Компьютерное моделирование

Метод Монте Карло. Потоки событий.

Кафедра ИВТ и ПМ

2018

Outline

Прошлые темы

- Модель
- Примеры

Прошлые темы

- Модель
- Примеры
- Состояние модели
- Стохастическая модель

Прошлые темы

- Модель
- Примеры
- Состояние модели
- Стохастическая модель
- Детерминированная модель

Прошлые темы

- Модель
- Примеры
- Состояние модели
- Стохастическая модель
- Детерминированная модель
- Дискретная модель

Прошлые темы

- Модель
- Примеры
- Состояние модели
- Стохастическая модель
- Детерминированная модель
- Дискретная модель
- Моделирование
- Компьютерное моделирование
- Информационная модель

Outline

Outline

Случайное событие

События:

- **Достоверным** событием называется событие, которое в результате опыта или наблюдения непременно должно произойти. Обозначается символом Ω
- Событие, которое никогда не реализуется в результате случайного эксперимента, называется **невозможным** и обозначается символом $\varnothing$
- Событие называется **случайным**, если оно достоверно непредсказуемо.

Примеры случайных событий?

Полная группа событий

Полной группой событий называется система случайных событий такая, что в результате произведенного случайного эксперимента непременно произойдет одно и только одно из них.

Сумма вероятностей всех событий в группе всегда равна 1.

Полная группа событий

Примеры?

Outline

Случайная величина

Случайная величина (Random variable) - величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

- **Дискретная** (discrete) СВ принимает конечное или счетное число значений.
- **Непрерывная** (continuous) СВ может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Случайная величина

Случайная величина обычно обозначается заглавной латинской буквой, например X.

Возможные значения случайной величины обозначаются соответствующей строчной буквой.

$$\mathtt{X} = \{\mathrm{x}_1, x_2, ..., x_n\}$$

Случайная величина

Примеры дискретных случайных величин?

Случайная величина

Примеры дискретных случайных величин?

Примеры непрерывных случайных величин?

Случайная величина

Могут ли разные значения дискретной СВ "выпадать"в результате опыта с разной вероятностью?

Случайная величина

Могут ли разные значения дискретной СВ "выпадать"в результате опыта с разной вероятностью?

Да, например количество выпавших очков на несимметричной игральной кости.

Случайная величина

Могут ли разные значения дискретной СВ "выпадать"в результате опыта с разной вероятностью?

Да, например количество выпавших очков на несимметричной игральной кости.

Как описать такую случайную величину?

Случайная величина

Могут ли разные значения дискретной СВ "выпадать"в результате опыта с разной вероятностью?

Да, например количество выпавших очков на несимметричной игральной кости.

Как описать такую случайную величину?

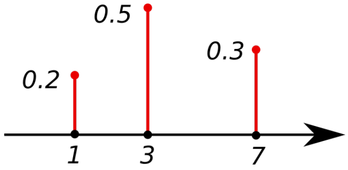
Поставить в соответствие значениям случайное величины вероятности.

Закон распределения

Закон распределения, функция вероятности (probability mass function) дискретной СВ – это соответствие между возможными значениями этой величины и их вероятностями.

Сумма всех значений функции вероятности $p(x)$ равна единице

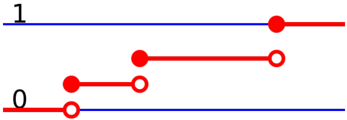
$$\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$$



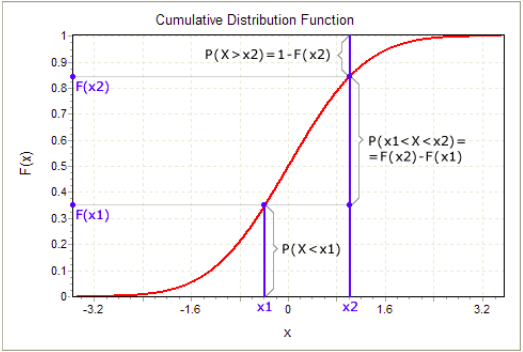
Функция распределения (Cumulative distribution function, cdf) дискретной СВ - вероятность того, что СВ величина примет значение меньше данного.

$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = \sum x_i < x p(x_i)$$



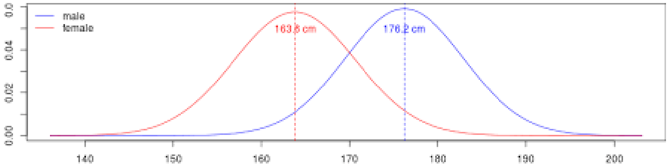
Функция распределения непрерывной СВ



Плотность распределения

Для непрерывной случайное величины функция вероятности не используется, потому как возможных значений такой величины бесконечно много, а значит на каждое такое значение приходится бесконечно малая доля вероятности.

Вместо функции вероятности используется понятие *плотность распределения* (probability density functions, pdf) - $f(x)$.



Математическое ожидание и дисперсия

- Математическое ожидание
  $M(X)$ или $E(X)$

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i.$$

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx.$$

Математическое ожидание и дисперсия?

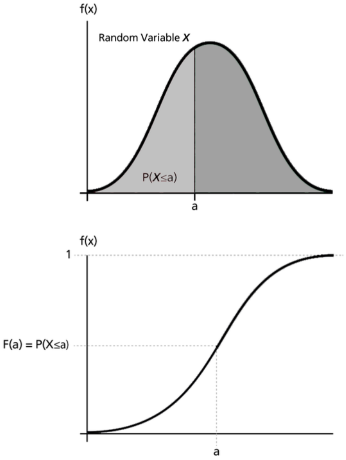
- Дисперсия
  $D(X)$

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - M[X])^2)$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - M[X])^2 dx),$$

На практике вместо дисперсии часто используют среднеквадратическое ускорение $\sigma(x)$.

плотность распределения и закон распределения

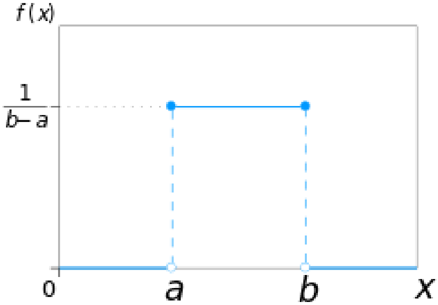


$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Outline

Равномерное распределение



Все возможные значения случайной величины равновероятны.

Равномерное распределение может иметь как дискретная случайная величина, так и непрерывная

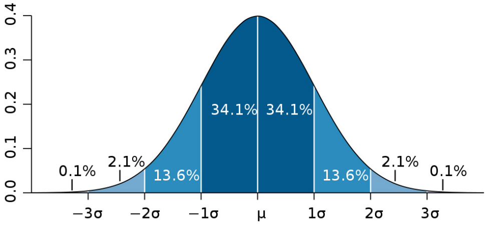
```
scipy.stats.uniform.rvs ( loc = a, scale = b)
```

Равномерное распределение. Примеры

- Количество очков, выпавших на игральной кости
- Число выпавшее на рулетке
- Номер автобусного билета (в единичном испытании)
- Время ожидания события, происходящего со строгой периодичностью. например время ожидания поезда, который отправляется со станции раз в 30 минут

Значения случайной величины с равномерным распределением используются для осуществления случайных выборок.

Нормальное распределение



μ - математическое ожидание, σ - среднеквадратичное отклонение.

Возможные значения СВ близкие к мат. ожидания наиболее вероятны.

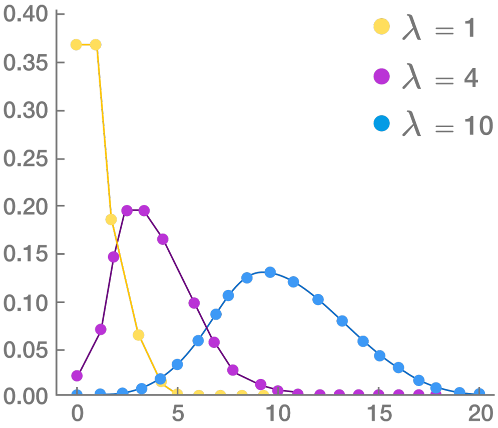
Если СВ является суммой большого числа других независимых величин, то она подчинятся нормальному закону распределения.[1]

[1] см. центральная предельная теорема

Нормальное распределение. Примеры

- Рост человека
- Ошибка измерения
- Прочность бетона
- Масса новорождённых детей
- Объём молока производимый коровой каждый день

Распределение Пуассона



СВ - количество событий на меру пространства или времени, при средней частоте λ

Распределение Пуассона. Примеры

ДТП в определённом районе города случается в среднем дважды в неделю.

Какова вероятность того, что на этой неделе не будет ДТП?

Используем закон Пуассона[2]:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

где $\lambda = 2$, $k = 0$ - число событий.

тогда $P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0.14$

[2] в пакете scipy: `scipy.stats.distributions.poisson.pmf(x, lambda)`

Распределение Пуассона. Примеры

ДТП в определённом районе города случается в среднем дважды в неделю.

Какова вероятность того, что на этой неделе не будет ДТП?

Используем закон Пуассона[2]:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

где $\lambda = 2$, $k = 0$ - число событий.

тогда $P(0) = \frac{\mathbf{2^0} e^{\mathbf{-2}}}{0!} = 0.14$

Какова вероятность того, что на этой неделе будет 1 и 2 ДТП?
$P(1) = \frac{\mathbf{2^1} e^{\mathbf{-2}}}{1!} = 0.27$, $P(2) = \frac{\mathbf{2^2} e^{\mathbf{-2}}}{2!} = 0.27$

Какова вероятность того, что на этой неделе будет больше 2-х ДТП?
P (X > 2) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)

[2] в пакете scipy: `scipy.stats.distributions.poisson.pmf(x, lambda)`

Распределение Пуассона. Примеры

Для при определении вероятности для заданного числа событий произошедших за t единиц времени параметр λ определяют так:

$$\lambda = tn$$

где n число событий за единицу времени

Сравним вероятности следующих событий:

- 3 ДТП за неделю
- 15 ДТП за 5 недель

Распределение Пуассона. Примеры

Для при определении вероятности для заданного числа событий произошедших за t единиц времени параметр λ определяют так:

$$\lambda = tn$$

где n число событий за единицу времени

Сравним вероятности следующих событий:

- 3 ДТП за неделю
- 15 ДТП за 5 недель

$n = 2,\ t_1 = 1,\ \lambda_1 = 2,\ t_2 = 5,\ \lambda_2 = 2 \cdot 5 = 10$

$P(3, \lambda_1 = 2) = 0.18$
$P(15, \lambda_2 = 10) = 0.035$

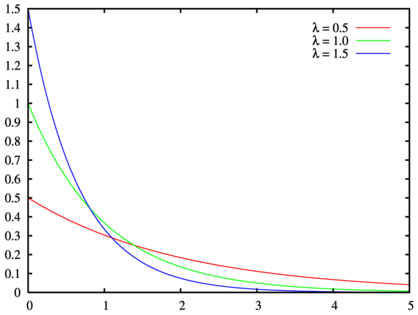
Распределение Пуассона. Примеры

Величины подчиняющиеся распределению Пуассона

- Число изюминок в булочке
- Число мутация в ДНК
- Число звонков в службу технической поддержки
- Число смертей в год для заданной возрастной категории
- Число альфа-частиц излучённых за определённый промежуток времени

kvant.mccme.ru/1988/08/raspredelenie_puassona.htm

Экспоненциальное (показательное) распределение



λ - параметр скорости. $M(X) = \frac{1}{\lambda}$

моделирует время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

Экспоненциальное (показательное) распределение. Пример

Среднее время ожидания покупателя - 15 минут. Какова вероятность, что во время перерыва длительностью 5, 10 и 15 минут придёт покупатель?

Тогда $\frac{1}{\lambda} = 15 \to \lambda = 0.067$.

$$P(X < 5) = F(5) = 1 - e^{-0.067 \cdot 5} = 0.28$$
$$P(X < 10) = F(10) = 1 - e^{-0.067 \cdot 10} = 0.49$$
$$P(X < 15) = F(15) = 1 - e^{-0.067 \cdot 15} = 0.63$$

```
scipy.stats.expon.cdf ( x = 5, scale = 15)  # 0.28
```

Экспоненциальное распределение vs распределение Пуассона

В чём разница и что общее у экспоненциального распределения и распределения Пуассона?

Экспоненциальное (показательное) распределение

Величины подчиняющиеся экспоненциальному распределению

- Расстояние между участками ДНК с мутациями
- Время ожидания звонка службу технической поддержки
- Время между излучением частиц
- Расстояние между местами ДТП на дороге[3]

[3] в предположении, что вероятность ДТП на каждом участке дороги одинакова

Outline


26
0
32
15
19

метод Монте-Карло

Методы Монте-Карло (ММК) — группа численных методов для изучения случайных процессов.

Процесс моделируется при помощи генератора случайных величин.

В 1940-х Джон фон Нейман и Станислав Улам в Лос-Аламосе предположили предложили использовать стохастический подход для аппроксимации многомерных интегралов

Outline

Интегрирование методом Монте Карло

Требуется вычислить определённый интеграл

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

В качестве аргумента функции $g(x)$ подставим случайную величину, тогда м.о. функции будет определятся:

$$M[g(x)] = \int_a^b g(x) f_g(x)\,dx.$$

Интегрирование методом Монте Карло

$$M[g(x)] = \int_a^b g(x) f_g(x)\, dx.$$

Используем СВ с нормальным распределением, где функция плотности $f(x) = 1/(b-a)$

$$M[g(x)] = \int_a^b \frac{g(x)}{b-a}\, dx.$$

$$\int_a^b g(x), dx = M[g(x)](b-a)$$

где $M[g(x)]$ можно определить как среднее арифметическое сгенерированного набора значений СВ.

Интегрирование методом Монте Карло наиболее эффективно использовать для вычисления многомерных интегралов.

habr.com/post/274975 - Метод Монте-Карло и его точность

Для получения боле точного результата интегрирования используются вариации метода Монте Карло MISER и VEGAS.

Outline

Задача Бюффона

Французский математик Бюффон определил, что если на поле, разграфленное параллельными прямыми, расстояние между которыми L, бросается наугад игла длиной l, то вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну прямую, определяется формулой:

$$P = \frac{2l}{\pi L}$$

Задача Бюффона

С другой стороны вероятность P может быть определена из эксперимента:

$$P = \frac{m}{n}$$

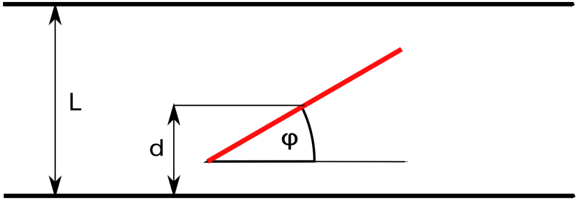
где m - количество исходов, где игла пересекла линию;
n - общее число бросков иглы.

Задача Бюффона

Как моделировать бросок иглы?

Задача Бюффона

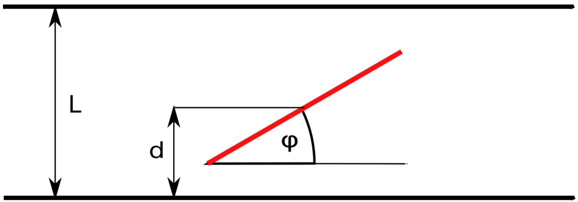
Как моделировать бросок иглы?



Условие пересечения линии иглой?

Задача Бюффона

Как моделировать бросок иглы?



Условие пересечения линии иглой?

$$d < \frac{l \sin \phi}{2}$$

Задача Бюффона

Моделируем случайные величины d и ϕ

$$0 \le d \le L/2$$

$$0 \le \phi \le \pi$$

Задача Бюффона

Моделируем случайные величины d и ϕ

$$0 \leq d \leq L/2$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

Какие распределения должны иметь эти величины?

Задача Бюффона

Моделируем случайные величины d и ϕ

$$0 \leq d \leq L/2$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

Какие распределения должны иметь эти величины?

Но одно из значений расстояния d или угла ϕ не является более вероятным чем другое. Значит обе величины подчиняются равномерному распределению на указанных выше отрезках.

Тогда моделируя броски (*проводя статистические испытания*) можно подсчитать число пересечений линии и определить вероятность P, которая связана с π

Метод статистических испытаний

Метод статистических испытаний используют там, где натурный эксперимент провести трудно.

Например для моделирования устойчивости строительной конструкции.
Прочность материалов - случайная величина, которая зависит от условий производства.

Прочность заливных железобетонные конструкций, помимо прочего зависит от условий заливки бетона.

Класс бетона

Производить бетон, который будет иметь заданную прочность достаточно сложно.

Поэтому при описании его прочностных свойств, используют характеристику прочности, которая называет классом.

Класс бетона B — это кубиковая прочность в МПа, принимаемая с гарантированной обеспеченностью (доверительной вероятностью) 0.95.

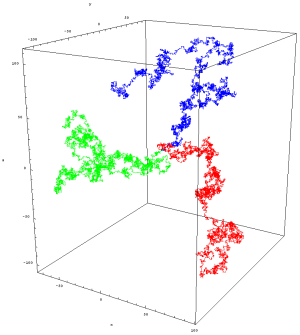
Кроме прочности строительных конструкций, случайных характер носят и нагрузки.

В большой степени это касается временных нагрузок. Например нагрузка на мост от проезжающих автомобилей, ветровая и снеговая нагрузка на крыши зданий.

Проводя статистические испытания, в которых будут заданы разные значения для прочности и нагрузок и подсчитывая число разрушений, можно определить надёжность конструкции.

Outline

Случайные блуждания



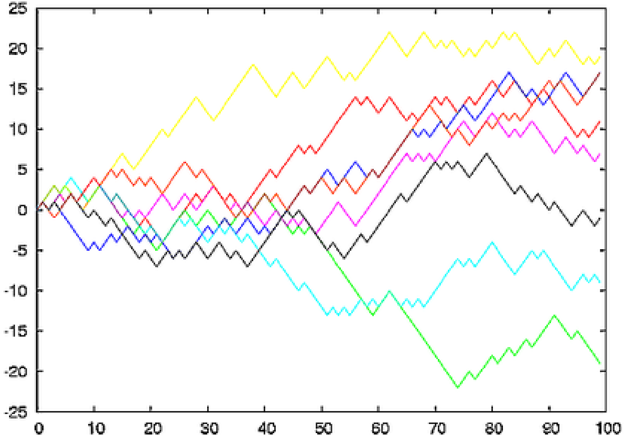
Случайное блуждание — математическая модель процесса случайных изменений — шагов в дискретные моменты времени.

При этом предполагается, что изменение на каждом шаге не зависит от предыдущих и от времени

Одномерное случайное блуждание

- Считаем время дискретным
- y_0 - начальное состояние
- $$y_i = y_{i-1} + x_i$$
- $$x_i = \begin{cases} 1, p_i \\ -1, q_i \end{cases}$$
- где p_i и q_i - вероятности; $q_i = 1 - p_i$

Одномерное случайное блуждание



Графики восьми одномерных случайных блужданий.

d-меное случайное блуждание

Для многомерного случайного блуждания модель отличается только тем, что X_i - многомерная случайная величина.

$$Y_n = Y_0 + \sum_{i=1}^{i=n} X_i$$

Применение

Случайные блуждания можно использовать для простого **моделирования броуновского движения** (см. Винеровский процесс) или диффузии без учёта столкновения молекул.

Задавая различные вероятности для приращения координаты частицы в ту или иную сторону можно моделировать снос частиц.

Задача о разорении игрока

За столом сидят два игрока. У первого в распоряжении находится -A (A<0, -A>0) рублей, у второго в распоряжении находится B (B>0) рублей.

Перед ними на столе лежит асимметричная монета (вероятность, что выпадет аверс, может равняться любому числу от 0 до 1 включительно). Если на монете выпадает аверс, то рубль выигрывает первый игрок (второй игрок выплачивает первому 1 рубль), а если выпадает реверс, то первый игрок платит второму один рубль.

Требуется найти вероятность того, что один из игроков проиграется в ноль за n шагов, и вероятность проигрыша каждого азартного игрока. Также необходимо вычислить среднюю длину игры.

Применение

- Гипотеза случайного блуждания: цены на акции изменяются хаотически.
- Дрейф генов - изменение частот генов в популяции
- Биодиффузия - распространение особей.

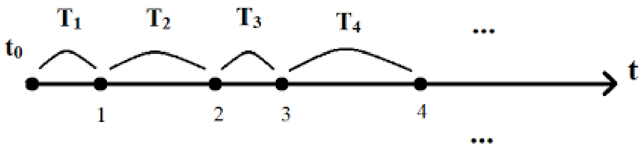
Вариации

- **случайные блуждания на графе.** например моделирование случайной смены состояний системы
- **случайные блуждания с учётом предыдущих шагов.** пример: не посещать ранее пройденные точки; движение нескольких агентов (с появлением и исчезновением агентов).

Outline

Поток событий

Поток событий (point processes on the real line) — последовательность событий[4], которые наступают в случайные моменты времени.



[4]события должны быть однородными, то есть похожими чем-то друг на друга

Поток событий

Примеры?

Как характеризовать поток?

Интенсивность потока λ (intensity) - среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Как характеризовать поток?

Интенсивность потока λ (intensity) - среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Как определить вероятность возникновения k событий за время t?

Как характеризовать поток?

Интенсивность потока λ (intensity) - среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Как определить вероятность возникновения k событий за время t?

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

закон Пуассона

Время между событиями?

Как моделировать время между событиями?

Время между событиями?

Как моделировать время между событиями?

Например с помощью экспоненциально распределённой СВ

Время между событиями?

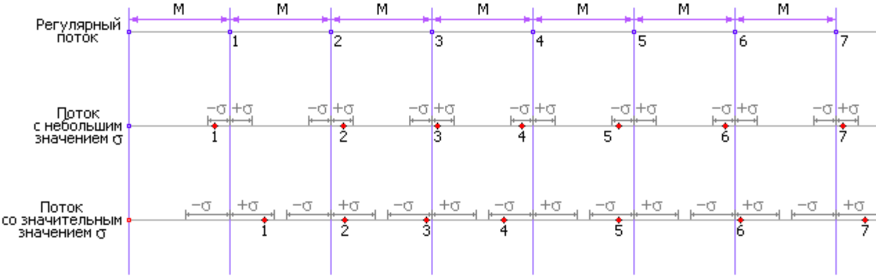
Как моделировать время между событиями?

Например с помощью экспоненциально распределённой СВ

Если время между событиями заранее определено, то поток событий является *детерминированным*

Как характеризовать поток?

Дисперсия σ^2 - разброс во времени прихода событий относительно математического ожидания



Свойства потока

Поток событий может обладать следующими свойствами

- **Стационарность** - интенсивность потока событий не меняется с течением времени $\lambda(t) = const$
- **Ординарность** - то есть вероятность одновременного появления двух и более событий равна нулю
- **Отсутствие последействия** - вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Outline

Простейший поток

Простейший (стационарный пуассоновский) поток - это **стационарный ординарный** поток **без последействия**.

Отличительным свойством такого потока событий является равенство математического ожидания и стандартного отклонения:

$$m = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Пример

Каково среднее время суточного простоя оборудования технологического узла, если узел обрабатывает каждое изделие случайное время, заданное интенсивностью потока случайных событий λ_2?

При этом экспериментально установлено, что привозят изделия на обработку тоже в случайные моменты времени, заданные потоком λ_1 партиями по 8 штук, причем размер партии колеблется случайно по нормальному закону с $m = 8$, $\sigma = 2$. До начала моделирования Т $=$ 0 на складе изделий не было.

Необходимо промоделировать этот процесс в течение $T_{=100}$ часов[5]

[5] Задача с курса: http://stratum.ac.ru/education/textbooks/modelir/lection28.html

Моделирование нестационарных потоков событий

Поток будет *нестационарным* если интенсивность событий меняется с течением времени $\lambda = f(t)$

На практике многие потоки событий можно считать стационарными только на отдельных интервалах времени. Например среднее число звонков в час в круглосуточную службу технической поддержки велико в течении рабочего дня (в определённые часы интенсивность обращений модно считать постоянной), а к вечеру число звонков снижается.

Outline

Поток Эрланга

Поток Эрланга k-го порядка — это поток случайных событий, получающийся, если в простейшем случайном потоке сохранить каждое k-е событие, а остальные отбросить.

Поток Эрланга

Поток Эрланга k-го порядка — это поток случайных событий, получающийся, если в простейшем случайном потоке сохранить каждое k-е событие, а остальные отбросить.

Будет ли в таком потоке иметь место последействие?

Поток Эрланга

Сумма большого числа случайных величин - более предсказуемая величина, чем эти величины по отдельности.

Значит время между событиями, особенно при большом значении k можно грубо считать постоянным.

Следовательно, время возникновения следующего события также становится более предсказуемым, на наго влияет время возникновения предыдущего события - поток обладает свойством последействия.

Поток Эрланга

Интенсивность потока k-го порядка:

$$\lambda_k = \frac{\lambda}{k}$$

Математическое ожидание времени между событиями:

$$M_k = \frac{1}{\lambda_k}$$

Стандартное отклонение времени между событиями:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{k}\lambda_k}$$

где λ - интенсивность порождающего потока Пуассона

Поток Эрланга. Пример

Выход из строя лампочек на опоре уличного освещения.

Примем время наблюдения 100 лет. Из паспортных данных на эти изделия известно, что среднее время работы изделия на отказ составляет 1.5 года; среднеквадратическое отклонение — 0.5 года.

Поток Эрланга. Пример

Выход из строя лампочек на опоре уличного освещения.

Примем время наблюдения 100 лет. Из паспортных данных на эти изделия известно, что среднее время работы изделия на отказ составляет 1.5 года; среднеквадратическое отклонение — 0.5 года.

Можно ли представить модель потоком Пуассона?

Поток Эрланга. Пример

Выход из строя лампочек на опоре уличного освещения.

Примем время наблюдения 100 лет. Из паспортных данных на эти изделия известно, что среднее время работы изделия на отказ составляет 1.5 года; среднеквадратическое отклонение — 0.5 года.

Можно ли представить модель потоком Пуассона?

Для потока Пуассона должно соблюдаться равенство математического ожидания и стандартного отклонения времени между событиями. Здесь это не так. Поэтому используем поток Эрланга.

Поток Эрланга. Пример

Определим параметры потока

Поток Эрланга. Пример

Определим параметры потока

$\lambda_k = \frac{1}{m}$, $\lambda_k = \frac{1}{1.5} = 0.67$

Определим порядок k из выражения:

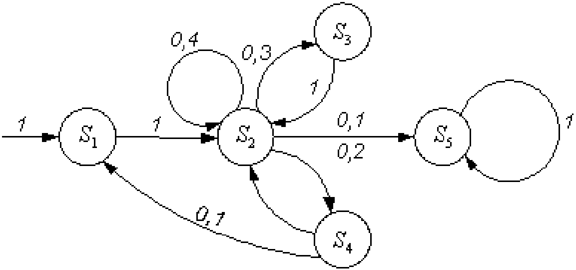
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{k}\lambda_k}$, $k \approx 9$

Интенсивность порождающего потока Пуассона
$\lambda = \lambda_k / k = 6.03$

Outline

Цепи Маркова

Представим состояние системы в виде взвешенного графа.



веса - вероятность перехода из состояния в состояние.

вершины - состояния системы

Цепи Маркова

Такой граф можно описать **матрицей переходов**.

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

элемент матрицы - вероятности перехода из одного состояния в другое. Например, переход из состояния s_4 в s_2 произойдёт с вероятностью 0.9

Цепи Маркова

Для того чтобы определить *начальное состояние* системы зададим матрицу столбец из вероятностей, соответствующих всем состояниям.

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ \dots \\ p_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Цепи Маркова

Таким образом можно определить марковскую цепь задав:

- множество состояний системы $s_1, s_2, ..., s_n$
- вектор начальных вероятностей $P^{(0)} = (p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0)$
- матрицу переходов P

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Цепи Маркова

Цепь Маркова - последовательность *испытаний*, в каждом из которых система принимает одно из n состояний полной группы $(s_1, s_2, ..., s_n)$. При этом вероятность p_{ij} перехода из i-го состояния в j-е, зависит только от результатов последнего испытания, т.е. только от последнего состояния.

Цепь Маркова - это автомат.

Цепи Маркова

Переход системы из одного состояния в другое может происходить в случайные моменты времени или в фиксированные. Во втором случае время называют **дискретным**

Матрица перехода может изменятся при каждом шаге.
Если матрица перехода остаётся неизменной, то цепь Маркова называют **однородной**.

На слайдах выше рассмотрена именно детерминированная однородная цепь Маркова.

Цепи Маркова

Определение вероятностей перехода в состояния.

Вероятности перехода в каждое из состояний на первом шаге:

$$P^{(1)} = P^{(0)} \times P$$

для получения вероятностей перехода в состояния на k-м шаге:

$$P^{(k)} = P^{(0)} \times P^k$$

где верхний индекс (k) означает номер шага.

Цепи Маркова. Пример

Если погода ясная, то вероятность, что она будет ясной на следующий день, составляет 0.5; вероятность, что она будет умеренно пасмурной, равна 0.4; а вероятность пасмурной погоды на следующий день составляет 0.1

Если погода умеренно пасмурная, то вероятность, что на следующий день она будет ясной, равна 0.3; вероятность, что погода останется умеренно пасмурной, равна 0.5; а вероятность пасмурной погоды на следующий день составляет 0.2

Если же погода пасмурная, то вероятность, что она будет ясной на следующий день составляет 0.2; вероятность что она станет умеренно пасмурной, равна 0.4; вероятность что на следующий день она останется пасмурной, равна 0.4

- Если вероятность ясной погоды в воскресенье равна 0.6, а вероятность умеренно пасмурной — 0.4, то какова вероятность, что погода в понедельник будет ясной?
- Какова вероятность, что во вторник погода будет умеренно пасмурной?

Ссылки

Материалы курса

github.com/ivtipm/computer-simulation