第 1 日: 2002 年 7 月 24 日

制限時間: 4 時間 30 分　　　　Version: Japanese

配点: 各問 7 点

問題 1

n を正の整数とする．座標平面上の点 (x, y) で，x, y が 0 以上の整数で $x + y < n$ をみたすようなもの全体の集合を T とする．T の各点は，次の条件をみたすように赤または青に塗られている．

条件: 点 (x, y) が赤ならば，$x' \leq x$ かつ $y' \leq y$ であるような T のすべての点 (x', y') は赤である．

n 個の青い点からなる集合であって，それらの x 座標がすべて異なるものを X 集合と呼ぶ．n 個の青い点からなる集合であって，それらの y 座標がすべて異なるものを Y 集合と呼ぶ．

このとき，X 集合の個数と Y 集合の個数は等しいことを証明せよ．

問題 2

点 O を中心とする円 Γ があり，BC は円 Γ の直径である．点 A は円 Γ 上にあり，$0° < \angle AOB < 120°$ をみたす．点 C を含まない弧 $\overset{\frown}{AB}$ の中点を D とし，点 O を通り直線 DA に平行な直線と，直線 AC との交点を J とする．線分 OA の垂直二等分線と円 Γ との交点を E, F とする．

このとき，点 J は三角形 CEF の内心であることを証明せよ．

問題 3

次の条件をみたす 3 以上の整数 m, n の組 (m, n) をすべて決定せよ．

条件: $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ が整数となるような正の整数 a が存在する．

注: 本 PDF は，https://www.imojp.org/archive/mo2002/imo2002/problems/imo43.html に掲示されていた画像データを，「学術オリンピック非公式まとめサイト」の運営者が手作業で PDF 化したものである．

第 2 日: 2002 年 7 月 25 日

制限時間: 4 時間 30 分　　Version: Japanese

配点: 各問 7 点

問題 4

n を 2 以上の整数とする．n の正の約数を小さいものから順に $d_1, d_2, \ldots, d_k$ とおく．このとき，

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

である．$D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k$ とおく．

(a) $D < n^2$ であることを証明せよ．

(b) D が n^2 の約数となるような n をすべて決定せよ．

問題 5

実数に対して定義された実数値関数 f で，任意の実数 x, y, z, t に対して

$$\{f(x)+f(z)\}\{f(y)+f(t)\} = f(xy-zt) + f(xt+yz)$$

が成立するようなものをすべて決定せよ．

問題 6

n を 3 以上の整数とする．平面上に半径が 1 の n 個の円 $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ がある．中心をそれぞれ $O_1, O_2, \ldots, O_n$ とする．平面上のどの直線も，円 $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ のうち 3 個以上とは共有点をもたないとする．

このとき，

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)\pi}{4} \geq \frac{1}{O_1O_2} + \frac{1}{O_1O_3} + \ldots + \frac{1}{O_1O_n} \\ \frac{1}{O_2O_3} + \ldots + \frac{1}{O_2O_n} \\ \ddots \qquad \vdots \qquad \\ + \frac{1}{O_{n-1}O_n}\end{aligned}$$

であることを証明せよ．

注: 本 PDF は，https://www.imojp.org/archive/mo2002/imo2002/problems/imo43.html に掲示されていた画像データを，「学術オリンピック非公式まとめサイト」の運営者が手作業で PDF 化したものである．