

Représentation surfaciques, polyèdres et quadriques

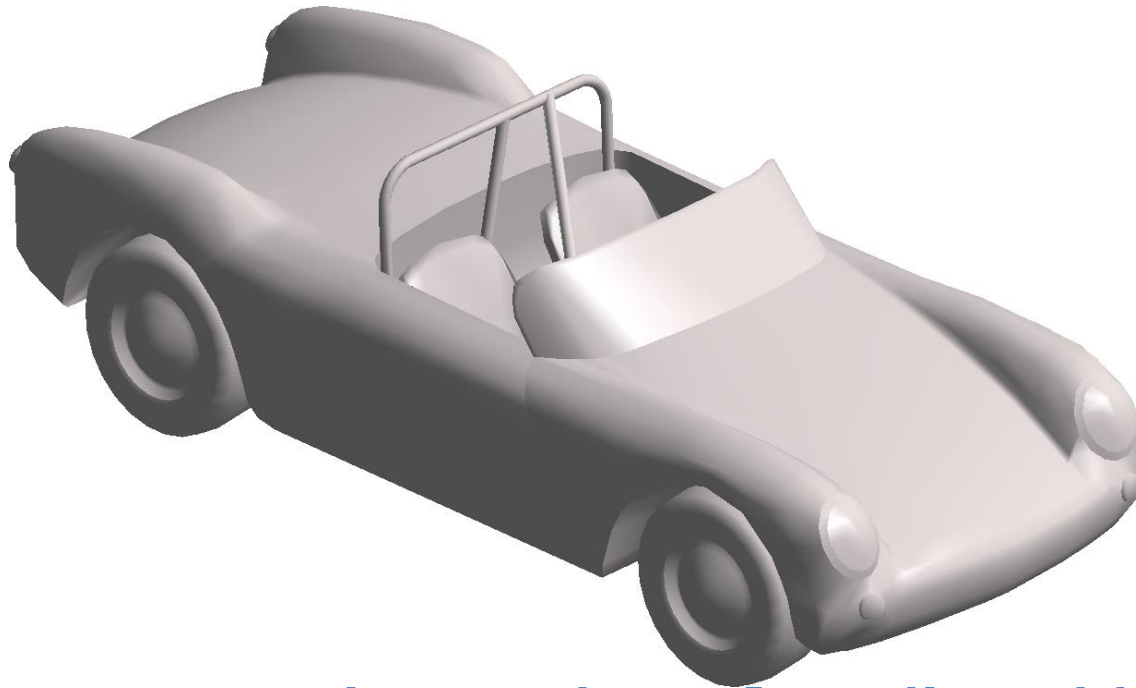
Gilles Gesquière

Plan

- Introduction
- Rappel de trigonométrie
- Représentation polyédrique \neq continue
- Quadriques
- Rappel OpenGL

Introduction

- Représentation surfacique :
➔ le modèle est défini par sa surface extérieure



➔ Comment représenter la surface d'un objet ??

Rappel trigonométrie

- Propriétés du triangle rectangle :
 - Triangle ABC rectangle en A
 - BC est l'hypoténuse
 - Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$
 - Pour l'angle \widehat{ABC} , entre les vecteurs \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{BC} :
 - $\cos(ABC) = BA/BC$: adjacent/hypoténuse
 - $\sin(ABC) = AC/BC$: opposé/hypoténuse
 - $\tan(ABC) = AC/BA$: opposé/adjacent

Rappel trigonométrie

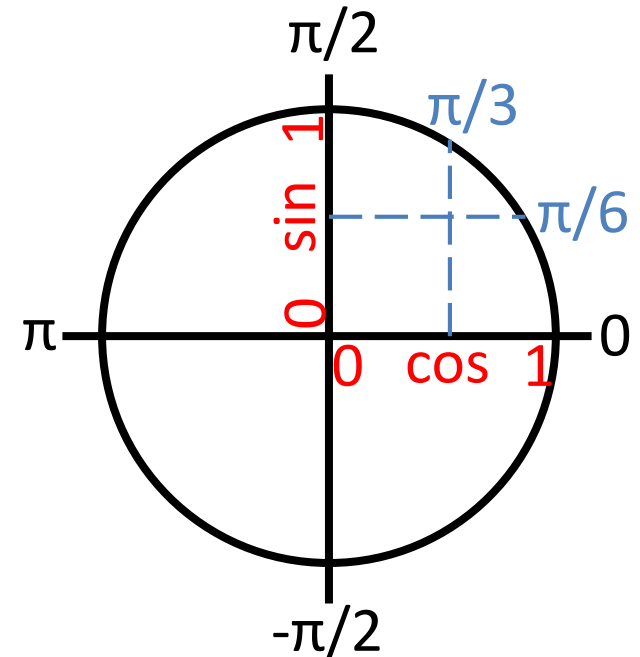
- Angles et cercle trigonométrique :

- $\cos(0) = 1$ $\cos(\pi) = -1$

- $\cos(\pi/2) = 0$ $\cos(\pi/3) = 1/2$

- $\sin(\pi/2) = 1$ $\sin(-\pi/2) = -1$

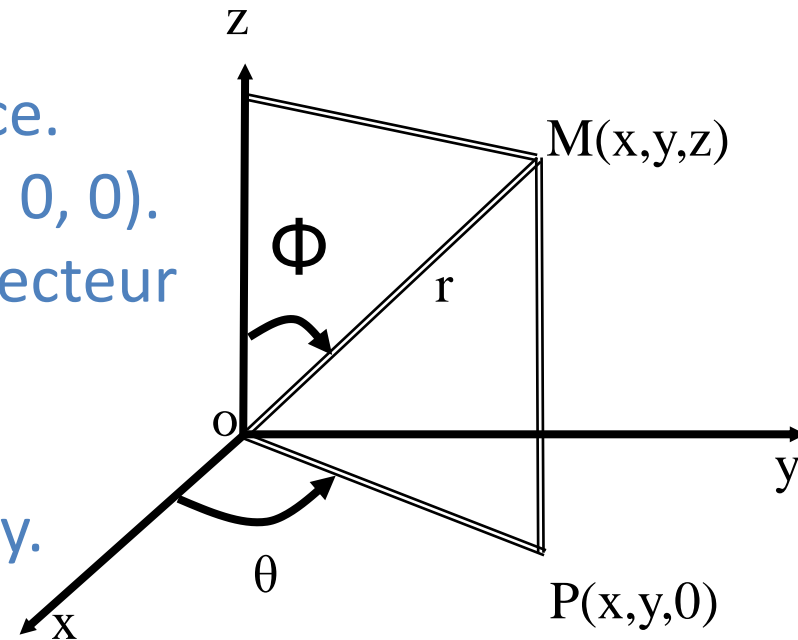
- $\sin(0) = 0$ $\sin(\pi/6) = 1/2$



Rappel trigonométrie

- **Coordonnées sphériques :**

- Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.
- Soit r la distance entre M et $O(0, 0, 0)$.
- Soit ϕ l'angle entre l'axe Z et le vecteur \overrightarrow{OM} qui est compris entre 0 et π .
- Soit $P(x, y, 0)$ la projection orthogonale de M sur le plan xOy .
- Soit θ l'angle entre l'axe X et le vecteur \overrightarrow{OP} qui est compris entre 0 et 2π .
- Le triplet (r, θ, ϕ) constitue les *coordonnées sphériques* de M .



Rappel trigonométrie

- Coordonnées sphériques :

- $\cos(\phi) = PM/OM \Rightarrow z = r\cos(\phi)$

- $\cos(90-\phi) = OP/OM \Rightarrow OP = r\sin(\phi)$

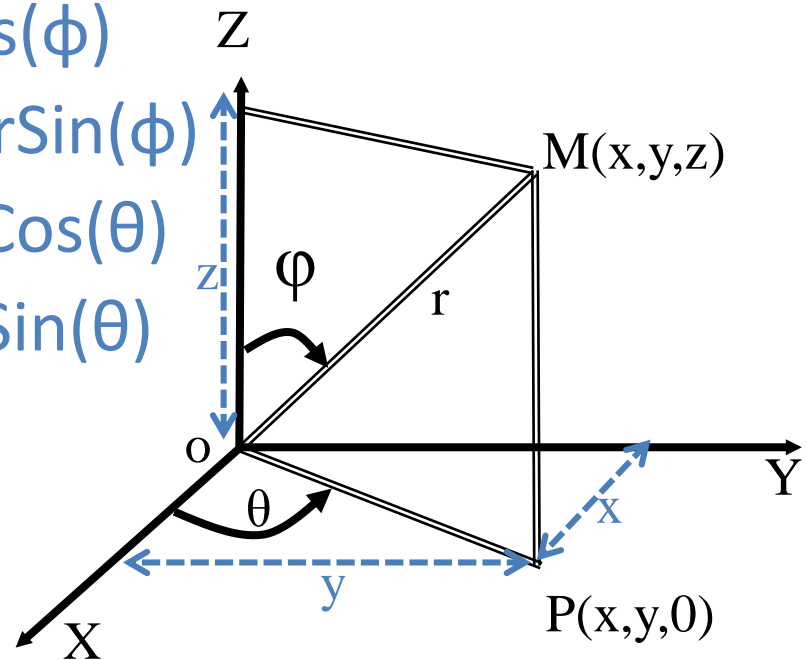
- $x/OP = \cos(\theta) \Rightarrow x = r\sin(\phi)\cos(\theta)$

- $y/OP = \sin(\theta) \Rightarrow y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$

- $x = r\sin(\phi)\cos(\theta)$

- $y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$

- $z = r\cos(\phi)$



Polyèdre \neq Surface continue

- Définir une surface de manière finie.
- Un polyèdre est défini par :
 - Par un ensemble de points de \mathbb{R}^3 appelés sommets du polyèdres.
 - Par un ensemble de faces définies chacune par une suite de sommets.

Polyèdre \neq Surface continue

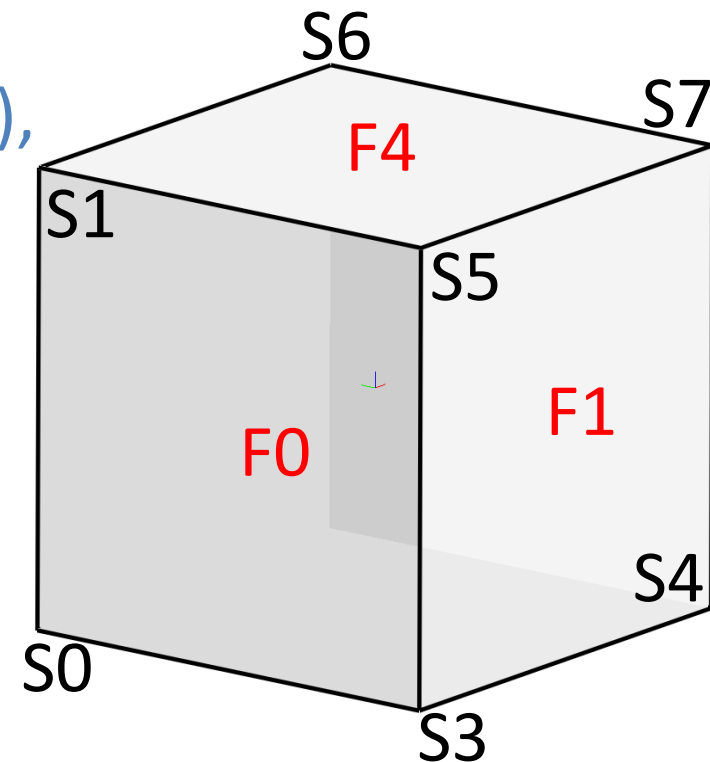
- Exemple du cube :

- L'ensemble de sommet :

$\{S0(-5,-5,-5); S1(-5,-5,5); S2(-5,5,-5),$
 $S3(5,-5,-5); S4(5,5,-5); S5(5,-5,5)$
 $S6(-5,5,5); S7(5,5,5)\}$

- L'ensemble de face :

$\{F0(S0,S1,S5,S3); F1(S5,S7,S4,S3);$
 $F2(S7,S4,S2,S6); F3(S6,S2,S0,S1);$
 $F4(S1,S5,S7,S6); F5(S0,S3,S4,S2) \}$



Polyèdre \neq Surface continue

- Définir une surface de manière continue :

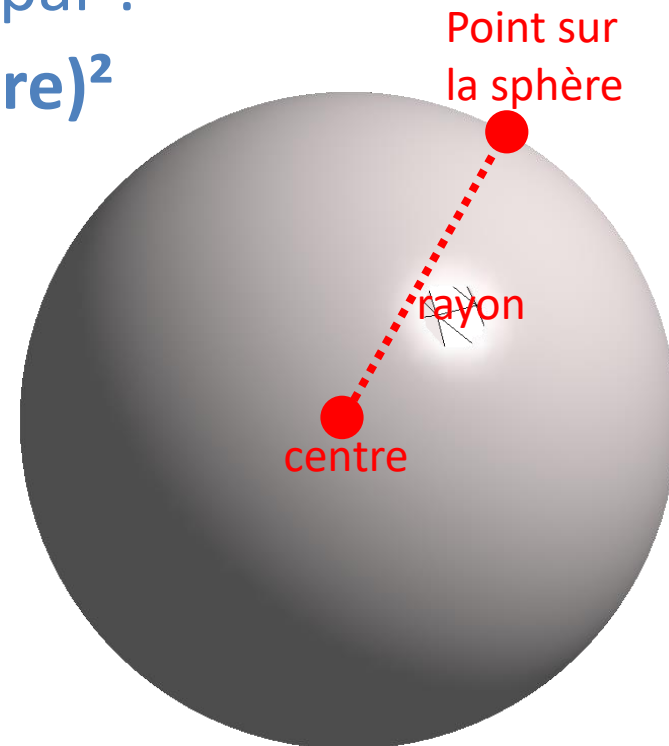
- La surface est décrite par une équation

- Exemple : une sphère est définie par :

$$(X-X_{\text{centre}})^2 + (Y-Y_{\text{centre}})^2 + (Z-Z_{\text{centre}})^2 = \text{Rayon}^2$$

- On peut ainsi définir la surface par autant de point que l'on veut et n'importe où sur la surface

➡ contrairement au polyèdre

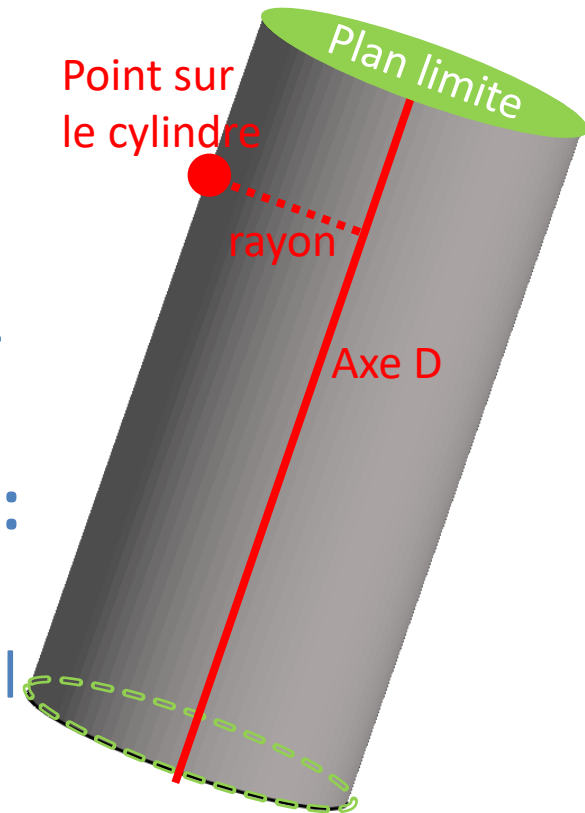


Quadriques

- La classe de surfaces quadriques contient les cylindres, les cônes, les sphères, les ellipsoïdes, les paraboloides, les hyperboloides ...
- Une quadrique a une équation implicite de degré 2 de la forme $F(x,y,z)=0$ avec : $F(x,y,z)=Ax^2+2Bxy+2Cxz+2Dx+Ey^2+2Fyz+2Gy+Hz^2+2Iz+J$
Sphère $\Rightarrow (X-X_c)^2 + (Y-Y_c)^2 + (Z-Z_c)^2 = \text{rayon}^2$
 $\Rightarrow X^2-2XXC+Y^2-2YYC+Z^2-2ZZC + X_c^2+Y_c^2+Z_c^2-r^2 = 0$
 \Rightarrow On retrouve $F(x,y,z)$ avec $A=1$, $E=1$, $H=1$,
 $D=X_c$, $G=Y_c$, $I=Z_c$
et $J = X_c^2+Y_c^2+Z_c^2-r^2$

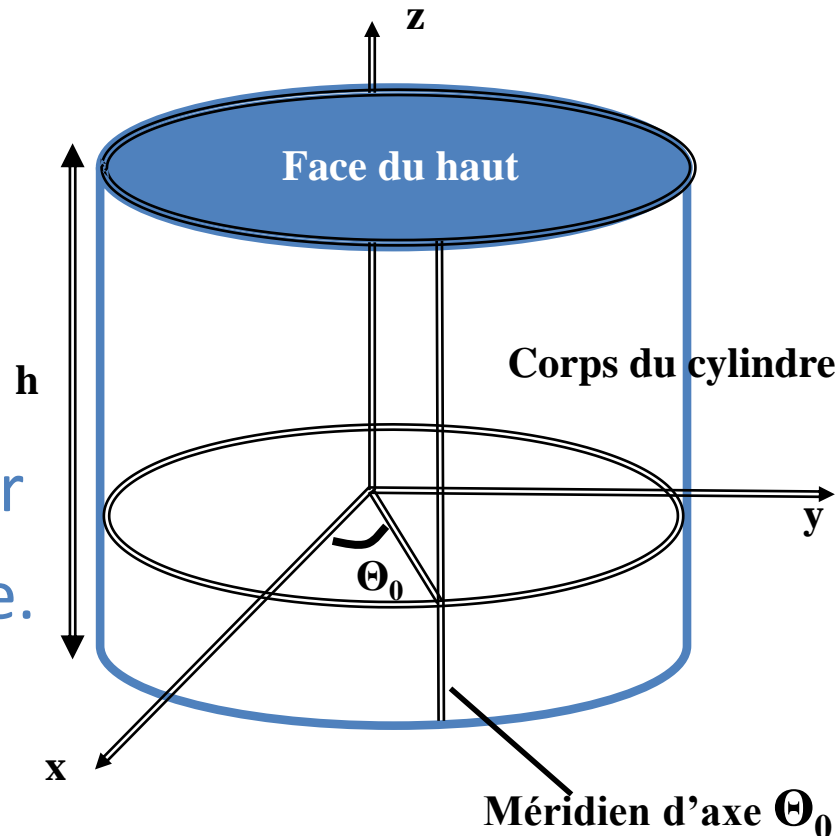
Quadriques : cylindres

- Un cylindre est défini:
 - par une droite et un rayon,
 - le cylindre de révolution d'axe D et de rayon r est constitué de l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 qui sont situés à distance r de la droite D.
- Le cylindre qui coïncide avec l'axe Oz :
 - a pour équation $x^2 + y^2 = r^2$
 - sa hauteur est défini par un nombre réel positif : ***h***,
 - ***h*** permet de définir les deux plans limites du cylindres à $-h/2$ et $h/2$.



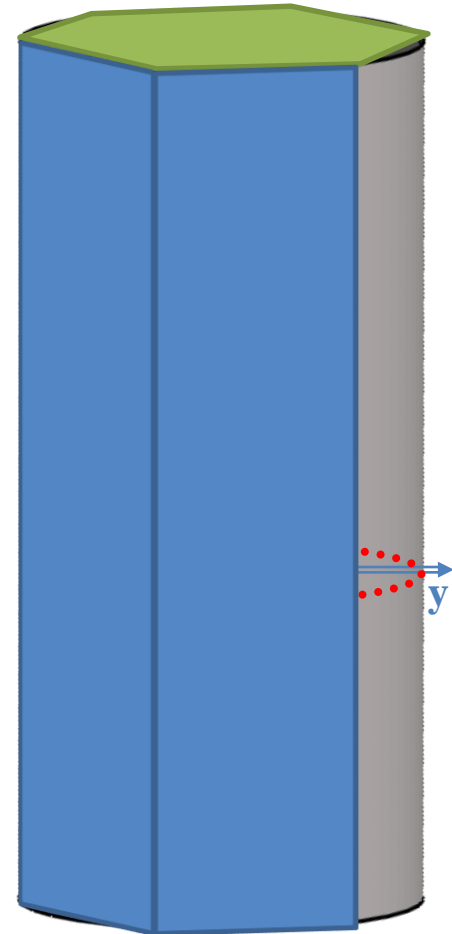
Quadriques : cylindres

- Méridiens d'un cylindre :
 - Les *méridiens* sur un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h sont les segments de droites contenus dans le corps du cylindre, de longueur h , parallèles à l'axe du cylindre.



Quadriques : cylindres

- Facettisation d'un cylindre :
 - Etant donné un nombre de méridien m , nous allons considérer des méridiens M_i d'angle θ_i , pour $i=0, \dots, m$ régulièrement disposé sur le corps du cylindre.
 - Construire ensuite des facettes rectangulaires entre les méridiens M_i et M_{i+1} , pour $i=0, \dots, m-1$.
 - Construire ensuite deux facettes pour les faces du haut et du bas du cylindre.



Quadriques : cylindres

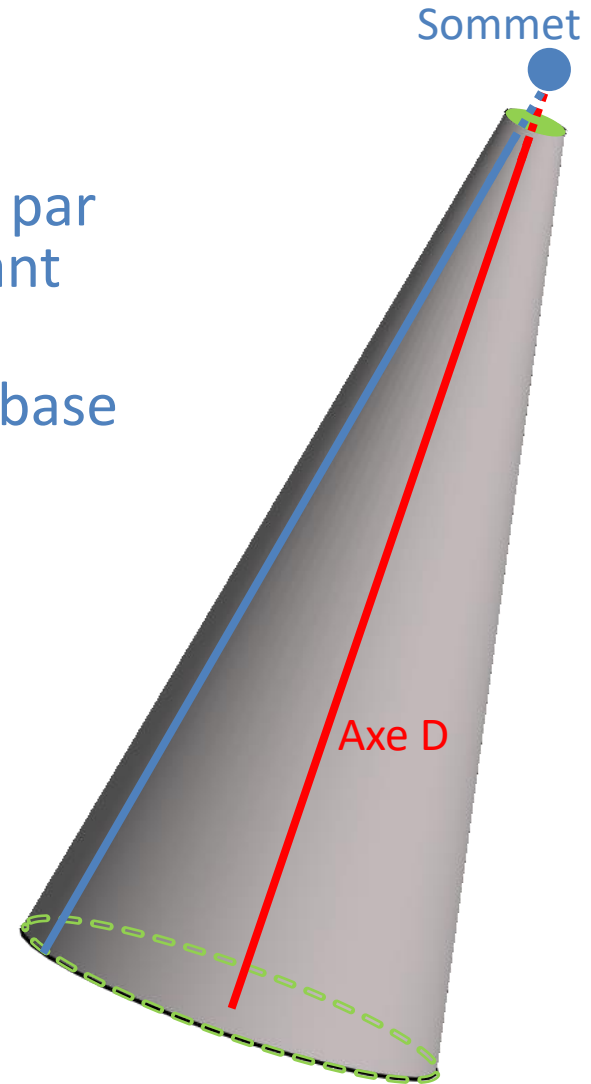
- **Création du polyèdre correspondant (sommets):**
 - Les sommets peuvent être utilisés par plusieurs polyèdres, mais aussi par les plans limites.
 - Pour les construire : on étudie chaque méridien dont les angles varient entre 0 et 2π tel que $\theta_i = 2\pi i/m$ avec $i=0, \dots, m-1$.
Soit M_i le méridien d'angle θ_i : on définit deux sommets :
Coordonnées cartésiennes de P_i (en $-h/2$)
 - $x = r\cos(\theta_i)$
 - $y = r\sin(\theta_i)$
 - $z = -h/2$Coordonnées cartésiennes de P'_i (en $h/2$)
 - $x = r\cos(\theta_i)$
 - $y = r\sin(\theta_i)$
 - $z = h/2$

Quadriques : cylindres

- Création du polyèdre correspondant (facettes):
 - Facettes entre les méridiens:
Pour $i=0, \dots, m-1$ la facette numéro i est composée des 2 sommets du méridien M_i et de ceux du méridien M_{i+1}
Facette $i = P_i, P'_i, P'_{i+1}, P_{i+1}$
 - Facette du bas :
Une face $\Rightarrow P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$
 - Facette du haut :
Une face $\Rightarrow P'_{m-1}, \dots, P'_1, P'_0$
(Ordre d'énumération inversé pour garder une orientation cohérente).

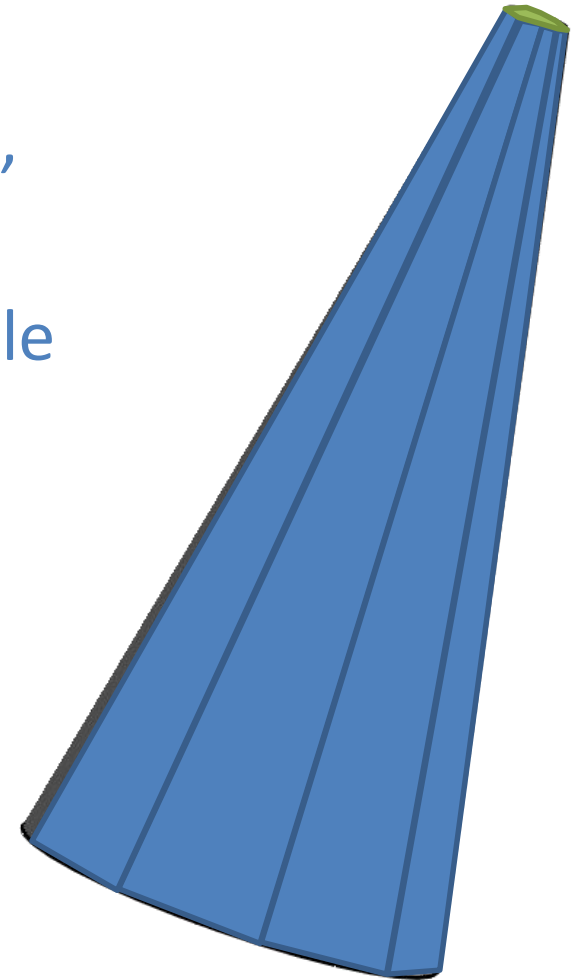
Quadriques : cônes

- **Un cône est défini:**
 - par un ensemble de droite passant toutes par un sommet (sommet du cône) et s'appuyant sur une courbe (base),
 - dans le cas d'un cylindre de révolution, la base est un cercle.
- **Equation du cône d'axe Z :**
 - le sommet S (0, 0, Zsommet),
 - le cercle de rayon r est centré en O et appartient au plan xOy,
 - il a pour équation :
$$(z - z_{\text{sommet}})^2 = z_{\text{sommet}}^2 / r^2 * (x^2 + y^2)$$



Quadriques : cônes

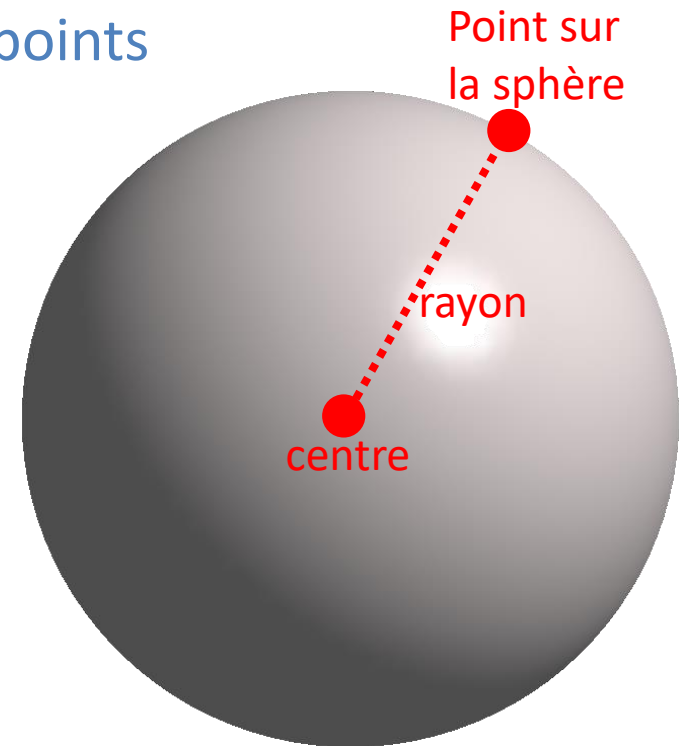
- Facettisation d'un cône :
 - À partir des méridiens définis par Θ_i ,
 - $2m$ sommets sont nécessaires,
 - leur construction est identique à celle de la construction des sommets du cylindres,
 - on construit des faces trapézoïdales entre les méridiens,
 - construction de 2 faces pour les plans limites.



Quadriques : sphère

- Une sphère est définie :
 - par un centre et un rayon,
 - elle est constituée d'un ensemble de points à distance r du centre.
- Equation de la sphère de centre O :
 - le sommet $O (0, 0, 0)$,
 - il s'agit de l'ensemble des points $M = (x_m, y_m, z_m)$ de l'espace, de coordonnées sphériques (r_m, ϕ_m, θ_m) ,
 - elle a pour équation :

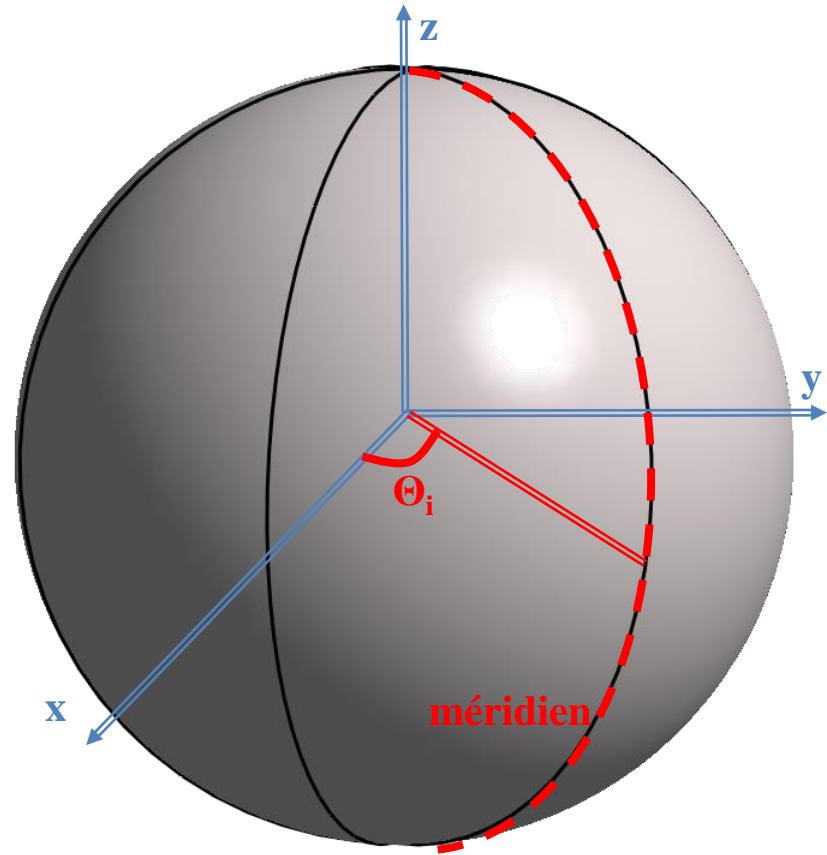
$$x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = r^2$$



Quadriques : sphère

- Les méridiens :

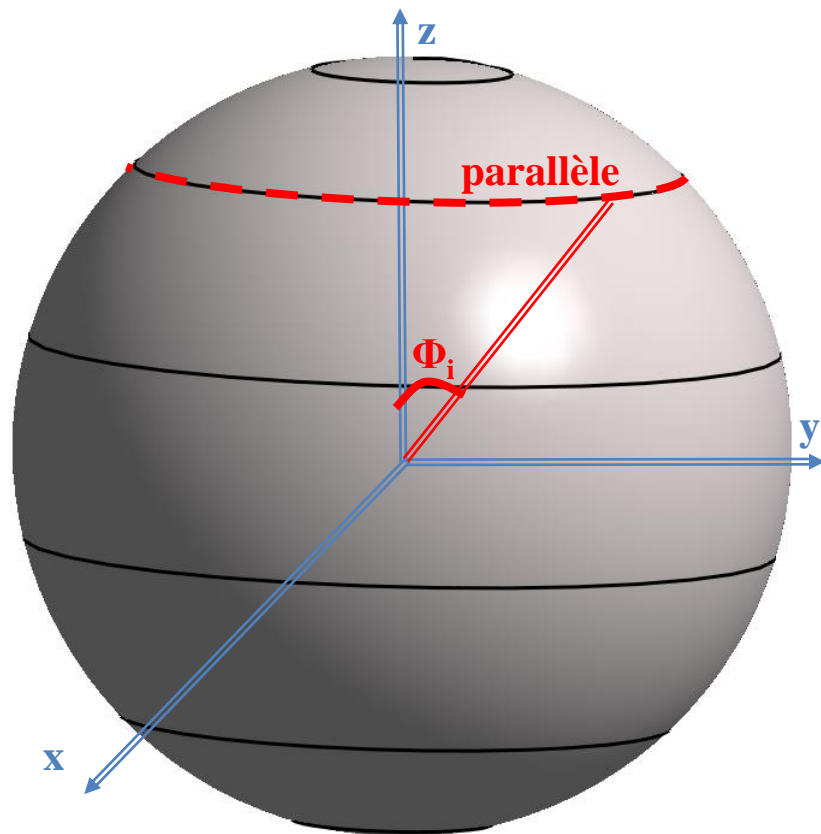
- Un **méridien** sur la sphère S_r est un demi-cercle formé de l'ensemble des points M de coordonnées sphériques (r, ϕ_m, θ_m) tels que l'angle θ_m soit fixé égal à une certaine valeur.
- Soit $\theta_i \in [0, 2\pi[$, le méridien i de S_r d'angle θ_i est constitué de l'ensemble des points M tels que $\theta_m = \theta_i$.



Quadriques : sphère

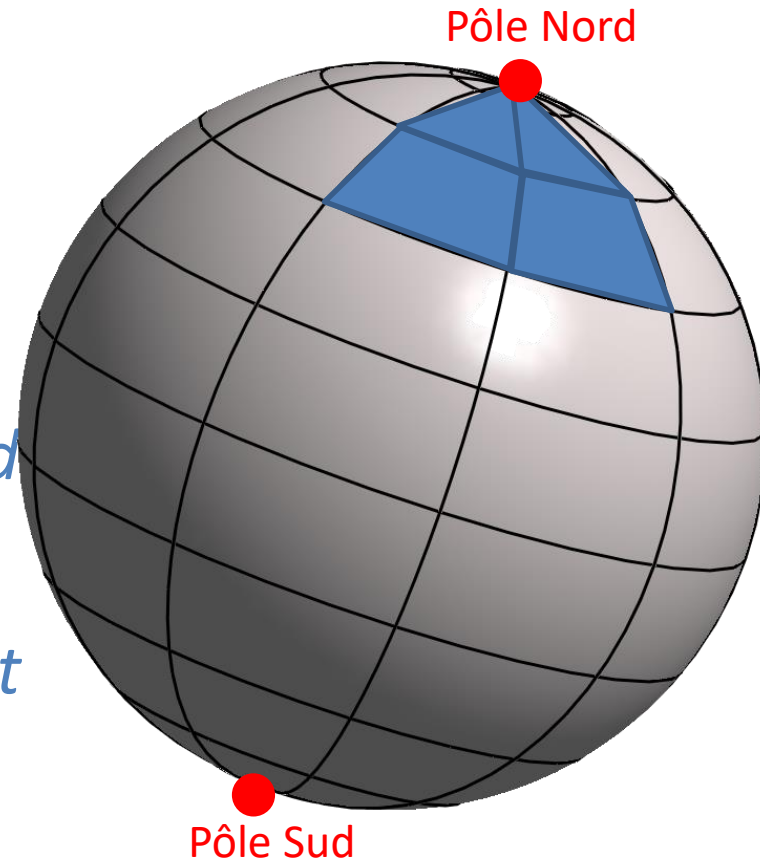
- Les parallèles :

- Etant donné $\phi_i \in]0, \pi[$, le *parallèle* d'angle ϕ_i de la sphère S_r est le cercle constitué de l'ensemble des points $M(r, \phi_m, \theta_m)$ de S_r tels que $\phi_m = \phi_i$.



Quadriques : sphère

- Facettisation de la sphère :
 - on découpe la sphère en m méridiens et p parallèles,
 - avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$
 - $N=(0,0,r)$ est appelé le *pôle nord*
 - $S=(0,0,-r)$ est appelé le *pôle sud*
 - des faces à 3 ou 4 sommets sont créées.



Conclusion

- **Représentation surfacique :**
 - soit de manière continue,
 - soit de manière polyédrique.
- **Passage continue ➡ facettisation :**
 - a partir de l'équation d'une surface, on peut construire une facettisation de la surface,
 - l'équation mathématique sous-jacente peut permettre de faire varier la résolution du modèle facettisé.