

# Компьютерное моделирование

## Моделирование динамических систем

Кафедра ИВТ и ПМ

2018

# План

## Прошлые темы

### Динамическая система

- Дифференциальные уравнения

- Формальное определение

### Моделирование динамических систем

- Динамические модели популяций

- Balance equations

- Модель Лотки — Вольтерры

### Учёт пространства и времени

# Outline

## Прошлые темы

### Динамическая система

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

### Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

Модель Лотки — Вольтерры

### Учёт пространства и времени

# Прошлые темы

- ▶ Что такое динамическая система?
- ▶ Примеры?
- ▶ Динамическая система противопоставляется ... ?

# Прошлые темы

- ▶ Что такое динамическая система?
- ▶ Примеры?
- ▶ Динамическая система противопоставляется ... ?
- ▶ Примеры статических систем?

*Современная наука стала  
возможной тогда, когда  
было решено самое первое  
дифференциальное  
уравнение*

---

вольный перевод цитаты  
Дэвида Берлински

# Outline

## Прошлые темы

### Динамическая система

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

### Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

Модель Лотки — Вольтерры

### Учёт пространства и времени

# Outline

## Прошлые темы

### Динамическая система

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

### Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

Модель Лотки — Вольтерры

### Учёт пространства и времени



# Дифференциальные уравнения

- ▶ Что такое дифференциальное уравнение?
- ▶ Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?

# Дифференциальные уравнения

- ▶ Что такое дифференциальное уравнение?
- ▶ Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?
- ▶ Простой пример ДУ?

# Дифференциальные уравнения

- ▶ Что такое дифференциальное уравнение?
- ▶ Что такое однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)?
- ▶ Простой пример ДУ?

$$\frac{dv_x}{dt} = g$$

или

$$\dot{V}_x = g$$

# Дифференциальные уравнения

- ▶ Что является решением дифференциального уравнения?

# Дифференциальные уравнения

- ▶ Что является решением дифференциального уравнения?
- ▶ Какие решения бывают?

# Дифференциальные уравнения

- ▶ Что является решением дифференциального уравнения?
- ▶ Какие решения бывают?
- ▶ Что такое общее решение?
- ▶ Что такое частное решение?
- ▶ Как получить из общего решения частное?

# Дифференциальные уравнения

- ▶ Как представить общее решение ДУ графически?

# Дифференциальные уравнения

- ▶ Что такое численный метод?



# Дифференциальные уравнения

- ▶ Что такое численный метод?
- ▶ Как численно определить производную известной функции в точке?

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# Outline

Прошлые темы

**Динамическая система**

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

Модель Лотки — Вольтерры

Учёт пространства и времени

# Динамическая система

- ▶ Изменяется с течением времени  $t$
- ▶ Состояния системы  $s(t)$
- ▶ Состояние системы может быть представлено вектором  $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t))$
- ▶ Примеры: маятник, популяция животных, движение автомобиля, поток людей, ...

# Способы представления

- ▶ **Дискретная система**

$$s(t + \Delta t) = f(s(t))$$

где  $\Delta t$  - приращение времени,  $f$  - некоторая функция определяющая состояние системы на следующем шаге

- ▶ **Непрерывная система**

$$\dot{s} \equiv \frac{ds}{dt} = f(s(t))$$

Всегда ли первой производной достаточно?

## Состояние может зависеть от второй производной: непрерывная система

Предположим, что состояние системы зависит ещё и от второй производной

$$\dot{s} + \ddot{s} = f(s)$$

Обозначим

$$y = \dot{s}$$

$$\dot{y} = f(s) - y$$

Обозначим

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$\dot{u} = g(u)$$

Состояние может зависеть от второй производной:  
дискретная система

$$s(t + \Delta t) = f(s(t)) + s(t - \Delta t)$$

Аналогично непрерывной системе

$$y(t + \Delta t) = \dot{s}$$

$$s(t + \Delta t) = f(s(t)) + y(t)$$

Обозначим

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$u(t + \Delta t) = g(u(t))$$

## Состояние может зависеть от второй производной: непрерывная система

Если  $f$  явно зависит от  $t$

$$\dot{s} = f(s, t)$$

$$\dot{s} = f(s, y)$$

$$\dot{y} = 1$$

для  $y(0) = 0$

$$u(t) \equiv f_1[s(t), y(t)]$$

$$\dot{u} = g(u)$$



# Outline

Прошлые темы

Динамическая система

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

Модель Лотки — Вольтерры

Учёт пространства и времени

# Outline

Прошлые темы

Динамическая система

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

Модель Лотки — Вольтерры

Учёт пространства и времени

# Динамические модели популяций

**Популяция** (в биологии) - это совокупность особей одного вида, существующих в одно и занимающих определенную территорию.

В классической экологии рассматриваются взаимодействия нескольких типов:

- ▶ взаимодействие организма и окружающей среды;
- ▶ взаимодействие особей внутри популяции;
- ▶ взаимодействие между особями разных видов (между популяциями).

# Динамические модели популяций

Зачем это нужно?

- ▶ описание роста количества микроорганизмов
- ▶ предсказание численности популяций промысловых животных
- ▶ предсказание численности популяций диких животных
- ▶ предсказание численности населения <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>см. модель World3

# Первая модель популяции

1202 г. Леонардо Пизанский

какое количество пар кроликов будет через год, кролики начинают размножаться со второго месяца и каждый месяц дают потомство в виде пары кроликов?

# Первая модель популяции

1202 г. Леонардо Пизанский

какое количество пар кроликов будет через год, кролики начинают размножаться со второго месяца и каждый месяц дают потомство в виде пары кроликов?

Ряд описывающий количество пар кроликов:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

# Динамические модели популяций

- ▶ Число<sup>2</sup> особей в популяции -  $P(t)$
- ▶ При этом  $P(0) = 0$
- ▶ На размер популяции влияет только два процесса
  - ▶ рождение особей  $B(t)$
  - ▶ смерть особей  $D(t)$
- ▶ Тогда *изменение* популяции:

$$\dot{P}(t) = B(t) - D(t)$$

---

<sup>2</sup>вместо числа особей может использоваться плотность популяции и другие связанные с количеством особей величины

# Динамические модели популяций

## Модель Мальтуса

- ▶ Число родившихся особей можно задать как:

$$B(t) = r_b P(t)$$

- ▶ Число умерших особей можно задать как:

$$D(t) = r_d P(t)$$

$r_b$  - темп воспроизводства в расчете на одну особь;

$r_d$  - темп вымирания.



# Динамические модели популяций

## Модель Мальтуса

$$\dot{P}(t) = r_b P(t) - r_d P(t)$$

обозначим  $r = r_b - r_d$ ,

тогда

$$\dot{P} = rP(t)$$

Решение ДУ<sup>3</sup>:

---

<sup>3</sup>похожий закон роста описывает изменение вклада (сложные проценты) см. другие примеры: [en.wikipedia.org/wiki/Exponential\\_growth](https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_growth)

# Динамические модели популяций

## Модель Мальтуса

$$\dot{P}(t) = r_b P(t) - r_d P(t)$$

обозначим  $r = r_b - r_d$ ,

тогда

$$\dot{P} = rP(t)$$

Решение ДУ<sup>3</sup>:

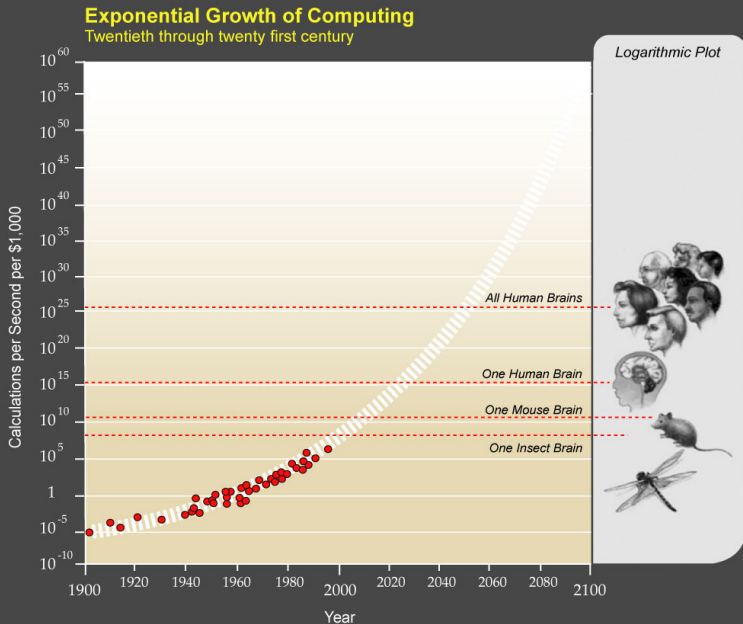
$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

wikimedia: анимация роста бактерий согласно экспоненциальному закону

---

<sup>3</sup>похожий закон роста описывает изменение вклада (сложные проценты) см. другие примеры: [en.wikipedia.org/wiki/Exponential\\_growth](https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_growth)

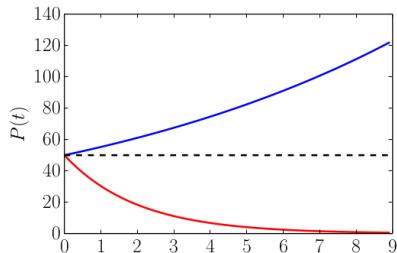
# Технологическая сингулярность?



# Динамические модели популяций

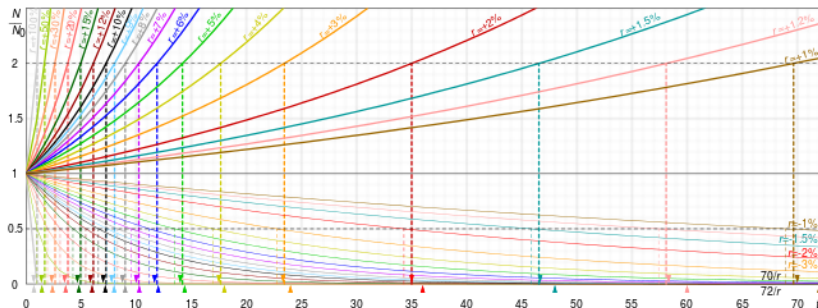
## Модель Мальтуса

- ▶  $r > 0$  экспоненциальный рост
- ▶  $r < 0$  экспоненциальное сокращение
- ▶  $r = 0$  численность постоянна



# Динамические модели популяций

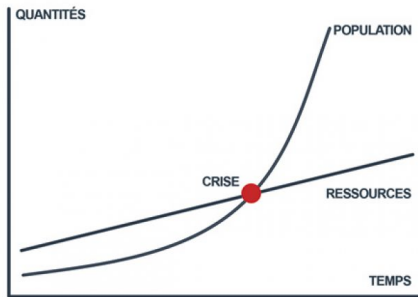
## Модель Мальтуса



Линейный рост воспроизводства и экспоненциальный рост популяции.

# Динамические модели популяций

## Модель Мальтуса



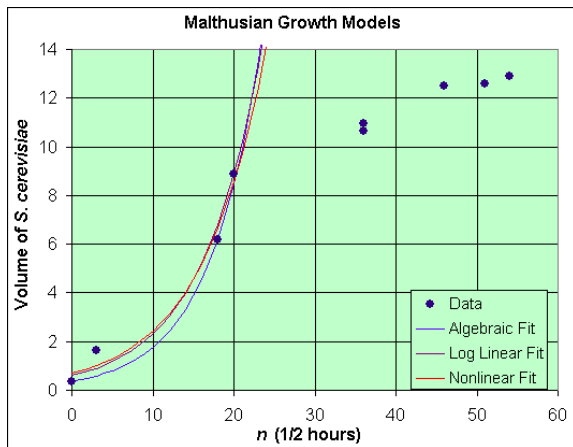
# Динамические модели популяций

## Модель Мальтуса

Недостатки модели Мальтуса?

# Динамические модели популяций

## Модель Мальтуса



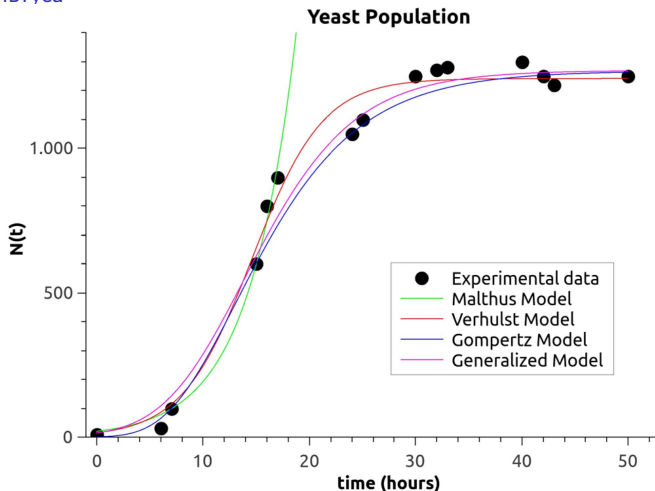
Рост популяции *Saccharomyces cerevisiae* (Пекарские дрожжи)

[jmahaffy.sdsu.edu/courses/f06/math636/lectures/competition/competition.html](http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f06/math636/lectures/competition/competition.html)



# Динамические модели популяций

## Модель Мальтуса



An attempt to unify some population growth models from first principles,  
Fabiano L. Ribeiro,

Rev. Bras. Ensino Fís. vol.39 no.1 São Paulo 2017 Epub Nov 21, 2016

# Динамические модели популяций

## Логистическая модель

- ▶ Необходимо ограничить предельный размер популяции
- ▶ Введём дополнительный параметр  $C$  - емкость среды.

**Предельная нагрузка** биологического вида на среду обитания (**ёмкость среды**) — максимальный размер популяции вида, который среда может безусловно стабильно поддерживать <sup>4</sup>

- ▶  $C$  - системный фактор (пища, убежища, хищничество, конкуренция с другими видами)

---

<sup>4</sup>В 2001 году в докладе ООН сообщалось, что две трети оценок ёмкости среды для человечества попадают в диапазон от 4 до 16 млрд (с неопределенным стандартным отклонением) с медианным значением в 10 млрд

# Динамические модели популяций

## Логистическая модель

- ▶ коэффициент регулирующий прирост (убыль) популяции

$$r = v \left( 1 - \frac{P}{C} \right)$$

- ▶ модель (уравнение популяционной динамики Ферхюльста (Verhulst equation)<sup>5</sup>:

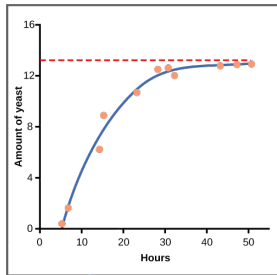
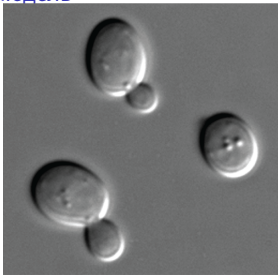
$$\dot{P} = v \left( 1 - \frac{P}{C} \right) P \quad (1)$$

---

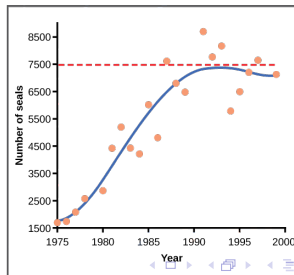
<sup>5</sup> логистическое уравнение

# Динамические модели популяций

## Логистическая модель



(a)



(b)

# Динамические модели популяций

## Логистическая модель

Решение ДУ, описывающего  
модель - логистическая  
функция

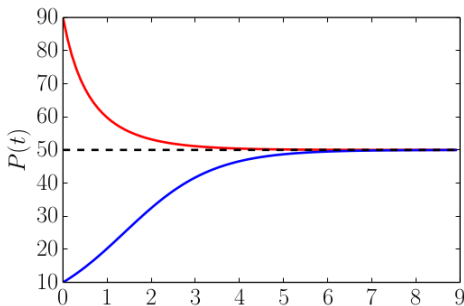
$$P(t) = \frac{C}{1 + \frac{C-P_0}{P_0} e^{-vt}}$$

Параметры модели:

$$C = 50, v = 1$$

Синяя кривая (логистическая  
кривая)  $P_0 = 10$

Красная кривая  $P_0 = 90$



# Динамические модели популяций

## Теория r/K-отбора

перепишем уравнение 1:

$$\dot{P} = rP - \delta P^2$$

- ▶ **r - стратегия:** организмы (так называемые «оппортунистические»), стремятся к максимально возможной скорости роста численности (параметр  $r$ ). Потомство таких видов с большой долей вероятности не доживает до зрелого возраста.
- ▶ **K-стратегии:** организмы («равновесные»), наоборот, находятся в состоянии равновесия со своими ресурсами и воспроизводят относительно мало, однако стремятся вложить в потомство как можно больше.

# Динамические модели популяций

## Теория $r/K$ -отбора

- ▶ Теория  $r/K$ -отбора хорошо описывает рост организмов без возрастной структуры
- ▶ к ним относятся бактерии, дрожжи, микроводоросли и др.

# Динамические модели популяций

## Логистическая модель

- ▶  $P_0 < C$  популяция растёт,  $P \rightarrow C$
- ▶  $P_0 > C$  популяция сокращается,  $P \rightarrow C$
- ▶  $P_0 = 0$  популяция не растёт  $P(t) = 0$ .
- ▶ Система имеет две фиксированных точки:  $C$  - к которой популяция стремится,  $0$  - от которой стремится популяция.
- ▶ Использование модели затруднено из-за того, что параметр  $r$  часто не известен или является объектом исследования.



# Динамические модели популяций

- ▶ Предыдущие модели хорошо описывают бесполое размножение
- ▶ На прирост популяции при половом размножении отличается:
- ▶ При малых  $P$  частота контактов  $b(P)$  пропорциональна  $P^2$
- ▶ При больших  $P$  частота контактов  $b(P)$  пропорциональна числу самок  $\alpha \frac{\beta P^2}{\beta + \gamma P}$

$$\dot{P} = \alpha \frac{\beta P^2}{\beta + \gamma P} - \tau P$$

# Динамические модели популяций

Учёт наименьшей критической численности

Особые точки уравнения?

# Динамические модели популяций

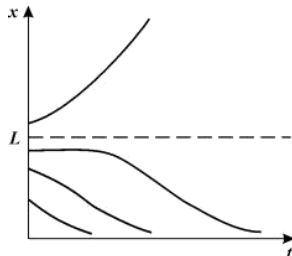
Учёт наименьшей критической численности

Особые точки уравнения?

$$P = 0$$

$$P = \dots = L$$

При  $P_0 > L$  популяция растёт, при  
 $P_0 < L$  погибает.



При падении численности популяции ниже критической величины из-за неблагоприятных условий, или в результате хищнического промысла, восстановление популяции становится невозможным

# Динамические модели популяций

## Учёт наименьшей критической численности

- ▶ Величина нижней критической плотности  $L$  различна для разных видов:
- ▶ это одна пара особей на тысячу квадратных километров в случае ондатры
- ▶ сотни тысяч особей для американского странствующего голубя.
- ▶ американский странствующий голубь вымер в начале XX века
- ▶ Для голубых китов критическая граница общей численности оказалась равной десяткам – сотням. Вид находится под угрозой вымирания.



# Outline

Прошлые темы

Динамическая система

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

Модель Лотки — Вольтерры

Учёт пространства и времени

# Balance equations

Пример с популяцией (слайд 22 и далее) показывает, что при описании динамических моделей используются уравнения вида

$$\text{изменение величины} = \text{прирост} - \text{убыль}$$

или для непрерывной системы

$$\dot{s} = f(s) = \text{creation rate} - \text{destruction rate}$$

## Balance equations

Аналогично для дискретного случая:

$$s(t + \Delta t) - s(t) = (\text{creation rate} - \text{destruction rate})\Delta t$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  дискретный случай переходит в непрерывный, т.к.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dot{s}$$

# Outline

Прошлые темы

Динамическая система

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

Модель Лотки — Вольтерры

Учёт пространства и времени



# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

- ▶  $a$  - популяция антилоп;  $c$  - популяция гепардов
- ▶ животные не иммигрируют и не эмигрируют
- ▶ Численность антилоп растёт экспоненциально (бесконечное количество еды)
- ▶ Шанс антилопы быть пойманной гепардом пропорционален вероятности их встречи
- ▶ Гепарды вымирают с голода экспоненциально
- ▶ Воспроизводство гепардов пропорционально их шансам поймать на охоте антилопу

# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

- ▶  $a$  - популяция антилоп;  $c$  - популяция гепардов
- ▶ животные не иммигрируют и не эмигрируют
- ▶ Численность антилоп растёт экспоненциально (бесконечное количество еды)
- ▶ Шанс антилопы быть пойманной гепардом пропорционален вероятности их встречи
- ▶ Гепарды вымирают с голода экспоненциально
- ▶ Воспроизводство гепардов пропорционально их шансам поймать на охоте антилопу

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие такую модель?

# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

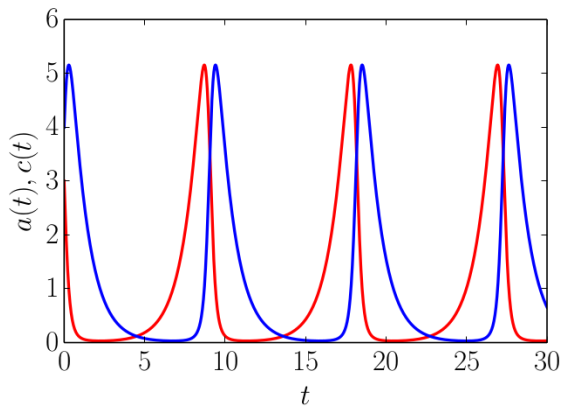
- ▶  $a$  - популяция антилоп;  $c$  - популяция гепардов
- ▶ животные не иммигрируют и не эмигрируют
- ▶ Численность антилоп растёт экспоненциально (бесконечное количество еды)
- ▶ Шанс антилопы быть пойманной гепардом пропорционален вероятности их встречи
- ▶ Гепарды вымирают с голода экспоненциально
- ▶ Воспроизводство гепардов пропорционально их шансам поймать на охоте антилопу

Как будут выглядеть дифференциальные уравнения описывающие такую модель?

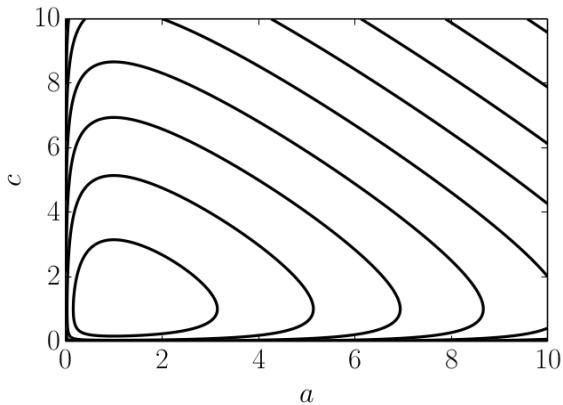
$$\frac{da}{dt} = k_a a(t) - k_{c,a} c(t) a(t)$$

$$\frac{dc}{dt} = -k_c c(t) + k_{a,c} c(t) a(t)$$

## Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)



# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)



# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

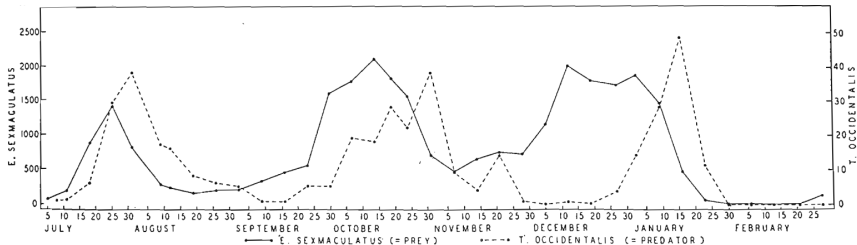
Хищные и травоядные клещи



*Typhlodromus occidentalis* (светлый клещ) атакует  
Большой клещ, не *Eotetranychus sexmaculatus*, это Красный плодовый клещ

# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

Хищные и травоядные клещи: экспериментальные данные



Huffaker's mite experiment, 1958

Лабораторный эксперимент (среда обитания смоделирована) с травоядным клещём *Eotetranychus sexmaculatus* и нападающего на него хищным *Typhlodromus occidentalis*.

# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

Канадская рысь и Американский беляк





# Модель Лотки — Вольтерры (хищник-жертва)

Канадская рысь и Американский беляк

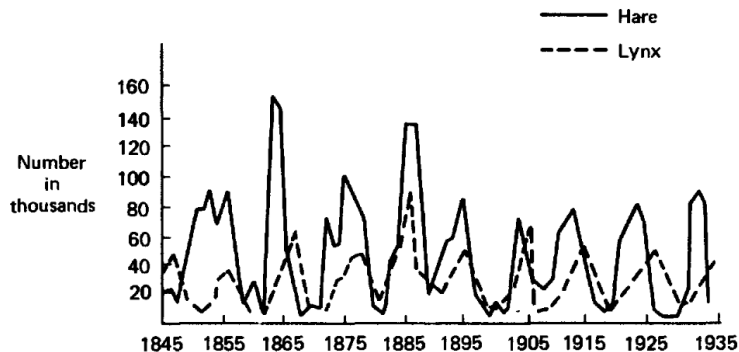


Figure 48-1 Oscillation observed in Canada of populations of lynx and hare (data from E. P. Odum, *Fundamentals of Ecology*, Philadelphia: W. B. Saunders, 1953).

# Outline

## Прошлые темы

### Динамическая система

Дифференциальные уравнения

Формальное определение

### Моделирование динамических систем

Динамические модели популяций

Balance equations

Модель Лотки — Вольтерры

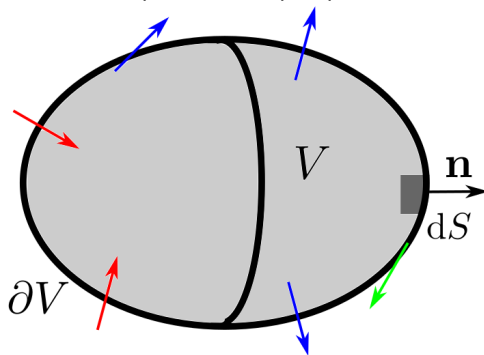
## Учёт пространства и времени

## Уравнение учитывающие пространство и время

- ▶ Предыдущие примеры не учитывали пространство, но часто это важно (распределение вещества, температуры и т.д.)
- ▶ Необходимо учесть движение чего-либо из некоторого объёма  $V$  через его поверхность  $\partial V$
- ▶ Причём отнести это движение к единице времени

# Уравнение учитывающие пространство и время

Рассмотрим объём пространства  $V$



входящий поток

исходящий поток

(на касательной к поверхности) - поток не покидающий данный объём  $V$

$dS$  (тёмно серый участок) - площадь поверхности  $\partial V$  с нормалью  $\mathbf{n}$

# Уравнение учитывающие пространство и время

- ▶  $\rho(t, x)$  - плотность исследуемой величины (массы, заряда, ...)

$$s(t) = \int_V \rho(t, x) dV$$

- ▶ Уравнение баланса:

$$\dot{s} = -\text{поток через поверхность} + \text{добавление(убыль)}$$

знак минус в формуле выше появляется из-за того, что *выходящий* поток считается положительным, а он должен уменьшать некоторую величину внутри объёма  $V$ .

Обозначим поток как  $j$

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

где  $\sigma$  -

$$\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...

Обозначим поток как  $j$

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

где  $\sigma$  -

$$\dot{\Sigma} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...



Обозначим поток как  $j$

$$\Sigma = \int_V \sigma dV$$

где  $\sigma$  -

$$\dot{s} + \oint_{\partial V} j \cdot n dS = \Sigma$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса ...

$$\int_V \dot{s} dV + \int_V \nabla j \cdot n dV = \int_V \sigma dV$$

$$\dot{s} + \nabla j \cdot n = \sigma$$



- ▶ «Жесткие» и «мягкие» математические модели,  
Арнольд В.

Использованы материалы курса Simulation and modeling of  
natural processes  
[coursera.org/learn/modeling-simulation-natural-processes/](https://coursera.org/learn/modeling-simulation-natural-processes/)

Материалы курса

[github.com/ivtipm/computer-simulation](https://github.com/ivtipm/computer-simulation)