

| | |
|----------------------------------|----|
| Algebra | 1 |
| Datenanalyse..... | 9 |
| Wahrscheinlichkeitsrechnung..... | 15 |
| Geometrie | 20 |
| Wirtschaftsmathematik | 30 |



Formelsammlung

Mathematik

für die

Berufsmaturität (RLP-BM)

Auszug aus „Mathematik für die Berufsmaturität“ © www.promath.ch

Jean-Pierre Favre



Ausgabe 2018

Algebra

Einführung

Griechisches Alphabet

| Kleinbuchstabe | Grossbuchstabe | Name | Kleinbuchstabe | Grossbuchstabe | Name |
|----------------|----------------|---------|----------------|----------------|---------|
| α | A | Alpha | ν | N | Ny |
| β | B | Beta | ξ | Ξ | Xi |
| γ | Γ | Gamma | \omicron | O | Omikron |
| δ | Δ | Delta | Π | Π | Pi |
| ϵ | E | Epsilon | ρ | P | Rho |
| ζ | Z | Zeta | σ | Σ | Sigma |
| η | H | Eta | τ | T | Tau |
| θ | Θ | Theta | υ | Υ | Ypsilon |
| ι | I | Iota | ϕ | Φ | Phi |
| κ | K | Kappa | χ | X | Chi |
| λ | Λ | Lambda | ψ | Ψ | Psi |
| μ | M | My | ω | Ω | Omega |

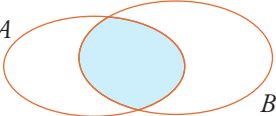
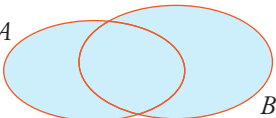

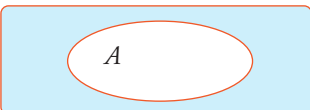
Mengen und Intervalle

- $x \in A$ bedeutet, dass x ein Element der Menge A ist
- $A \subset B$ bedeutet, dass die Menge A eine Teilmenge von B ist

Zahlbereiche

| | |
|-------------------|--|
| Natürliche Zahlen | $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ |
| Ganze Zahlen | $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ |
| Rationale Zahlen | $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}\right\}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$ |
| Reelle Zahlen | \mathbb{R} |

Venn-Diagramme

| | |
|---|--|
|  | Schnittmenge $A \cap B$ A und B |
|  | Vereinigungsmenge $A \cup B$ A oder B |
|  | Differenzmenge $A \setminus B$ A ohne B |
|  | Komplementmenge \bar{A} nicht A |

Intervalle

- Abgeschlossenes Intervall $[a; b]$ $a \leq x \leq b$
- Offenes Intervall $]a; b[$ $a < x < b$
- Rechtsoffenes Intervall $[a; +\infty[$ $x \geq a$
- Linksoffenes Intervall $x \leq b$

Algebra

Potenzen und Wurzeln

| | | | |
|---------------------------|-----------------------------|---|---|
| $0^n = 0$ | $x^0 = 1$ | 0^0 ist nicht definiert! | $1^n = 1$ |
| $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ | $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ | $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ | $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ |
| $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ | $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ | $x^{m^n} = x^{(m^n)}$ | $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ |
| $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ | $\sqrt{x^2} = x $ | $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$ | $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ |

Wissenschaftliche Notation

Darstellung einer Zahl in der Form:

$$\pm a \times 10^n \quad \text{mit } a \in [1; 10[\text{ und } n \in \mathbb{Z}$$

○ *Beispiel:* $1234 = 1,23 \times 10^3$

Besondere Identitäten

| | |
|---|--|
| $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ | $a^2 + b^2$ ist nicht faktorisierbar in \mathbb{R} |
| $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ | $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ |

Faktorisierung

- Ausklammern: $6a - 3ab = 3a(2 - b)$
- Ausklammern und Zusammenfassen: $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + 1(x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$
- Verwendung einer besonderen Identität: $(x + a)^2 - 1 = (x + a - 1)(x + a + 1)$
- Einfaches Trinom: $x^2 + Sx + P = x^2 + (m + n)x + m \cdot n = (x + m) \cdot (x + n)$

Betrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

| $a \geq 0$ | $a < 0$ |
|---|---|
| $ x = a \rightarrow x = a \quad \text{oder} \quad x = -a$ | $ x = a \rightarrow x = \emptyset$ |
| $ x \leq a \rightarrow x \leq a \quad \text{und} \quad x \geq -a$ | $ x \leq a \rightarrow x = \emptyset$ |
| $ x \geq a \rightarrow x \geq a \quad \text{oder} \quad x \leq -a$ | $ x \geq a \rightarrow x = \mathbb{R}$ |



Distanz, Abstand zwischen zwei Werten etc. $\rightarrow d(a; b) = |a - b|$

Lineare Gleichungen und Funktionen

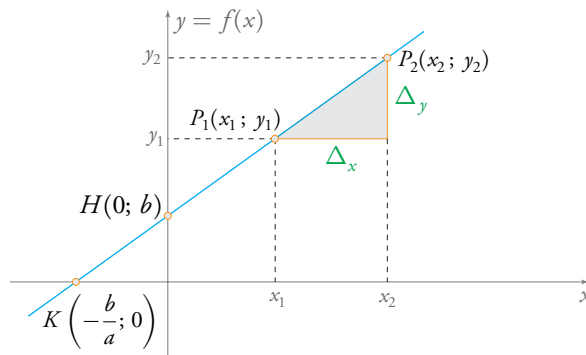
Lineare Gleichung

$$ax + b = 0 \quad \text{mit } a \neq 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b \quad \text{mit } a \neq 0$$

- y-Achsenabschnitt: $f(0) = b \quad \rightarrow \quad H(0; b)$
- x-Achsenabschnitt: $f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad K\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$
- Steigung der Geraden f : $a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte

Die Punkte seien $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$. Man erhält die Geradengleichung durch Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b = y_1 \\ a \cdot x_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Besondere Geraden

Es seien: $y_1 = a_1 x + b_1$ und $y_2 = a_2 x + b_2$

- $y_1 \parallel y_2 \Rightarrow a_1 = a_2$
- $y_1 \perp y_2 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$

Quadratische Gleichungen und Funktionen

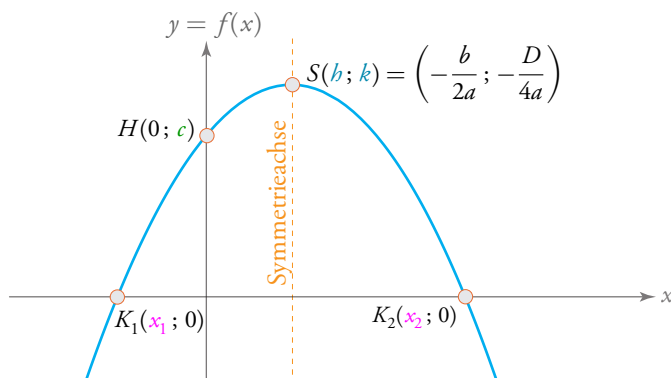
Quadratische Gleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0 \quad \text{Berechnung der Diskriminanten (D): } D = b^2 - 4ac$$

| $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
|---|-----------------------------|------------------------------|
| $x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ | keine Lösung in \mathbb{R} |

Quadratische Funktion

- Grundform: $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$
- Scheitelform: $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$ mit $a \neq 0$ und Scheitelpunkt $S(h; k)$
- Produktform: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit $a \neq 0$ und $x_1; x_2$ den Lösungen von $f(x) = 0$



- Form und Lage des Graphen:

| $\begin{array}{c} D \\ a \end{array}$ | $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
|---------------------------------------|---------|---------|---------|
| $a > 0$ 😊 | | | |
| $a < 0$ 😞 | | | |

Exponential- und Logarithmusgleichungen/-funktionen

Exponential- und Logarithmusgleichung

| | | |
|--|---|--|
| $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$ | | |
| $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ | $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$ | |

- $\log(x) = \log_{10}(x) \rightarrow$ Taste LOG auf dem Taschenrechner
- $\ln(x) = \log_e(x) \rightarrow$ Taste LN auf dem Taschenrechner ($e \simeq 2,718$)

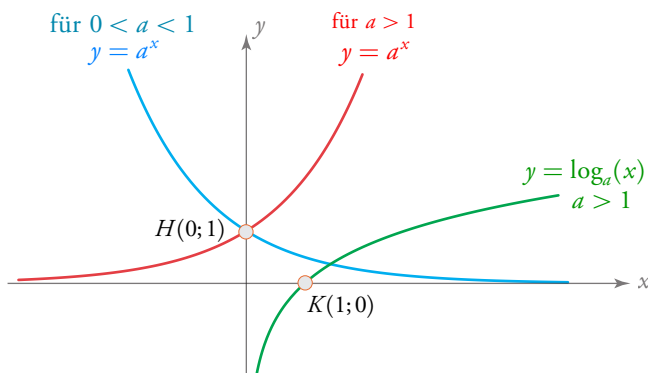
| | |
|---|--|
| $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ | $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ |
| $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$ | $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$ |
| $\log_a(a^x) = x$ | $a^{\log_a(x)} = x$ |
| $\log_a(1) = 0$ | $\log_a(a) = 1$ |

- Rechenregel für den Basiswechsel (mit dem Taschenrechner):

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Exponential- und Logarithmusfunktion

- $f(x) = a^x$ und $g(x) = \log_a(x)$ mit $a \in]0; 1[\cup]1; \infty[$



Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse

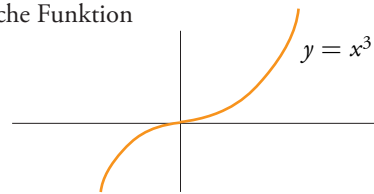
- $f(t) = a \cdot (1 + b)^t$ mit $\pm b$ der Wachstums-/Zerfallsrate und a dem Anfangswert
- $f(t) = \alpha \cdot e^{\beta t}$ mit $\pm \beta$ der Wachstums-/Zerfallskonstanten und α dem Anfangswert

Graphen einiger elementarer Funktionen

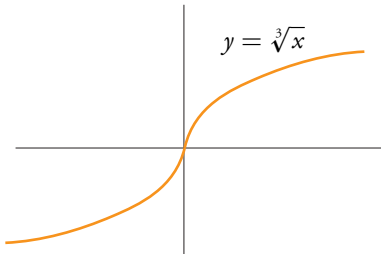
Wurzelfunktion



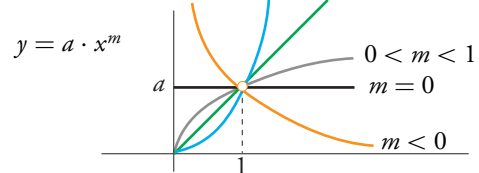
kubische Funktion



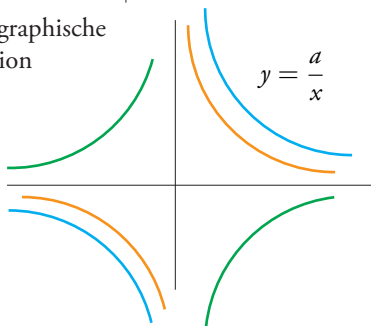
Kubikwurzelfunktion



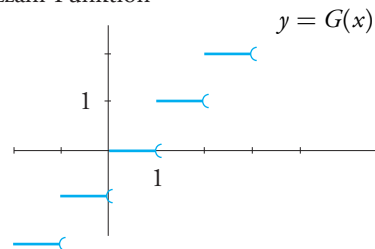
Potenzfunktion



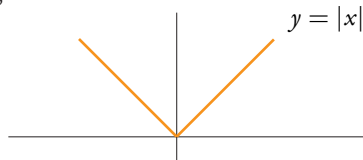
homographische Funktion



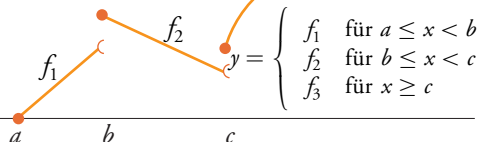
Ganzzahl-Funktion



Betragsfunktion



abschnittsweise definierte Funktion



Definitionsbereich

Aufgepasst werden muss bei folgenden Punkten (\odot = ein beliebiger algebraischer Ausdruck):

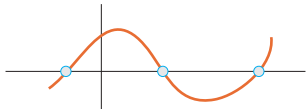
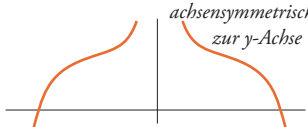
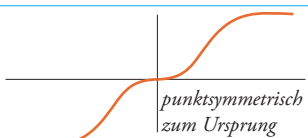
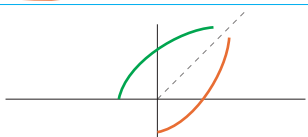
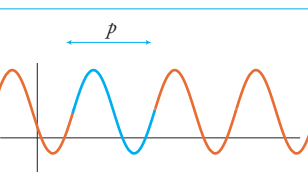
$$\begin{cases} \frac{1}{\odot} \Rightarrow \odot \neq 0 \\ \sqrt[n]{\odot} \Rightarrow \odot \geq 0 & \text{nur für gerade } n \\ \log_a(\odot) \Rightarrow \odot > 0 & \text{unabhängig von der Basis des Logarithmus} \end{cases}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{x}{2-x} + \sqrt{x+5} - \log(10-x)$

- $2-x \neq 0 \rightarrow x \neq 2$ *Bedingung für den Nenner*
- $x+5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5$ *Bedingung für die Quadratwurzel*
- $10-x > 0 \rightarrow x < 10$ *Bedingung für den Logarithmus*

Folgerung: $x \in [-5; 2[\cup]2; 10[$

Weitere Eigenschaften von Funktionen

| | |
|---|--|
| Nullstellen einer Funktion Werte von x , für welche gilt: $f(x) = 0$ |  |
| Gerade Funktion $f(-x) = f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich |  |
| Ungerade Funktion $f(-x) = -f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich |  |
| Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ für alle x aus dem Definitionsbereich |  |
| Periodische Funktion $f(x + k \cdot p) = f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich und $k \in \mathbb{Z}$ |  |

Datenanalyse

Statistische Variablen

| qualitative | |
|-------------|---------------------------|
| Ausprägung | abs. Häufigkeit (n_i) |
| verheiratet | 3 |
| geschieden | 5 |
| ledig | 2 |

| diskrete quantitative | |
|-----------------------|-------|
| Ausprägung (x_i) | n_i |
| 3 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 2 |

| kontinuierliche quantitative | | |
|------------------------------|-------|-------|
| Klasse | x_i | n_i |
| [2 ; 4 [| 3 | 4 |
| [4 ; 6 [| 5 | 12 |
| [6 ; 8 [| 7 | 4 |

Definitionen und Grundformeln

- X = statistische Variable oder Merkmal
- k = Anzahl Merkmalsausprägungen oder Klassen (im obigen Beispiel $k = 3$)
- i = i -te Ausprägung oder Klasse, mit $i = 1, 2, 3, \dots, k$
- b_{i-1} = untere Grenze der Klasse i
- b_i = obere Grenze der Klasse i
- L_i = Klassenbreite der Klasse i

$$L_i = b_i - b_{i-1}$$

- x_i = Klassenmitte der Klasse i

$$x_i = \frac{b_{i-1} + b_i}{2}$$

- n_i = absolute Häufigkeit der Ausprägung bzw. Klasse i
- N = Gesamtzahl der Messwerte

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k \quad \text{bzw.} \quad N = \sum n_i$$

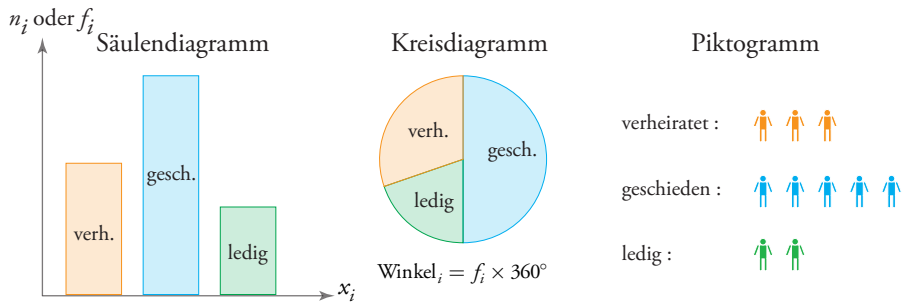
- f_i = relative Häufigkeit der Ausprägung bzw. Klasse i $f_i = n_i / N$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum f_i = 1$$

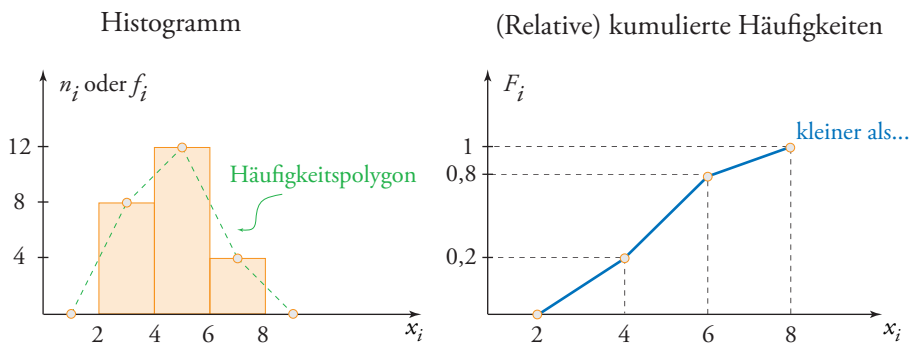
- F_i = relative kumulierte Häufigkeit der Ausprägung bzw. Klasse i $F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$

Graphische Darstellung

- Qualitative + diskrete quantitative Variablen: verschiedene Diagramme



- Kontinuierliche quantitative Variablen: Histogramm



Verwendung der kumulierten Häufigkeiten

| diskrete Variable | kontinuierliche Variable |
|--|--|
| Anteil P der Messwerte, deren Ausprägung kleiner oder gleich x_i ist | Anteil P der Messwerte, deren Ausprägung kleiner als x_i ist |
| $F_i = P(X \leq x_i)$ | $F_i = P(X < x_i)$ |
| $P(a < X \leq b) = F_b - F_a$ | $P(a \leq X < b) = F_b - F_a$ |

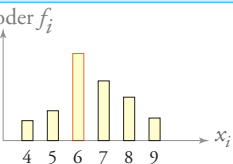
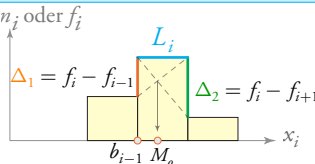
Beispiel (kontinuierliche Variable): Anteil der Messwerte zwischen $[4; 7[= F_7 - F_4$

• $F_7 = \frac{0,8+1}{2} = 0,9$ [durch Interpolation]

• $F_4 = 0,2$

Somit ist: $F_7 - F_4 = 0,9 - 0,2 = 0,7$ d.h. 70% der Messwerte

Lageparameter

| Parameter | Notation | diskrete Variable | kontinuierliche Variable |
|------------|----------|--|---|
| Modus | M_o |  $M_o = 6$ |  $M_o = b_{i-1} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot L_i$ |
| Median | M_e | erstes x_i für welches $F_i > 0,5$ wenn $F_i = 0,5 \rightarrow M_e = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ | $M_e = b_{i-1} + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$ für die erste Klasse mit $F_i \geq 0,5$ |
| 1. Quartil | Q_1 | erstes x_i für welches $F_i \geq 0,25$ | $Q_1 = b_{i-1} + \frac{0,25 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$ für die erste Klasse mit $F_i \geq 0,25$ |
| 3. Quartil | Q_3 | erstes x_i für welches $F_i \geq 0,75$ | $Q_3 = b_{i-1} + \frac{0,75 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$ für die erste Klasse mit $F_i \geq 0,75$ |

- Berechnung des Medians von N in aufsteigender Reihenfolge sortierten Messwerten

$$M_e = \begin{cases} x_{(N+1)/2} & \text{für ungerade } N \\ \frac{x_{N/2} + x_{N/2+1}}{2} & \text{für gerade } N \end{cases}$$

- Arithmetisches Mittel (\bar{x})

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \dots + n_k \cdot x_k}{N} = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_k \cdot x_k$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{N} = \sum f_i \cdot x_i$$

Streuungsparameter

- Spannweite = $\begin{cases} \text{Differenz zwischen dem grössten und kleinsten } x_i & (\text{diskret}) \\ \text{Gesamtbreite } b_k - b_0 & (\text{kontinuierlich}) \end{cases}$
- Quartilsabstand (QA) und Semiquartilsabstand (SQA)

$$\text{QA} = Q_3 - Q_1 \quad \text{oder} \quad \text{SQA} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

- Varianz (σ^2) und Standardabweichung (σ) einer nach Ausprägung gruppierten Datenreihe (x_i und f_i)

$$\sigma^2 = f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(x_k - \bar{x})^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

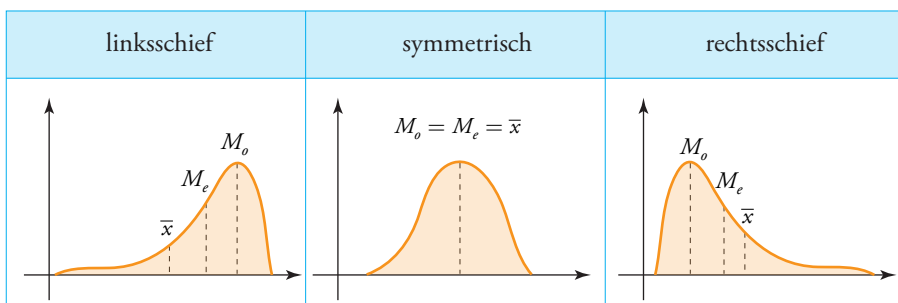
$$\text{Verschiebungssatz: } \overline{x^2} = f_1 \cdot x_1^2 + f_2 \cdot x_2^2 + \dots + f_k \cdot x_k^2$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

- Variationskoeffizient (ν)

$$\nu = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \quad (\nu \geq 25\% \rightarrow \text{stark gestreut})$$

Schiefemasse



Zentrale Momente

- Zentrales Moment 3. Ordnung: $\mu_3 = f_1(x_1 - \bar{x})^3 + f_2(x_2 - \bar{x})^3 + \dots + f_k(x_k - \bar{x})^3$
- Zentrales Moment 4. Ordnung: $\mu_4 = f_1(x_1 - \bar{x})^4 + f_2(x_2 - \bar{x})^4 + \dots + f_k(x_k - \bar{x})^4$

Wichtigste Schiefemasse

- Quartilsschiefe (QS)

$$QS = \frac{Q_3 + Q_1 - 2 M_e}{Q_3 - Q_1} \quad \left\{ \begin{array}{ll} QS > 0 & \text{rechtsschief} \\ QS = 0 & \text{symmetrisch} \\ QS < 0 & \text{linksschief} \end{array} \right.$$

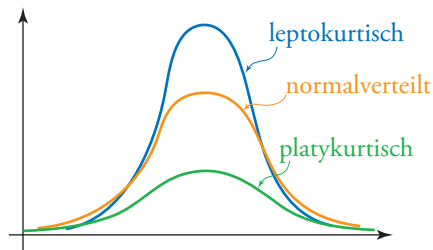
- Schiefekoeffizient nach Pearson (β_1)

$$\beta_1 = 3 \frac{(\bar{x} - M_e)}{\sigma} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_1 \rightarrow 1 & \text{rechtsschief} \\ \beta_1 \rightarrow 0 & \text{symmetrisch} \\ \beta_1 \rightarrow -1 & \text{linksschief} \end{array} \right.$$

- Momentschiefe (γ_1)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_1 > 0 & \text{rechtsschief} \\ \gamma_1 = 0 & \text{symmetrisch} \\ \gamma_1 < 0 & \text{linksschief} \end{array} \right.$$

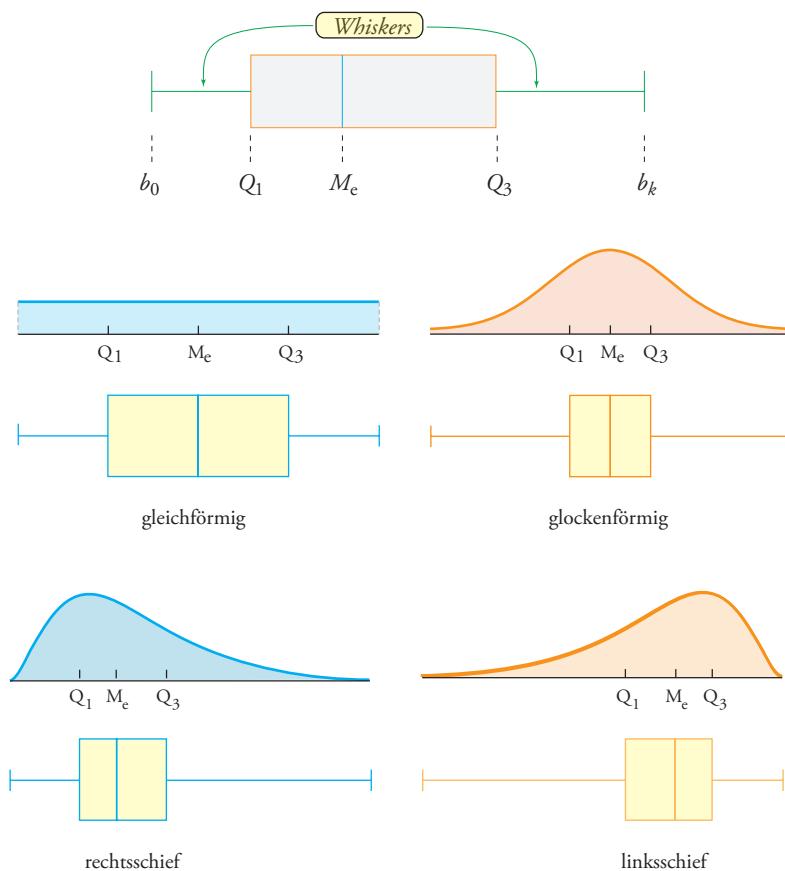
Wölbungsmasse



- Wölbungskoeffizient nach Pearson (β_2)

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_2 > 3 & \Rightarrow \text{leptokurtisch} \\ \beta_2 = 3 & \Rightarrow \text{normalverteilt} \\ \beta_2 < 3 & \Rightarrow \text{platykurtisch} \end{array} \right.$$

Boxplot



Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung

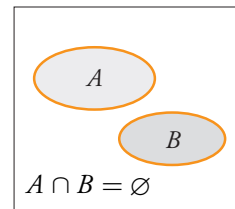
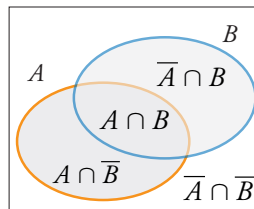
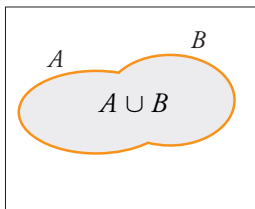
Ereignisse und Wahrscheinlichkeit

- Ω : Ergebnismenge (sicheres Ereignis)
- \emptyset : unmögliches Ereignis
- \bar{A} : komplementäres Ereignis oder Gegenereignis von A
- $A \cup B$: Ereignis A ODER B
- $A \cap B$: Ereignis A UND B
- $P(A)$: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}$$

Eigenschaften



| | | | |
|---|--------------------|---|-------------------------|
| $P(\Omega) = 1$ | $P(\emptyset) = 0$ | $0 \leq P(A) \leq 1$ | $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ |
| $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ | | $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$ | |
| $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$ | | $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ | |



Inkompatible und unabhängige Ereignisse

- A und B sind inkompatibel, wenn : $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A und B sind unabhängig, wenn : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

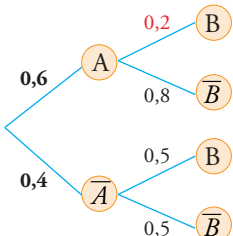
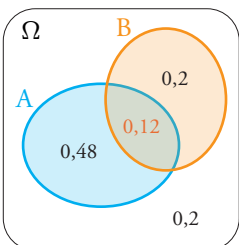
Geometrische Wahrscheinlichkeit

| eindimensionaler Fall | zweidimensionaler Fall |
|--|---|
| $P(A) = \frac{\text{Länge von } A}{\text{Länge von } S}$  | $P(A) = \frac{\text{Fläche von } A}{\text{Fläche von } S}$  |

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \text{Wahrscheinlichkeit von } B, \text{ falls } A \text{ bereits eingetreten ist.}$$

Schemata zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit

| Wahrscheinlichkeitsbaum | Venn-Diagramm | Häufigkeitstabelle | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|-------|---|-----------|-------|---|------|-----|------|-----------|------|-----|------|-------|-----|-----|---|
|  |  | <table><tr><th></th><th>A</th><th>\bar{A}</th><th>Total</th></tr><tr><th>B</th><td>0,12</td><td>0,2</td><td>0,32</td></tr><tr><th>\bar{B}</th><td>0,48</td><td>0,2</td><td>0,68</td></tr><tr><th>Total</th><td>0,6</td><td>0,4</td><td>1</td></tr></table> | | A | \bar{A} | Total | B | 0,12 | 0,2 | 0,32 | \bar{B} | 0,48 | 0,2 | 0,68 | Total | 0,6 | 0,4 | 1 |
| | A | \bar{A} | Total | | | | | | | | | | | | | | | |
| B | 0,12 | 0,2 | 0,32 | | | | | | | | | | | | | | | |
| \bar{B} | 0,48 | 0,2 | 0,68 | | | | | | | | | | | | | | | |
| Total | 0,6 | 0,4 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |

Verschiedene Arten von Wahrscheinlichkeiten:

- A-priori-Wahrscheinlichkeit : $P(A) = 0,6$
- Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit : $P(A \cap B) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$
- Totale Wahrscheinlichkeit : $P(B) = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,5 = 0,32$
- Bedingte Wahrscheinlichkeit : $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,6} = 0,2$
- A-posteriori-Wahrscheinlichkeit : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,32} = 0,375$

Diskrete Zufallsvariablen

X nimmt die Werte $x_1; x_2; \dots x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1; p_2; \dots p_n$ an, wobei

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1 \quad \text{oder} \quad \sum p_i = 1$$

| Indikator | Notation | Formel |
|--------------------------|-------------|--|
| Erwartungswert | $E(X)$ | $E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n$ |
| Erwartungswert von X^2 | $E(X^2)$ | $E(X^2) = p_1 \cdot x_1^2 + p_2 \cdot x_2^2 + \dots + p_n \cdot x_n^2$ |
| Varianz | $V(X)$ | $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ Verschiebungssatz |
| Standardabweichung | $\sigma(X)$ | $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ |

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(X) = P(X \leq x_i)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Inferenzstatistik



Die Berechnungen in diesem Abschnitt setzen einen Stichprobenumfang von $n \geq 30$ voraus.

Konfidenzintervalle

Konfidenzintervall für den Mittelwert einer Grundgesamtheit

1. Der geschätzte Mittelwert μ der Grundgesamtheit entspricht dem Mittelwert \bar{x} der Stichprobe.
2. Der Schätzwert S der Standardabweichung der Grundgesamtheit kann berechnet werden, indem die Stichprobenstandardabweichung σ wie folgt korrigiert wird:

$$S = \sigma \times \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

Dann kann μ durch Eingrenzen wie folgt geschätzt werden:

$$\mu \in \left[\bar{x} - z \times \frac{S}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{x} + z \times \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

Ermittlung von z :

| Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$ | 90% | 95% | 98% | 99% |
|--------------------------------|------|------|------|------|
| z | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 |

Konfidenzintervall für einen Anteilswert an einer Grundgesamtheit

Eine Zufallsstichprobe wird mit Zurücklegen gezogen und innerhalb der Stichprobe ein beliebiger Anteilswert untersucht: $p = n_i / n$.

Dann kann man schliessen, dass der relative Anteil π an der Gesamtpopulation sich innerhalb des folgenden Konfidenzintervalls befindet:

$$\pi \in \left[p - z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Ermittlung von z :

| Konfidenzniveau ($1 - \alpha$) | 90% | 95% | 98% | 99% |
|----------------------------------|------|------|------|------|
| z | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 |

Statistische Tests

Test auf einen bestimmten Mittelwert

Mithilfe dieses Tests kann man herausfinden, ob der Mittelwert μ_x einer Grundgesamtheit gleich gross, grösser oder kleiner ist als ein Standardwert μ_0 .

Bekannt sind: der Mittelwert \bar{x} der Stichprobe, der vorgegebene Standardwert μ_0 , der Schätzwert S der Standardabweichung der Grundgesamtheit sowie der Stichprobenumfang n . Man geht wie folgt vor:

1. Formulieren der Nullhypothese H_0 und der Alternativhypothese H_1

| linksseitiger Test | rechtsseitiger Test | zweiseitiger Test |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|
| $H_0 : \mu_x = \mu_0$ | $H_0 : \mu_x = \mu_0$ | $H_0 : \mu_x = \mu_0$ |
| $H_1 : \mu_x < \mu_0$ | $H_1 : \mu_x > \mu_0$ | $H_1 : \mu_x \neq \mu_0$ |

2. Wahl des Fehlerrisikos α bzw. des Konfidenzniveaus ($1 - \alpha$) und Bestimmung von z

| Fehlerrisiko α | 10% | 5% | 1% |
|------------------------------------|-------|-------|-------|
| Wert von z , linksseitiger Test | -1,28 | -1,64 | -2,33 |
| Wert von z , rechtsseitiger Test | 1,28 | 1,64 | 2,33 |
| Wert von z , zweiseitiger Test | 1,64 | 1,96 | 2,58 |

3. Berechnung von Z (grosses Z)

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

4. Ablehnungsbereich der Nullhypothese je nach Art des Tests:

| H_0 ablehnen | linksseitiger Test | rechtsseitiger Test | zweiseitiger Test |
|----------------|--------------------|---------------------|-------------------|
| wenn | $Z < z$ | $Z > z$ | $ Z > z$ |

Test auf einen bestimmten Anteilswert

Mithilfe dieses Tests kann man herausfinden, ob ein Anteilswert π_x gleich gross, grösser oder kleiner ist als ein bestimmter Standardwert π_0 .

Bekannt sind: der relative Anteil \bar{p} an der Stichprobe, der vorgegebene Standardwert π_0 sowie der Stichprobenumfang n . Man geht wie folgt vor:

1. Formulieren der Nullhypothese H_0 und der Alternativhypothese H_1

| linksseitiger Test | rechtsseitiger Test | zweiseitiger Test |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|
| $H_0 : \pi_x = \pi_0$ | $H_0 : \pi_x = \pi_0$ | $H_0 : \pi_x = \pi_0$ |
| $H_1 : \pi_x < \pi_0$ | $H_1 : \pi_x > \pi_0$ | $H_1 : \pi_x \neq \pi_0$ |

2. Wahl des Fehlerrisikos α bzw. des Konfidenzniveaus $(1 - \alpha)$ und Bestimmung von z

| Fehlerrisiko α | 10% | 5% | 1% |
|------------------------------------|-------|-------|-------|
| Wert von z , linksseitiger Test | -1,28 | -1,64 | -2,33 |
| Wert von z , rechtsseitiger Test | 1,28 | 1,64 | 2,33 |
| Wert von z , zweiseitiger Test | 1,64 | 1,96 | 2,58 |

3. Berechnung von Z (grosses Z)

$$Z = \frac{\bar{p} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

4. Ablehnungsbereich der Nullhypothese je nach Art des Tests:

| H_0 ablehnen | linksseitiger Test | rechtsseitiger Test | zweiseitiger Test |
|----------------|--------------------|---------------------|-------------------|
| wenn | $Z < z$ | $Z > z$ | $ Z > z$ |

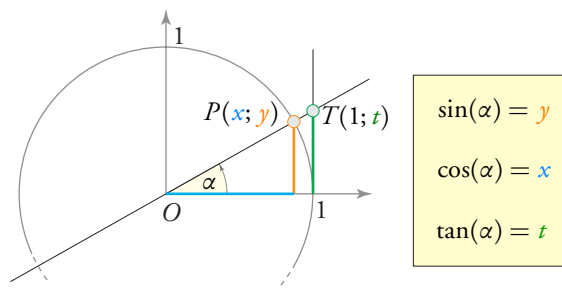
Geometrie

Trigonometrie

Umrechnung Grad - Radiant

$$\frac{\text{Grad}}{180} = \frac{\text{Radiant}}{\pi}$$

Einheitskreis



Trigonometrische Beziehungen

| | | |
|---------------------------------------|--|---|
| $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ | $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ | $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$ |
|---------------------------------------|--|---|

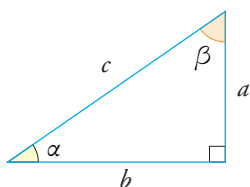
Exakte Werte für einige besondere Winkel

| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|----------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\cos(\alpha)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\sin(\alpha)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\tan(\alpha)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - |

Zusammenhänge zwischen Winkeln

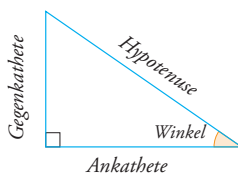
| | | |
|---|--|--------------------------------------|
| $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ | $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ | $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ |
| $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ | $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$ |
| $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$ | $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$ | $\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$ |
| $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ | |
| $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$ | |

Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck



$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{a}{c} & \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} & \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} \\ \sin(\beta) &= \frac{b}{c} & \cos(\beta) &= \frac{a}{c} & \tan(\beta) &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

🔗 Mit der folgenden Eselsbrücke kann man sich die Formeln schneller einprägen (dabei steht G für Gegenkathete, A für Ankathete und H für Hypotenuse): \sin -GH, \cos -AH und \tan -GA.



Trigonometrie im beliebigen Dreieck

Sinussatz

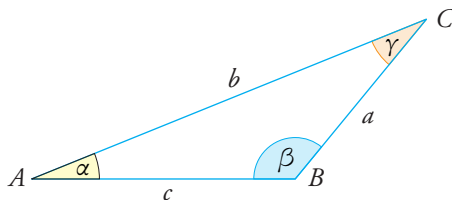
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$



Grundlegende trigonometrische Gleichungen

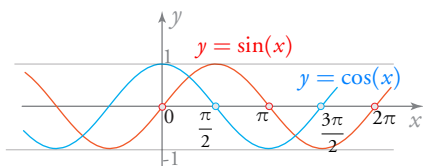
$$\cos(x) = a \rightarrow \begin{cases} x = \cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \\ x = -\cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) = a \rightarrow \begin{cases} x = \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \\ x = \pi - \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

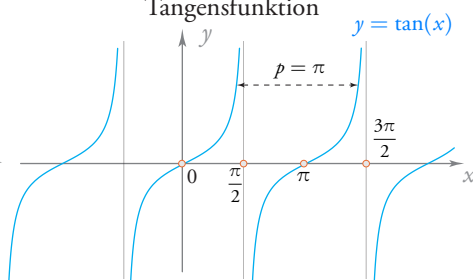
$$\tan(x) = a \rightarrow \{ x = \tan^{-1}(a) + k \cdot \pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Grundlegende trigonometrische Funktionen

Sinus- und Kosinusfunktion

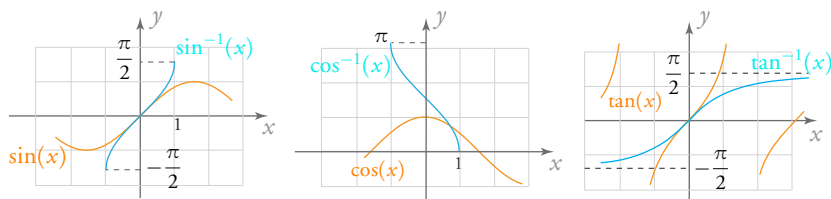


Tangensfunktion



Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

| Trigonometrische Funktion | Definitionsbereich Werte von x | Wertebereich Werte von y |
|---------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| $\sin^{-1}(x)$ | $[-1; 1]$ | $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ |
| $\cos^{-1}(x)$ | $[-1; 1]$ | $[0; \pi]$ |
| $\tan^{-1}(x)$ | \mathbb{R} | $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ |

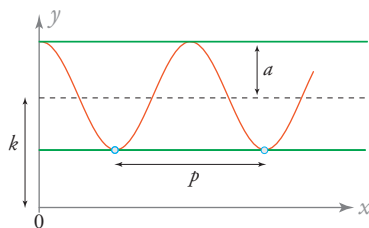


Sinusförmige Funktionen

Allgemeine Form: $y = a \cdot \cos(b(x - h)) + k$ oder $y = a \cdot \sin(b(x - h)) + k$

mit:

- a = Amplitude der Funktion (vertikale Streckung/Stauchung)
- p = Periode der Funktion
- b = horizontale Streckung/Stauchung $b = \frac{2\pi}{p}$
- h = Phasenverschiebung (Horizontalverschiebung)
- k = Position der Mittellage (Vertikalverschiebung)



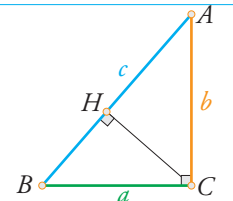
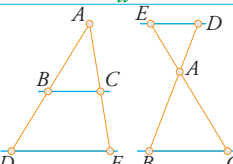
Polarkoordinaten

r und φ sind die Polarkoordinaten eines Punktes $P(x; y)$ in der Ebene.

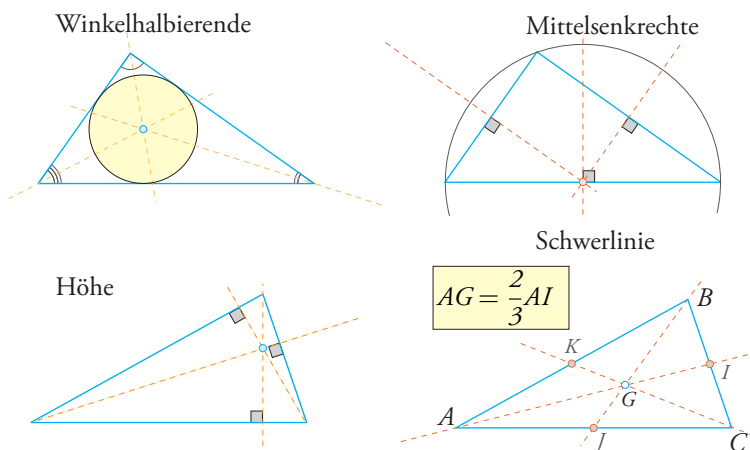
| Polar- in kartesische Koordinaten | kartesische in Polarkoordinaten |
|--|--|
| $x = r \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$ | $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \tan^{-1}(y/x) \pm 180^\circ$ |

Ebene Geometrie

Beziehungen zwischen Distanzen

| | | |
|-------------------------|---|--|
| Satz des Pythagoras | $a^2 + b^2 = c^2$ |  |
| Höhensatz | $HC^2 = BH \cdot HA$ | |
| Kathetensatz des Euklid | $BC^2 = BH \cdot BA$ | |
| | $AC^2 = AH \cdot AB$ | |
| Strahlensatz | $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ |  |

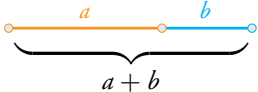
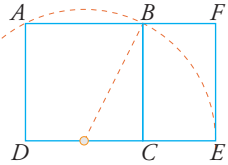
Besondere Geraden im Dreieck



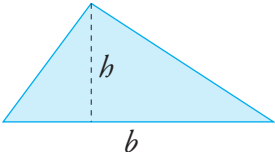

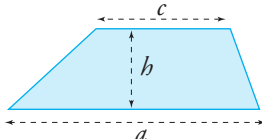
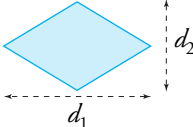
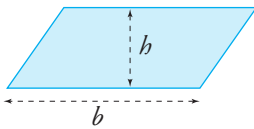
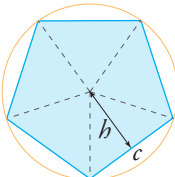
Winkelsumme und Anzahl der Diagonalen

- Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° .
- Die Winkelsumme eines konvexen n -Ecks beträgt $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
- Die Anzahl der Diagonalen in einem konvexen n -Eck beträgt $\frac{n(n-3)}{2}$.

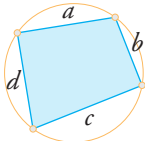
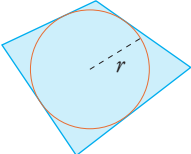
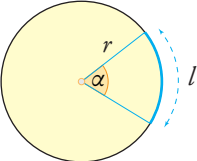
Goldener Schnitt und Goldenes Rechteck

| Goldener Schnitt | Goldenes Rechteck |
|---|---|
|  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ |  $\frac{AF}{FE} = \frac{BC}{CE} \approx 1,618$ |

Flächeninhalte einiger elementarer Figuren

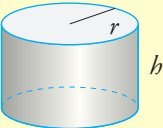
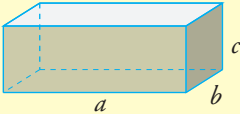
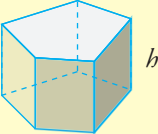
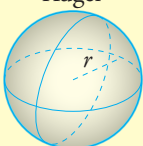
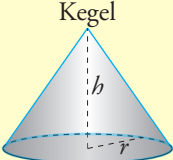
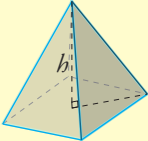
| | | |
|---------------------|---|--|
| Dreieck | $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$ |  |
| Rechteck | $\mathcal{A} = a \cdot b$ |  |
| Trapez | $\mathcal{A} = \frac{a+c}{2} \cdot h$ |  |
| Raute | $\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ |  |
| Parallelogramm | $\mathcal{A} = b \cdot h$ |  |
| Regelmässiges n-Eck | $\mathcal{A} = \frac{c \cdot h}{2} \cdot n$ |  |

Flächeninhalte einiger elementarer Figuren [Fortsetzung...]

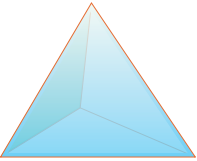
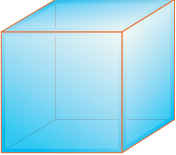
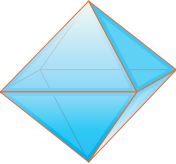
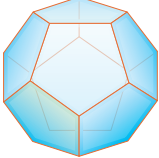
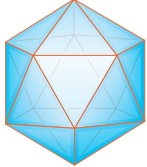
| | | |
|------------------|---|--|
| Schnenviereck | $p = \text{halber Umfang}$ $\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ |  |
| Tangentenviereck | $p = \text{halber Umfang}$ $\mathcal{A} = r \cdot p$ |  |
| Kreis Sektor | $l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360}$ $\mathcal{A} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$ |  |

Räumliche Geometrie

Volumina einiger elementarer Körper

| | | |
|--|--|---|
| <p>Zylinder</p>  $\mathcal{V} = \pi r^2 h$ | <p>Quader</p>  $\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$ | <p>Prisma</p>  $\mathcal{V} = \text{Grundfläche} \cdot h$ |
| <p>Kugel</p>  $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi r^3$ | <p>Kegel</p>  $\mathcal{V} = \frac{\pi r^2 h}{3}$ | <p>Pyramide</p>  $\mathcal{V} = \frac{\text{Grundfläche} \cdot h}{3}$ |

Platonische Körper

| K : Anzahl Kanten E : Anzahl Ecken F : Anzahl Flächen c : Kantenlänge | | | \mathcal{A} : Flächeninhalt der Seitenflächen \mathcal{V} : Volumen Eulersche Polyederformel $E - K + F = 2$ |
|--|---|--|--|
| Tetraeder | $E = 4$ $K = 6$ $F = 4$ $\mathcal{A} = \sqrt{3} \cdot c^2$ $\mathcal{V} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot c^3$ |  | |
| Hexaeder (Würfel) | $E = 8$ $K = 12$ $F = 6$ $\mathcal{A} = 6c^2$ $\mathcal{V} = c^3$ |  | |
| Oktaeder | $E = 6$ $K = 12$ $F = 8$ $\mathcal{A} = 2\sqrt{3} \cdot c^2$ $\mathcal{V} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot c^3$ |  | |
| Dodekaeder | $E = 20$ $K = 30$ $F = 12$ $\mathcal{A} = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot c^2$ $\mathcal{V} = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \cdot c^3$ |  | |
| Ikosaeder | $E = 12$ $K = 30$ $F = 20$ $\mathcal{A} = 5\sqrt{3} \cdot c^2$ $\mathcal{V} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \cdot c^3$ |  | |

Vektorgeometrie in der Ebene

- Beziehung von Chasles: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
- Kollineare Vektoren: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ kollinear zu $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$
- Koordinaten eines Punktes A : $A(a_1; a_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Mittelpunkt der Strecke AB : $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$
- Schwerpunkt des Dreiecks ABC : $G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- Senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Geraden

| | |
|---|--|
| Steigung einer Geraden mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ | $m = \frac{d_2}{d_1}$ |
| Steigung einer Geraden durch $A(a_1; a_2)$ und $B(b_1; b_2)$ | $m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ |
| Gleichung einer Geraden durch $(0; h)$ mit Steigung m | $y = mx + h$ |
| Parametergleichung einer Geraden durch $A(a_1; a_2)$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ |
| Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind zueinander senkrecht, wenn | $m_1 \cdot m_2 = -1$ |
| Spitzer Winkel zwischen zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 | $\tan(\alpha) = \left \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right $ |

Distanzen

| | |
|---|---|
| Distanz zwischen zwei Punkten $A(a_1; a_2)$ und $B(b_1; b_2)$ | $\delta(A; B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ |
| Abstand eines Punktes $P(p_1; p_2)$ von einer Geraden d mit der Gleichung $ax + by + c = 0$ | $\delta(P; d) = \frac{ ap_1 + bp_2 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ |

Vektorgeometrie im Raum

- Koordinaten eines Punktes A : $A(a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Mittelpunkt der Strecke AB : $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}; \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$
- Schwerpunkt des Dreiecks ABC : $G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}; \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right)$
- Betrag eines Vektors: $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$
- Senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

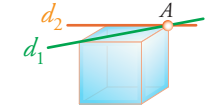
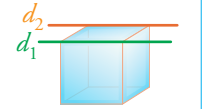
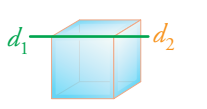

Lage eines Punktes zu einer Geraden

d bezeichnet eine Gerade durch den Punkt $A(a_1; a_2; a_3)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Ein Punkt $P(x; y; z)$ liegt auf der Geraden d , wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

| | |
|----------------------|---|
| Vektorgleichung | $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{d}$ |
| Parametergleichung | $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ |
| Koordinatengleichung | $\frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}$ |

Lage zweier Geraden

| Komplanar: Es existiert eine Ebene, welche beide Geraden enthält. | | | Nicht komplanar |
|---|---|---|--|
|  |  |  |  |
| $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ | $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ | $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$ | $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ |

Wirtschaftsmathematik

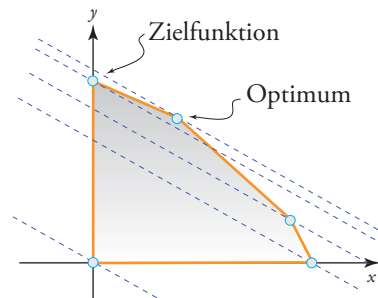
Lineare Optimierung

- Ziel: Maximierung oder Minimierung einer Funktion $Z = a_1x + b_1y$ (Zielfunktion) unter verschiedenen linearen Nebenbedingungen der Form:

$$ax + by \geq c \quad \text{oder} \quad x \geq 0 \quad \text{oder} \quad y \geq 0 \quad \text{etc.}$$

Vorgehen :

- 1) Graphische Darstellung aller Nebenbedingungen
=> Bereich der zulässigen Lösungen
- 2) Ermittlung der Koordinaten aller Eckpunkte des Bereichs (durch Lösen von Gleichungssystemen)
- 3) Berechnung des Funktionswerts von Z in jedem Eckpunkt.
- 4) Bestimmen des oder der Eckpunkte(s), für welche(n) der Funktionswert von Z maximal bzw. minimal ist



Wachstumsrate

- Gesamtwachstumsrate i zwischen einem Anfangswert V_0 und einem Endwert V_t :

$$i = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{V_t}{V_0} - 1$$

- Mittlere jährliche Wachstumsrate t_m über n Jahre:

$$t_m = \sqrt[n]{\frac{V_t}{V_0}} - 1$$

Finanzmathematik

Notation

| | | | |
|-------|-----------------------|-----|------------------------------------|
| C_0 | Anfangskapital | r | Aufzinsfaktor ($r = 1 + i$) |
| C_n | Endkapital | v | Diskontierungsfaktor ($v = 1/r$) |
| i | Jahreszinssatz | d | definiert als $d = \frac{i}{1+i}$ |
| n | Anlagedauer in Jahren | | |

Zinsrechnung

| Einfacher Zins | Zinseszins |
|----------------------------|---|
| $C_n = C_0 \cdot (1 + ni)$ | $C_n = C_0 \cdot r^n \rightarrow C_0 = C_n \cdot v^n$ |

Periodenzinssatz

Üblicherweise ist der Zinssatz für einen Zeitraum von einem Jahr definiert. Soll die Verzinsung hingegen monatlich erfolgen, so ist der Monat die neue Zeiteinheit und der Jahreszinssatz i muss in einen Monatszinssatz i_{12} umgerechnet werden.

| Einfacher Zins | Zinseszins |
|-----------------|-------------------------------|
| $i_{12} = i/12$ | $i_{12} = (1 + i)^{1/12} - 1$ |

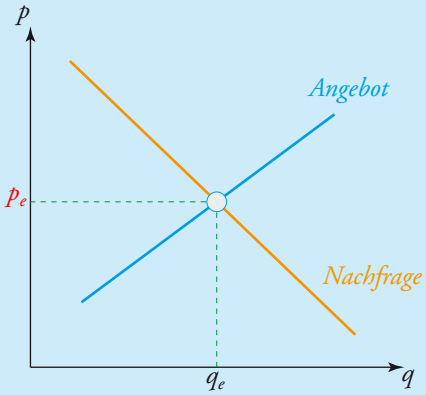
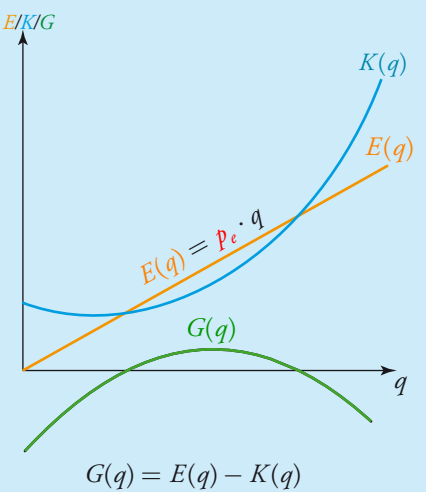
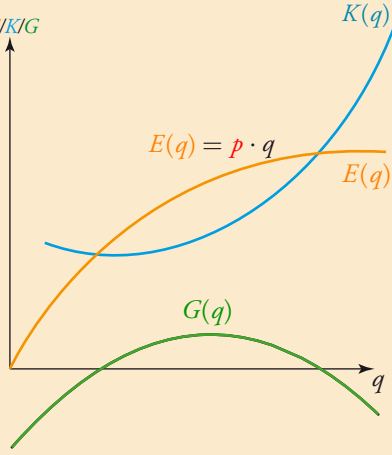
- Analog können auch Halbjahreszinssatz i_2 und Quartalszinssatz i_4 berechnet werden.

Barwert und Endwert einer Rente von 1 Währungseinheit

| | Barwert | Endwert |
|---------------------|--|--|
| Pränumerando-Rente | $\ddot{a}_{\overline{n} } = \frac{1 - v^n}{d}$ | $\ddot{s}_{\overline{n} } = \frac{r^n - 1}{d}$ |
| Postnumerando-Rente | $a_{\overline{n} } = \frac{1 - v^n}{i}$ | $s_{\overline{n} } = \frac{r^n - 1}{i}$ |

| | |
|--|--|
| ○ Endwert V_n einer jährlichen Pränumerando-Rente P , die während n Jahren zu einem Jahreszinssatz i ausbezahlt wird | $V_n = P \cdot \ddot{s}_{\overline{n} }$ |
| ○ Monatsrate M zur Rückzahlung einer Kreditsumme V_0 , zahlbar in 60 nachschüssigen Raten zu einem Jahreszinssatz i | $V_0 = M \cdot a_{\overline{60} }$ mit: $i_{12} = (1 + i)^{1/12} - 1$ |
| ○ Monatsrate M eines Leasings über einen Betrag V_0 , zahlbar in 48 vorschüssigen Raten zu einem Jahreszinssatz i und mit einem vorgesehenen Restwert V_n bei Vertragsende | $V_0 = M \cdot \ddot{a}_{\overline{48} } + V_n \cdot v^{48}$ mit: $i_{12} = (1 + i)^{1/12} - 1$ |

Preisbildung

| Vollkommene Konkurrenz | Monopol |
|--|---|
| <p>Der Gleichgewichtspreis ergibt sich aus dem Schnittpunkt von Angebot und Nachfrage.</p>  <p>Für den vom Markt bestimmten Gleichgewichtspreis p_e stellt sich anschliessend die Frage: Welche Menge q muss produziert werden, um den Gewinn $G(q)$ zu maximieren?</p>  $G(q) = E(q) - K(q)$ | <p>Im Gegensatz zur vollkommenen Konkurrenz kann der Monopolist den Preis selbst festlegen.</p> <p>Die Nachfragefunktion ist dem Monopolisten bekannt und liegt in einer der folgenden Formen vor:</p> $q = a p + b \quad \text{oder} \quad p = a q + b$ <p>Die Frage lautet: Welche Menge q muss produziert werden, um den Gewinn $G(q)$ zu maximieren?</p>  $G(q) = E(q) - K(q)$ <p>Nachdem die Menge q bestimmt wurde, kann anschliessend der Preis p ermittelt werden, zu welchem diese Menge abgesetzt werden kann (optimaler Preis).</p> |

1

H

1,008

Wasserstoff

-259,14

2,1

-252,8

*0,0899

I A

II A

3

Li

6,94

Lithium

180,54

1,0

1342

0,534

2970

1,85

4

Be

9,01

Beryllium

1278

1,5

2970

1,85

11

Na

22,99

Natrium

97,81

0,9

882,9

0,971

1107

1,74

12

Mg

24,31

Magnesium

648,8

1,2

1107

1,74

III B

IV B

V B

VI B

VI B

VII B

VII B

I B

II B

19

K

39,10

Kalium

63,25

0,8

760

0,862

1484

1,54

2831

2,99

20

Ca

40,08

Calcium

839

1,0

1484

1,54

2831

2,99

21

Sc

44,96

Scandium

1541

1,3

2831

2,99

22

Ti

47,90

Titan

1660

1,5

3287

4,54

3380

5,96

2672

7,20

1962

7,2

2750

7,86

2870

8,9

2730

8,90

2567

8,92

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

23

V

50,94

Vanadium

1890

1,6

3380

5,96

2672

7,20

1962

7,2

2750

7,86

2870

8,9

2730

8,90

2567

8,92

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

24

Cr

52,00

Chrom

1857

1,6

2672

7,20

1962

7,2

2750

7,86

2870

8,9

2730

8,90

2567

8,92

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

25

Mn

54,94

Mangan

1244

1,5

1962

7,2

2750

7,86

2870

8,9

2730

8,90

2567

8,92

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

26

Fe

55,85

Eisen

1535

1,8

2750

7,86

2870

8,9

2730

8,90

2567

8,92

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

27

Co

58,93

Kobalt

1495

1,8

2870

8,9

2730

8,90

2567

8,92

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

28

Ni

58,71

Nickel

1455

1,8

2730

8,90

2567

8,92

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

29

Cu

63,55

Kupfer

1083

1,9

2567

8,92

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

30

Zn

65,38

Zink

419,58

1,6

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

31

Ga

69,72

Gallium

29,8

1,6

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

32

Ge

72,59

Germanium

937,4

2,0

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

33

As

74,92

Arsen

—

2,0

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

34

Se

78,96

Selen

217

2,4

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

35

Br

79,90

Brom

-7,2

2,8

58,8

3,12

-152,3

*3,73

36

Kr

83,80

Krypton

-156,6

—

-152,3

*3,73

37

Rb

85,47

Rubidium

38,89

0,8

686

1,53

1384

2,6

3338

4,47

38

Sr

87,62

Strontium

769

1,0

1384

2,6

3338

4,47

39

Y

88,91

Yttrium

1522

1,3

3338

4,47

40

Zr

91,22

Zirkonium

1852

1,4

4377

6,49

4742

8,57

4612

10,20

4877

11,5

3900

12,3

3727

12,4

2970

12,0

2212

10,5

765

8,64

2080

7,30

2260

7,28

1750

6,69

989,8

6,00

184,35

4,93

-107,1

*5,89

41

Nb

92,91

Niob

2468

1,6

4742

8,57

4612

10,20

4877

11,5

3900

12,3

3727

12,4

2970

12,0

2212

10,5

765

8,64

2080

7,30

2260

7,28

1750

6,69

989,8

6,00

184,35

4,93

-107,1

*5,89

42

Mo

95,94

Molybdän

2617

1,8

4612

10,20

4877

11,5

3900

12,3

3727

12,4

2970

12,0

2212

10,5

765

8,64

2080

7,30

2260

7,28

1750

6,69

989,8

6,00

184,35

4,93

-107,1

*5,89

43

Tc

98,91

Technetium

2172

1,9

4877

11,5

44

Ru

101,07

Ruthenium

2310

2,2

3900

12,3

3727

12,4

2970

12,0

2212

10,5

765

8,64

2080

7,30

2260

7,28

1750

6,69

989,8

6,00

184,35

4,93

-107,1

*5,89

45

Rh

102,91

Rhodium

1966

2,2

3727

12,4

2970

12,0

2212

10,5

765

8,64

2080

7,30

2260

7,28

1750

6,69

989,8

6,00

184,35

4,93

-107,1

*5,89

46

Pd

106,42

Palladium

1554

2,2

2970

12,0

2212

10,5

765

8,64

2080

7,30

2260

7,28

1750

6,69

989,8

6,00

184,35

4,93

-107,1

*5,89

47

Ag

107,87

Silber

1083

1,9

2567

8,92

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

48

Cd

112,41

Cadmium

419,58

1,6

907

7,14

2403

5,9

2830

5,35

613

5,73

685

4,81

58,8

3,12

-152,3

*3,73

49

In

114,82

Indium

156,6

1,7

2080

7,30

2260

7,28

1750

6,69

989,8

6,00

184,35

4,93

-107,1

*5,89

50

Sn

118,69

Zinn

231,9

1,8

2260

7,28

1750

6,69

989,8

6,00

184,35

4,93

-107,1

*5,89

51

Sb

121,75

Antimon

630,5

1,9

1750

6,69

989,8

6,00

184,35

4,93

-107,1

*5,89

52

Te

127,60

Tellur

449,5

2,1

600

—

184,35

4,93

-107,1

*5,89

53

I

126,90

Iod

113,5

2,5

4,93

—

-107,1

*5,89

54

Xe

131,29

Xenon

-111,9

—

-107,1

*5,89

55

Cs

132,91

Cäsium

28,4

0,7

669,3

1,87

1640

3,51

3457

6,15

56

Ba

137,33

Barium

725

0,9

1640

3,51

3457

6,15

57

La

138,91

Lanthan

921

1,1

3457

6,15

58

Hf

178,49

Hafnium

227

1,3

4602

13,3

5425

16,6

5660

19,35

5627

20,53

5027

22,6

4130

22,4

3827

21,45

3080

19,28

356,58

13,546

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

59

Pr

140,91

Praseodym

2996

1,5

5425

16,6

5660

19,35

5627

20,53

5027

22,6

4130

22,4

3827

21,45

3080

19,28

356,58

13,546

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

60

Nd

144,24

Neodym

3410

1,7

5660

19,35

5627

20,53

5027

22,6

4130

22,4

3827

21,45

3080

19,28

356,58

13,546

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

61

Pm

(145)

Promethium

3180

1,9

5627

20,53

5027

22,6

4130

22,4

3827

21,45

3080

19,28

356,58

13,546

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

62

Sm

150,36

Samarium

3045

2,2

5027

22,6

4130

22,4

3827

21,45

3080

19,28

356,58

13,546

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

63

Eu

151,96

Europium

2410

2,2

5027

22,6

4130

22,4

3827

21,45

3080

19,28

356,58

13,546

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

64

Gd

157,25

Gadolinium

1772

2,2

5027

22,6

4130

22,4

3827

21,45

3080

19,28

356,58

13,546

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

65

Tb

158,93

Terbium

1064

2,4

3080

19,28

356,58

13,546

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

66

Dy

162,50

Dysprosium

-38,87

1,9

356,58

13,546

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

67

Ho

164,93

Holmium

303,5

1,8

1457

11,85

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

68

Er

167,26

Erbium

327,5

1,8

1740

11,34

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

69

Tm

168,93

Thulium

271,3

1,9

1560

9,8

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

70

Yb

173,04

Ytterbium

254

2,0

962

9,4

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

71

Lu

174,97

Lutetium

302

2,2

337

—

-71

—

-61,8

*9,73

72

Hf

178,49

Hafnium

227

1,3

4602

13,3

5425

16,6

5660

19,35

5627

20,53

5027

22,6

4130

22,4

3827

21

REDOXTABELLE

| Reduzierte Form (Stoffe, die oxidieren) | Oxidierter Form (Stoffe, die reduziert werden) | V |
|--|--|-------|
| Li | Li ⁺ +1e ⁻ | -3,05 |
| K | K ⁺ +1e ⁻ | -2,92 |
| Ca | Ca ²⁺ +2e ⁻ | -2,76 |
| Na | Na ⁺ +1e ⁻ | -2,71 |
| Mg | Mg ²⁺ +2e ⁻ | -2,40 |
| Al | Al ³⁺ +3e ⁻ | -1,67 |
| Mn | Mn ²⁺ +2e ⁻ | -1,19 |
| H ₂ + 2 OH ⁻ (pH=14) | 2 H ₂ O +2e ⁻ | -0,82 |
| Zn | Zn ²⁺ +2e ⁻ | -0,76 |
| Cr | Cr ³⁺ +3e ⁻ | -0,74 |
| S ²⁻ | S +2e ⁻ | -0,51 |
| Fe | Fe ²⁺ +2e ⁻ | -0,44 |
| H ₂ + 2 OH ⁻ (pH=7) | 2 H ₂ O +2e ⁻ | -0,42 |
| Ni | Ni ²⁺ +2e ⁻ | -0,25 |
| Sn | Sn ²⁺ +2e ⁻ | -0,14 |
| Pb | Pb ²⁺ +2e ⁻ | -0,13 |
| H ₂ + 2 H ₂ O (pH=0) | 2 H ₃ O ⁺ +2e ⁻ | 0,00 |
| Sn ²⁺ | Sn ⁴⁺ +2e ⁻ | +0,15 |
| Cu | Cu ²⁺ +2e ⁻ | +0,35 |
| 4 OH ⁻ (pH=14) | O ₂ +2 H ₂ O +4e ⁻ | +0,40 |
| 2 I ⁻ | I _{2(aq)} +2e ⁻ | +0,58 |
| 2 MnO(OH) + 2 OH ⁻ | 2 MnO ₂ + 2 H ₂ O +2e ⁻ | +0,74 |
| Fe ²⁺ | Fe ³⁺ +1e ⁻ | +0,75 |
| Ag | Ag ⁺ +1e ⁻ | +0,81 |
| 4 OH ⁻ (pH=7) | O ₂ +2 H ₂ O +4e ⁻ | +0,82 |
| Hg | Hg ²⁺ +2e ⁻ | +0,85 |
| 2 Br ⁻ | Br _{2(aq)} +2e ⁻ | +1,09 |
| Pt | Pt ²⁺ +2e ⁻ | +1,20 |
| 6 H ₂ O (pH=0) | O ₂ +4 H ₃ O ⁺ +4e ⁻ | +1,24 |
| 2 Cl ⁻ | Cl ₂ +2e ⁻ | +1,36 |
| Au | Au ³⁺ +3e ⁻ | +1,38 |
| Pb ²⁺ | Pb ⁴⁺ +2e ⁻ | +1,69 |
| 2 F ⁻ | F ₂ +2e ⁻ | +2,85 |

NAMEN VON MEHRATOMIGEN IONEN

| | | | |
|--|--------------------|-------------------------------|-------------|
| CH ₃ COO ⁻ | Acetat | HS ⁻ | Hydrosulfid |
| CO ₃ ²⁻ | Carbonat | HSO ₃ ⁻ | Hydrosulfit |
| ClO ₃ ⁻ | Chlorat | OH ⁻ | Hydroxid |
| C ₆ H ₅ O ₇ ³⁻ | Citrat | NO ₃ ⁻ | Nitrat |
| CN ⁻ | Cyanid | NO ₂ ⁻ | Nitrit |
| H ₂ PO ₄ ⁻ | Dihydrogenphosphat | ClO ₄ ⁻ | Perchlorat |
| HCOO ⁻ | Formiat | PO ₄ ³⁻ | Phosphat |
| HCO ₃ ⁻ | Hydrogencarbonat | SCN ⁻ | Rhodanid |
| HPO ₄ ²⁻ | Hydrogenphosphat | SO ₄ ²⁻ | Sulfat |
| HSO ₄ ⁻ | Hydrosulfat | SO ₃ ²⁻ | Sulfit |

Positives mehratomiges Ion, Kation (aber kein Metall!)

NH₄⁺ Ammonium

FORMELN

Stoffmenge n (in mol): $n = \frac{m}{M}$

wobei m = Masse in g, M = molare Masse in g/mol

Avogadro-Konstante N_A = molare Teilchenzahl:
6.022 · 10²³ mol⁻¹

Teilchenzahl N (ohne Einheit) : $n \cdot N_A$

wobei n = Stoffmenge in mol, N_A = molare Teilchenzahl (Avogadro-Konstante in mol⁻¹)

Konzentrationsberechnung: $c = \frac{n}{V}$

wobei c die Konz. in mol/l, n die Stoffmenge in mol und V das Volumen in l darstellen

pH-Berechnungen von wässrigen Lösungen:

Definition: pH= -log c(H₃O⁺)

mit starke Säuren: pH= -log c(Säure)

mit starken Basen: pOH = -log c(Base) pH = 14 - pOH

SÄURE / BASE - REIHE

| pKs | Säure | Name der Säure | konj. Base |
|-------|--|------------------------|--|
| -9 | HClO ₄ | Perchlorsäure | ClO ₄ ⁻ |
| -6 | HCl | Salzsäure | Cl ⁻ |
| -3 | H ₂ SO ₄ | Schwefelsäure | HSO ₄ ⁻ |
| -1.74 | H ₃ O ⁺ | Hydronium-Ion | H ₂ O |
| -1.32 | HNO ₃ | Salpetersäure | NO ₃ ⁻ |
| 1.92 | HSO ₄ ⁻ | Hydrosulfat-Ion | SO ₄ ²⁻ |
| 1.96 | H ₂ SO ₃ | Schweflige Säure | HSO ₃ ⁻ |
| 1.96 | H ₃ PO ₄ | Phosphorsäure | H ₂ PO ₄ ⁻ |
| 3.14 | HF | Fluorwasserstoff | F ⁻ |
| 3.13 | C ₆ H ₈ O ₇ | Zitronensäure | C ₆ H ₇ O ₇ ⁻ |
| 3.7 | HCOOH | Ameisensäure | HCOO ⁻ |
| 3.9 | C ₃ H ₆ O ₃ | Milchsäure | C ₃ H ₅ O ₃ ⁻ |
| 4.76 | C ₆ H ₇ O ₇ ⁻ | Dihydrogencitrat | C ₆ H ₆ O ₇ ²⁻ |
| 4.76 | CH ₃ COOH | Essigsäure | CH ₃ COO ⁻ |
| 6.4 | C ₆ H ₆ O ₇ ²⁻ | Hydrogencitrat | C ₆ H ₅ O ₇ ³⁻ |
| 6.46 | H ₂ CO ₃ | Kohlensäure | HCO ₃ ⁻ |
| 7.06 | H ₂ S | Schwefelwasserstoff | HS ⁻ |
| 7.2 | HSO ₃ ⁻ | Hydrosulfit-Ion | SO ₃ ²⁻ |
| 7.21 | H ₂ PO ₄ ⁻ | Dihydrogenphosphat-Ion | HPO ₄ ²⁻ |
| 9.21 | NH ₄ ⁺ | Ammonium-Ion | NH ₃ |
| 9.4 | HCN | Cyanwasserstoff | CN ⁻ |
| 10.4 | HCO ₃ ⁻ | Hydrogencarbonat-Ion | CO ₃ ²⁻ |
| 12.32 | HPO ₄ ²⁻ | Hydrogenphosphat-Ion | PO ₄ ³⁻ |
| 12.9 | HS ⁻ | Hydrosulfid-Ion | S ²⁻ |
| 15.74 | H ₂ O | Wasser | OH ⁻ |
| 23 | NH ₃ | Ammoniak | NH ₂ ⁻ |
| 24 | OH ⁻ | Hydroxid-Ion | O ²⁻ |