Математика в Python

2018

План

Outline

Jupyter

jupyter Untitled Last Checkpoint: 6 minutes ago (unsaved changes)

File Edit View Insert Cell Kernel Help Trusted Python

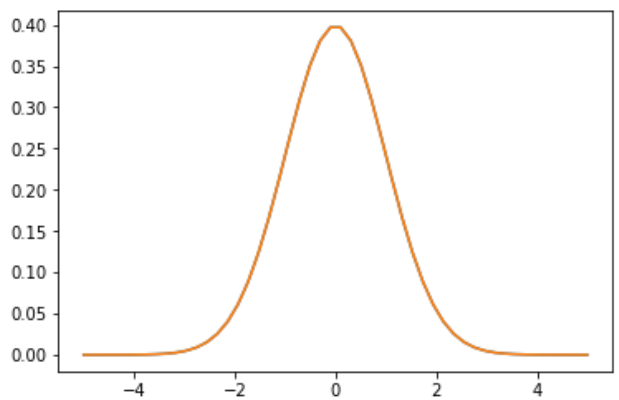
Code

In [7]:
```
from math import *
import numpy as np
from matplotlib.pyplot import *
```

In [6]:
```
math.sin( math.pi )
```

Out[6]: 1.2246467991473532e-16

In [14]:
```
def norm_pdf(x):
    return 1/sqrt(2*pi)*exp(-x**2/2)

X = np.linspace(-5, 5)
Y = [ norm_pdf(x) for x in X ]

plot(X,Y)
show()
```



Jupyter

Jupyter входит в дистрибутив **Anaconda**.

Помимо Jupyter туда входят популярные метематические пакеты для Python, не включенные в стандартную библиотеку языка.

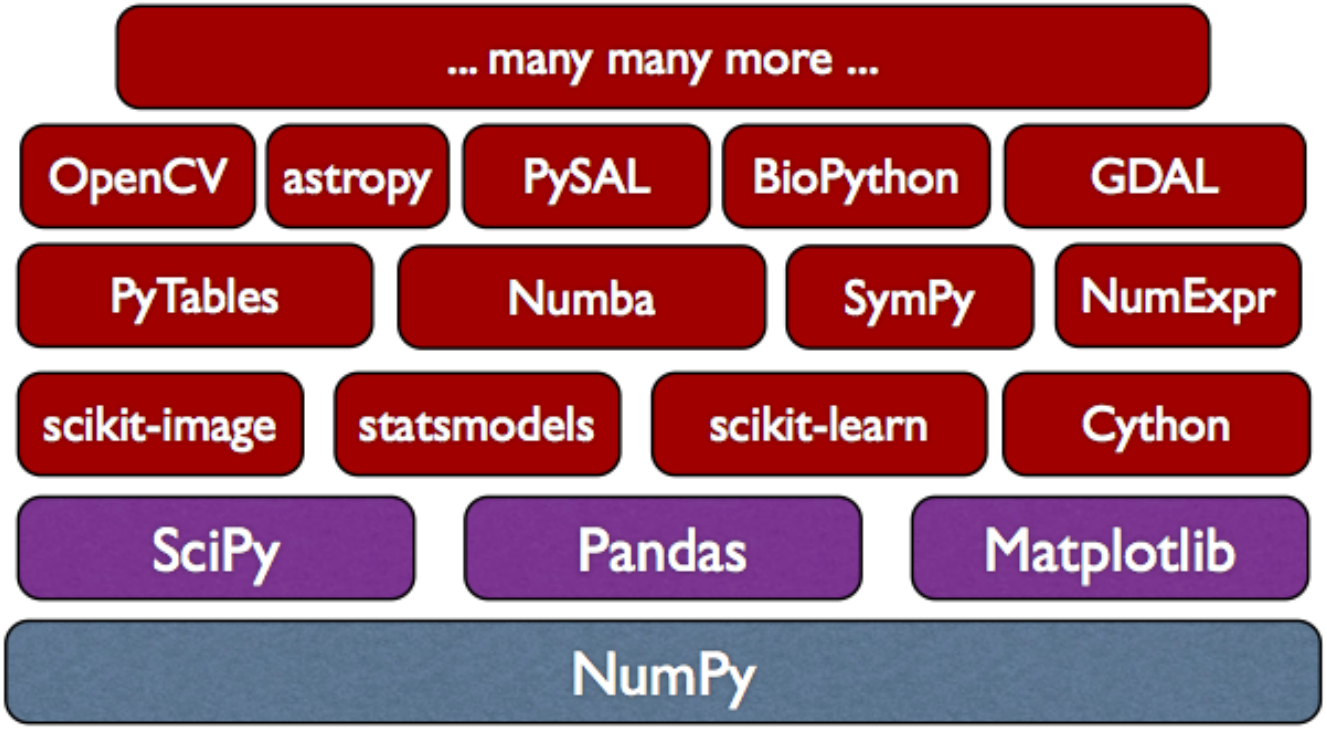
Доклад: как использовать Jupyter на 100%
https://www.youtube.com/watch?v=q4d-hKCpTEc

Некоторые популярные математические пакеты

- **numpy** - работа с матрицами и многомерными массивами; оптимизирован для работы с многомерными массивами; Написан на C и Python.
- **scipy** - научные и инженерные вычисления, использует numpy;
- **matplotlib** - построение графиков и диаграмм;
- **seaborn** - визуализация статистических данных, эстетичнее чем matplotlib;
- **mpld3** - использование D3.js для построения интерактивных matplotlib графиков в окне браузера;
- **pandas** - анализ данных: статистики, регрессия, визуализация и т.п.

Популярные математические пакеты

Многие пакеты построены на основе NumPy



Outline

DataFrame

Наборы значений часто удобнее хранить не в списках или динамических массивах numpy array (или ndarray, хранящих разные типы данных в столбцах), а в виде таблиц **DataFrame** из пакета *pandas*.

Этот тип данных помимо хранения значений даёт возможность делать простые запросы, более гибок при обращении с данными. Например можно выбирать строки, поля которых содержат только положительные значения.

DataFrame

Создание DataFrame из словаря[1]

```
import pandas as pd

# создание пустой таблицы
D0 = pd.DataFrame()

# создание пустой таблицы с названиями столбцов
D1 = pd.DataFrame( columns = ['x', 't'] )

# создание таблицы с данными из словаря
D = pd.DataFrame( {'x': [1,2,3],
                   't': [0, 0.1, 0.2] } )
```

x, t - заголовки столбцов таблицы

[1] словарь в Python задаётся в фигурных скобках; для создания корректного DataFrame ключи словаря должны иметь строковый тип

DataFrame

Запросы с условием:

```
# выбрать только те строки таблицы, где поле x >= 2
D[ D['x'] >= 2 ]

# выбрать только те строки таблицы,
# где поле x >= 2 и t != 0
D[ (D['x'] >= 2) & (D['t'] != 0) ]
```

DataFrame

Добавление новых столбцов в DataFrame похоже на добавление новой записи в словарь

```
# добавление столбца y с набором значений
D['y'] = [1,4,9]
```

Аналогичный синтаксис используется для доступа к столбцам и ячейкам

```
D['y']  # -> 1,4,9
D['y'][1]  # -> 4
```

DataFrame

Обращение по номеру

```
# 2-я строка (счёт начинается с 0)
D.iloc[2]  # t = 0.2, x = 3.0

# 2-я строка, нулевой столбец
D.iloc[2, 0] # t = 0.2
```

DataFrame

Сохранение в CSV файл

```
DataFrame.to_csv(filename= ... , sep=', ')
```

`filename` - имя файла
`sep` - разделитель для чисел в строке

DataFrame

Загрузка из CSV файла

```
pandas.read_csv(filename = ... , sep=', ') -> DataFrame
```

`filename` - имя файла
`sep` - разделитель для чисел в строке

DataFrame

Статистическая информация о данных

```
D.describe()
```

	Vx	Vy	x	y
count	3.0	3.000000	3.0	3.00
mean	1.0	0.733333	2.0	0.20
std	0.0	0.251661	1.0	0.10
min	1.0	0.500000	1.0	0.10
25%	1.0	0.600000	1.5	0.15
50%	1.0	0.700000	2.0	0.20
75%	1.0	0.850000	2.5	0.25
max	1.0	1.000000	3.0	0.30

DataFrame

Пакеты для визуализации данных (например seaborn) могут использовать DataFrame непосредственно в качестве источника данных, а не отдельные списки значений.

Outline

Линейная алгебра

```
import numpy as np

# Создание матрицы
A = np.array([ [1,2,3],
               [3,2,1],
               [2,1,3] ] )
```

Матрица A - это двумерный массив (список), только в обёртке numpy - ndarray.

Линейная алгебра

```
# умножение на число
A * 3.14
```

```
> array([[ 3.14,  6.28,  9.42],
         [ 9.42,  6.28,  3.14],
         [ 6.28,  3.14,  9.42]])
```

```
# Умножение на вектор
A * [2,3,4]
```

```
array([[ 2,  6, 12],
       [ 6,  6,  4],
       [ 4,  3, 12]])
```

Причём здесь вектор не обязательно должен быть типом numpy.

Линейная алгебра

```
# Сложение матриц
A + B

# Умножение матриц
A @ B
# или
np.dot(A,B)


# Обратная матрица
np.linalg.inv(A)
```

Линейная алгебра

Решение СЛАУ

```
# Настройка вывода. Число знаков после запятой - 4.
# не выводить числа в экспоненциальной форме
numpy.set_printoptions(precision=4, suppress=True)
A = np.matrix([
    [1, 2, 3],
    [3, 2, 1],
    [2, 3, 1]])
B = np.matrix([[1], [2], [3]])
X = np.linalg.solve(A, B)

matrix([[ 0.0833],
        [ 1.0833],
        [-0.4167]])
```

Стоит обратить внимание на то, что вектор-столбец определяется как матрица из одного столбца, а не как список.

DataFrame vs numpy.ndarray

- производительность чаще всего ndarray выше чем у DataFrame
- для ndarray реализованы операторы матричной алгебры и векторные варианты математических функций (например sin, ln и т.д.)
- индексация и обращение к элементам DataFrame более гибкие чем у ndarray
- но доступ к элементам занимает больше времени

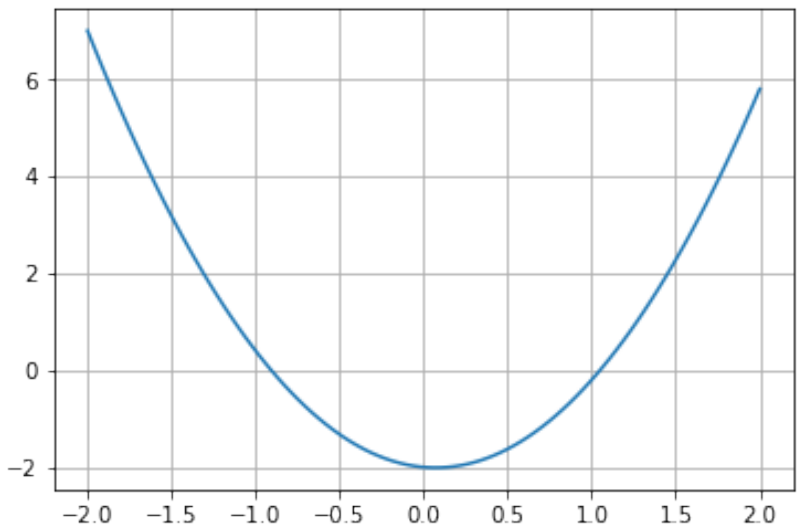
Outline

Полиномы

```
import numpy as np
# полнином одной переменной
p1 = np.poly1d([2.1, -0.3, -2])

print(p1)
# 2.1 x^2 - 0.3 x + 7

# вычисление значения полинома
p1(10) # 214.0

# корни полинома (p1 = 0)
p1.r
# [ 1.04993917 -0.90708203 ]
```

Полиномы

```
from matplotlib.pyplot import *

x = np.linspace(-2, 2, 100)
y = [p1(x) for x in x]

plot(x,y)
grid(True)
show()
```



Outline

Outline

Минимизация функции

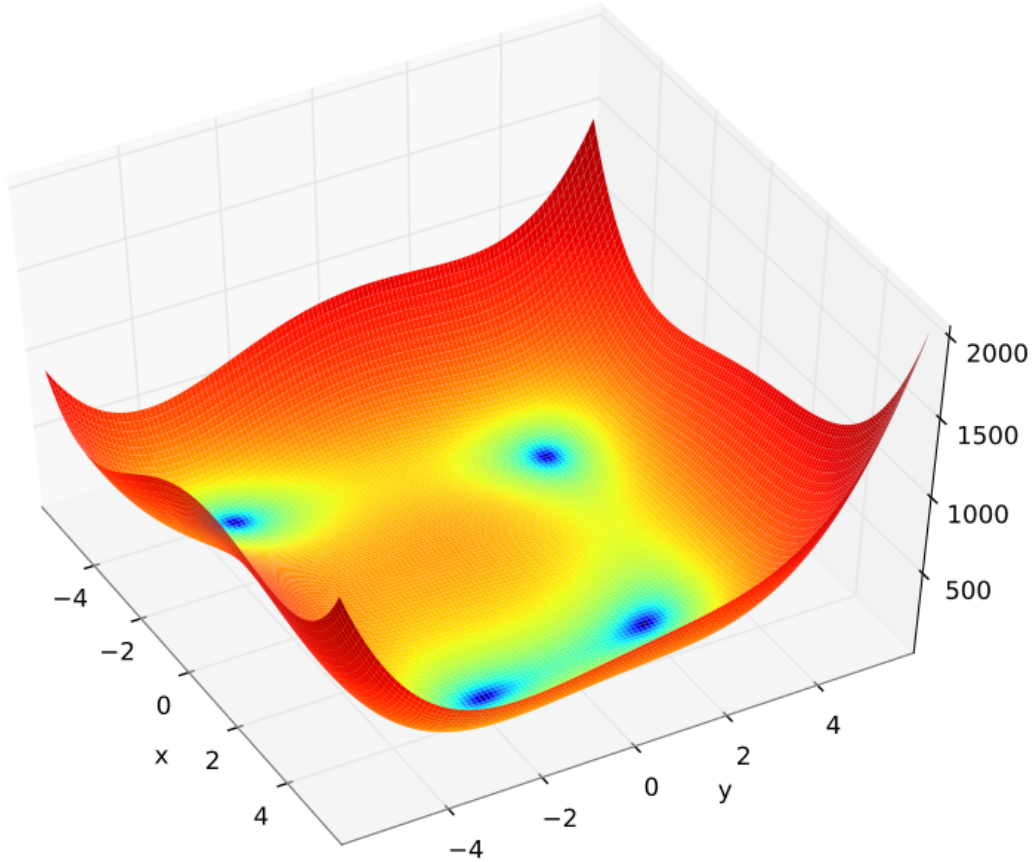
```
from scipy.optimize import minimize
x0 = 100 # начальное значение
minimize(lambda x: (x-3)*(x-3) - 5, x0)
```

Вывод:

```
    nfev: 12
    jac: array([ 0.])
    message: 'Optimization terminated successfully.'
    fun: -5.0
    success: True
    x: array([ 3.])
    njev: 4
    hess_inv: array([[ 0.5]])
    status: 0
```

Минимум функции: f(3) = -5

Тестовые функции для оптимизации



см. также список тестовых функций для оптимизации

Outline

Интерполяция - нахождение промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Сплайн

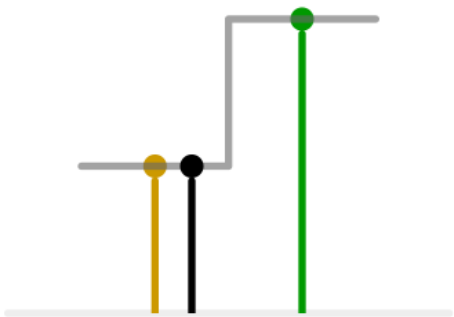
Сплайн (spline) — функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым алгебраическим многочленом (полиномом).

Максимальная из степеней использованных полиномов называется **степенью сплайна**.

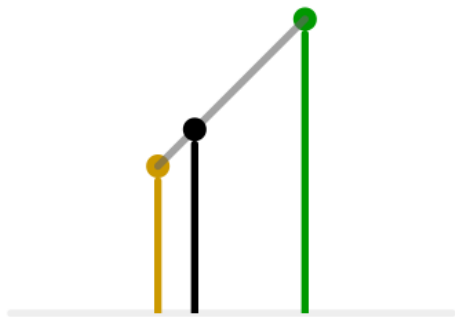
сплайн — это кусочно заданная функция

Сплайн

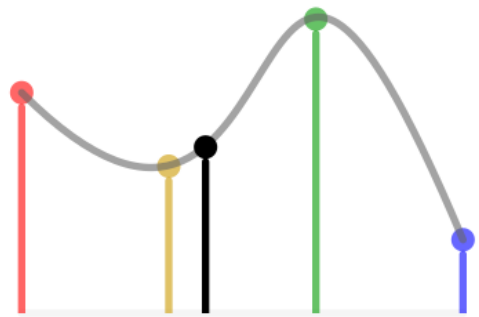
Примеры интерполяции для отдельных участков.



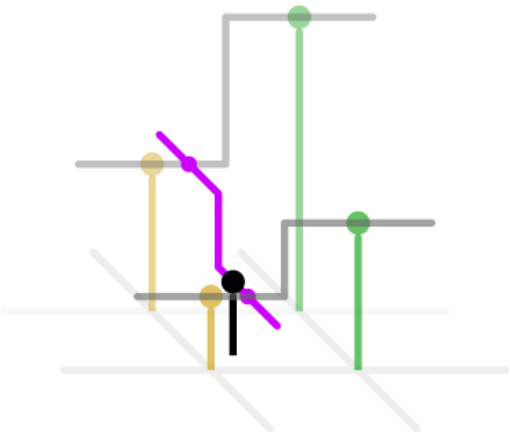
1D nearest-neighbour



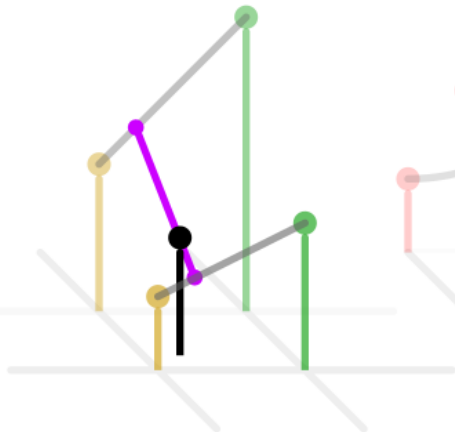
Linear



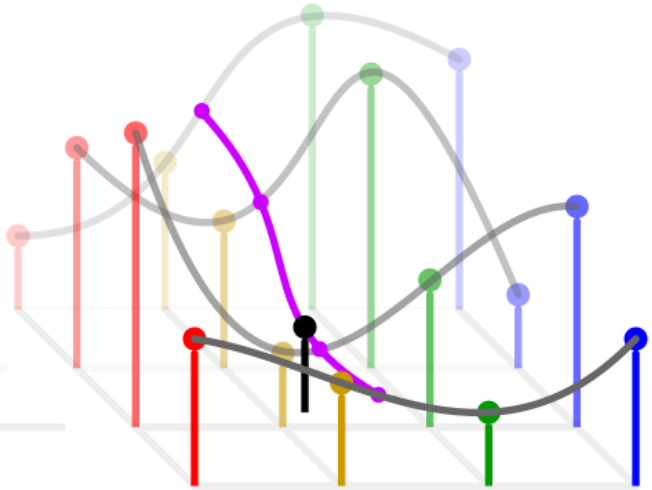
Cubic



2D nearest-neighbour



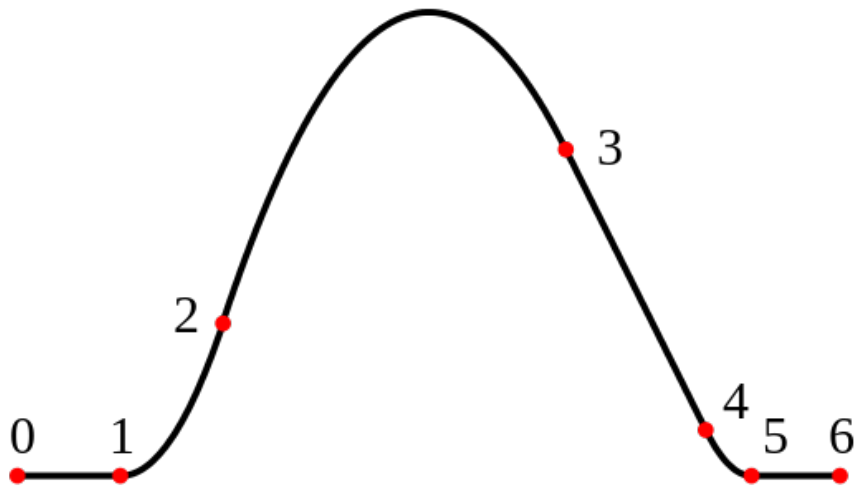
Bilinear



Bicubic

График кучочно заданной функции

Сплайн второй степени



- 0-1 Прямая
- 1-2 Парабола
- 2-3 Парабола
- 3-4 Прямая
- 4-5 Парабола
- 5-6 Прямая

Интерполяция

Интерполяция функции одной переменной

```
from scipy.interpolate import interp1d
```

Возможна интреполяция сплайном первой, второй и третей степени[2]

- slinear
- quadratic
- cubic

[2] см. другие способы в документации

Интерполяция

Пусть функция задана в табличном виде - набором значения X и Y.

Задача - определить значение функции для X, не перечисленного в таблице.

Применем для этого интерполяцию, построив функцию в аналитическом виде, которая будет проходить наиболее близко к заданым точкам.

Пример 1

```
from scipy.interpolate import interp1d

X = [1,2,3,4,5,6,7]
Y = [1,4,9,16,25,36,49]
func = interp1d(X, Y, kind='cubic')
```

func - функция определённая на отрезке от min(x) до max(x).
kind - тип интерполяции (см. справку)
В примере использована интерполяция сплайном третьего порядка.

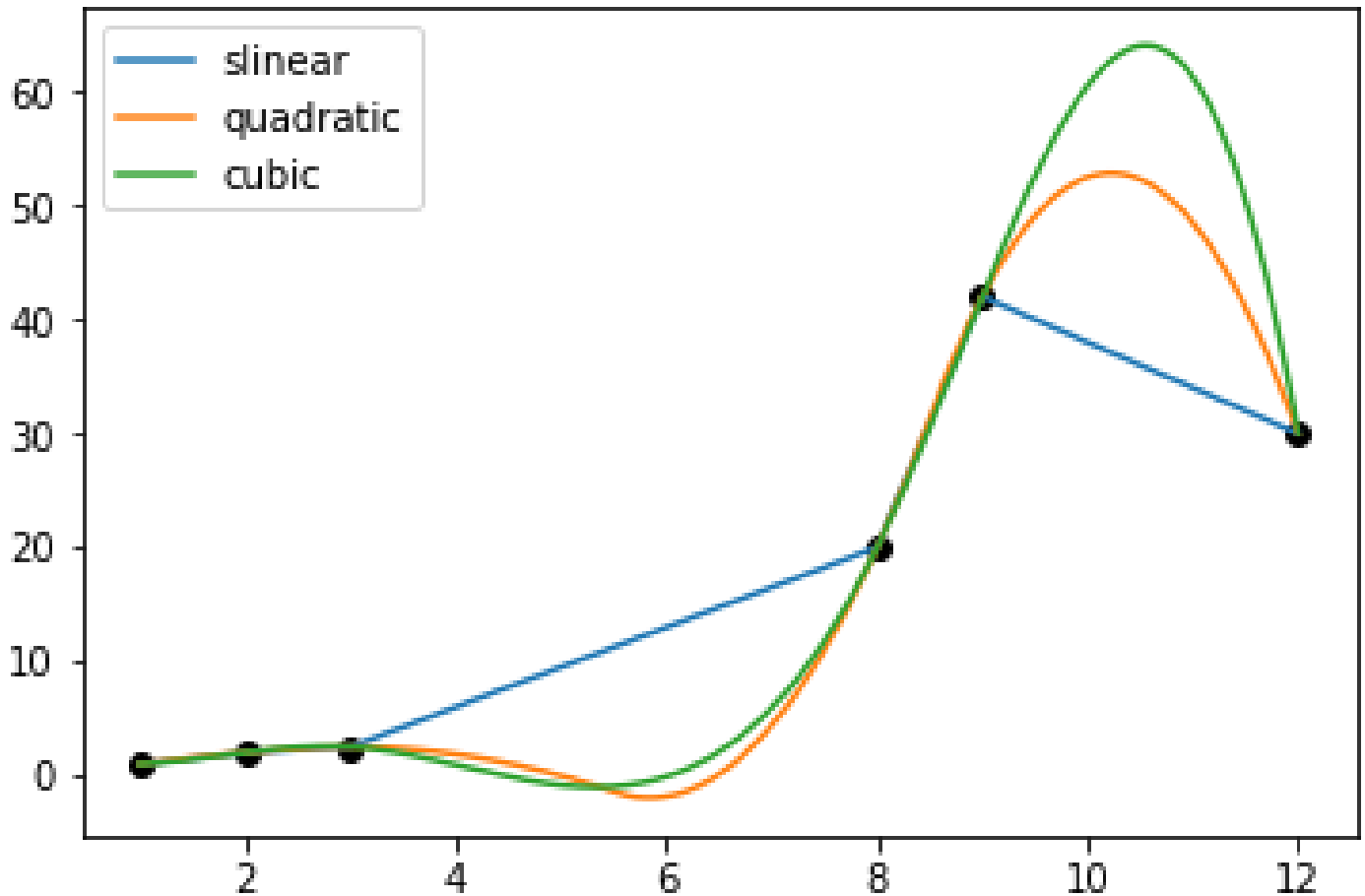
Теперь можно вычислять значение функции в любой точке.

```
func(5.3)

# array(28.090000000000003)
```

Пример 2

```
# таблично заданная функция
X = [1,2, 3, 8, 9, 12]
Y = [1,2,2.5, 20, 42, 30]

# создание сплайнов
f1 = interp1d(X,Y,'slinear')
f2 = interp1d(X,Y,'quadratic')
f3 = interp1d(X,Y,'cubic')

# набор точек для интреполяции
X0 = np.linspace(min(X), max(X), 1000)
Y1 = [f1(x) for x in X0]
Y2 = [f2(x) for x in X0]
Y3 = [f3(x) for x in X0]

plot(X,Y, 'o', color='black')
plot(X0, Y1, label='slinear')
plot(X0, Y2, label='quadratic')
plot(X0, Y3, label='cubic')

legend(loc='best')
show()
```

Пример 2



Пример 3

Интреполяция функции задающей поверхность

```
x = np.array([-5.0, -1.7,  1.7,  5.0])
y = np.array([-5.0, -1.7,  1.7,  5.0])
z = np.array([[ 50. ,  27.8,  27.8,  50. ],
              [ 27.8,  5.6 ,  5.6 ,  27.8],
              [ 27.8,  5.6 ,  5.6 ,  27.8],
              [ 50. ,  27.8,  27.8,  50. ]])

f = interp2d(x, y, z, kind='cubic')
```

Примеры использования модуля interpolate:
docs.scipy.org/doc/scipy-0.14.0/reference/tutorial/interpolate.html

Outline

Интегрирование

```
from scipy.integrate import quad

# интеграл от sin(x) в пределах от 0 до pi/2
quad(lambda x: sin(x): 0, pi/2)

>>> (0.9999999999999999, 1.1102230246251564e-14)
```

Outline

Дифференцирование

```
from scipy.misc import derivative
derivative(lambda t: -3/(t+2), 2, dx=1e-6)
```

```
0.1875000002620837
```

Outline

Некоторые распределения

Распределения случайных величин представлены соответствующими классами

```
from scipy.stats import uniform # равномерное распр.
from scipy.stats import norm # нормальное распр.
from scipy.stats import f  # распределение Фишера
from scipy.stats import t  # распред. Стьюдента (t распред)
from scipy.stats import chi2  # распред. Хи-квадрат
from scipy.stats import poisson  # распред. Пуассона
```

Классы представляющиее распределения (см. предыдущий слайд) имеют общие методы. Например создание выборки или вычисление функции распределения.

Смысл параметров (loc, scale, ...) большинства этих методов зависит от вида распределения и описан в дукументации класса.

Параметр *loc* обычно отвечает за *положение* кривой распределения. Этот параметр обычно связан с математическим ожиданием. например для нормального распределения он должен быть равен математичекому ожиданию - положению пика на кривой распределения

`scale` - параметр масштаба, определяет форму кривой. для нормального распределения параметр равен среднеквадратическому отклонению

Некоторые методы

- `cdf(self, x, *args, **kwds)`
  Cumulative distribution function - функция распределения ($F(x)$)

- `pdf(self, x, *args, **kwds)`
  Probability density function at x - функция плотности ($f(x)$)

Некоторые методы

- `rvs(self, *args, **kwds)`
  Random variates of given type. параметр size определяет размер (размерность) выборки.

- `isf(self, q, *args, **kwds)`
  `Inverse survival function (inverse of ‘sf‘) at q`
  Вычисления аргумента функции распределения $F(x)$ по её значению q.

Генерирование значений случайной величины

Метод rvs возвращает numpy array.

Сделать 10 значений (выборку из 10 значений)

```
norm.rvs( size = 10 )
```

Создать массив из 10 пар значений

```
norm.rvs( size = (10, 2) )
```

Генерирование значений случайной величины

Сделать выборку нормально распределённой величины с математическим ожиданием 172 и стандартным отклонение 6

```
x = norm.rvs(loc = 172, scale = 6, size = 100)
```

По выборке легко построить гистограмму:

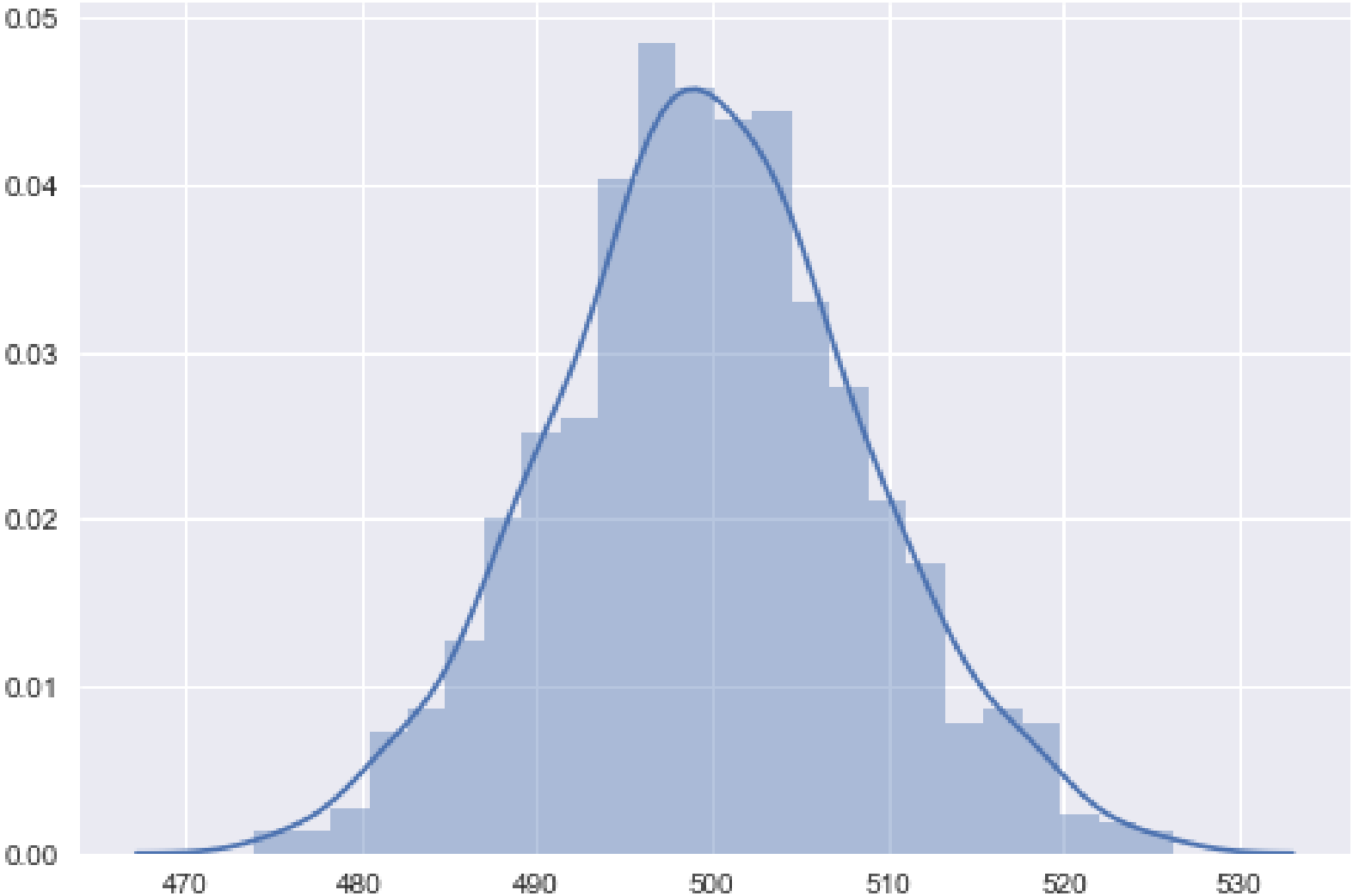
```
seaborn.distplot(x)
```

Outline

Гистограмма

```
from random import random
import seaborn
from matplotlib.pyplot import show

X = [ sum( [random() for i in range(1000)] )
                          for j in range(1000)]

# подготовим гистограмму и кривую распределения
seaborn.distplot(X)

show()
```

Гистограмма



Некоторые распределения

Вычислить вероятность того, что рост наугад выбранного человека будет меньше 180 см.
Средний рост людей 172 см.
Стандартное отклонение 7 см.

```
from scipy.stats import norm
norm.cdf( (180 - 172) / 7 )
```

0.8734510455264422 6

Сколько людей на Земле имеют рост меньше 180?

```
norm.cdf( (180 - 172) / 7 ) * 7.6e9
```

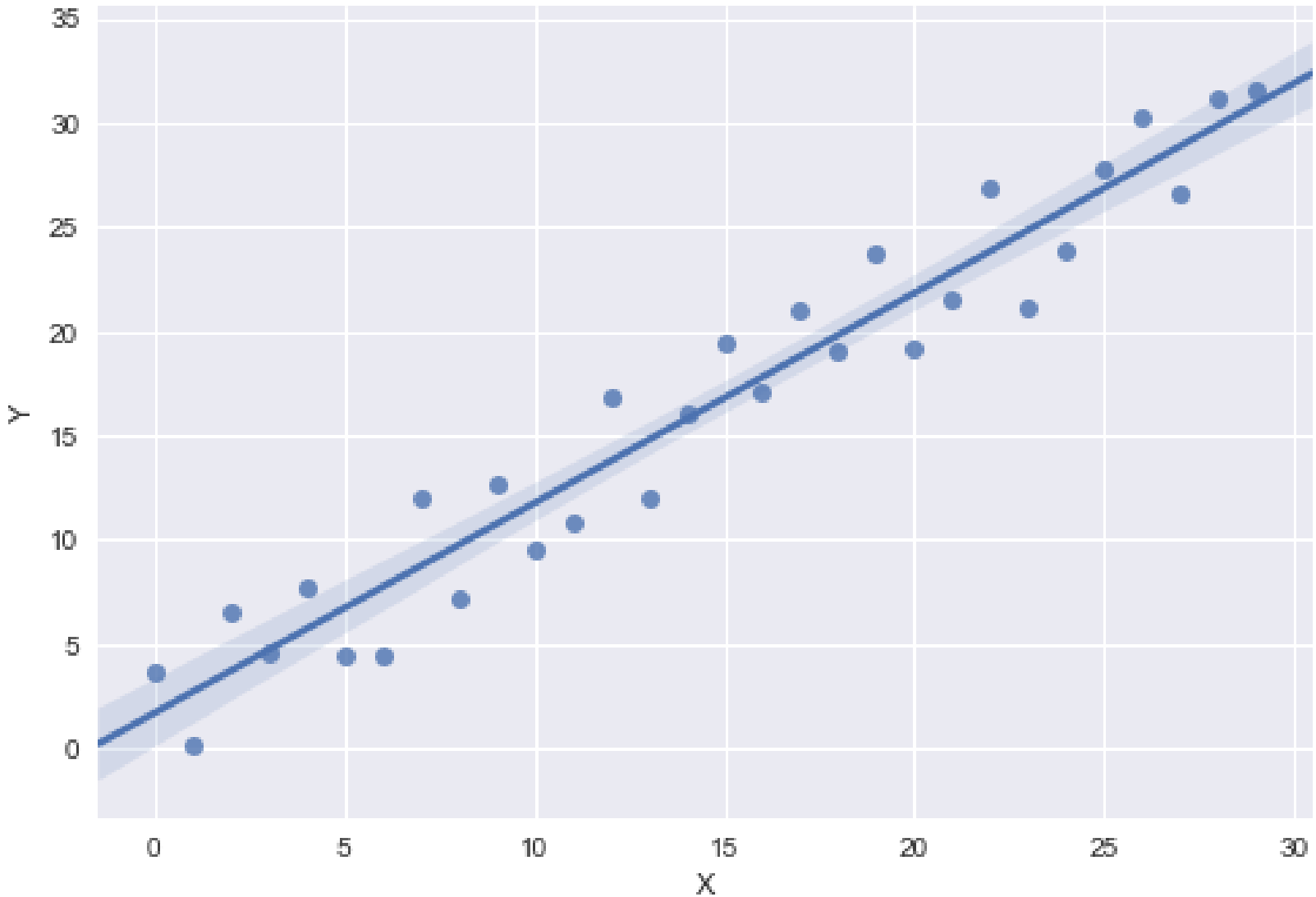
6 638 227 946

Outline

Коэффициент корреляции

```
import seaborn  # для визуализации

# Таблица для хранения стат.данных
from pandas import DataFrame

# поместим в таблицу как столбцы с заголовками X и Y
D = DataFrame( {'X':X, 'Y':Y} )

# Построим диаграмму рассеивания
seaborn.regplot(x='X', y='Y', data=D);

plt.show()
```

Диаграмма рассеивания

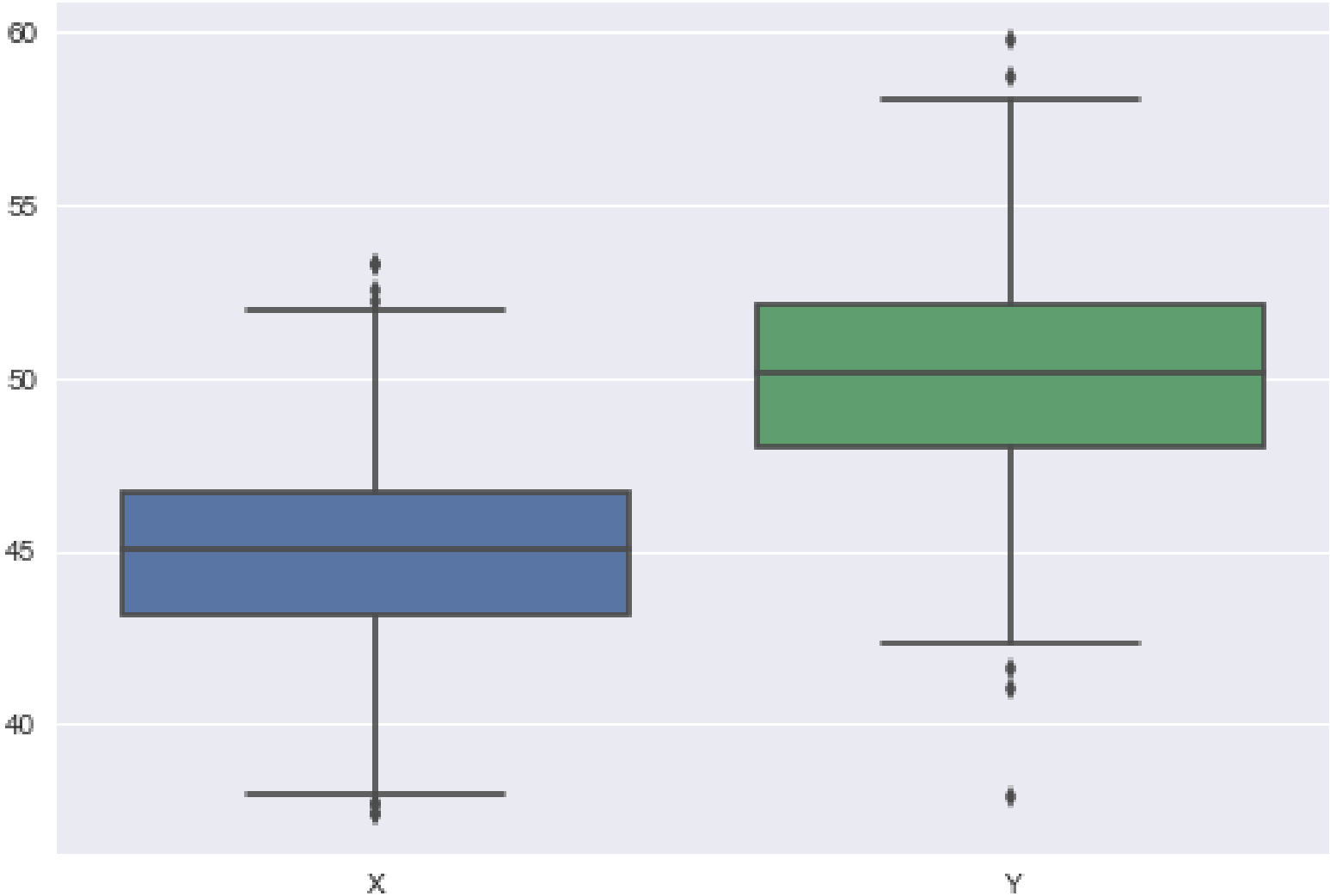


Outline

Диаграмма размаха ("Ящик с усами")

```
X = [ sum([random() for i in range(90)])
                        for j in range(1000) ]
Y = [ sum([random() for i in range(100)])
                        for j in range(1000) ]

D = DataFrame( {'X' : X, 'Y':Y} )
seaborn.boxplot(D)
plt.show()
```

Диаграмма размаха ("Ящик с усами")



О визуализации статистический данных и проверке гипотез с помощью Python:
nahlogin.blogspot.ru/2016/01/pandas.html

Outline

Ссылки и литература

- Numerical methods in engineering with Python 3 / Jaan Kiusalaas.
- try.jupyter.org
- Как использовать Jupyter (ipython-notebook) на 100%

Ссылки и литература

Ссылка на слайды

github.com/VetrovSV/Programming