Компьютерное моделирование

Подходы к моделированию пространства и времени
Моделирование дискретных событий

Кафедра ИВТ и ПМ

2018

План

Прошлые темы

Моделирование пространства и времени

Имитационное моделирование

Цепи Маркова

Outline

Прошлые темы

Моделирование пространства и времени

Имитационное моделирование

Цепи Маркова

Прошлые темы

- Что такое модель?
- Как модель может быть представлена?
- Что такое информационная модель?
- Что такое состояние?
- Метод Монте Карло

Outline

Прошлые темы

Моделирование пространства и времени

Имитационное моделирование

Цепи Маркова

Моделирование времени

- время непрерывно
  обычно в основе такой модели лежат дифференциальные уравнения

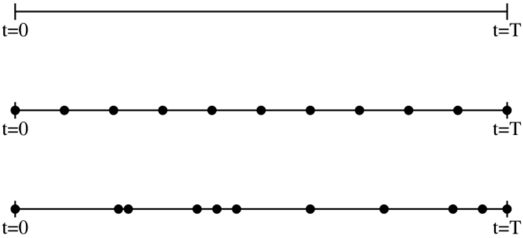
Моделирование времени

- моделирование с шагом по времени Δt (принцип Δt)
  состояние системы рассматривается в отдельные моменты времени $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, ..., t_n = n\Delta t$
  Процесс может быть непрерывным, но время дискретно
  - универсальный
  - простой
  - события могут происходить только в моменты времени кратные Δt, состояние системы можно получить тоже только с точностью до момента времени Δt
  - неэкономичный

Моделирование времени

- особые моменты времени (моменты с особыми состояниями)
  процесс может быть *дискретным* или *непрерывным*, но его состояние изменяется в моменты времени $t \in \mathbb{R}$
  см. DES

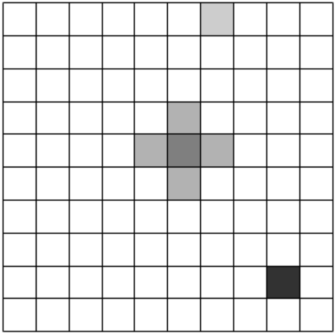
Моделирование времени



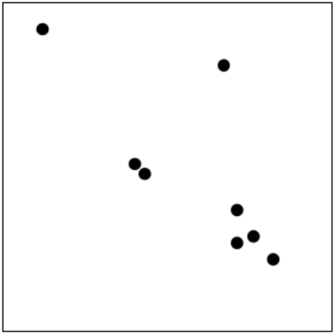
Моделирование пространства

- **подход Эйлера**
  Рассматривается изменяющиеся свойства *точек пространства* (дискретного или непрерывного)
- **подход Лагранжа**
  Рассматриваются свойства (положения, скорости и др) объектов в пространстве.

Моделирование пространства



Eulerian point of view



Lagrangian point of view

Моделирование пространства

Примеры моделей использующих подход Эйлера?

Примеры моделей использующих подход Лагранжа?

Моделирование взаимодействия

Порой положение объектов в пространстве и свойства самого пространства не важны. Важна *топология*.

Важно то как объекты **взаимодействуют** или **относятся** друг к другу.

В этом случае модель представляется графом.

Такие модели в настоящее время являются предметом активных исследований

Примером такого представления может служить граф отношений пользователей социальной сети.

Outline

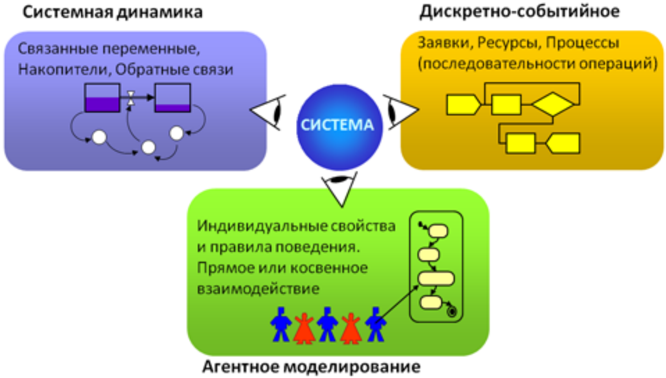
Прошлые темы

Моделирование пространства и времени

Имитационное моделирование

Цепи Маркова

Имитационное моделирование



дискретное время?

Предположим, что движение точки задано уравнениями

$$x(t) = v_x t + x(0)$$

$$y(t) = v_y t + y(0)$$

Тогда изменяя время с шагом Δt можно получить координату с точностью зависящей от Δt

дискретное время?

Теперь предположим, что точка двигается внутри квадрата размером L на L согласно тем же уравнениям

$$x(t) = v_x t + x(0)$$

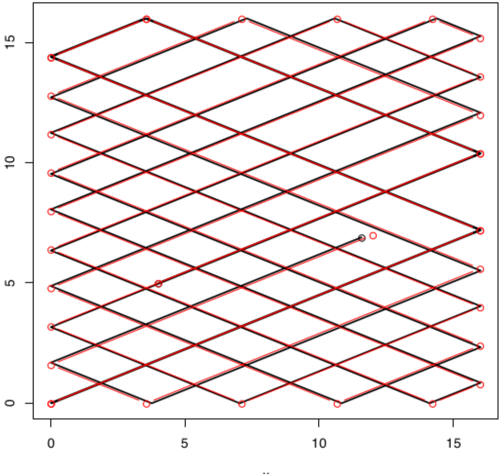
$$y(t) = v_y t + y(0)$$

но меняет направление движения ("отражается") при столкновении со стенками квадрата

$$v_x = \begin{cases} -v_x, x = 0 \text{или} x = L, \\ v_x, \text{иначе} \end{cases}$$

$$v_y = \begin{cases} -v_y, y = 0 \text{или} y = L, \\ v_y, \text{иначе} \end{cases}$$

дискретное время?



дискретное время?

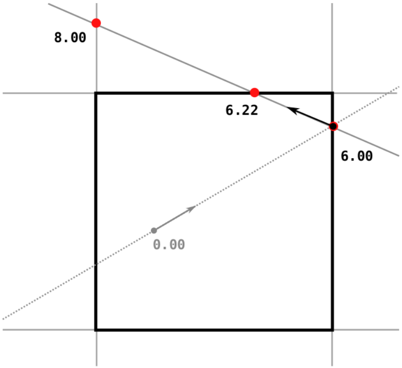
Недостаток такого моделирования с шагом по времени Δt?

DES

Для моделирования такого движения можно использовать *точный* метод.

- Определим время столкновения точки со стенками квадрата из уравнений движения задав x и y равным координатам 0 и L.
- Определим минимальное значение времени. Оно будет соответствовать столкновению с ближайшей стенкой
- Изменим направление скорости точно в это время

DES



DES

Approach ($t = 180$)	**Iterations**	**Accuracy**
Continuous ($\Delta t = 0.01$)	18'000	Error $\leq 4\%$
Discrete	34	Exact

Дискретно-событийное моделирование

Дискретно-событийное моделирование (discrete-event simulation, DES) — это вид имитационного моделирования.

В дискретно-событийном моделировании функционирование системы представляется как хронологическая последовательность событий. Событие происходит в определенный момент времени и знаменует собой значительное изменение состояния системы.

DES

- рассматривается значительное изменение состояния системы (в особые моменты времени)
- состояние системы должно определятся аналитически[1]
- эти изменения могут произойти в *любое* время $t \in \mathbb{R}^+$
- состояние системы рассматривается только в особые моменты времени
- состояние системы можно определить аналитически
- в один момент времени происходит только одно событие (event) значительно изменяющее состояние системы

[1] но не обязательно с помощью уравнений

DES

- события могут быть **внешними** или **внутренними**
- Внешние события не зависят от состояния системы, поэтому могут быть созданы заранее
- Каждое событие связано с **действием** (action)
- Действие изменяет состояние системы

DES. Упрощённый алгоритм моделирования

Инициализация

```
t_current = t0          # текущее время
s_i = s_i(t_current)   # состояние системы
```

Изменение состояний системы

```
while not end_condition(t_current, s_i):
    events = f(s_i)
    #compute all next events
    e_next = g(events) #Choose the closest in time
    t_next = e_next.t
    s_i = e_next.action( s_i ) #Execute the action
    t_current = t_next
    #Jump to next time
```

Пример

	w_1	w_2	w_3
08:30	OPEN	OPEN	CLOSED
09:30	OPEN	CLOSED	CLOSED
10:30	CLOSED	OPEN	CLOSED
11:30	OPEN	OPEN	OPEN
...	...	...	...

Outline

Прошлые темы

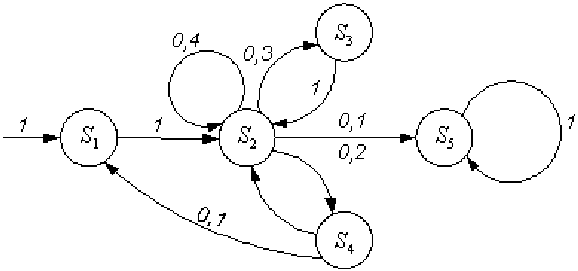
Моделирование пространства и времени

Имитационное моделирование

Цепи Маркова

Цепи Маркова

Представим состояние системы в виде взвешенного графа.



веса - вероятность перехода из состояния в состояние.

вершины - состояния системы

Цепи Маркова

Такой граф можно описать **матрицей переходов**.

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

элемент матрицы - вероятности перехода из одного состояния в другое. Например, переход из состояния s_4 в s_2 произойдёт с вероятностью 0.9

Цепи Маркова

Для того чтобы определить *начальное состояние* системы зададим матрицу столбец из вероятностей, соответствующих всем состояниям.

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ \dots \\ p_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Цепи Маркова

Таким образом можно определить марковскую цепь задав:

- множество состояний системы $s_1, s_2, ..., s_n$
- вектор начальных вероятностей $P^{(0)} = (p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0)$
- матрицу переходов P

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Цепи Маркова

Цепь Маркова - последовательность *испытаний*, в каждом из которых система принимает одно из n состояний полной группы $(s_1, s_2, ..., s_n)$. При этом вероятность p_{ij} перехода из i-го состояния в j-е, зависит только от результатов последнего испытания, т.е. только от последнего состояния.

Цепь Маркова - это автомат.

Цепи Маркова

Переход системы из одного состояния в другое может происходить в случайные моменты времени или в фиксированные. Во втором случае время называют **дискретным**

Матрица перехода может изменятся при каждом шаге.
Если матрица перехода остаётся неизменной, то цепь Маркова называют **однородной**.

На слайдах выше рассмотрена именно детерминированная однородная цепь Маркова.

Цепи Маркова

Определение вероятностей перехода в состояния.

Вероятности перехода в каждое из состояний на первом шаге:

$$P^{(1)} = P^{(0)} \times P$$

для получения вероятностей перехода в состояния на k-м шаге:

$$P^{(k)} = P^{(0)} \times P^k$$

где верхний индекс (k) означает номер шага.

Цепи Маркова. Пример

Если погода ясная, то вероятность, что она будет ясной на следующий день, составляет 0.5; вероятность, что она будет умеренно пасмурной, равна 0.4; а вероятность пасмурной погоды на следующий день составляет 0.1

Если погода умеренно пасмурная, то вероятность, что на следующий день она будет ясной, равна 0.3; вероятность, что погода останется умеренно пасмурной, равна 0.5; а вероятность пасмурной погоды на следующий день составляет 0.2

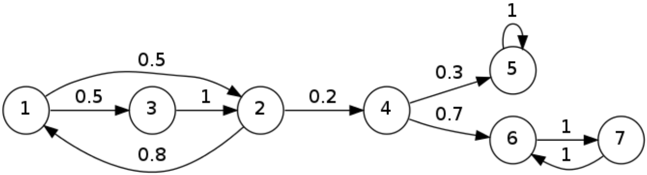
Если же погода пасмурная, то вероятность, что она будет ясной на следующий день составляет 0.2; вероятность что она станет умеренно пасмурной, равна 0.4; вероятность что на следующий день она останется пасмурной, равна 0.4

- Если вероятность ясной погоды в воскресенье равна 0.6, а вероятность умеренно пасмурной — 0.4, то какова вероятность, что погода в понедельник будет ясной?
- Какова вероятность, что во вторник погода будет умеренно пасмурной?

Поглощающие состояния

Поглощающее состояние (absorbing state) — состояние, из которого нельзя попасть ни в какое другое, то есть i — поглощающее состояние, если $p_{ii} = 1$.

Цепи Маркова



Какие состояния являются поглощающими?

Использованы материалы

Simulation and modeling of natural processes
coursera.org/learn/modeling-simulation-natural-processes/

ИТМО: Марковская цепь

Ссылки

Материалы курса

github.com/ivtipm/computer-simulation