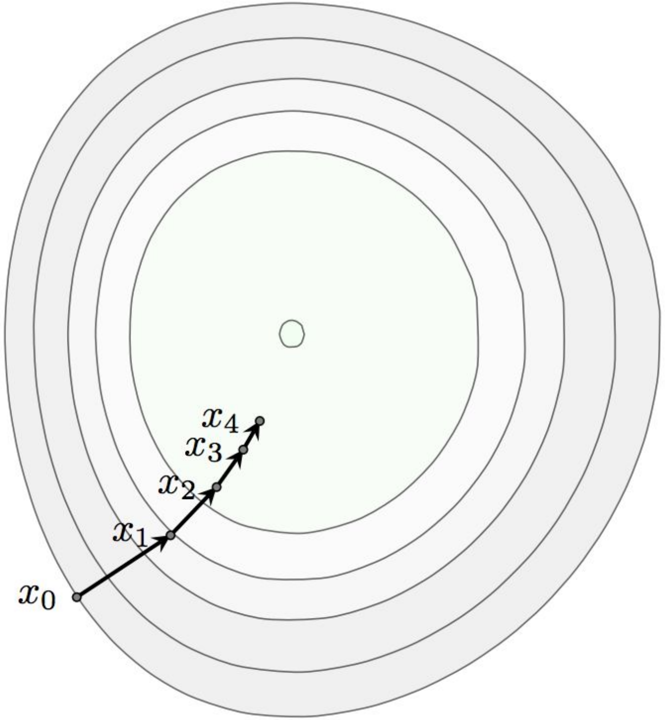
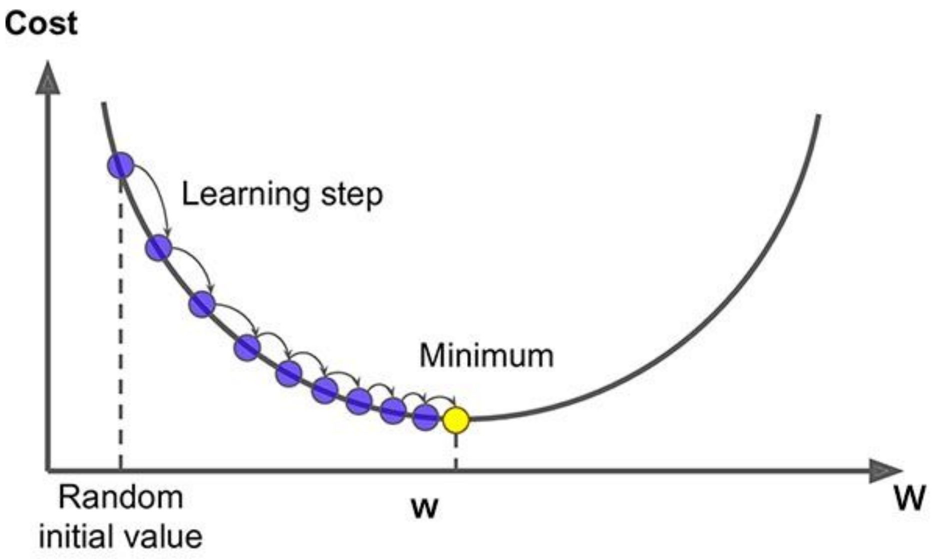



Рис. 3: Градиентный спуск



# Примеры основной и альтернативной гипотез

Основная гипотеза:

$$H_0 : a = 368$$

Средний вес выпускаемых коробок равен 368 г, конвейер работает нормально

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : a \neq 368$$

Средний вес выпускаемых коробок отличен от 368 г, конвейер требует наладки

# Статистические гипотезы о данных

| | Disease present | Disease absent |
|---|---|---|
| Positive | **a** True positive | **b** False positive |
| Negative | **c** False negative | **d** True negative |



**Ошибка 1 рода:**
**Вероятность отвергнуть гипотезу,**
но в действительности она верна

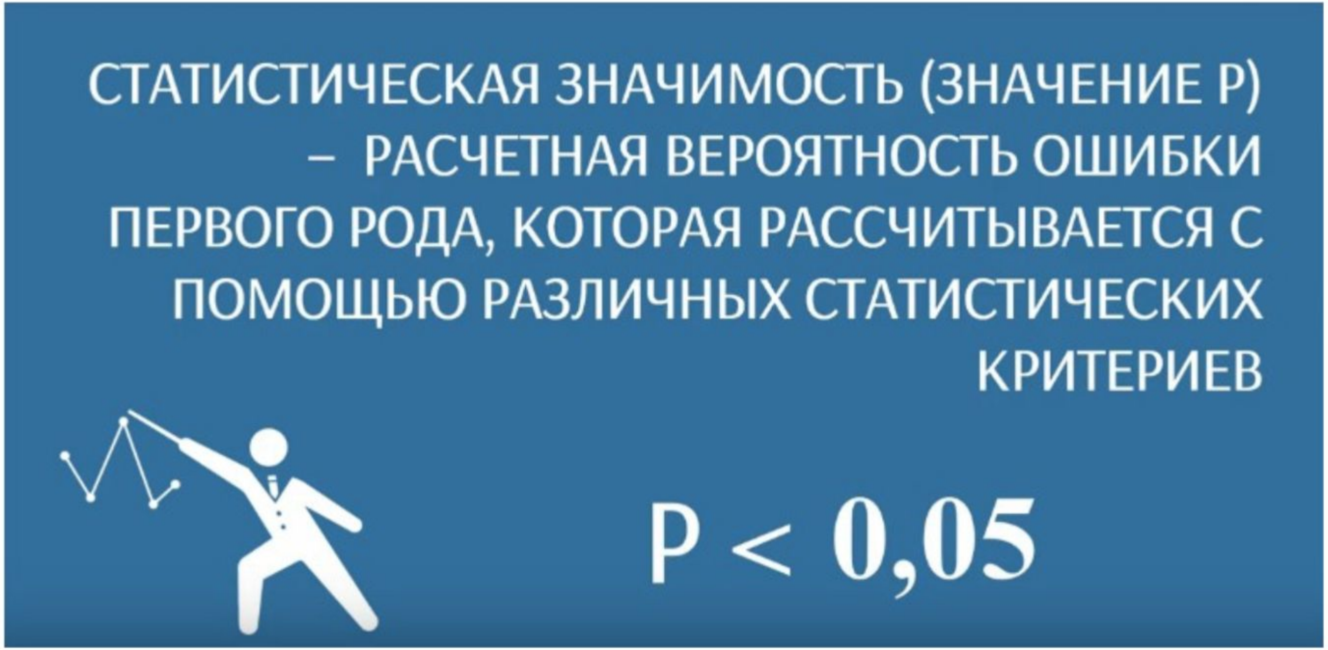
Критически значимый уровень
**alpha** = 0.05

**Ошибка 2 рода:**
Вероятность принять гипотезу,
но в действительности она неверна
**beta** — вероятность ошибки.
Мощность исследования = 1-beta.

https://www.youtube.com/watch?v=4eyEp_NTXAU
https://www.nejm.org/doi/full/10.1056/NEJM199908193410823

https://github.com/yustinaivanova/math_netology/blob/master/math_4.pdf

# Статистическая значимость




https://github.com/yustinaivanova/math_netology/blob/master/math_4.pdf

# Спасибо за внимание!

НЕТОЛОГИЯ