# Компьютерное моделирование

## Моделирование динамических систем

Кафедра ИВТ и ПМ

2018

# План

## Прошлые темы

## Динамическая система

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

## Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

## Учёт пространства и времени

# Outline

# Прошлые темы

- Что такое динамическая система?
- Примеры?
- Динамическая система противопоставляется ... ?

# Прошлые темы

- Что такое динамическая система?
- Примеры?
- Динамическая система противопоставляется ... ?
- Примеры статических систем?

*Современная наука стала возможной тогда, когда было решено самое первое дифференциальное уравнение*

---

вольный перевод цитаты
Дэвида Берлински

# Outline

# Outline

# Дифференциальные уравнения

- Что такое дифференциальное уравнение?
- Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?

# Дифференциальные уравнения

- Что такое дифференциальное уравнение?
- Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?
- Простой пример ДУ?

# Дифференциальные уравнения

- Что такое дифференциальное уравнение?
- Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?
- Простой пример ДУ?

$$\frac{dv_x}{dt} = a$$

или

$$\dot{V}_x = a$$

# Дифференциальные уравнения

- Что является решением дифференциального уравнения?

# Дифференциальные уравнения

- Что является решением дифференциального уравнения?
- Какие решения бывают?

# Дифференциальные уравнения

- Что является решением дифференциального уравнения?
- Какие решения бывают?
- Что такое общее решение?
- Что такое частное решение?
- Как получить из общего решения частное?

# Дифференциальные уравнения

- Как представить общее решение ДУ графически?

# Дифференциальные уравнения

- Что такое численный метод?

# Дифференциальные уравнения

- Что такое численный метод?
- Как численно определить производную известной функции в точке?

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# Outline

# Динамическая система

- Изменяется с течением времени $t$
- Состояния системы $s(t)$
- Состояние системы может быть представлено вектором $s(t) = (s_1(t), s_2(t), ..., s_n(t))$
- Примеры: маятник, популяция животных, движение автомобиля, поток людей, ...

# Способы представления

- **Дискретная** система

$$s(t + \Delta t) = f(s(t))$$

где $\Delta t$ - приращение времени, $f$ - некоторая функция определяющая состояние системы на следующем шаге

- **Непрерывная** система

$$\dot{s} \equiv \frac{ds}{dt} = f(s(t))$$

Всегда ли первой производной достаточно?

# Состояние может зависеть от второй производной: непрерывная система

Предположим, что состояние системы зависит ещё и от второй производной

$$\dot{s} + \ddot{s} = f(s)$$

Обозначим

$$y = \dot{s}$$

$$\dot{y} = f(s) - y$$

Обозначим

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$\dot{u} = g(u)$$

# Состояние может зависеть от второй производной: дискретная система

$$s(t + \Delta t) = f(s(t)) + s(t - \Delta t)$$

Аналогично непрерывной системе

$$y(t + \Delta t) = \dot{s}$$

$$s(t + \Delta t) = f(s(t)) + y(t)$$

Обозначим

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$u(t + \Delta t) = g(u(t))$$

## Состояние может зависеть от второй производной: непрерывная система

Если f явно зависит от t

$$\dot{s} = f(s, t)$$

$$\dot{s} = f(s, y)$$

$$\dot{y} = 1$$

для $y(0) = 0$

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$\dot{u} = g(u)$$

# Outline

# Outline

# Динамические модели популяций

**Популяция** (в биологии) - это совокупность особей одного вида, существующих в одно и занимающих определенную территорию.

В классической экологии рассматриваются взаимодействия нескольких типов:

- взаимодействие организма и окружающей среды;
- взаимодействие особей внутри популяции;
- взаимодействие между особями разных видов (между популяциями).

# Динамические модели популяций

Зачем это нужно?

- описание роста количества микроорганизмов
- предсказание численности популяций промысловых животных
- предсказание численности популяций диких животных
- предсказание численности населения [1]

[1] см. модель World3

# Первая модель популяции

## 1202 г. Леонардо Пизанский

какое количество пар кроликов будет через год, кролики начинают размножаться со второго месяца и каждый месяц дают потомство в виде пары кроликов?

# Первая модель популяции

## 1202 г. Леонардо Пизанский

какое количество пар кроликов будет через год, кролики начинают размножаться со второго месяца и каждый месяц дают потомство в виде пары кроликов?

Ряд описывающий количество пар кроликов:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

# Динамические модели популяций

- Число[2] особей в популяции - $P(t)$
- При этом $P(0) = 0$
- На размер популяции влияет только два процесса
  - рождение особей $B(t)$
  - смерть особей $D(t)$
- Тогда *изменение* популяции:

$$\dot{P}(t) = B(t) - D(t)$$

[2] вместо числа особей может использоваться плотность популяции и другие связанные с количеством особей величины

- Число родившихся особей можно задать как:

$$B(t) = r_b P(t)$$

- Число умерших особей можно задать как:

$$D(t) = r_d P(t)$$

$r_b$ - темп воспроизводства в расчете на одну особь;
$r_d$ - темп вымирания.

$$\dot{P}(t) = r_b P(t) - r_d P(t)$$

обозначим $r = r_b - r_d$,
тогда

$$\dot{P} = rP(t)$$

Решение ДУ[3]:

[3] похожий закон роста описывает изменение вклада (сложные проценты) см. другие примеры: en.wikipedia.org/wiki/Exponential_growth

$$\dot{P}(t) = r_b P(t) - r_d P(t)$$

обозначим $r = r_b - r_d$,
тогда

$$\dot{P} = rP(t)$$

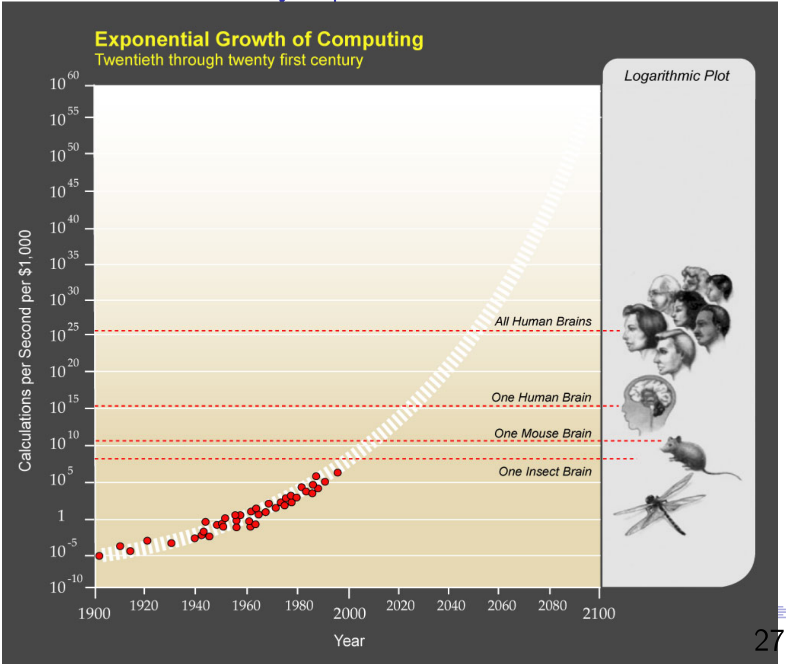
Решение ДУ[3]:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

wikimedia: анимация роста бактерий согласно экспоненциальному закону

[3] похожий закон роста описывает изменение вклада (сложные проценты) см. другие примеры: en.wikipedia.org/wiki/Exponential_growth

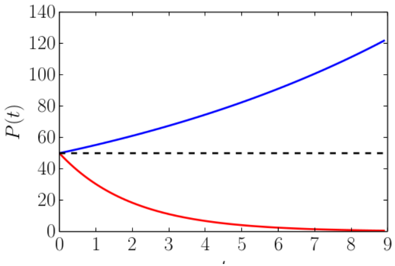
# Технологическая сингулярность?



# Динамические модели популяций

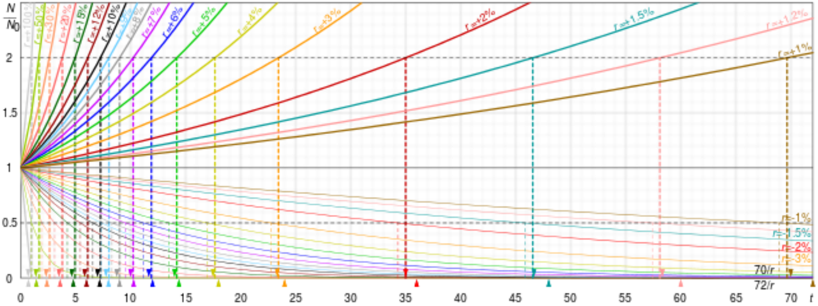
## Модель Мальтуса

- r $>$ 0 экспоненциальный рост
- r $<$ 0 экспоненциальное сокращение
- r $=$ 0 численность постоянна



# Динамические модели популяций

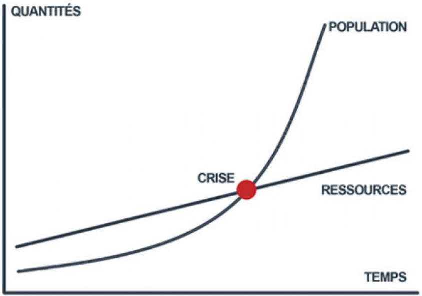
## Модель Мальтуса



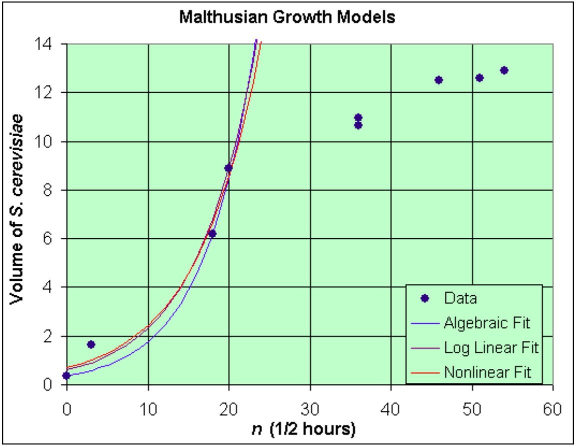
Линейный рост воспроизводства и экспоненциальный рост популяции.

# Динамические модели популяций

## Модель Мальтуса



Недостатки модели Мальтуса?

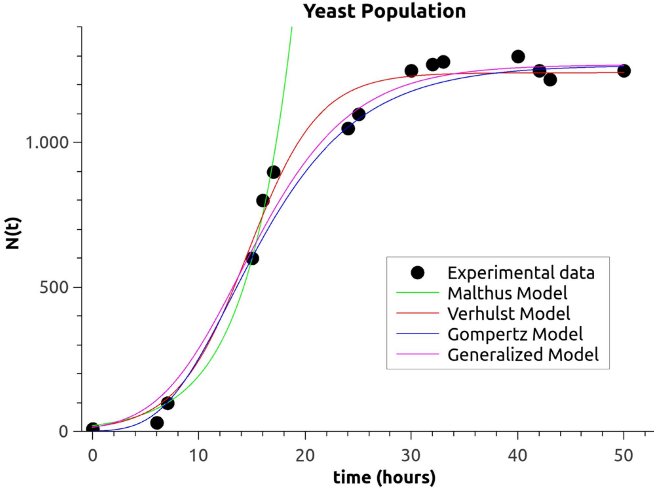



Рост популяции Saccharomyces cerevisiae (Пекарские дрожжи)

jmahaffy.sdsu.edu/courses/f06/math636/lectures/competition/competition.html

# Динамические модели популяций

## Модель Мальтуса




An attempt to unify some population growth models from first principles,
Fabiano L. Ribeiro,
Rev. Bras. Ensino Fís. vol.39 no.1 São Paulo 2017 Epub Nov 21, 2016

- Необходимо ограничить предельный размер популяции
- Введём дополнительный параметр $C$ - емкость среды.

  **Предельная нагрузка** биологического вида на среду обитания (**ёмкость среды**) — максимальный размер популяции вида, который среда может безусловно стабильно поддерживать [4]
- С - системный фактор (пища, убежища, хищничество, конкуренция с другими видами)

[4] В 2001 году в докладе ООН сообщалось, что две трети оценок ёмкости среды для человечества попадают в диапазон от 4 до 16 млрд (с неопределенным стандартным отклонением) с медианным значением в 10 млрд

- коэффициент регулирующий прирост (убыль) популяции

$$r = v\left(1 - \frac{P}{C}\right)$$

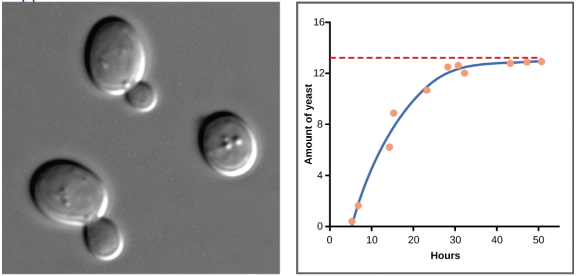
- модель (уравнение популяционной динамики Ферхюльста (Verhulst equation)[5]:

$$\dot{P} = v\left(1 - \frac{P}{C}\right)P \tag{1}$$

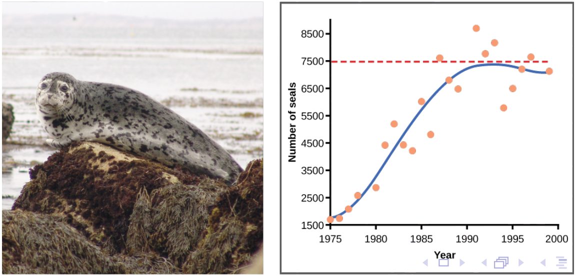
[5] логистическое уравнение

# Динамические модели популяций

## Логистическая модель




(a)




(b)

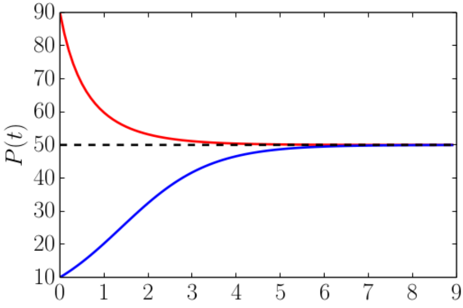
Решение ДУ, описывающего модель - логистическая функция

$$P(t) = \frac{C}{1 + \frac{C-P_0}{P_0} e^{-vt}}$$

Параметры модели:
$C = 50, v = 1$

Синяя кривая (логистическая кривая) $P_0 = 10$

Красная кривая $P_0 = 90$



перепишем уравнение 1:

$$\dot{P} = rP - \delta P^2$$

- **r -стратегия**: организмы (так называемые «оппортунистические»), стремятся к максимально возможной скорости роста численности (параметр r). Потомство таких видов с большой долей вероятности не доживает до зрелого возраста.
- **K-стратегии**: организмы («равновесные»), наоборот, находятся в состоянии равновесия со своими ресурсами и воспроизводят относительно мало, однако стремятся вложить в потомство как можно больше.

- Теория r/K-отбора хорошо описывает рост организмов без возрастной структуры
- к ним относятся бактерии, дрожжи, микроводоросли и др.

- $P_0 < C$ популяция растёт, $P \to C$
- $P_0 > C$ популяция сокращается, $P \to C$
- $P_0 = 0$ популяция не растёт $P(t) = 0$.

- Система имеет две фиксированных точки: C - к которой популяция стремится, 0 - от которой стремится популяция.
- Использование модели затруднено из-за того, что параметр  часто не известен или является объектом исследования.

# Динамические модели популяций

- Предыдущие модели хорошо описывают бесполое размножение
- На прирост популяции при половом размножении отличается:
- При малых $P$ частота контактов $b(P)$ пропорциональна $P^2$
- При больших $P$ частота контактов $b(P)$ пропорциональна числу самок $\alpha\frac{\beta P^2}{\beta+\gamma P}$

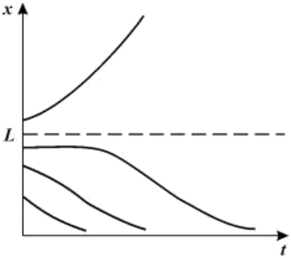
$$\dot{P} = \alpha\frac{\beta P^2}{\beta+\gamma P} - \tau P$$

Особые точки уравнения?

Особые точки уравнения?

$P = 0$
$P = ... = L$

При $P_0 > L$ популяция растёт, при $P_0 < L$ погибает.




При падении численности популяции ниже критической величины из-за неблагоприятных условий, или в результате хищнического промысла, восстановление популяции становится невозможным

# Динамические модели популяций

## Учёт наименьшей критический численности

- Величина нижней критической плотности L различна для разных видов:
- это одна пара особей на тысячу квадратных километров в случае ондатр
- сотни тысяч особей для американского странствующего голубя.
- американский странствующий голубь вымер в начале XX века
- Для голубых китов критическая граница общей численности оказалась равной десяткам – сотням. Вид находится под угрозой вымирания.

# Outline

# Balance equations

Пример с популяцией (слайд 22 и далее) показывает, что при описании динамических моделей используются уравнения вида

$$\text{изменение величины} = \text{прирост} - \text{убыль}$$

или для непрерывной системы

$$\dot{s} = f(s) = \text{creation rate} - \text{destruction rate}$$

# Balance equations

Аналогично для дискретного случая:

$$s(t+\Delta t) - s(t) = (\text{creation rate} - \text{destruction rate})\Delta t$$

При $\Delta t \to 0$ дискретный случай переходит в непрерывный, т.к.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dot{s}$$

# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

- $a$ - популяция антилоп; $c$ - популяция гепардов
- животные не иммигрируют и не эмигрируют
- Численность антилоп растёт экспоненциально (бесконечное количество еды)
- Шанс антилопы быть пойманной гепардом пропорционален вероятности их встречи
- Гепарды вымирают с голода экспоненциально
- Воспроизводство гепардов пропорционально их шансам поймать на охоте антилопу

# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

- $a$ - популяция антилоп; $c$ - популяция гепардов
- животные не иммигрируют и не эмигрируют
- Численность антилоп растёт экспоненциально (бесконечное количество еды)
- Шанс антилопы быть пойманной гепардом пропорционален вероятности их встречи
- Гепарды вымирают с голода экспоненциально
- Воспроизводство гепардов пропорционально их шансам поймать на охоте антилопу

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие такую модель?

# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

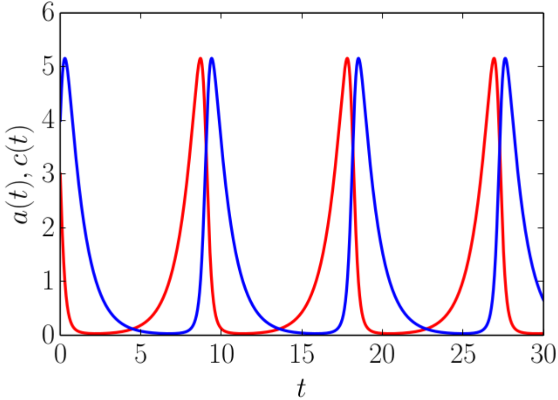
- $a$ - популяция антилоп; $c$ - популяция гепардов
- животные не иммигрируют и не эмигрируют
- Численность антилоп растёт экспоненциально (бесконечное количество еды)
- Шанс антилопы быть пойманной гепардом пропорционален вероятности их встречи
- Гепарды вымирают с голода экспоненциально
- Воспроизводство гепардов пропорционально их шансам поймать на охоте антилопу

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие такую модель?

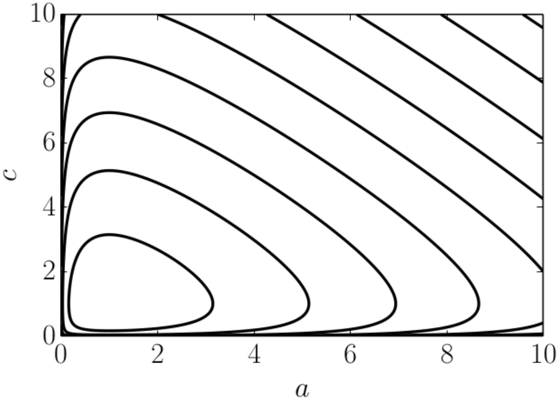
$$\frac{da}{dt} = k_a a(t) - k_{c,a} c(t) a(t)$$

$$\frac{dc}{dt} = -k_c c(t) + k_{a,c} c(t) a(t)$$

# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)



# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)



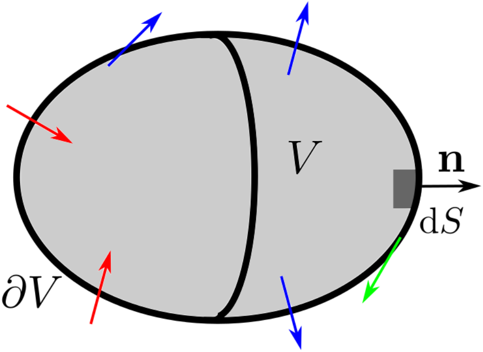
# Outline

# Уравнение учитывающие пространство и время

- Предыдущие примеры не учитывали пространство, но часто это важно (распределение вещества, температуры и т.д.)
- Необходимо учесть движение чего-либо из некоторого объёма $V$ через его поверхность $\partial V$
- Причём отнести это движение к единице времени

# Уравнение учитывающие пространство и время

Рассмотрим объём пространства $V$




входящий поток

исходящий поток

(на касательной к поверхности) - поток не покидающий данный объём $V$

$dS$ (тёмно серый участок) - площадь поверхности $\partial V$ с нормалью $n$

# Уравнение учитывающие пространство и время

- $\rho(t,x)$ - плотность исследуемой величины (массы, заряда, ...)

$$s(t) = \int_V \rho(t,x) dV$$

- Уравнение баланса:

$$\dot{s} = -\text{поток через поверхность} + \text{добавление(убыль)}$$

знак минус в формуле выше появляется из-за того, что *выходящий* поток считается положительным, а он должен уменьшать некоторую величину внутри объёма V.

Обозначим поток как $j$

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

где $\sigma$ -

$$\boxed{\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...

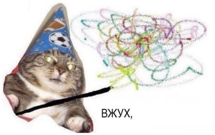
Обозначим поток как $j$

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

где $\sigma$ -

$$\boxed{\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...



Обозначим поток как $j$

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

где $\sigma$ -

$$\boxed{\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot ndS = \Sigma}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...

$$\int_V \dot{s} dV + \int_V \nabla j \cdot ndV = \int_V \sigma dV$$

$$\dot{s} + \nabla j \cdot n = \sigma$$

# Ссылки

- «Жесткие» и «мягкие» математические модели, Арнольд В.

Использованы материалы курса Simulation and modeling of natural processes
coursera.org/learn/modeling-simulation-natural-processes/

# Ссылки

Материалы курса

github.com/ivtipm/computer-simulation