Компьютерное моделирование

Моделирование динамических систем. Черновик

Кафедра ИВТ и ПМ

2018

План

Outline

Прошлые темы

- Что такое динамическая система?
- Примеры?
- Динамическая система противопоставляется … ?

Прошлые темы

- Что такое динамическая система?
- Примеры?
- Динамическая система противопоставляется ... ?
- Примеры статических систем?

Современная наука стала возможной тогда, когда было решено самое первое дифференциальное уравнение

вольный перевод цитаты
Дэвида Берлински

Outline

Outline

Дифференциальные уравнения

- Что такое дифференциальное уравнение?
- Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?

Дифференциальные уравнения

- Что такое дифференциальное уравнение?
- Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?
- Простой пример ДУ?

Дифференциальные уравнения

- Что такое дифференциальное уравнение?
- Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?
- Простой пример ДУ?

$$\frac{dv_x}{dt} = g$$

или

$$\dot{V}_x = g$$

Дифференциальные уравнения

- Что является решением дифференциального уравнения?

Дифференциальные уравнения

- Что является решением дифференциального уравнения?
- Какие решения бывают?

Дифференциальные уравнения

- Что является решением дифференциального уравнения?
- Какие решения бывают?
- Что такое общее решение?
- Что такое частное решение?
- Как получить из общего решения частное?

Дифференциальные уравнения

- Как представить общее решение ДУ графически?

Дифференциальные уравнения

- Что такое численный метод?

Дифференциальные уравнения

- Что такое численный метод?
- Как численно определить производную известной функции в точке?

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Outline

Динамическая система

- Изменяется с течением времени t
- Состояния системы $s(t)$
- Состояние системы может быть представлено вектором $s(t) = (s_1(t), s_2(t), ..., s_n(t))$
- Примеры: маятник, популяция животных, движение автомобиля, поток людей, ...

Способы представления

- **Дискретная** система

$$s(t + \Delta t) = f(s(t))$$

где Δt - приращение времени, f - некоторая функция определяющая состояние системы на следующем шаге

- **Непрерывная** система

$$\dot{s} \equiv \frac{ds}{dt} = f(s(t))$$

Всегда ли первой производной достаточно?

Состояние может зависеть от второй производной: непрерывная система

Предположим, что состояние системы зависит ещё и от второй производной

$$\dot{s} + \ddot{s} = f(s)$$

Обозначим

$$y = \dot{s}$$

$$\dot{y} = f(s) - y$$

Обозначим

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$\dot{u} = g(u)$$

Состояние может зависеть от второй производной: дискретная система

$$s(t + \Delta t) = f(s(t)) + s(t - \Delta t)$$

Аналогично непрерывной системе

$$y(t + \Delta t) = \dot{s}$$

$$s(t + \Delta t) = f(s(t)) + y(t)$$

Обозначим

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$u(t + \Delta t) = g(u(t))$$

Состояние может зависеть от второй производной: непрерывная система

Если f явно зависит от t

$$\dot{s} = f(s, t)$$

$$\dot{s} = f(s, y)$$

$$\dot{y} = 1$$

для $y(0) = 0$

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$\dot{u} = g(u)$$

Outline

Outline

Популяция (в биологии) - это совокупность особей одного вида, существующих в одно и занимающих определенную территорию.

В классической экологии рассматриваются взаимодействия нескольких типов:

- взаимодействие организма и окружающей среды;
- взаимодействие особей внутри популяции;
- взаимодействие между особями разных видов (между популяциями).

Динамические модели популяций

Зачем это нужно?

- описание роста количества микроорганизмов
- предсказание численности популяций промысловых животных
- предсказание численности популяций диких животных
- предсказание численности населения [1]

[1] см. модель World3

Первая модель популяции

1202 г. Леонардо Пизанский

какое количество пар кроликов будет через год, кролики начинают размножаться со второго месяца и каждый месяц дают потомство в виде пары кроликов?

Первая модель популяции

1202 г. Леонардо Пизанский

какое количество пар кроликов будет через год, кролики начинают размножаться со второго месяца и каждый месяц дают потомство в виде пары кроликов?

Ряд описывающий количество пар кроликов:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Динамические модели популяций

- Число[2] особей в популяции - $P(t)$
- При этом $P(0) = 0$
- На размер популяции влияет только два процесса
  - рождение особей $B(t)$
  - смерть особей $D(t)$
- Тогда *изменение* популяции:

$$\dot{P}(t) = B(t) - D(t)$$

[2] вместо числа особей может использоваться плотность популяции и другие связанные с количеством особей величины

- Число родившихся особей можно задать как:

$$B(t) = r_b P(t)$$

- Число умерших особей можно задать как:

$$D(t) = r_d P(t)$$

r_b - темп воспроизводства в расчете на одну особь;
r_d - темп вымирания.

$$\dot{P}(t) = r_b P(t) - r_d P(t)$$

обозначим $r = r_b - r_d$,
тогда

$$\dot{P} = rP(t)$$

Решение ДУ[3]:

[3] похожий закон роста описывает изменение вклада (сложные проценты) см. другие примеры: en.wikipedia.org/wiki/Exponential_growth

$$\dot{P}(t) = r_b P(t) - r_d P(t)$$

обозначим $r = r_b - r_d$,
тогда

$$\dot{P} = rP(t)$$

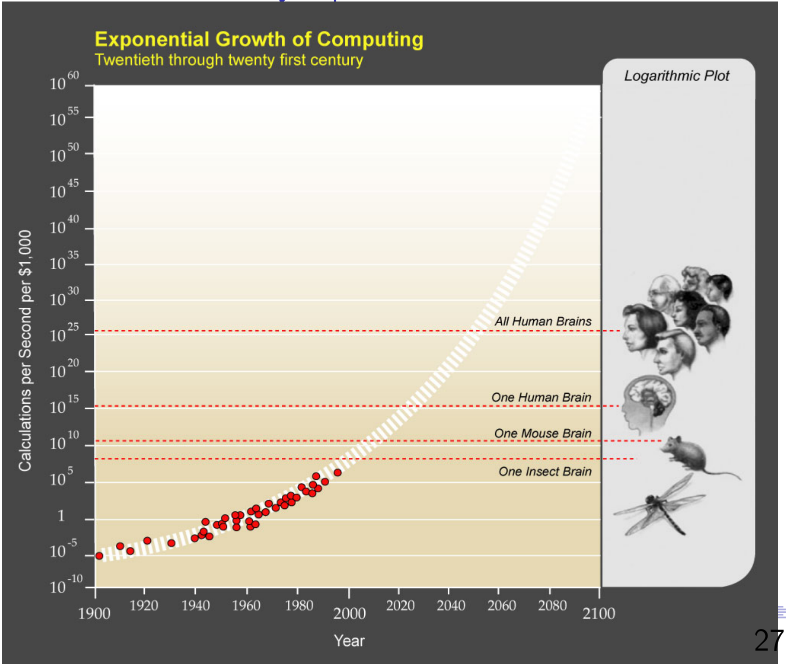
Решение ДУ[3]:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

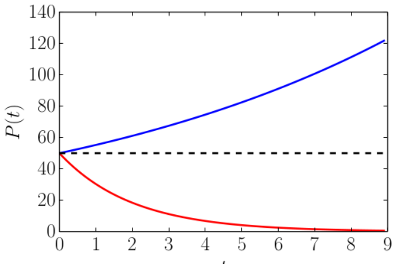
wikimedia: анимация роста бактерий согласно экспоненциальному закону

[3] похожий закон роста описывает изменение вклада (сложные проценты) см. другие примеры: en.wikipedia.org/wiki/Exponential_growth

Технологическая сингулярность?

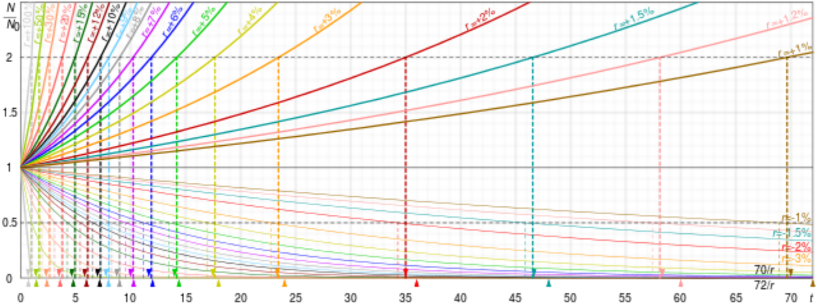


- $r > 0$ экспоненциальный рост
- $r < 0$ экспоненциальное сокращение
- $r = 0$ численность постоянна



Динамические модели популяций

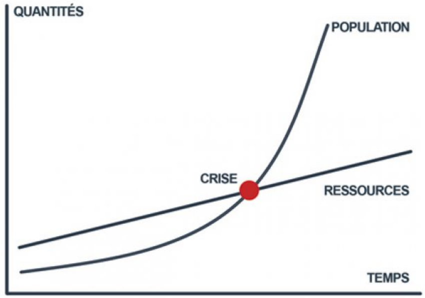
Модель Мальтуса



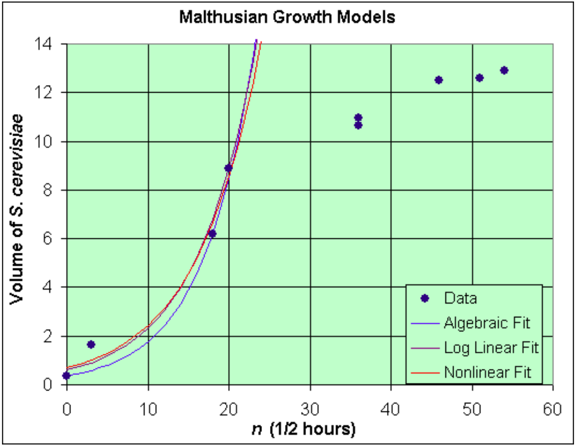
Линейный рост воспроизводства и экспоненциальный рост популяции.

Динамические модели популяций

Модель Мальтуса

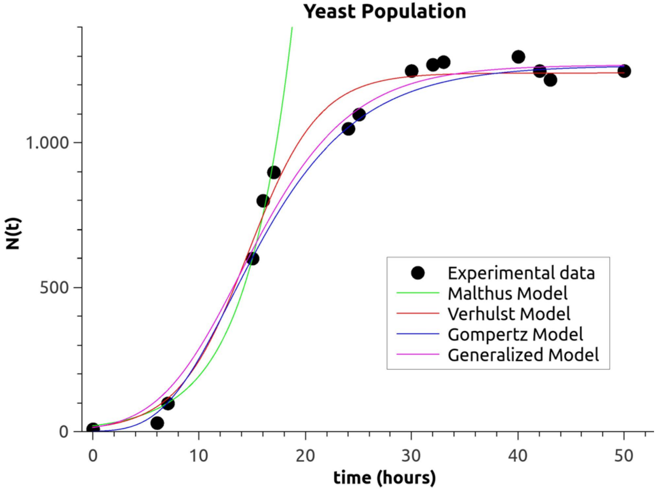


Недостатки модели Мальтуса?



Рост популяции Saccharomyces cerevisiae (Пекарские дрожжи)

jmahaffy.sdsu.edu/courses/f06/math636/lectures/competition/competition.html



An attempt to unify some population growth models from first principles, Fabiano L. Ribeiro, Rev. Bras. Ensino Fís. vol.39 no.1 São Paulo 2017 Epub Nov 21, 2016

- Необходимо ограничить предельный размер популяции
- Введём дополнительный параметр C - емкость среды.

  Предельная нагрузка биологического вида на среду обитания (**ёмкость среды**) — максимальный размер популяции вида, который среда может безусловно стабильно поддерживать [4]
- С - системный фактор (пища, убежища, хищничество, конкуренция с другими видами)

[4] В 2001 году в докладе ООН сообщалось, что две трети оценок ёмкости среды для человечества попадают в диапазон от 4 до 16 млрд (с неопределенным стандартным отклонением) с медианным значением в 10 млрд

- коэффициент регулирующий прирост (убыль) популяции

$$r = v\left(1 - \frac{P}{C}\right)$$

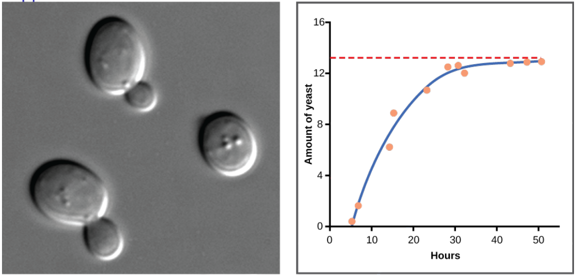
- модель (уравнение популяционной динамики Ферхюльста (Verhulst equation)[5]:

$$\dot{P} = v\left(1 - \frac{P}{C}\right)P \qquad (1)$$

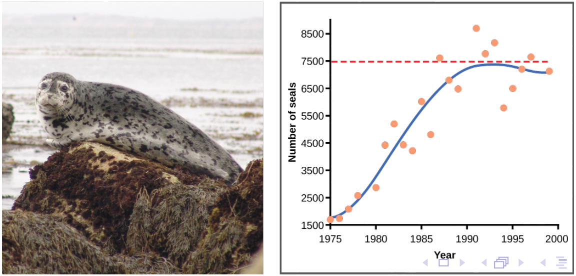
[5] логистическое уравнение

Динамические модели популяций

Логистическая модель



(a)



(b)

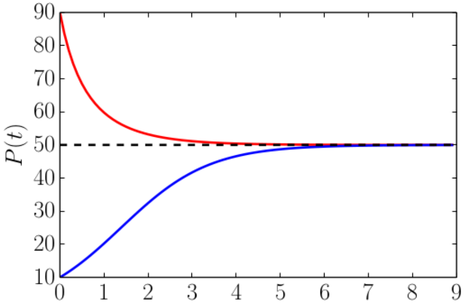
Решение ДУ, описывающего модель - логистическая функция

$$P(t) = \frac{C}{1 + \frac{C - P_0}{P_0} e^{-vt}}$$

Параметры модели:
$C = 50, v = 1$

Синяя кривая (логистическая кривая) $P_0 = 10$

Красная кривая $P_0 = 90$



перепишем уравнение 1:

$$\dot{P} = rP - \delta P^2$$

- **r -стратегия**: организмы (так называемые «оппортунистические»), стремятся к максимально возможной скорости роста численности (параметр r). Потомство таких видов с большой долей вероятности не доживает до зрелого возраста.
- **K-стратегии**: организмы («равновесные»), наоборот, находятся в состоянии равновесия со своими ресурсами и воспроизводят относительно мало, однако стремятся вложить в потомство как можно больше.

- Теория r/K-отбора хорошо описывает рост организмов без возрастной структуры
- к ним относятся бактерии, дрожжи, микроводоросли и др.

- $P_0 < C$ популяция растёт, $P \to C$
- $P_0 > C$ популяция сокращается, $P \to C$
- $P_0 = 0$ популяция не растёт $P(t) = 0$.

- Система имеет две фиксированных точки: C - к которой популяция стремится, 0 - от которой стремится популяция.
- Использование модели затруднено из-за того, что параметр часто не известен или является объектом исследования.

Динамические модели популяций

- Предыдущие модели хорошо описывают бесполое размножение
- На прирост популяции при половом размножении отличается:
- При малых P частота контактов $b(P)$ пропорциональна P^2
- При больших P частота контактов $b(P)$ пропорциональна числу самок $\alpha\frac{\beta P^2}{\beta+\gamma P}$

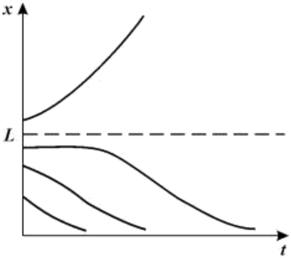
$$\dot{P} = \alpha\frac{\beta P^2}{\beta + \gamma P} - \tau P$$

Особые точки уравнения?

Особые точки уравнения?

$P = 0$
$P = ... = L$

При $P_0 > L$ популяция растёт, при $P_0 < L$ погибает.



При падении численности популяции ниже критической величины из-за неблагоприятных условий, или в результате хищнического промысла, восстановление популяции становится невозможным

Динамические модели популяций

Учёт наименьшей критический численности

- Величина нижней критической плотности L различна для разных видов:
- это одна пара особей на тысячу квадратных километров в случае ондатр
- сотни тысяч особей для американского странствующего голубя.
- американский странствующий голубь вымер в начале XX века
- Для голубых китов критическая граница общей численности оказалась равной десяткам – сотням. Вид находится под угрозой вымирания.

Outline

Balance equations

Пример с популяцией (слайд 22 и далее) показывает, что при описании динамических моделей используются уравнения вида

$$\text{изменение величины} = \text{прирост} - \text{убыль}$$

или для непрерывной системы

$$\dot{s} = f(s) = \text{creation rate} - \text{destruction rate}$$

Balance equations

Аналогично для дискретного случая:

$$s(t + \Delta t) - s(t) = (\text{creation rate} - \text{destruction rate})\Delta t$$

При $\Delta t \to 0$ дискретный случай переходит в непрерывный, т.к.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dot{s}$$

Outline

Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

- a - популяция антилоп; c - популяция гепардов
- животные не иммигрируют и не эмигрируют
- Численность антилоп растёт экспоненциально (бесконечное количество еды)
- Шанс антилопы быть пойманной гепардом пропорционален вероятности их встречи
- Гепарды вымирают с голода экспоненциально
- Воспроизводство гепардов пропорционально их шансам поймать на охоте антилопу

Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

- a - популяция антилоп; c - популяция гепардов
- животные не иммигрируют и не эмигрируют
- Численность антилоп растёт экспоненциально (бесконечное количество еды)
- Шанс антилопы быть пойманной гепардом пропорционален вероятности их встречи
- Гепарды вымирают с голода экспоненциально
- Воспроизводство гепардов пропорционально их шансам поймать на охоте антилопу

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие такую модель?

Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

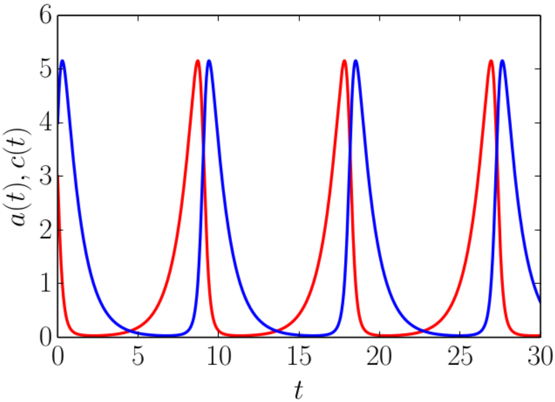
- a - популяция антилоп; c - популяция гепардов
- животные не иммигрируют и не эмигрируют
- Численность антилоп растёт экспоненциально (бесконечное количество еды)
- Шанс антилопы быть пойманной гепардом пропорционален вероятности их встречи
- Гепарды вымирают с голода экспоненциально
- Воспроизводство гепардов пропорционально их шансам поймать на охоте антилопу

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие такую модель?

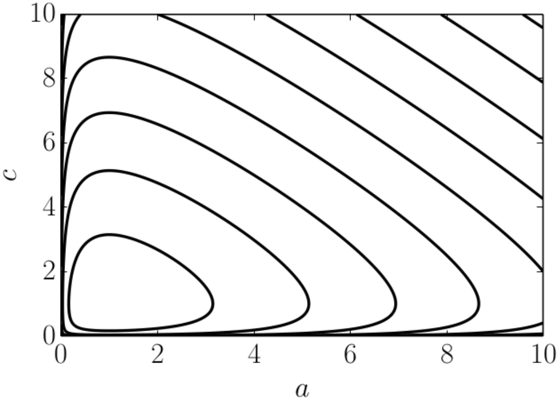
$$\frac{da}{dt} = k_a a(t) - k_{c,a} c(t) a(t)$$

$$\frac{dc}{dt} = -k_c c(t) + k_{a,c} c(t) a(t)$$

Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)



Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)



Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

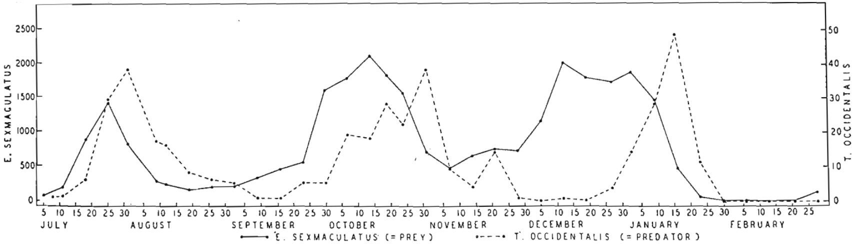
Хищные и травоядные клещи

Typhiodromus occidentalis (светлый клещ) атакует

Большой клещ, не Eotetranychus sexmaculaus, это Красный плодовый клещ

Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

Хищные и травоядные клещи: экспериментальные данные



Huffaker's mite experiment, 1958

Лабораторный эксперимент (среде обитания смоделирована) с травоядным клещём Eotetranychus sexmaculaus и нападающего на него хищным Typhiodromus occidentalis.

Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

Канадская рысь и Американский беляк

Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

Канадская рысь и Американский беляк

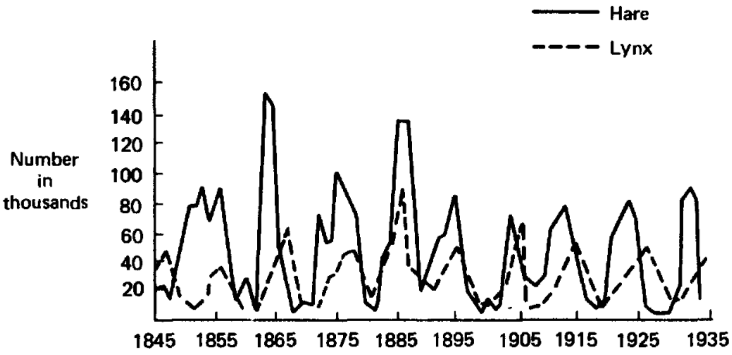


Figure 48-1 Oscillation observed in Canada of populations of lynx and hare (*data from* E. P. Odum, *Fundamentals of Ecology*, Philadelphia: W. B. Saunders, 1953).

Используем логистическую модель:

$$\dot{P} = v\left(1 - \frac{P}{C}\right)P$$

Рассмотрим популяции двух видов животных: P_1 и P_2;
Каждая популяция имеет своё ёмкость среды: C_1 и C_2 соответственно.

Выражение в скобках, определяющее прирост, должно учитывать потребление ресурса двумя видами:
$\frac{P_1+\alpha_{12}P_2}{C_1}$ и $\frac{P_2+\alpha_{21}P_1}{C_2}$

где α_{12} - коэффициент учитывающий влияние популяции вида 2 на вид 1 и α_{21} соответственно наоборот

Система ДУ описывающая конкуренцию двух видов

$$\dot{P}_1 = v\left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 2 P_2}{C_1}\right) P_1$$

$$\dot{P}_2 = v\left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 1 P_1}{C_2}\right) P_2$$

Моделирование популяций

Вопросы

- Как учесть некоторый постоянный фактор уменьшающий прирост популяции? например в логистической модели
- Как учесть некоторый фактор уменьшающий прирост популяции, постоянно действующий в течении определённого интервала времени? например в логистической модели
- Какая система ДУ описывает популяции трёх видов X, Y, Z, где Y охотится (потребляет) на X, Z охотится (потребляет) Y?
- Как решается система однородных дифференциальных уравнений первого порядка?
- Учитывает ли модель Лотки-Вольтерры возрастной фактор?
- Учитывает ли модель Лотки-Вольтерры распределение хищников и жертв в пространстве?
- Учитывает ли модель Лотки-Вольтерры внутривидовую конкуренцию?

Другие виды отношений между видами

В каких ещё отношениях могут состоять биологические виды?

Другие виды отношений между видами

В каких ещё отношениях могут состоять биологические виды?

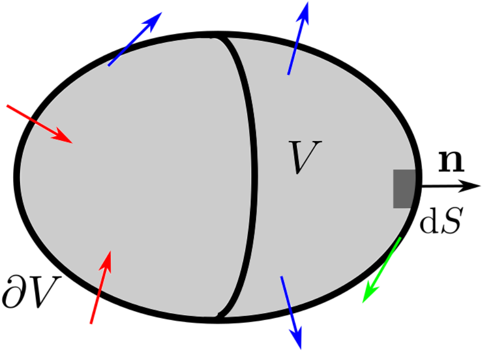
Outline

Уравнение учитывающие пространство и время

- Предыдущие примеры не учитывали пространство, но часто это важно (распределение вещества, температуры и т.д.)
- Необходимо учесть движение чего-либо из некоторого объёма V через его поверхность ∂V
- Причём отнести это движение к единице времени

Уравнение учитывающие пространство и время

Рассмотрим объём пространства V



входящий поток

исходящий поток

(на касательной к поверхности) - поток не покидающий данный объём V

dS (тёмно серый участок) - площадь поверхности ∂V с нормалью n

Уравнение учитывающие пространство и время

- $\rho(t, x)$ - плотность исследуемой величины (массы, заряда, ...)

$$s(t) = \int_V \rho(t, x) dV$$

- Уравнение баланса:

$$\boxed{\dot{s} = -\text{flux through surface} + \text{volumic creation/destruction rate}}$$

знак минус в формуле выше появляется из-за того, что *выходящий* поток считается положительным, а он должен уменьшать некоторую величину внутри объёма V.

Обозначим поток (flux) как j;

creation/destruction rate

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

$$\boxed{\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...

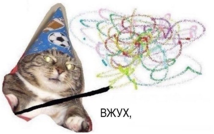
Обозначим поток (flux) как j;

creation/destruction rate

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

$$\boxed{\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...



Обозначим поток как j

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

$$\boxed{\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...

$$\int_V \dot{s} dV + \int_V \nabla j \cdot n dV = \int_V \sigma dV$$

$$\dot{s} + \nabla j \cdot n = \sigma$$

Outline

Численное интегрирование

Требуется проинтегрировать однородное дифференциальное уравнение

$$\dot{s} = f(s, t)$$

на интервале $t_0 < t < t_f$ если известно $s(t = t_0) = s_0$

Не все интегралы могут быть вычислены аналитически или аналитическое интегрирование может быть сложным.

Во время численного интегрирования важно знать об ошибке вычисления

Численное интегрирование

Для примера возьмём ранее рассмотренную модель популяции

$$\dot{s} = f(s, t)$$

$$f(s, t) = v\left(1 - \frac{P}{C}\right)s$$

Аналитическое решение:

$$P(t) = \frac{C}{1 + \frac{C - P_0}{P_0} e^{-vt}}$$

Далее сравним точное решение с численным.

Численное интегрирование

Используем ряд Тейлора

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k$$

где $s^{(k)}(t_0)$ означает производную k-го порядка.

Пусть $t - t_0 = \Delta t$, тогда

$$s(t_0 + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{(k)}}{k!}\Delta t^k$$

Выделим слагаемые для $k = 0, 1$:

$$s(t_0 + \Delta t) = s(t_0) + s'(t_0)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Численное интегрирование

Отбросим $\mathcal{O}(\Delta t^2)$:

$$s(t_1) = s(t_0) + \dot{s}(t_0)\Delta t$$

Заменим $\dot{s}(t_0) = f(s, t_0)$:

$$s(t_1) = s(t_0) + f(s, t_0)\Delta t$$

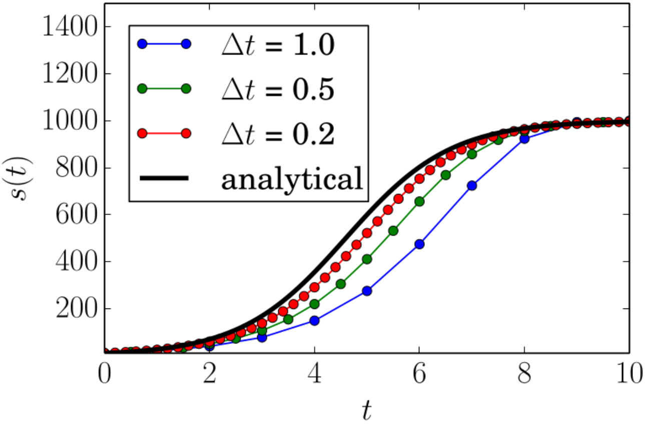
Тогда уравнение можно использовать для определения состояния $s(t_i)$ в каждый следующий момент времени t_{i+1}:

$$s(t_{i+1}) = s(t_i) + f(s, t_i)\Delta t$$

где $t_{i+1} - t_i = \Delta t$

- выражение дискретно по времени
- производную (но не саму функцию) можно выразить из дифференциального уравнения $\dot{s}(t_0) = f(s, t_0)$:
- аналитическое выражение для функции искать не нужно
- значение функции **явно** зависит только от известного значения функции в предыдущий момент времени и от производной

Численное интегрирование



Сравнение численного решения и точного (слайд 67)

Outline

Моделирование химических реакций

Рассмотрим химическую реакцию в которой молекула (доля вещества) A превращается в молекулу B с интенсивностью k_1. Аналогичные превращения происходят с молекулой B.

$$A \xrightarrow{k_1} B$$

$$B \xrightarrow{k_2} A$$

Моделирование химических реакций

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие химическую реакцию (превращение одного вещества в другое)?

Моделирование химических реакций

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие химическую реакцию (превращение одного вещества в другое)?

Система однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A(t) = \frac{k_2}{k_1 + k_2}(A_0 + B_0) + \frac{A_0 k_1 - B_0 k_2}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t}$$

$$B(t) = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(A_0 + B_0) - \frac{A_0 k_1 - B_0 k_2}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t}$$

При $t \to \infty$:

Моделирование химических реакций

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие химическую реакцию (превращение одного вещества в другое)?

Система однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A(t) = \frac{k_2}{k_1 + k_2}(A_0 + B_0) + \frac{A_0 k_1 - B_0 k_2}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t}$$

$$B(t) = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(A_0 + B_0) - \frac{A_0 k_1 - B_0 k_2}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t}$$

При $t \to \infty$:

$$A \to A_\infty = \frac{k_2}{k_1 + k_2}(A_0 + B_0) \qquad B \to B_\infty = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(A_0 + B_0)$$

Рассматриваемая реакция моделируется с помощью Динамического метода Монте Карло. Этот метод применяется для моделирования систем которые не находятся в равновесии.

- Время дискретно, с шагом Δt
- Δt следует выбрать таким, чтобы $\Delta t k_1 < 1$ и $\Delta t k_2 < 1$
- Величины $\Delta t k_1$ и $\Delta t k_2$ - вероятности превращения доли вещества A в вещество B и наоборот

- Моделируя реакцию будем выбирать случайную молекулу (долю вещества) из всех $N = A + B = const$
- Вероятности выбора соответствующей молекулы A B $\frac{A}{A+B}$ и $\frac{B}{A+B}$ соответственно
  например если rand(0,1) $< \frac{A}{A+B}$ то выбирается молекула A
- Если выбрана молекула A, то она превращается в молекулу B с вероятностью $\Delta t k_1 < 1$
  Число молекул изменяется:
  $A = A - 1$
  $B = B + 1$
- Аналогично для молекулы B

- операция превращения (или не превращения) повторяется для всех N молекул
- После того как N молекул обработано время увеличивается на Δt и процесс повторяется заново
- Моделирование происходит пока $t < t_{max}$

Моделирование химических реакций

Метод Монте Карло. Результат

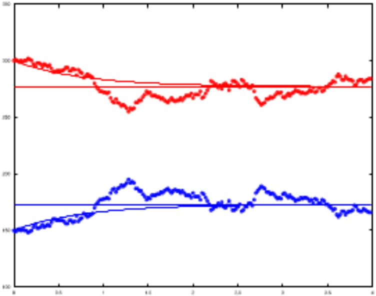


график построен для $\Delta = 0.02,\ k_1 = 0.5,\ k_2 = 0.8$

Кривыми соответствующего цвета показаны аналитические решения. Для получения более точного результата нужно провести моделирование несколько раз.

- Для каждого из возможных событий $i = 1..n$ заданы интенсивности $r_1, ..., r_n$, с корой они происходят
- например $r_i = kAB$ для химической реакции $A + B \to C$
- введём накопленные интенсивности $R_i = \sum_{j=1}^{i} r_j$
- Выберем одно из событий сгенерировав случайное число[6] $s = rand(0,1)$:
- номер события будет определятся из соотношения $R_{k-1} < sR_n < R_{k+1}$

[6] равномерно распределённое

- после того как событие выбрано, оно происходит
- изменить время на $\Delta t = ln(\frac{1}{rand(0,1)})$[7]
- В течении интервала времени t происходит только одно событие

[7] Δt будет иметь экспоненциальное распределение

Ссылки

- «Жесткие» и «мягкие» математические модели, Арнольд В.

Использованы материалы курса Simulation and modeling of natural processes
coursera.org/learn/modeling-simulation-natural-processes/

Ссылки

Материалы курса

github.com/ivtipm/computer-simulation