

Компьютерное моделирование

Стохастические модели

Кафедра ИВТ и ПМ

2018

Outline

Прошлые темы

Случайные события и величины

Метод Монте-Карло

интегрирование

Задача Бюффона

Случайные блуждания

Поток событий

Прошлые темы

- ▶ Модель
- ▶ Примеры

Прошлые темы

- ▶ Модель
- ▶ Примеры
- ▶ Состояние модели
- ▶ Стохастическая модель

Прошлые темы

- ▶ Модель
- ▶ Примеры
- ▶ Состояние модели
- ▶ Стохастическая модель
- ▶ Детерминированная модель

Прошлые темы

- ▶ Модель
- ▶ Примеры
- ▶ Состояние модели
- ▶ Стохастическая модель
- ▶ Детерминированная модель
- ▶ Дискретная модель

Прошлые темы

- ▶ Модель
- ▶ Примеры
- ▶ Состояние модели
- ▶ Стохастическая модель
- ▶ Детерминированная модель
- ▶ Дискретная модель
- ▶ Моделирование
- ▶ Компьютерное моделирование
- ▶ Информационная модель

Outline

Прошлые темы

Случайные события и величины

Метод Монте-Карло

интегрирование

Задача Бюффона

Случайные блуждания

Поток событий

Случайное событие

События:

- ▶ **Достоверным** событием называется событие, которое в результате опыта или наблюдения непременно должно произойти. Обозначается символом Ω
- ▶ Событие, которое никогда не реализуется в результате случайного эксперимента, называется **невозможным** и обозначается символом \emptyset
- ▶ Событие называется **случайным**, если оно достоверно непредсказуемо.

Примеры случайных событий?

Полная группа событий

Полной группой событий называется система случайных событий такая, что в результате произведенного случайного эксперимента непременно произойдет одно и только одно из них.

Сумма вероятностей всех событий в группе всегда равна 1.

Полная группа событий

Примеры?

Случайная величина

Случайная величина (Random variable) - величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

- ▶ **Дискретная** (discrete) СВ принимает конечное или счетное число значений.
- ▶ **Непрерывная** (continuous) СВ может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Случайная величина

Случайная величина обычно обозначается заглавной латинской буквой, например X .

Возможные значения случайной величины обозначаются соответствующей строчной буквой.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Случайная величина

Примеры дискретных случайных величин?

Случайная величина

Примеры дискретных случайных величин?

Примеры непрерывных случайных величин?

Случайная величина

Могут ли разные значения дискретной СВ "выпадать" в результате опыта с разной вероятностью?

Случайная величина

Могут ли разные значения дискретной СВ "выпадать" в результате опыта с разной вероятностью?

Да, например количество выпавших очков на несимметричной игральной кости.

Случайная величина

Могут ли разные значения дискретной СВ "выпадать" в результате опыта с разной вероятностью?

Да, например количество выпавших очков на несимметричной игральной кости.

Как описать такую случайную величину?

Случайная величина

Могут ли разные значения дискретной СВ "выпадать" в результате опыта с разной вероятностью?

Да, например количество выпавших очков на несимметричной игральной кости.

Как описать такую случайную величину?

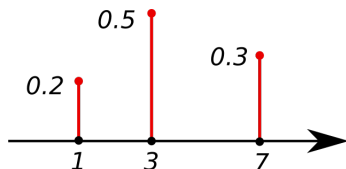
Поставить в соответствие значениям случайной величины вероятности.

Закон распределения

Закон распределения, функция вероятности (probability mass function) дискретной СВ – это соответствие между возможными значениями этой величины и их вероятностями.

Сумма всех значений функции вероятности $p(x)$ равна единице

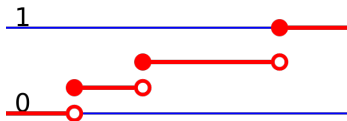
$$\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$$



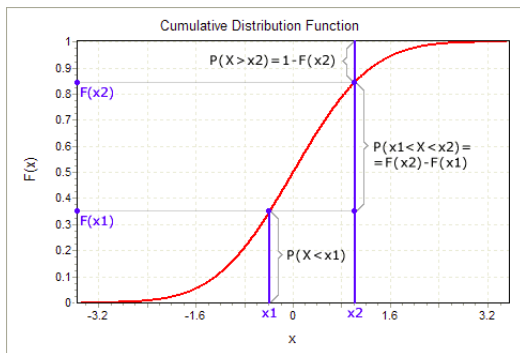
Функция распределения (Cumulative distribution function, cdf) дискретной СВ - вероятность того, что СВ величина примет значение меньше данного.

$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$$



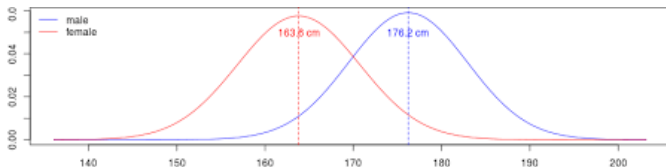
Функция распределения непрерывной СВ



Плотность распределения

Для непрерывной случайное величины функция вероятности не используется, потому как возможных значений такой величины бесконечно много, а значит на каждое такое значение приходится бесконечно малая доля вероятности.

Вместо функции вероятности используется понятие *плотность распределения* (probability density functions, pdf) - $f(x)$.



Математическое ожидание и дисперсия

- ▶ Математическое ожидание
 $M(X)$ или $E(X)$

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Математическое ожидание и дисперсия?

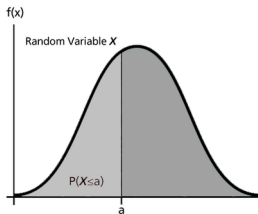
- ▶ Дисперсия
 $D(X)$

$$D[X] = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - M[X])^2$$

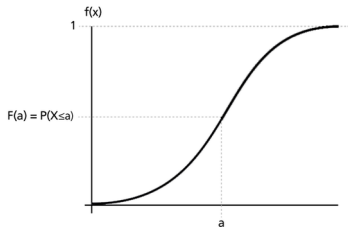
$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x - M[X])^2 dx,$$

На практике вместо дисперсии часто используют среднеквадратическое ускорение $\sigma(x)$.

плотность распределения и закон распределения

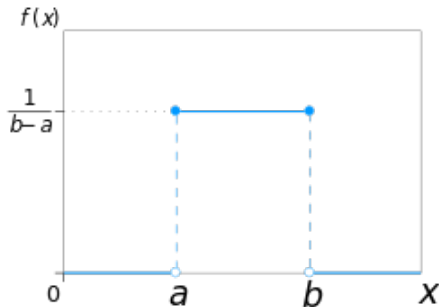


$$F(x) = P(X < x)$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Равномерное распределение



Все возможные значения случайной величины равновероятны.

Равномерное распределение может иметь как дискретная случайная величина, так и непрерывная

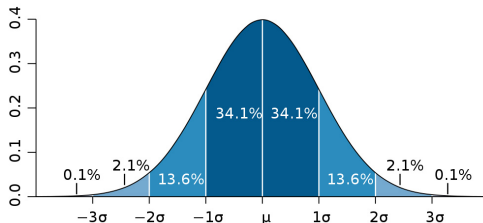
```
scipy.stats.uniform.rvs ( loc = a, scale = b)
```

Равномерное распределение. Примеры

- ▶ Количество очков, выпавших на игральной кости
- ▶ Число выпавшее на рулетке
- ▶ Номер автобусного билета (в единичном испытании)
- ▶ Время ожидания события, происходящего со строгой периодичностью. например время ожидания поезда, который отправляется со станции раз в 30 минут

Значения случайной величины с равномерным распределением используются для осуществления случайных выборов.

Нормальное распределение



μ - математическое ожидание, σ - среднеквадратичное отклонение.

Возможные значения СВ близкие к мат. ожидания наиболее вероятны.

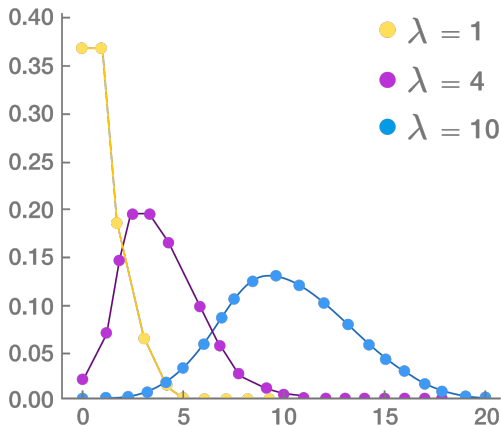
Если СВ является суммой большого числа других независимых величин, то она подчиняется нормальному закону распределения.¹

¹см. центральная предельная теорема

Нормальное распределение. Примеры

- ▶ Рост человека
- ▶ Ошибка измерения
- ▶ Прочность бетона
- ▶ Масса новорождённых детей
- ▶ Объём молока производимый коровой каждый день

Распределение Пуассона



СВ - количество событий на меру пространства или времени,
при средней частоте λ

Распределение Пуассона. Примеры

ДТП в определённом районе города случается в среднем дважды в неделю.

Какова вероятность того, что на этой неделе не будет ДТП?

Используем закон Пуассона²:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

где $\lambda = 2$, $k = 0$ - число событий.

тогда $P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0.14$

²в пакете scipy: `scipy.stats.distributions.poisson.pmf(x, lambda)`

Распределение Пуассона. Примеры

ДТП в определённом районе города случается в среднем дважды в неделю.

Какова вероятность того, что на этой неделе не будет ДТП?

Используем закон Пуассона²:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

где $\lambda = 2$, $k = 0$ - число событий.

$$\text{тогда } P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0.14$$

Какова вероятность того, что на этой неделе будет 1 и 2 ДТП?

$$P(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0.27, \quad P(2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0.27$$

Какова вероятность того, что на этой неделе будет больше 2-х ДТП?

$$P(X > 2) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$$

²в пакете scipy: `scipy.stats.distributions.poisson.pmf(x, lambda)`

Распределение Пуассона. Примеры

Для при определении вероятности для заданного числа событий произошедших за t единиц времени параметр λ определяют так:

$$\lambda = tn$$

где n число событий за единицу времени

Сравним вероятности следующих событий:

- ▶ 3 ДТП за неделю
- ▶ 15 ДТП за 5 недель

Распределение Пуассона. Примеры

Для при определении вероятности для заданного числа событий произошедших за t единиц времени параметр λ определяют так:

$$\lambda = tn$$

где n число событий за единицу времени

Сравним вероятности следующих событий:

- ▶ 3 ДТП за неделю
- ▶ 15 ДТП за 5 недель

$$n = 2, t_1 = 1, \lambda_1 = 2, t_2 = 5, \lambda_2 = 2 \cdot 5 = 10$$

$$P(3, \lambda_1 = 2) = 0.18$$

$$P(15, \lambda_2 = 10) = 0.035$$

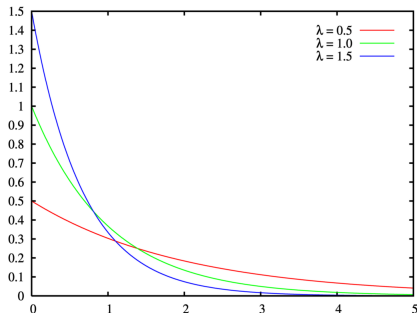
Распределение Пуассона. Примеры

Величины подчиняющиеся распределению Пуассона

- ▶ Число изюминок в булочке
- ▶ Число мутация в ДНК
- ▶ Число звонков в службу технической поддержки
- ▶ Число смертей в год для заданной возрастной категории
- ▶ Число альфа-частиц излучённых за определённый промежуток времени

kvant.mccme.ru/1988/08/raspredelenie_puassona.htm

Экспоненциальное (показательное) распределение



λ - параметр скорости. $M(X) = \frac{1}{\lambda}$

моделирует время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

Экспоненциальное (показательное) распределение.

Пример

Среднее время ожидания покупателя - 15 минут. Какова вероятность, что во время перерыва длительностью 5, 10 и 15 минут придёт покупатель?

Тогда $\frac{1}{\lambda} = 15 \rightarrow \lambda = 0.067$.

$$P(X < 5) = F(5) = 1 - e^{-0.067 \cdot 5} = 0.28$$

$$P(X < 10) = F(10) = 1 - e^{-0.067 \cdot 10} = 0.49$$

$$P(X < 15) = F(15) = 1 - e^{-0.067 \cdot 15} = 0.63$$

```
scipy.stats.expon.cdf ( x = 5, scale = 15)  # 0.28
```

Экспоненциальное распределение vs распределение Пуассона

В чём разница и что общее у экспоненциального распределения и распределения Пуассона?

Экспоненциальное (показательное) распределение

Величины подчиняющиеся экспоненциальному распределению

- ▶ Расстояние между участками ДНК с мутациями
- ▶ Время ожидания звонка службу технической поддержки
- ▶ Время между излучением частиц
- ▶ Расстояние между местами ДТП на дороге³

³ в предположении, что вероятность ДТП на каждом участке дороги одинакова

Outline

Прошлые темы

Случайные события и величины

Метод Монте-Карло

интегрирование

Задача Бюффона

Случайные блуждания

Поток событий



метод Монте-Карло

Методы Монте-Карло (ММК) — группа численных методов для изучения случайных процессов.

Процесс моделируется при помощи генератора случайных величин.

В 1940-х Джон фон Нейман и Станислав Улам в Лос-Аламосе предположили использовать стохастический подход для аппроксимации многомерных интегралов

Outline

Прошлые темы

Случайные события и величины

Метод Монте-Карло

интегрирование

Задача Бюффона

Случайные блуждания

Поток событий

Интегрирование методом Монте Карло

Требуется вычислить определённый интеграл

$$\int_a^b g(x) dx$$

В качестве аргумента функции $g(x)$ подставим случайную величину, тогда м.о. функции будет определяться:

$$M[g(x)] = \int_a^b g(x) f_g(x) dx.$$

Интегрирование методом Монте Карло

$$M[g(x)] = \int_a^b g(x) f_g(x) dx.$$

Используем СВ с нормальным распределением, где функция плотности $f(x) = 1/(b - a)$

$$M[g(x)] = \int_a^b \frac{g(x)}{b - a} dx.$$

$$\int_a^b g(x) dx = M[g(x)](b - a)$$

где $M[g(x)]$ можно определить как среднее арифметическое сгенерированного набора значений СВ.

Интегрирование методом Монте Карло наиболее эффективно использовать для вычисления многомерных интегралов.

habr.com/post/274975 - Метод Монте-Карло и его точность

Для получения более точного результата интегрирования используются вариации метода Монте Карло MISER и VEGAS.

Outline

Прошлые темы

Случайные события и величины

Метод Монте-Карло

интегрирование

Задача Бюффона

Случайные блуждания

Поток событий

Задача Бюффона

Французский математик Бюффон определил, что если на поле, разграфленное параллельными прямыми, расстояние между которыми L , бросается наугад игла длиной l , то вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну прямую, определяется формулой:

$$P = \frac{2l}{\pi L}$$

Задача Бюффона

С другой стороны вероятность P может быть определена из эксперимента:

$$P = \frac{m}{n}$$

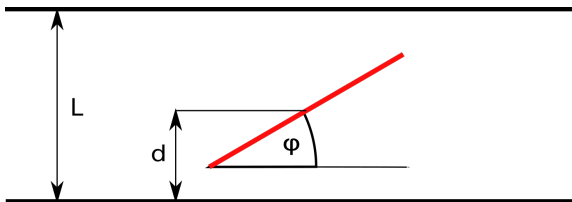
где m - количество исходов, где игла пересекла линию;
 n - общее число бросков иглы.

Задача Бюффона

Как моделировать бросок иглы?

Задача Бюффона

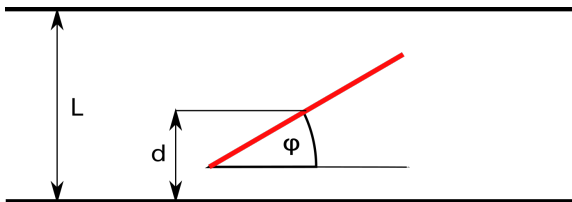
Как моделировать бросок иглы?



Условие пересечения линии иглой?

Задача Бюффона

Как моделировать бросок иглы?



Условие пересечения линии иглой?

$$d < \frac{l \sin \phi}{2}$$

Задача Бюффона

Моделируем случайные величины d и ϕ

$$0 \leq d \leq L$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

Задача Бюффона

Моделируем случайные величины d и ϕ

$$0 \leq d \leq L$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

Какие распределения должны иметь эти величины?

Задача Бюффона

Моделируем случайные величины d и ϕ

$$0 \leq d \leq L$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

Какие распределения должны иметь эти величины?

Но одно из значений расстояния d или угла ϕ не является более вероятным чем другое. Значит обе величины подчиняются равномерному распределению на указанных выше отрезках.

Тогда моделируя броски (*проводя статистические испытания*) можно подсчитать число пересечений линии и определить вероятность P , которая связана с π

Метод статистических испытаний

Метод статистических испытаний используют там, где натурный эксперимент провести трудно.

Например для моделирования устойчивости строительной конструкции.

Прочность материалов - случайная величина, которая зависит от условий производства.

Прочность заливных железобетонные конструкций, помимо прочего зависит от условий заливки бетона.

Класс бетона

Производить бетон, который будет иметь заданную прочность достаточно сложно.

Поэтому при описании его прочностных свойств, используют характеристику прочности, которая называется классом.

Класс бетона В — это кубиковая прочность в МПа, принимаемая с гарантированной обеспеченностью (доверительной вероятностью) 0.95.

Кроме прочности строительных конструкций, случайных характер носят и нагрузки.

В большой степени это касается временных нагрузок. Например нагрузка на мост от проезжающих автомобилей, ветровая и снеговая нагрузка на крыши зданий.

Проводя статистические испытания, в которых будут заданы разные значения для прочности и нагрузок и подсчитывая число разрушений, можно определить надёжность конструкции.

Случайный процесс

Outline

Прошлые темы

Случайные события и величины

Метод Монте-Карло

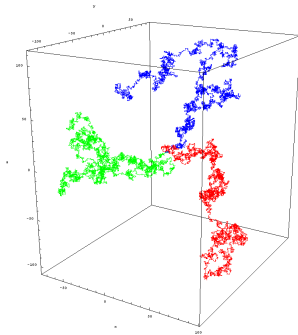
интегрирование

Задача Бюффона

Случайные блуждания

Поток событий

Случайные блуждания



Случайное блуждание — математическая модель процесса случайных изменений — шагов в дискретные моменты времени.

При этом предполагается, что изменение на каждом шаге не зависит от предыдущих и от времени

Одномерное случайное блуждание

- ▶ Считаем время дискретным
- ▶ y_0 - начальное состояние



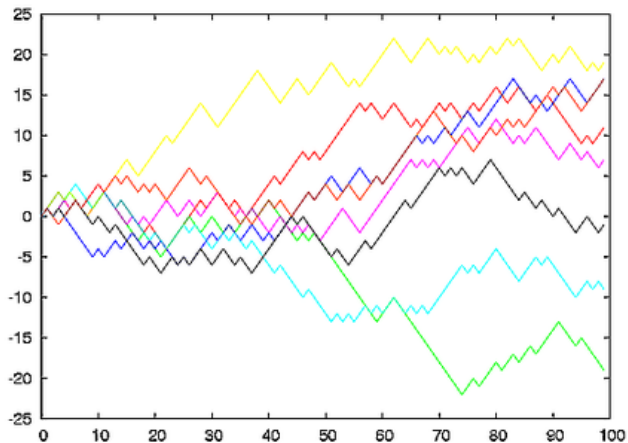
$$y_i = y_{i-1} + x_i$$



$$x_i = \begin{cases} 1, p_i \\ -1, q_i \end{cases}$$

- ▶ где p_i и q_i - вероятности; $q_i = 1 - p_i$

Одномерное случайное блуждание



Графики восьми одномерных случайных блужданий.

Броуновское движение

Случайные блуждания можно использовать для простого моделирования броуновского движения или диффузии без учёта столкновения молекул.

Задавая различные вероятности для приращения координаты частицы в ту или иную сторону можно моделировать снос частиц.

d-менное случайное блуждание

Для многомерного случайного блуждания модель отличается только тем, что X_i — .

$$Y_n = Y_0 + \sum_{i=1}^{i=n} X_i$$

Outline

Прошлые темы

Случайные события и величины

Метод Монте-Карло

интегрирование

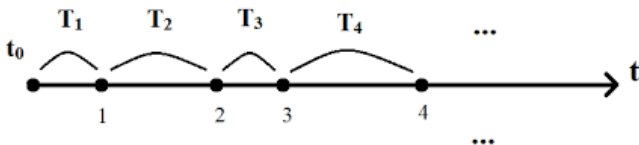
Задача Бюффона

Случайные блуждания

Поток событий

Поток событий

Поток событий (point processes on the real line?) — последовательность событий⁴, которые наступают в случайные моменты времени.



⁴события должны быть однородными, то есть похожими чем-то друг на друга

Поток событий

Примеры?

Как характеризовать поток?

Интенсивность потока λ (intensity) - среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Как характеризовать поток?

Интенсивность потока λ (intensity) - среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Как определить вероятность возникновения k событий за время t ?

Как характеризовать поток?

Интенсивность потока λ (intensity) - среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Как определить вероятность возникновения k событий за время t ?

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

закон Пуассона

Время между событиями?

Как моделировать время между событиями?

Время между событиями?

Как моделировать время между событиями?

Например с помощью экспоненциально распределённой СВ

Время между событиями?

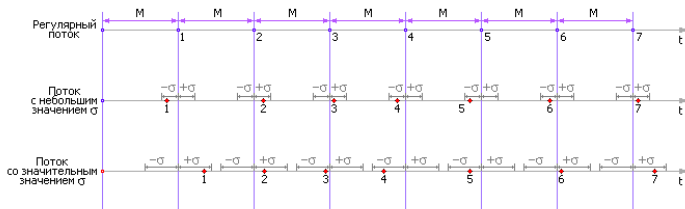
Как моделировать время между событиями?

Например с помощью экспоненциально распределённой СВ

Если время между событиями заранее определено, то поток событий является *детерминированным*

Как характеризовать поток?

Дисперсия σ^2 - разброс во времени прихода событий относительно математического ожидания



Свойства потока

Поток событий может обладать следующими свойствами

- ▶ **Стационарность** - частота появления событий постоянна
 $\lambda(t) = \text{const}$
- ▶ **Ординарность** - то есть вероятность одновременного появления двух и более событий равна нулю
- ▶ **Отсутствие последействия** - вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Простейший поток

Простейший (стационарный пуассоновский) поток - это стационарный ординарный поток без последствия.

Отличительным свойством такого потока событий является равенство математического ожидания и стандартного отклонения:

$$m = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Пример

Каково среднее время суточного простоя оборудования технологического узла, если узел обрабатывает каждое изделие случайное время, заданное интенсивностью потока случайных событий λ_2 ?

При этом экспериментально установлено, что привозят изделия на обработку тоже в случайные моменты времени, заданные потоком λ_1 партиями по 8 штук, причем размер партии колеблется случайно по нормальному закону с $m = 8$, $\sigma = 2$. До начала моделирования $T = 0$ на складе изделий не было.

Необходимо промоделировать этот процесс в течение $T_{=100}$ часов⁵

⁵Задача с курса:

Моделирование нестационарных потоков событий

Поток будет *нестационарным* если интенсивность событий меняется с течением времени $\lambda = f(t)$

На практике многие потоки событий можно считать стационарными только на отдельных интервалах времени. Например среднее число звонков в час в круглосуточную службу технической поддержки велико в течении рабочего дня (в определённые часы интенсивность обращений можно считать постоянной), а к вечеру число звонков снижается.

Материалы курса

github.com/ivtipm/computer-simulation