Компьютерное моделирование

Моделирование динамических систем. Дифференциальные уравнения. Черновик

Кафедра ИВТ и ПМ

2018

План

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Outline

Прошлые темы

Динамическая система

- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем

- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование

- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Прошлые темы

- Что такое динамическая система?
- Примеры?
- Динамическая система противопоставляется ... ?

Прошлые темы

- Что такое динамическая система?
- Примеры?
- Динамическая система противопоставляется ... ?
- Примеры статических систем?

Современная наука стала возможной тогда, когда было решено самое первое дифференциальное уравнение

вольный перевод цитаты Дэвида Берлински

Outline

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Outline

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Дифференциальные уравнения

- Что такое дифференциальное уравнение?
- Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?

Дифференциальные уравнения

- Что такое дифференциальное уравнение?
- Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?
- Простой пример ДУ?

Дифференциальные уравнения

- Что такое дифференциальное уравнение?
- Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?
- Простой пример ДУ?

$$\frac{dv_x}{dt} = g$$

или

$$\dot{V}_x = g$$

Дифференциальные уравнения

- Что является решением дифференциального уравнения?

Дифференциальные уравнения

- Что является решением дифференциального уравнения?
- Какие решения бывают?

Дифференциальные уравнения

- Что является решением дифференциального уравнения?
- Какие решения бывают?
- Что такое общее решение?
- Что такое частное решение?
- Как получить из общего решения частное?

Дифференциальные уравнения

- Как представить общее решение ДУ графически?

Дифференциальные уравнения

- Что такое численный метод?

Дифференциальные уравнения

- Что такое численный метод?
- Как численно определить производную известной функции в точке?

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Outline

Прошлые темы

Динамическая система

- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем

- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование

- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Динамическая система

- Изменяется с течением времени t
- Состояния системы $s(t)$
- Состояние системы может быть представлено вектором $s(t) = (s_1(t), s_2(t), ..., s_n(t))$
- Примеры: маятник, популяция животных, движение автомобиля, поток людей, ...

Способы представления

- **Дискретная** система

$$s(t + \Delta t) = f(s(t))$$

  где Δt - приращение времени, f - некоторая функция определяющая состояние системы на следующем шаге

- **Непрерывная** система

$$\dot{s} \equiv \frac{ds}{dt} = f(s(t))$$

Всегда ли первой производной достаточно?

Состояние может зависеть от второй производной: непрерывная система

Предположим, что состояние системы зависит ещё и от второй производной

$$\dot{s} + \ddot{s} = f(s)$$

Обозначим

$$y = \dot{s}$$

$$\dot{y} = f(s) - y$$

Обозначим

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$\dot{u} = g(u)$$

Состояние может зависеть от второй производной: дискретная система

$$s(t+\Delta t) = f(s(t)) + s(t-\Delta t)$$

Аналогично непрерывной системе

$$y(t+\Delta t) = \dot{s}$$

$$s(t+\Delta t) = f(s(t)) + y(t)$$

Обозначим

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$u(t+\Delta t) = g(u(t))$$

Состояние может зависеть от второй производной: непрерывная система

Если f явно зависит от t

$$\dot{s} = f(s, t)$$

$$\dot{s} = f(s, y)$$

$$\dot{y} = 1$$

для $y(0) = 0$

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$\dot{u} = g(u)$$

Outline

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Outline

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Balance equations

При описании динамических моделей используются уравнения вида

$$\text{изменение величины} = \text{прирост} - \text{убыль}$$

или для непрерывной системы

$$\dot{s} = f(s) = \text{creation rate} - \text{destruction rate}$$

Balance equations

Аналогично для дискретного случая:

$$s(t+\Delta t) - s(t) = (\text{creation rate} - \text{destruction rate})\Delta t$$

При $\Delta t \to 0$ дискретный случай переходит в непрерывный, т.к.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dot{s}$$

Outline

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

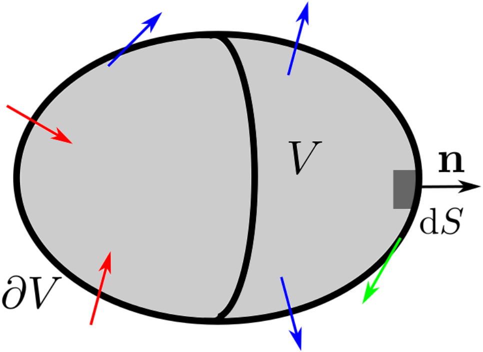
Моделирование химических реакций

Уравнение учитывающие пространство и время

- Предыдущие примеры не учитывали пространство, но часто это важно (распределение вещества, температуры и т.д.)
- Необходимо учесть движение чего-либо из некоторого объёма V через его поверхность ∂V
- Причём отнести это движение к единице времени

Уравнение учитывающие пространство и время

Рассмотрим объём пространства V



входящий поток

исходящий поток

(на касательной к поверхности) - поток не покидающий данный объём V

dS (тёмно серый участок) - площадь поверхности ∂V с нормалью n

Уравнение учитывающие пространство и время

- $\rho(t, x)$ - плотность исследуемой величины (массы, заряда, ...)

$$s(t) = \int_V \rho(t, x) dV$$

- Уравнение равновесия:

$$\boxed{\dot{s} = -\text{flux through surface} + \text{volumic creation/destruction rate}}$$

знак минус в формуле выше появляется из-за того, что *выходящий* поток считается положительным, а он должен уменьшать некоторую величину внутри объёма V.

Обозначим поток (flux) как j;

изменение исследуемой величины в заданном объёме (creation/destruction rate) -

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

где σ - характеризует изменение s в заданном объёме

$$\boxed{\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...

Обозначим поток (flux) как j;

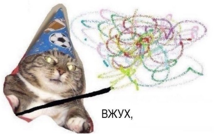
изменение исследуемой величины в заданном объёме (creation/destruction rate) -

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

где σ - характеризует изменение s в заданном объёме

$$\boxed{\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...



Обозначим поток как j

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

$$\boxed{\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...

$$\int_V \dot{s} dV + \int_V \nabla j \cdot n dV = \int_V \sigma dV$$

$$\boxed{\dot{s} + \nabla j \cdot n = \sigma}$$

Пример

Уравнение диффузии

Уравнение диффузии для одномерного случая

$$\frac{\partial}{\partial t}c(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}c(x,\ t) + f(x,t),$$

где $c(x,t)$ концентрация диффундирующего вещества, а f(x, t) — функция, описывающая источники вещества, $D = const$ коэффициент диффузии.

Пример

Уравнение диффузии

Уравнение диффузии для одномерного случая

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x,\ t) + f(x,t),$$

где $c(x,t)$ концентрация диффундирующего вещества, а f(x, t) — функция, описывающая источники вещества, $D = const$ коэффициент диффузии.

Чему равны значения $\dot{s}$, j и σ?

Пример

Уравнение диффузии

Уравнение диффузии для одномерного случая

$$\frac{\partial}{\partial t}c(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}c(x,\ t) + f(x,t),$$

где $c(x,t)$ концентрация диффундирующего вещества, а f(x, t) — функция, описывающая источники вещества, $D = const$ коэффициент диффузии.

Чему равны значения $\dot{s}$, j и σ?

$\dot{s} = \frac{\partial}{\partial t}c(x,t)$
$j = Dc(x,t)$
$\sigma = f(x,t)$

Уравнение диффузии для трёхмерного случая

$$\frac{\partial}{\partial t} c(\vec{r}, t) = D \Delta c(\vec{r}, t) + f(\vec{r}, t),$$

где $\Delta = \nabla^2$

Уравнение диффузии для трёхмерного случая

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(\mathbf{r}, t),$$

где a — положительная константа (число a^2 является коэффициентом температуропроводности), $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа и $f(\vec{r}, t)$ — функция тепловых источников.
Искомая функция $u = u(\vec{r}), t)$ задает температуру в точке с координатами $\vec{r}$ в момент времени t.

Пример

уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}$$

Outline

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Outline

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Численное интегрирование

Требуется проинтегрировать однородное дифференциальное уравнение

$$\dot{s} = f(s, t)$$

на интервале $t_0 < t < t_f$ если известно $s(t = t_0) = s_0$

Не все интегралы могут быть вычислены аналитически или аналитическое интегрирование может быть сложным.

Во время численного интегрирования важно знать об ошибке вычисления

Численное интегрирование

Для примера возьмём ранее рассмотренную модель популяции

$$\dot{s} = f(s,t)$$

$$f(s,t) = v\left(1 - \frac{P}{C}\right)s$$

Аналитическое решение:

$$P(t) = \frac{C}{1 + \frac{C-P_0}{P_0}e^{-vt}}$$

Далее сравним точное решение с численным.

Численное интегрирование

Используем ряд Тейлора

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k$$

где $s^{(k)}(t_0)$ означает производную k-го порядка.

Пусть $t - t_0 = \Delta t$, тогда

$$s(t_0 + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{(k)}}{k!} \Delta t^k$$

Выделим слагаемые для $k = 0, 1$:

$$s(t_0 + \Delta t) = s(t_0) + s'(t_0)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Численное интегрирование

Отбросим $\mathcal{O}(\Delta t^2)$:

$$s(t_1) = s(t_0) + \dot{s}(t_0)\Delta t$$

Заменим $\dot{s}(t_0) = f(s, t_0)$:

$$s(t_1) = s(t_0) + f(s, t_0)\Delta t$$

Тогда уравнение можно использовать для определения состояния $s(t_i)$ в каждый следующий момент времени t_{i+1}:

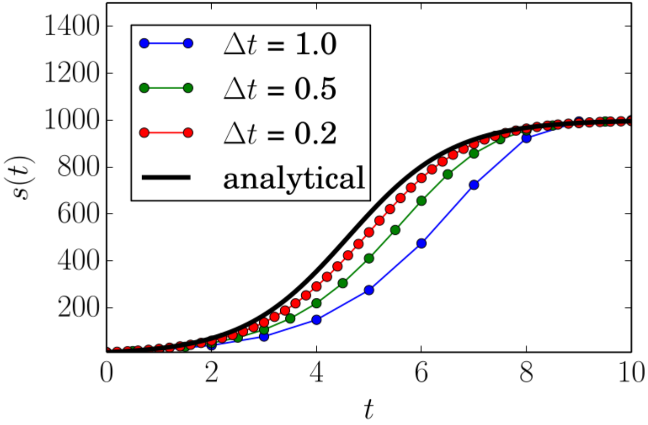
$$s(t_{i+1}) = s(t_i) + f(s, t_i)\Delta t$$

где $t_{i+1} - t_i = \Delta t$

- выражение дискретно по времени
- производную (но не саму функцию) можно выразить из дифференциального уравнения $\dot{s}(t_0) = f(s, t_0)$:
- аналитическое выражение для функции искать не нужно
- значение функции **явно** зависит только от известного значения функции в предыдущий момент времени и от производной

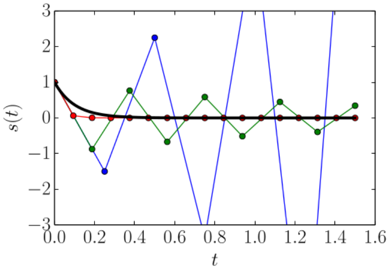
Численное интегрирование

Явная схема Эйлера (Explicit Euler Scheme)



Сравнение численного решения и точного (слайд 36)

- Возможно потеря устойчивости при решениях жёстких систем с большими больших значениями Δt
- Накопление ошибки



Численное интегрирование

неявная схема Эйлера (Explicit Euler Scheme)

Явная схема:

$$s_{i+1} = s_i + f(s_i, t_i)\Delta t$$

Будем вычислять s_{i-1} вместо s_{i+1}

$$s_{i-1} = s_i - f(s_i, t_i)\Delta t$$

Выразим s_i:

$$s_i = s_{i-1} + \cdot f(s_i, t_i)\Delta t$$

тогда s_{i+1}

$$s_{i+1} = s_i + \cdot f(s_{i+1}, t_{i+1}) + \Delta t$$

Неявная схема Эйлера

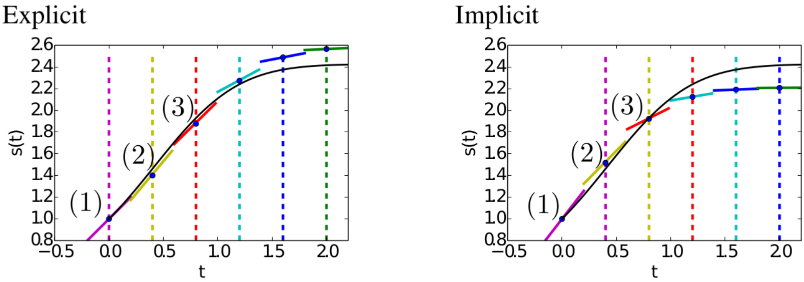
$$s_{i+1} = s_i + f(s_{i+1}, t_{i+1})\Delta t$$

Явная схема Эйлера

$$s_{i+1} = s_i + f(s_i, t_i)\Delta t$$

Численное интегрирование

Неявная схема Эйлера (Explicit Euler Scheme)



Неявная схема Эйлера (Explicit Euler Scheme)

Пример: $\dot{s} = -10s(t)$, $t_0 = 0$, $s_0 = 1$
Решение:

Численное интегрирование

Неявная схема Эйлера (Explicit Euler Scheme)

Пример: $\dot{s} = -10s(t)$, $t_0 = 0$, $s_0 = 1$
Решение: $s = s_0 exp(-10t)$

Явная схема

Численное интегрирование

Неявная схема Эйлера (Explicit Euler Scheme)

Пример: $\dot{s} = -10s(t)$, $t_0 = 0$, $s_0 = 1$
Решение: $s = s_0 exp(-10t)$

Явная схема
$s_{i+1} = s_i(1 - 10\Delta t)$
Решение не устойчиво

Неявная схема

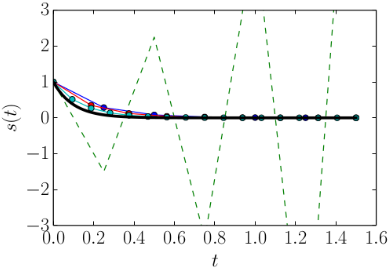
Численное интегрирование

Неявная схема Эйлера (Explicit Euler Scheme)

Пример: $\dot{s} = -10s(t)$, $t_0 = 0$, $s_0 = 1$
Решение: $s = s_0 exp(-10t)$

Явная схема
$s_{i+1} = s_i(1 - 10\Delta t)$
Решение не устойчиво

Неявная схема
$s_{i+1} = s_i/(1 + 10\Delta t)$



Пунктиром показано решение с помощью явной схемы

Outline

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Пример: уравнение диффузии

Постановка задачи

Рассмотрим простое уравнений диффузии в одномерном пространстве, причем $f(x,t) = 0$

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}$$

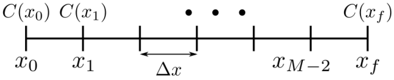
$t \in [t_0, t_f]$, $x \in [x_0, x_f]$

Граничные условия:
$C(x_0, t) = C_0$
$C(x_f, t) = C_1$

Начальные условия:
$C(x, t_0) = C_x$

Пример: уравнение диффузии

Дискретизация пространства



- разделим пространство на $N + 1$ точек. $N = (x_f - x_0)/\Delta x$
- координата каждой следующей точки вычисляется: $x_{i+1} = x_0 + i\Delta x$, $x_f = x_N$
- концентрация в каждой точке $_i \equiv C(x_i)$

Пример: уравнение диффузии

Дискретизация пространства

Используя ряд Тейлора запишем C_{i+1} и C_{i-1} с учётом первой и второй производной:

$$C_{i+1} = C_i + \Delta x \frac{\partial C_i}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2}$$

$$C_{i-1} = C_i - \Delta x \frac{\partial C_i}{\partial x} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2}$$

Сложим уравнения:

$$\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} = \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{\Delta x^2}$$

Пример: уравнение диффузии

Дискретизация пространства

перепишем уравнение:

$$\frac{\partial^2 C_i(t)}{\partial x^2} = \frac{C_{i-1}(t) - 2C_i(t) + C_{i+1}(t)}{\Delta x^2}$$

Чтобы учесть множество x_i соответствующих одному значению t
$\mathbf{C}(t) = (C(x_0, t), C(x_1, t), ..., C(x_N, t))^T$

Запишем рассматриваемое дифференциальное уравнение в матричном виде[1]

$$\frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial x} = \frac{D}{\Delta x^2} A\mathbf{C}(t)$$

[1] это будет соответствовать системе из дифференциальных уравнений

Пример: уравнение диффузии

Дискретизация пространства

$$\frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial x} = \frac{D}{\Delta x^2} A\mathbf{C}(t)$$

где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом получено (матричное) однородное ДУ

Пример: уравнение диффузии

Дискретизация времени

Пример: уравнение диффузии

Пример вычислений

Outline

Прошлые темы

Динамическая система
- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем
- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование
- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Outline

Прошлые темы

Динамическая система

- Дифференциальные уравнения
- Формальное определение

Моделирование динамических систем

- Balance equations

Уравнение учитывающие пространство и время

Численное интегрирование

- Однородные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных

Общая характеристика динамических систем

Моделирование химических реакций

Моделирование химических реакций

Рассмотрим химическую реакцию в которой молекула (доля вещества) A превращается в молекулу B с интенсивностью k_1. Аналогичные превращения происходят с молекулой B.

$$A \xrightarrow{k_1} B$$

$$B \xrightarrow{k_2} A$$

Моделирование химических реакций

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие химическую реакцию (превращение одного вещества в другое)?

Моделирование химических реакций

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие химическую реакцию (превращение одного вещества в другое)?

Система однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A(t) = \frac{k_2}{k_1+k_2}(A_0+B_0) + \frac{A_0k_1 - B_0k_2}{k_1+k_2}e^{-(k_1+k_2)t}$$

$$B(t) = \frac{k_1}{k_1+k_2}(A_0+B_0) - \frac{A_0k_1 - B_0k_2}{k_1+k_2}e^{-(k_1+k_2)t}$$

При $t \to \infty$:

Моделирование химических реакций

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие химическую реакцию (превращение одного вещества в другое)?

Система однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A(t) = \frac{k_2}{k_1+k_2}(A_0+B_0) + \frac{A_0k_1 - B_0k_2}{k_1+k_2}e^{-(k_1+k_2)t}$$

$$B(t) = \frac{k_1}{k_1+k_2}(A_0+B_0) - \frac{A_0k_1 - B_0k_2}{k_1+k_2}e^{-(k_1+k_2)t}$$

При $t \to \infty$:

$$A \to A_\infty = \frac{k_2}{k_1+k_2}(A_0+B_0) \qquad B \to B_\infty = \frac{k_1}{k_1+k_2}(A_0+B_0)$$

Рассматриваемая реакция моделируется с помощью Динамического метода Монте Карло. Этот метод применяется для моделирования систем которые не находятся в равновесии.

- Время дискретно, с шагом Δt
- Δt следует выбрать таким, чтобы $\Delta t k_1 < 1$ и $\Delta t k_2 < 1$
- Величины $\Delta t k_1$ и $\Delta t k_2$ - вероятности превращения доли вещества A в вещество B и наоборот

- Моделируя реакцию будем выбирать случайную молекулу (долю вещества) из всех $N = A + B = const$
- Вероятности выбора соответствующей молекулы A B $\frac{A}{A+B}$ и $\frac{B}{A+B}$ соответственно
  например если rand(0,1) $< \frac{A}{A+B}$ то выбирается молекула A
- Если выбрана молекула A, то она превращается в молекулу B с вероятностью $\Delta t k_1 < 1$
  Число молекул изменяется:
  $A = A - 1$
  $B = B + 1$
- Аналогично для молекулы B

- операция превращения (или не превращения) повторяется для всех N молекул
- После того как N молекул обработано время увеличивается на Δt и процесс повторяется заново
- Моделирование происходит пока $t < t_{max}$

Моделирование химических реакций

Метод Монте Карло. Результат

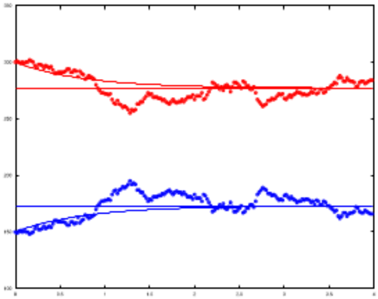


график построен для $\Delta = 0.02,\ k_1 = 0.5,\ k_2 = 0.8$

Кривыми соответствующего цвета показаны аналитические решения. Для получения более точного результата нужно провести моделирование несколько раз.

- Для каждого из возможных событий $i = 1..n$ заданы интенсивности $r_1, ..., r_n$, с корой они происходят
- например $r_i = kAB$ для химической реакции $A + B \to C$
- введём накопленные интенсивности $R_i = \sum_{j=1}^{i} r_j$
- Выберем одно из событий сгенерировав случайное число[2] $s = rand(0, 1)$:
- номер события будет определятся из соотношения $R_{k-1} < sR_n < R_{k+1}$

[2]равномерно распределённое

- после того как событие выбрано, оно происходит
- изменить время на $\Delta t = ln(\frac{1}{rand(0,1)})$[3]
- В течении интервала времени t происходит только одно событие

[3] Δt будет иметь экспоненциальное распределение

Ссылки

- «Жесткие» и «мягкие» математические модели, Арнольд В.
- scipy - Modeling a Zombie Apocalypse

Использованы материалы курса Simulation and modeling of natural processes
coursera.org/learn/modeling-simulation-natural-processes/

Ссылки

Материалы курса

github.com/ivtipm/computer-simulation