4.1.4 การแจกแจงแบบพัวส์ซอง (Poisson Distribution)

ลักษณะของการทดลองแบบพัวส์ซอง

1. การทดลองเป็นการนับจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในขอบเขตที่กำหนด โดยขอบเขตดังกล่าวนี้ อาจเป็นช่วงเวลา อาณาบริเวณ พื้นที่ ปริมาตร ฯลฯ

2. ทราบค่าเฉลี่ยของจำนวนของความสำเร็จในขอบเขตที่กำหนดให้นั้น

3. จำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเป็นอิสระต่อกัน

4.1.4 การแจกแจงแบบพัวส์ซอง (Poisson Distribution)

นิยาม 4.5

ถ้า X เป็นจำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในขอบเขตที่กำหนด ที่ได้จากการทดลองแบบพัวส์ซอง จะเรียก X ว่าตัวแปรสุ่มแบบพัวส์ซอง และเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ว่า การแจกแจงพัวส์ซอง (Poission distribution) โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

เมื่อ $e \approx 2.71828$ และ μ คือ จำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นโดยเฉลี่ยในขอบเขตที่กำหนด โดย $\mu > 0$

ทฤษฎี 4.4 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบพัวส์ซอง คือ

$$\mu = \mu \quad \text{และ} \quad \sigma^2 = \mu$$

4.1.4 การแจกแจงแบบพัวส์ซอง (Poisson Distribution)

ตัวอย่าง

ร้านขายไอศกรีมแห่งหนึ่งเปิดให้บริการวันละ 8 ชั่วโมง จากประสบการณ์พบว่า จะมีลูกค้าเข้ามารับประทานไอศครีมโดยเฉลี่ยวันละ 10 คน จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าเข้ามารับประทานไอศกรีม 3 – 5 คนในวันพรุ่งนี้

ข. ความน่าจะเป็นที่ในวันพรุ่งนี้จะไม่มีลูกค้าเข้ามารับประทานไอศครีมเลย

ค. ความน่าจะเป็นที่ในเวลา 11.00 – 15.00 น. จะมีลูกค้ามารับประทานไอศกรีม 4 คน

ให้ X เป็นจำนวนลูกค้าที่เข้ามารับประทานไอศกรีมใน 1 วัน จะได้ x = 0, 1 ,2 … ดังนั้น X มีการแจกแจงแบบพัวส์ซอง มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x;10) = \frac{e^{-10}10^{x}}{x!} \quad ; \quad x = 0,1,2,\ldots$$

4.1.4 การแจกแจงแบบพัวส์ซอง (Poisson Distribution)

ก. ความน่าจะเป็นที่ในวันพรุ่งนี้จะมีลูกค้าเข้ามารับประทานไอศกรีม 3 – 5 คน

$$P(3 \le X \le 5) = P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$= \frac{e^{-10}10^3}{3!}+\frac{e^{-10}10^4}{4!}+\frac{e^{-10}10^5}{5!}$$

$$= 0.00757+0.0189+0.0378 = 0.0643$$

ข. ความน่าจะเป็นที่ในวันพรุ่งนี้จะไม่มีลูกค้าเข้ามารับประทานไอศกรีมเลย

$$P(X=0) = \frac{e^{-10}10^0}{0!} = 0.000045$$

ค. ความน่าจะเป็นที่ในเวลา 11.00 – 15.00 น. จะมีลูกค้ามารับประทานไอศกรีม 4 คน

เวลา 8 ชม. มีลูกค้าเข้ามารับประทานเฉลี่ย 10 คน

เวลา 4 ชม. มีลูกค้าเข้ามารับประทานเฉลี่ย $= \frac{10}{8}\times 4 = 5$ คน

$$P(X=4) = \frac{e^{-5}5^4}{4!} = 0.1755$$

4.1.4 การแจกแจงแบบพัวส์ซอง (Poisson Distribution)

ตัวอย่าง

จากการสำรวจนักท่องเที่ยวที่เดินทางมาท่องเที่ยวที่อ่าวคุ้งกะเบน พบว่า มีนักท่องเที่ยวมาเที่ยวเฉลี่ย 144 คน ในเวลา 1 เดือน จงหาความน่าจะเป็นที่ในเวลา 4 วันต่อจากนี้ จะมีนักท่องเที่ยวเดินทางมาเที่ยวมากกว่า 5 คน

ให้ x เป็นจำนวนนักท่องเที่ยวที่เดินทางมาเที่ยว จะได้ $x = 0,1,2,\ldots$

เวลา 30 วัน มีนักท่องเที่ยวเฉลี่ย 144 คน

ดังนั้นเวลา 4 วันมีนักท่องเที่ยวเฉลี่ย $= \frac{144}{30}\times 4 = 19.2$ คน

ดังนั้น x มีการแจกแจงแบบพัวส์ซอง มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x;19.2) = \frac{e^{-19.2}19.2^{x}}{x!} \quad ; \quad x = 0,1,2,\ldots$$

4.1.4 การแจกแจงแบบพัวส์ซอง (Poisson Distribution)

$$
\begin{aligned}
P(X>5) &= 1-P(X\le 5) \\
&= 1-\begin{bmatrix} P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+ \\ P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) \end{bmatrix} \\
&= 1-\begin{bmatrix} \dfrac{e^{-19.2}19.2^{0}}{0!}+\dfrac{e^{-19.2}19.2^{1}}{1!}+\dfrac{e^{-19.2}19.2^{2}}{2!}+ \\ \dfrac{e^{-19.2}19.2^{3}}{3!}+\dfrac{e^{-19.2}19.2^{4}}{4!}+\dfrac{e^{-19.2}19.2^{5}}{5!} \end{bmatrix} \\
&= 1-0.00013 \\
&= 0.99987
\end{aligned}
$$

4.1.4 การแจกแจงแบบพัวส์ซอง (Poisson Distribution)

ตัวอย่าง

พนักงานพิมพ์ดีดคนหนึ่ง จะพิมพ์หนังสือผิด โดยเฉลี่ย 3 แห่งต่อการพิมพ์หนึ่งหน้า จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานพิมพ์ดีดคนนี้จะพิมพ์หนังสือไม่ผิดเลย ในการพิมพ์หนังสือ 5 หน้าแรก

ให้ X เป็นจำนวนคำที่พิมพ์ผิดใน 1 หน้า จะได้ x = 0, 1, 2 …
ใน 1 หน้า พิมพ์ผิดเฉลี่ย 3 แห่ง ดังนั้นใน 5 หน้าพิมพ์ผิดเฉลี่ย 15 คำ
ดังนั้น X มีการแจกแจงแบบพัวส์ซอง มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x;15) = \frac{e^{-15}15^{x}}{x!} \quad ; \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-15}15^{0}}{0!} = 0.0000003059$$

4.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

4.2.1 การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution)

นิยาม 4.6 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีค่าได้ทุกค่าจริงในช่วงใดช่วงหนึ่ง ด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน จะกล่าวว่า X มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม และมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X ดังนี้

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; \quad a < x < b \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่ และ $a < b$

ทฤษฎี 4.5 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มยูนิฟอร์ม

$$\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{(b+a)^2}{12}$$

4.2.1 การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution

ตัวอย่าง

กำหนดให้ X มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบยูนิฟอร์ม ในช่วง (0,5)

ก. จงหาความน่าจะเป็นที่ X มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 4

ข. จงหาความน่าจะเป็นที่ X มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2

ค. จงหาความน่าจะเป็นที่ X มีค่าน้อยกว่า 3

ง. จงหาความน่าจะเป็นที่ X มีค่ามากกว่า 2.5

จ. จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X

จาก X มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบยูนิฟอร์ม ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5} \qquad ; \ 0 < x < 5$$

4.2.1 การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution

ก. ความน่าจะเป็นที่ X มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 4

$$P(1 \le X \le 4) = \int_{1}^{4} \frac{1}{5}\,dx = \left.\frac{x}{5}\right|_{1}^{4}$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = 0.6$$

ข. ความน่าจะเป็นที่ X มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2

$$P(X \ge 2) = \int_{2}^{\infty} \frac{1}{5}\,dx = \int_{2}^{5} \frac{1}{5}\,dx + \int_{5}^{\infty} \frac{1}{5}\,dx$$

$$= \left.\frac{x}{5}\right|_{2}^{5} + 0 = \frac{5}{5} - \frac{2}{5}$$

$$= 0.6$$

4.2.1 การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution

ก. ความน่าจะเป็นที่ x มีค่าน้อยกว่า 3

$$P(X<3) = \int_{-\infty}^{3}\frac{1}{5}dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{5}dx + \int_{0}^{3}\frac{1}{5}dx$$

$$= 0+\left.\frac{x}{5}\right|_{0}^{3} = \frac{3}{5}-0 = 0.6$$

ข. ความน่าจะเป็นที่ x มีค่ามากกว่า 2.5

$$P(X>2.5) = \int_{2.5}^{\infty}\frac{1}{5}dx = \int_{2.5}^{5}\frac{1}{5}dx + \int_{5}^{\infty}\frac{1}{5}dx$$

$$= \left.\frac{x}{5}\right|_{2.5}^{5} + 0 = \frac{5}{5}-\frac{2.5}{5} = 0.5$$

ค. ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ x

$$\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$= \frac{5+0}{2} = 2.5$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{(b+a)^2}{12}$$

$$= \frac{(5+0)^2}{12} = 2.08$$

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

นิยาม 4.7

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบปกติ (Normal random variable) ที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

โดยพารามิเตอร์ $-\infty < \mu < \infty$ และ $\sigma > 0$ ค่าคงตัว $\pi \approx 3.14159$ และ $e \approx 2.71828$ แล้ว จะเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X การแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution)

ทฤษฎี 4.6 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปกติ คือ

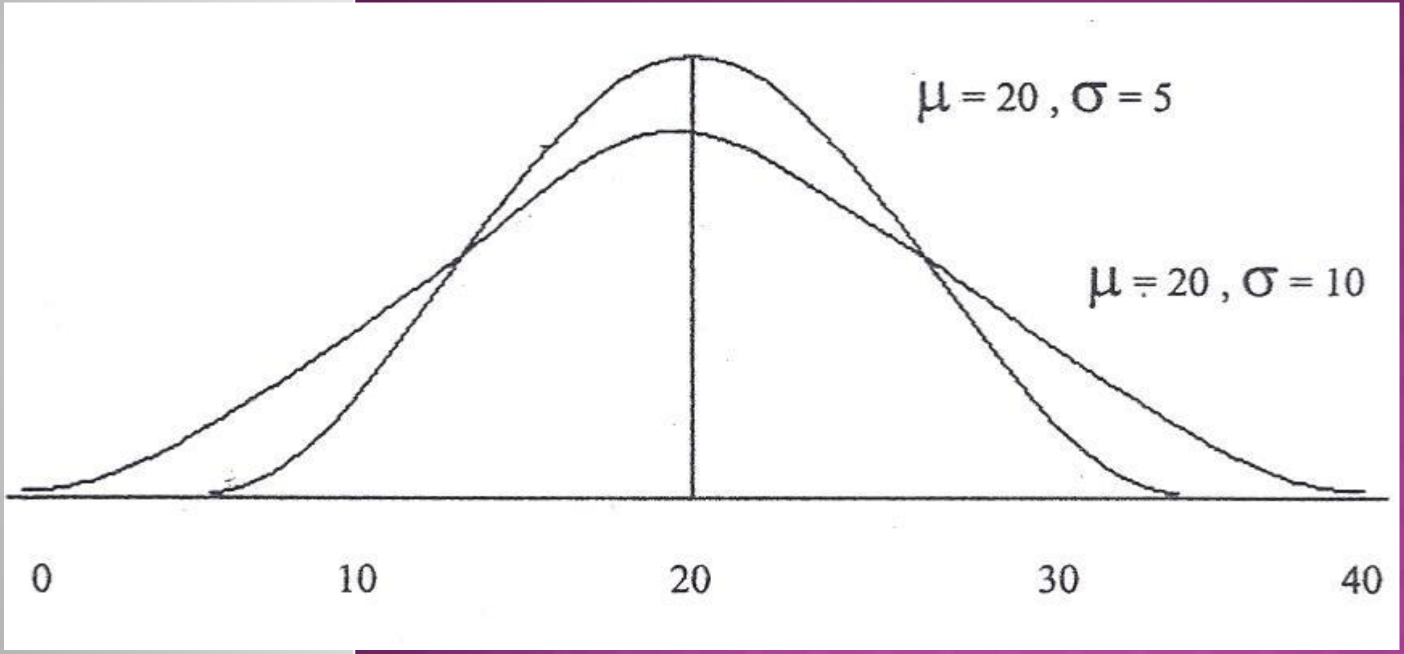
$$E(X) = \mu$$

และ

$$V(X) = \sigma^2$$

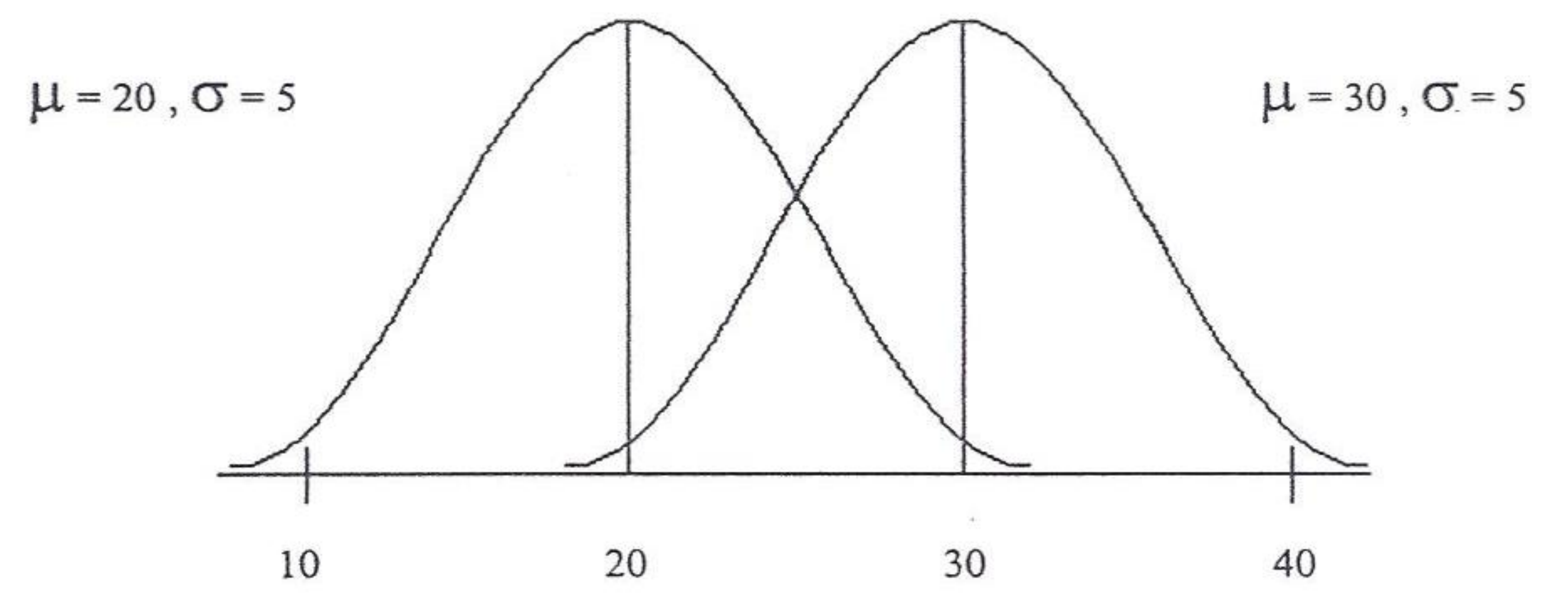
4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

จากฟังก์ชันความน่าจะเป็น ของตัวแปรสุ่มปกติ ถ้าทราบค่าพารามิเตอร์ คือ ค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ สามารถแสดงรูปโค้งปกติได้ดังนี้



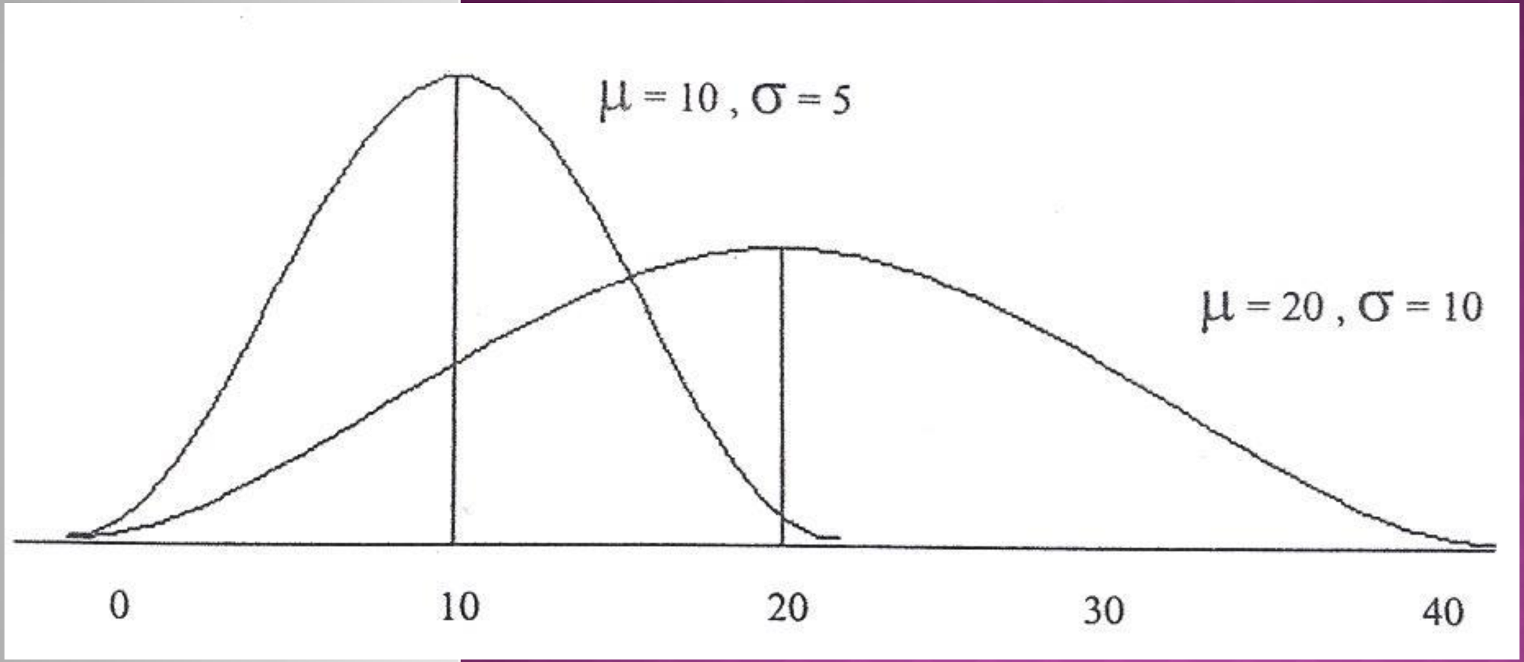
การแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน ความแปรปรวนต่างกัน

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)



การแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยต่างกัน ความแปรปรวนเท่ากัน

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)



การแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยต่างกัน ความแปรปรวนต่างกัน

คุณสมบัติของเส้นโค้งปกติ

1. เป็นเส้นโค้งรูประฆังคว่ำ
2. พื้นที่ระหว่างเส้นโค้งปกติกับแกน x จะเท่ากับ 1 เสมอ
3. ปลายเส้นโค้งทั้งสองข้างจะโน้มเข้าหาแกน x แต่จะไม่สัมผัสแกน x
4. ความสูงของเส้นโค้งที่จุด $\mu \pm k$ จะเท่ากันเสมอ นั่นคือ เส้นโค้งมีลักษณะสมมาตรรอบค่าเฉลี่ย μ
5. เส้นโค้งมีค่าสูงสุดเมื่อ $x = \mu$
6. เส้นโค้งมีค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยม เท่ากัน
7. พื้นที่ใต้เส้นโค้ง คือ ความน่าจะเป็น

การแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard normal distribution)

นิยาม 4.8

ถ้า Z เป็นตัวแปรสุ่มแบบปกติมาตรฐาน ที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน 1 แล้ว จะเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของ Z ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น f(z) ว่า การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard normal distribution) เขียนแทนด้วย $Z \sim N(0,1)$ โดย

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

การหาพื้นที่ใต้โค้ง

ในทางปฏิบัติ เมื่อจะทำการหาพื้นที่ภายใต้โค้งปกติ เราจะทำการแปลงข้อมูลที่มีการแจกแจงปกตินั้น ให้เป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน แล้วเปิดตารางท้ายเล่ม เพื่อทำการหาพื้นที่

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

ตัวอย่าง

กำหนดให้ Z เป็นตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน จงหา

1) $P(0 < Z < 0.88)$

2) $P(-2.45 < Z < 0)$

3) $P(Z > 1.44)$

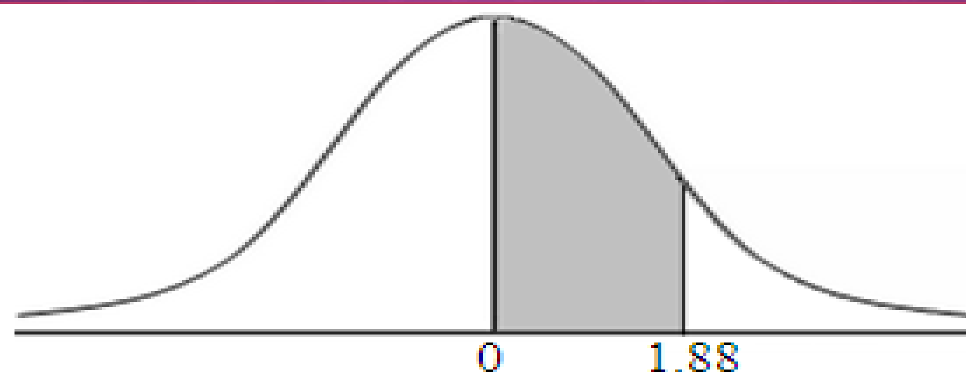
4) $P(-1.66 < Z)$

5) $P(1.04 < Z < 2.44)$

6) $P(-3.33 < Z < -2.22)$

7) $P(-0.37 < Z < 1.69)$

1) $P(0 < Z < 0.88)$

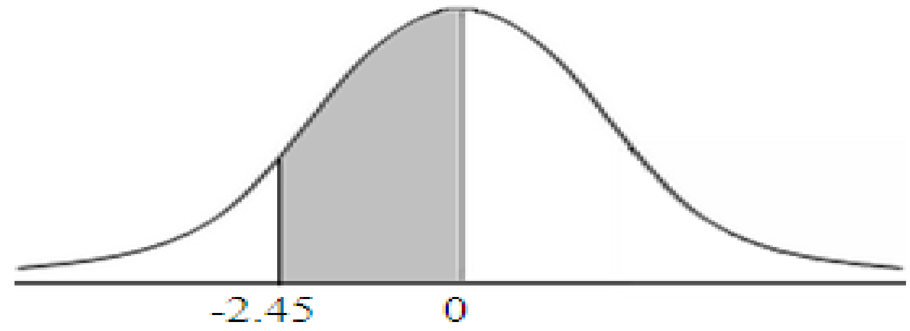


$P(0 < Z < 1.88) \quad = \quad 0.4699$

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

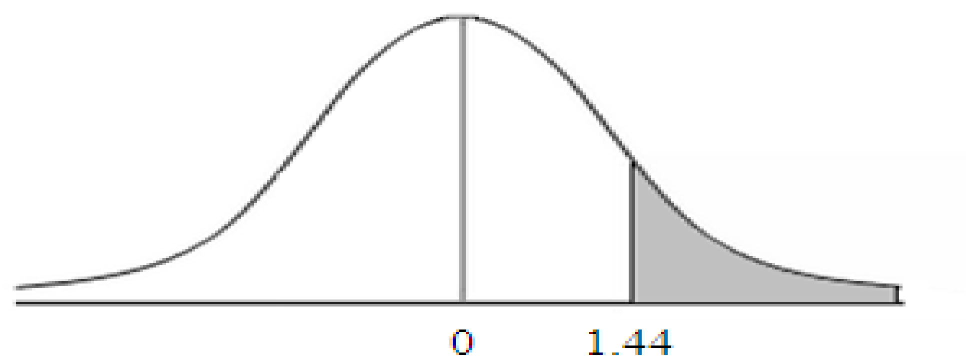
ตัวอย่าง

2) $P(-2.45 < Z < 0)$



$$P(-2.45 < Z < 0) = P(0 < Z < 2.45)$$
$$= 0.4929$$

3) $P(Z > 0.44)$

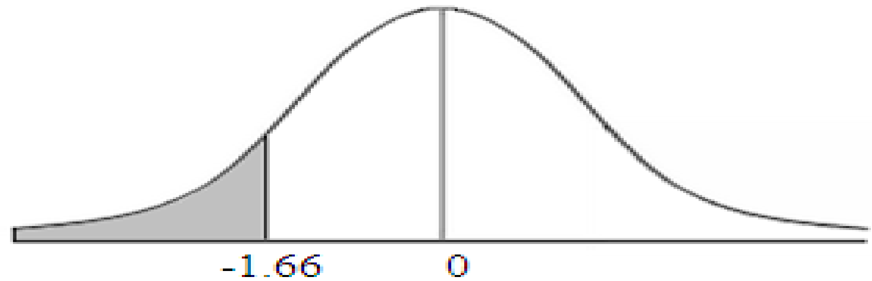


$$P(Z > 1.44) = 0.5 - P(0 < Z < 1.44)$$
$$= 0.5 - 0.4215$$
$$= 0.0785$$

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

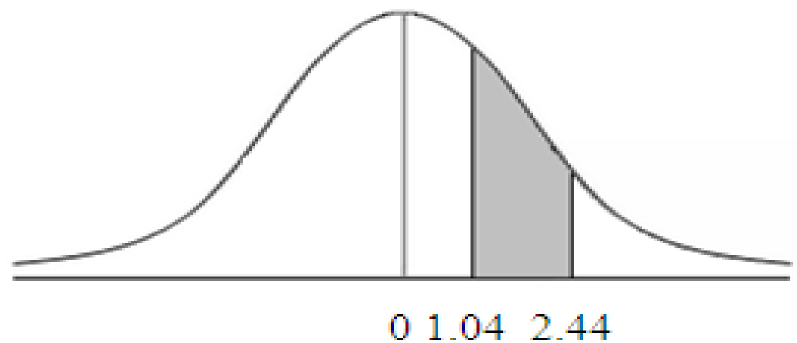
ตัวอย่าง

4) $P(-1.66 < Z)$



$$\begin{aligned} P(-1.66 < Z) &= P(Z > 1.66) \\ &= 0.5 - P(0 < Z < 1.66) \\ &= 0.5 - 0.4515 \\ &= 0.0485 \end{aligned}$$

5) $P(1.04 < Z < 2.44)$

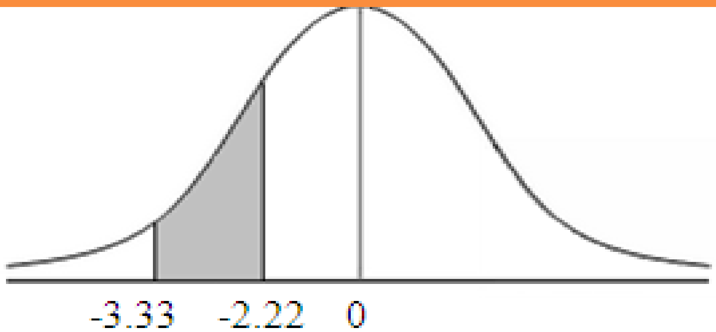


$$\begin{aligned} P(1.04 < Z < 2.44) &= P(0 < Z < 2.44) - P(0 < Z < 1.04) \\ &= 0.4927 - 0.3508 \\ &= 0.1419 \end{aligned}$$

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

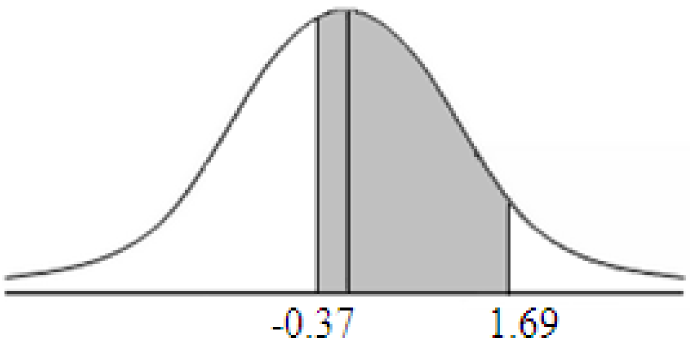
ตัวอย่าง

6) $P(-3.33 < Z < -2.22)$



$$\begin{aligned}
P(-3.33 < Z < -2.22) &= P(2.22 < Z < 3.33) \\
&= P(0 < Z < 3.33) - P(0 < Z < 2.22) \\
&= 0.4996 - 0.4868 \\
&= 0.0128
\end{aligned}$$

7) $P(-0.37 < Z < 1.69)$



$$\begin{aligned}
P(-0.37 < Z < 1.69) &= P(0 < Z < 0.37) + P(0 < Z < 1.69) \\
&= 0.1443 + 0.4545 \\
&= 0.5988
\end{aligned}$$

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

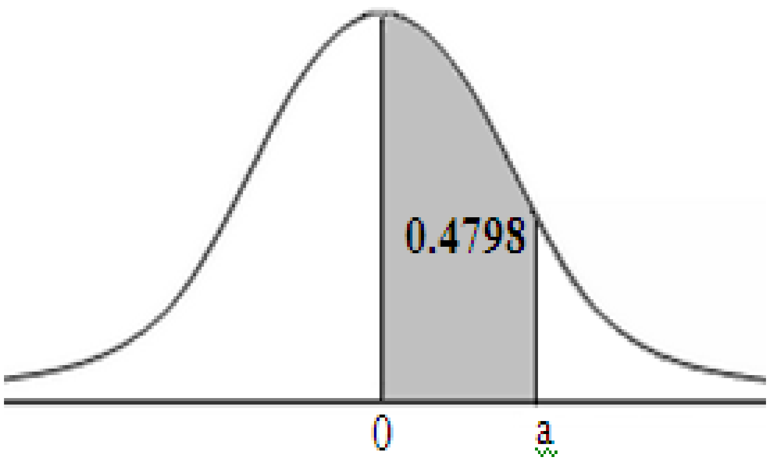
ตัวอย่าง

จงหาค่า a ที่ทำให้

1) $P(0 < Z < a) = 0.4798$

พื้นที่ 0.4798 ตรงกับค่า $Z = 2.05$

ดังนั้น $a = 2.05$

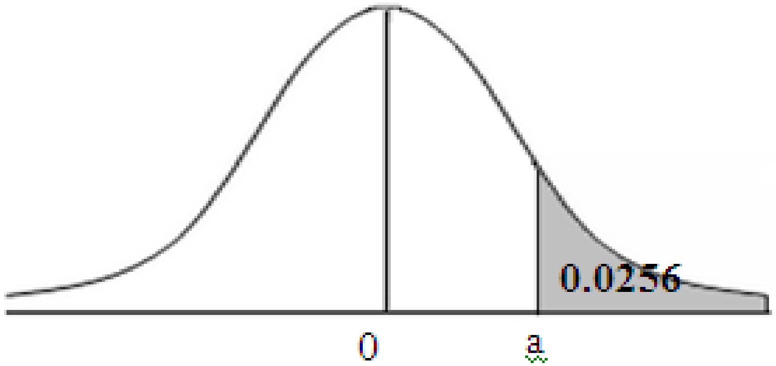


2) $P(Z > a) = 0.0256$

$$
\begin{aligned}
P(Z > a) &= 0.0256 \\
&= 0.5 - 0.4744 \\
P(0 < Z < a) &= 0.4744
\end{aligned}
$$

พื้นที่ 0.4744 ตรงกับค่า $Z = 1.95$

ดังนั้น $a = 1.95$



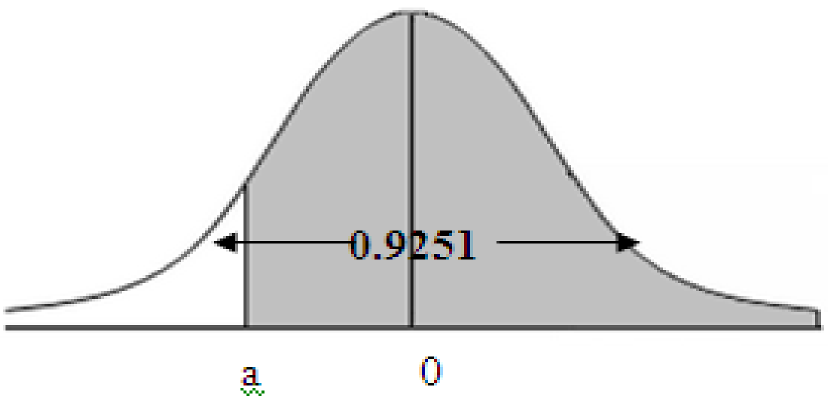
4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

ตัวอย่าง

จงหาค่า a ที่ทำให้

3) $P(Z > a) = 0.9215$

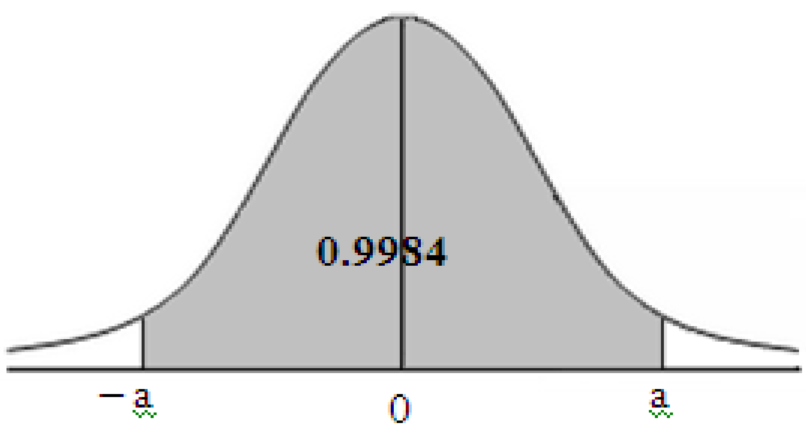
$$P(Z > a) = 0.9251$$
$$= 0.5 + 0.4251$$
$$P(a < Z < 0) = 0.4251$$



พื้นที่ 0.4251 ตรงกับค่า $Z = 1.44$ ดังนั้น $a = -1.44$

4) $P(-a < Z < a) = 0.9984$

$$P(-a < Z < a) = 0.9984$$
$$P(0 < Z < a) = \frac{0.9984}{2}$$
$$= 0.4992$$



พื้นที่ 0.4992 ตรงกับค่า $Z = 3.14$

ดังนั้น $a = 3.14$

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

ตัวอย่าง

ถ้าคะแนนสอบกลางภาคเรียนวิชาภาษาอังกฤษของนักศึกษากลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย 55 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 11 คะแนน จงหาว่ามีนักศึกษาร้อยละเท่าไร ที่มีคะแนนระหว่าง 44 ถึง 64 คะแนน

ให้ X เป็นคะแนนสอบวิชาภาษาอังกฤษ จะได้ $X \sim N(\mu = 55, \sigma^2 = 121)$

จาก $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$$
\begin{aligned}
P(44 < X < 64) &= P\left(\frac{44-55}{11} < Z < \frac{64-55}{11}\right) \\
&= P(-1 < Z < 0.82) \\
&= P(0 < Z < 0.82) + P(0 < Z < 1) \\
&= 0.2939 + 0.3413 \\
&= 0.6352
\end{aligned}
$$

ดังนั้น มีนักศึกษาร้อยละ 63.52 ที่ได้คะแนนอยู่ระหว่าง 44 ถึง 64 คะแนน

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

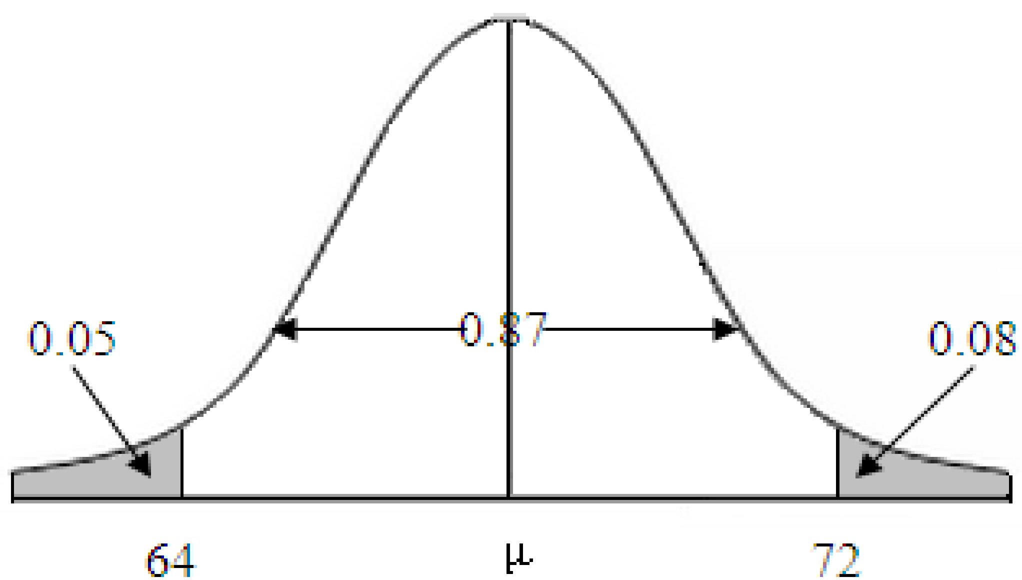
ตัวอย่าง

ถ้ากำหนดให้ผู้ที่มีน้ำหนักเกิน 72 กิโลกรัมเป็นคนอ้วน ผู้ที่มีน้ำหนัก 64 – 72 กิโลกรัมเรียกว่าคนน้ำหนักปกติ ผู้ที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 64 กิโลกรัมเรียกว่าคนผอม จากการสำรวจน้ำหนักของนักศึกษาในสถาบันการศึกษาแห่งหนึ่งพบว่า มีคนอ้วนร้อยละ 5 มีคนน้ำหนักปกติร้อยละ 87 และมีคนผอมร้อยละ 8 ถ้าน้ำหนักมีการแจกแจงแบบปกติ จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนัก

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

วิธีทำ

จาก	คนอ้วนมีร้อยละ 8	นั่นคือ	$P(X > 72) = 0.08$
	คนน้ำหนักปกติมีร้อยละ 87	นั่นคือ	$P(64 < X < 72) = 0.87$
	คนผอมมีร้อยละ 5	นั่นคือ	$P(X < 64) = 0.05$



4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

เมื่อ $X = 64$ จะได้ $Z_1 = \dfrac{64-\mu}{\sigma}$ ---------- ❶

เมื่อ $X = 72$ จะได้ $Z_2 = \dfrac{72-\mu}{\sigma}$ ---------- ❷

จาก $P(0 < Z < Z_1) = 0.5 - 0.05 = 0.45$

จะได้ $Z_1 = -1.64$

และ $P(0 < Z < Z_2) = 0.5 - 0.08 = 0.42$

จะได้ $Z_1 = 1.41$

แทนค่า Z_1, Z_2 ลงใน ❶ และ ❷ จะได้

$-1.64 = \dfrac{64-\mu}{\sigma}$ ---------- ❸

และ $1.41 = \dfrac{72-\mu}{\sigma}$ ---------- ❹

นำ ❹ หารด้วย ❸ และแก้สมการจะได้

$\mu = 68.31$

$\sigma = 2.63$

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

ตัวอย่าง

ในการสอบคัดเลือกเข้าทำงานในบริษัทแห่งหนึ่ง คะแนนการสอบมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 75 คะแนน ความแปรปรวน 64 คะแนน ถ้าผลการคัดเลือกปรากฏว่าผู้ที่สอบได้คะแนนตั้งแต่ 90 คะแนนขึ้นไปได้เข้าไปสอบสัมภาษณ์ โดยมีจำนวนผู้ได้เข้าสอบสัมภาษณ์ 12 คน จงหาว่ามีผู้มาสมัครสอบคัดเลือกเข้าทำงานในบริษัทนี้กี่คน

4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

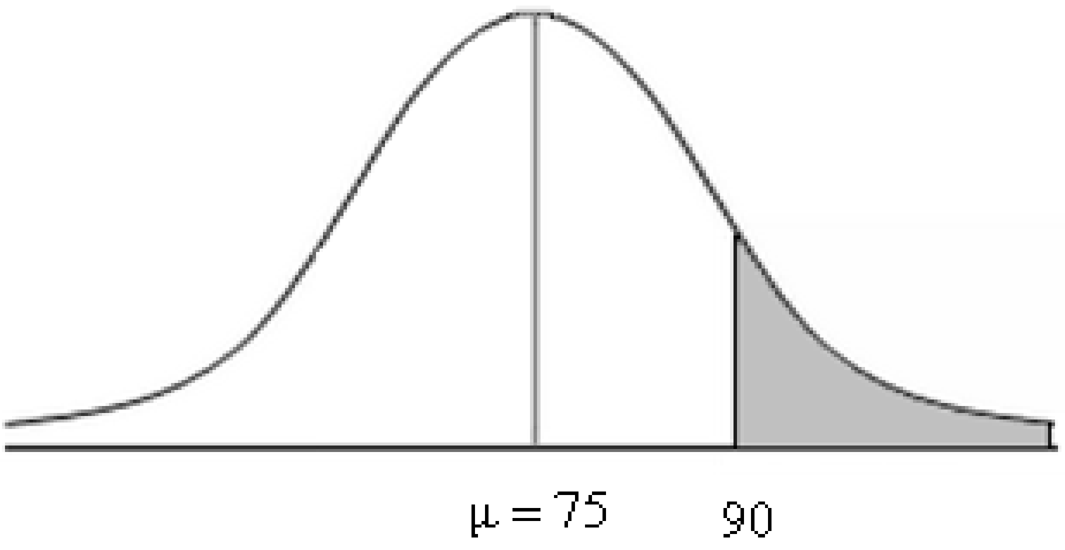
วิธีทำ

ให้ X เป็นคะแนนสอบคัดเลือก จะได้ $X \sim N(\mu = 75, \sigma^2 = 64)$

สมมติให้มีผู้สมัครสอบคัดเลือกเข้าทำงานทั้งหมด N คน

จากจำนวนผู้ได้เข้าสอบสัมภาษณ์ 12 คน จะได้ว่า

ความถี่สัมพัทธ์ของผู้ได้เข้าสอบสัมภาษณ์เท่ากับ $\frac{12}{N}$ ซึ่งเท่ากับ $P(X > 90)$



4.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

$$P(X > 90) = P\left(Z > \frac{90-75}{8}\right) = P(Z > 1.87)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z < 1.87) = 0.5 - 0.4693 \text{ จาก}$$

$$= 0.0307$$

$$\frac{12}{N} = 0.0307$$

$$N = \frac{12}{0.0307}$$

$$= 390.88 \approx 391$$

ดังนั้น มีผู้สมัครสอบคัดเลือกเข้าทำงานทั้งสิ้น 391 คน

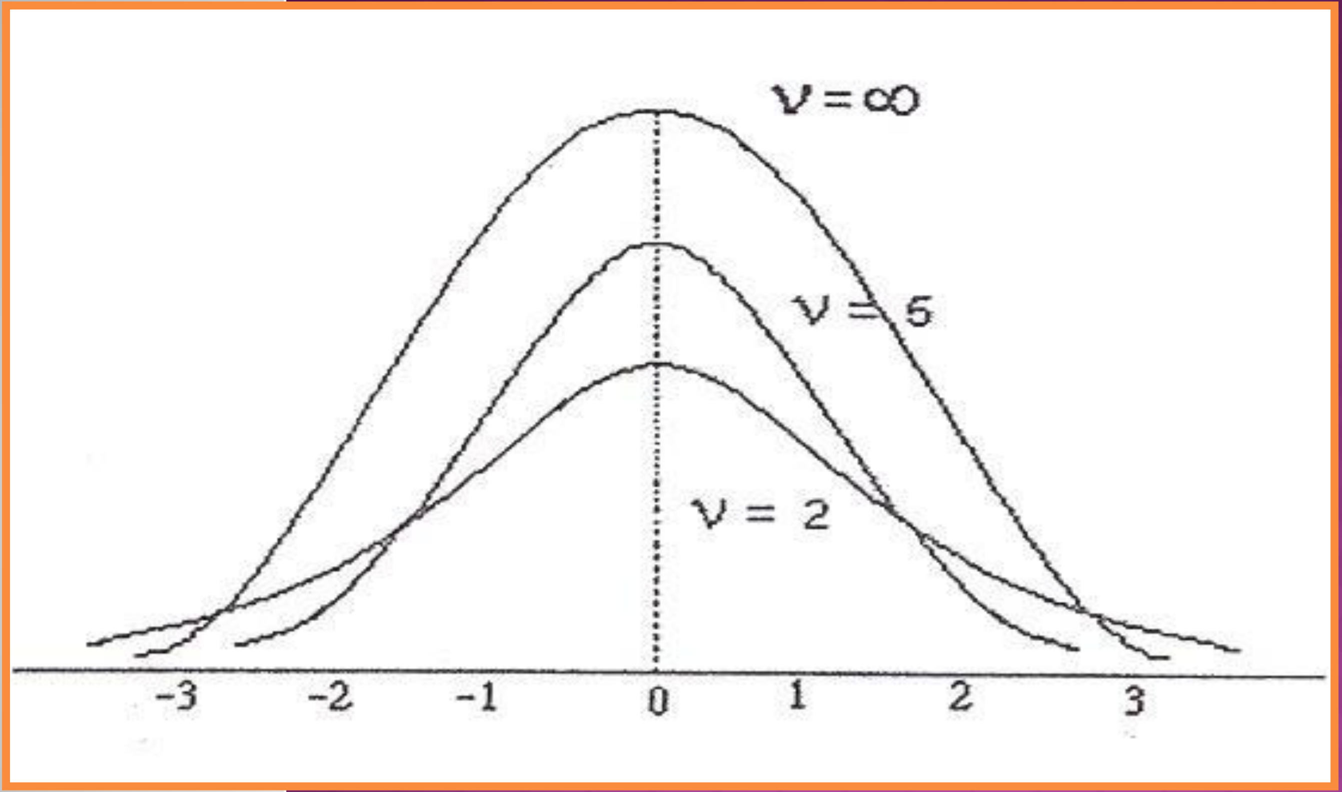
4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)

นิยาม 4.9

ถ้า Z เป็นตัวแปรสุ่มแบบปกติมาตรฐาน และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไคสแควร์ด้วยองศาอิสระ v และถ้า Z และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นอิสระกันแล้ว ตัวแปรสุ่ม $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/v}}$ จะมีการแจกแจงแบบที ด้วยองศาอิสระ v และมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(t, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi v}}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad ; \quad -\infty < t < \infty$$

4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)



โค้งทีที่องศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) ต่าง ๆ

4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)

ลักษณะของเส้นโค้งที

1. เป็นโค้งรูประฆังคว่ำ ที่มีค่าเฉลี่ย = E(T) = 0 และสมมาตรรอบค่าเฉลี่ย
2. ความแปรปรวนของ T $= \mathrm{Var}(T) = \dfrac{v}{v-2} > 1$ สำหรับทุกค่าของ $v > 2$ และมีค่าเข้าใกล้ 1 เมื่อ $v = n-1$ มีค่าเพิ่มขึ้น
3. ถ้าองศาอิสระน้อยจะทำให้เส้นโค้งทีแบนราบกว่ากรณีที่องศาอิสระมาก
4. ตัวแปรที มีค่าระหว่าง $-\infty$ ถึง ∞
5. เมื่อ n มีค่าเข้าใกล้อนันต์ เส้นโค้งทีและเส้นโค้งปกติมาตรฐาน จะเป็นเส้นโค้งเดียวกัน
6. พื้นที่ทั้งหมดใต้เส้นโค้งทีเหนือแกนนอนคือค่าความน่าจะเป็นโดยมีค่ารวมเท่ากับ 1

4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)

ทฤษฎี 4.7

ถ้า $\bar{X}$ และ S^2 เป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 ซึ่งไม่ทราบค่าแล้วจะได้ตัวแปรสุ่ม T โดย

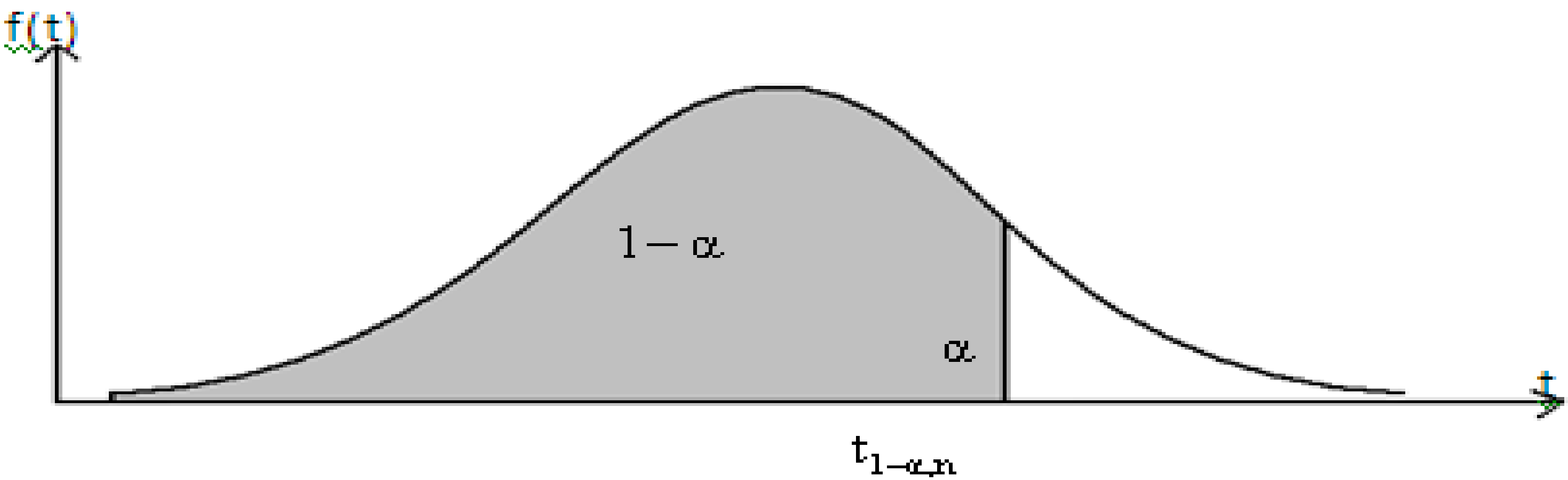
$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

มีการแจกแจงแบบที ที่มีองศาอิสระ $v = n-1$

4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)

การคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบที

ใช้สัญลักษณ์ $P(T \le t_{p,n}) = p$ หรือ $P(T \le t_{1-\alpha,n}) = 1-\alpha$



ลักษณะการคำนวณค่าพื้นที่ใต้โค้งที

4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)

ตัวอย่าง

จากตารางการแจกแจงแบบที จงหา

1) $P\left(T \le t_{0.95,10}\right) = 0.95$

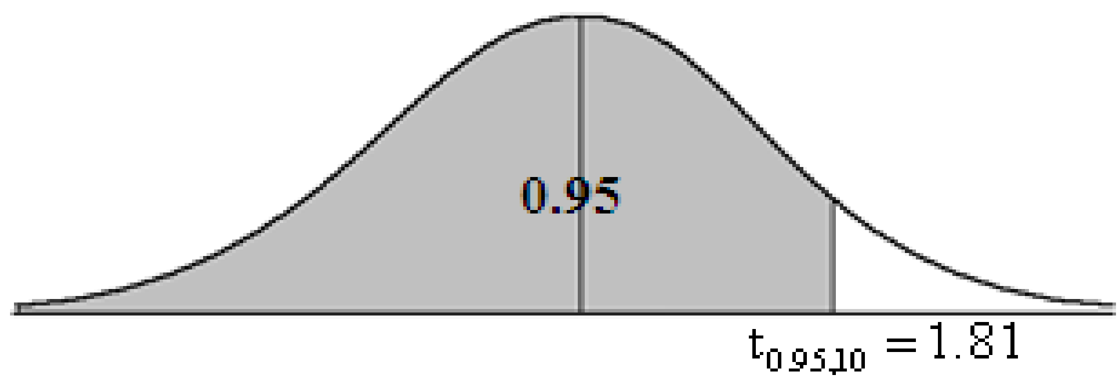
2) $P\left(T \le t_{0.25,16}\right) = 0.25$

3) $P\left(T > t\right) = 0.005$ เมื่อ d.f. = 13

4) $P\left(T > t\right) = 0.80$ เมื่อ d.f. = 17

5) $P\left(-t < T < t\right) = 0.90$ เมื่อ d.f. = 9

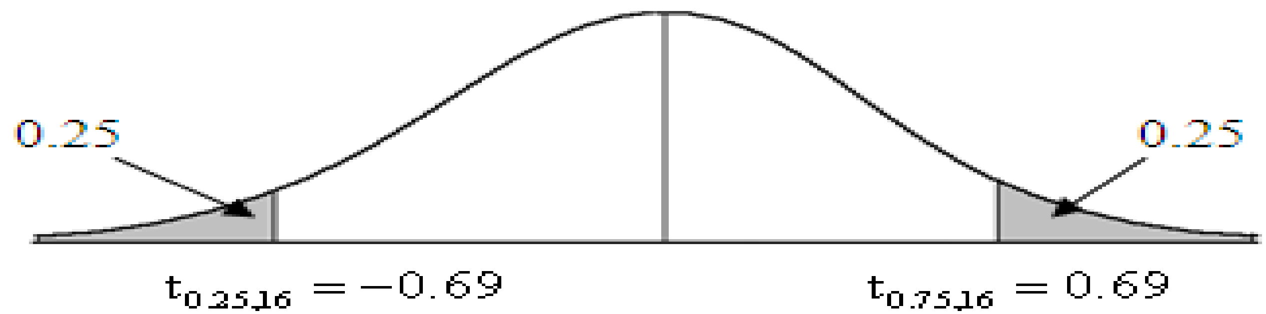
1) $P\left(T \le t_{0.95,10}\right) = 0.95$



จะได้ $t_{0.95,10} = 1.81$

4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)

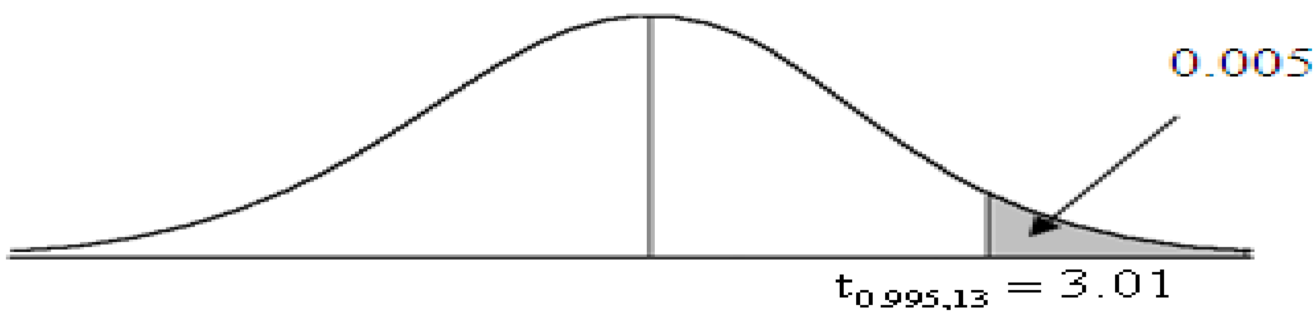
2) $P(T \leq t_{0.25,16}) = 0.25$



จาก $P(T \leq t_{0.25,16}) = 0.25$ และ $P(T \leq t_{0.75,16}) = 0.69$

จะได้ $t_{0.75,16} = 0.69$ และ $t_{0.25,16} = -0.69$

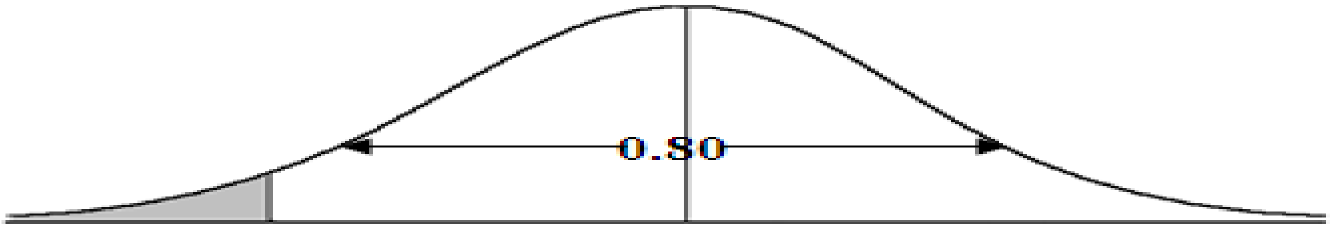
3) $P(T > t) = 0.005$ เมื่อ d.f. = 13



เนื่องจาก $P(T \leq t)0.995$ จะได้ $t_{0.995,13} = 3.01$

4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)

4) $P(T > t) = 0.80$ เมื่อ d.f. $= 17$



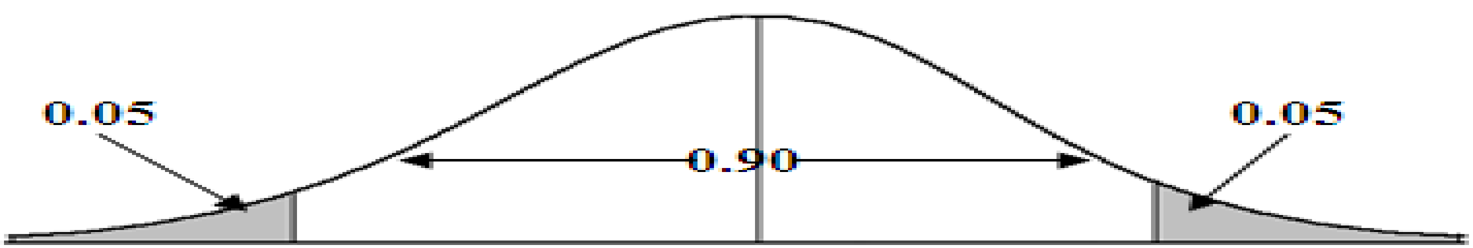
$t_{0.2,17} = -0.863$

เนื่องจาก $P(T > t_{0.0,17}) = 0.80$

แต่ $t_{0.2,17} = -t_{0.8,17} = -0.863$

ดังนั้น $t_{0.2,17} = -0.863$

5) $P(-t < T < t) = 0.90$ เมื่อ d.f. $= 9$



$-t = t_{0.05,9}$ $t = t_{0.95,9}$

เนื่องจาก $P(-t < T < t) = 0.90$ แสดงว่า $P(T < t) = 0.95$

จะได้ $t = t_{0.95,9} = 1.83$ และ $-t = t_{0.05,9} = -1.83$

4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)

ตัวอย่าง

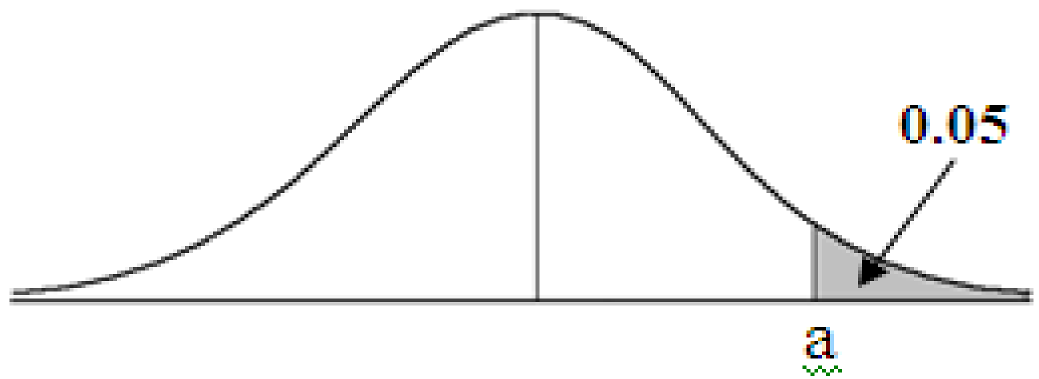
จงหาค่า a

2) $P(t > a) = 0.05 \quad d.f. = 14$

3) $P(t < a) = 0.025 \quad d.f. = 12$

4) $P(-1.40 < t < 2.31) = a \quad d.f. = 8$

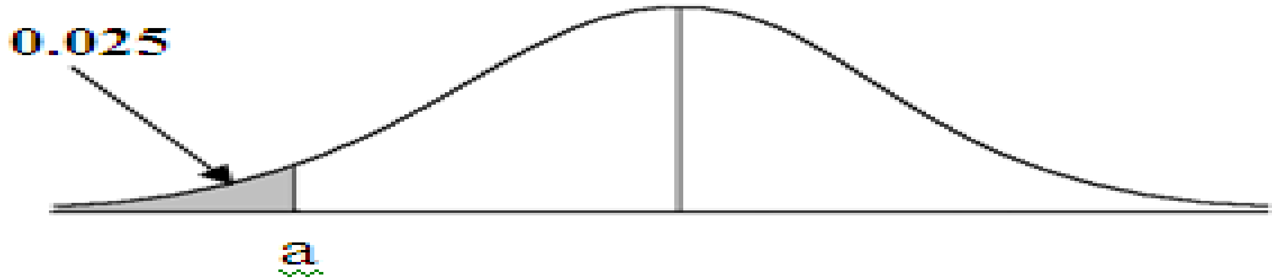
2) $P(t > a) = 0.05 \quad d.f. = 14$



$$t_{0.95,14} = 1.76$$

4.2.3 การแจกแจงแบบที (T – Distribution)

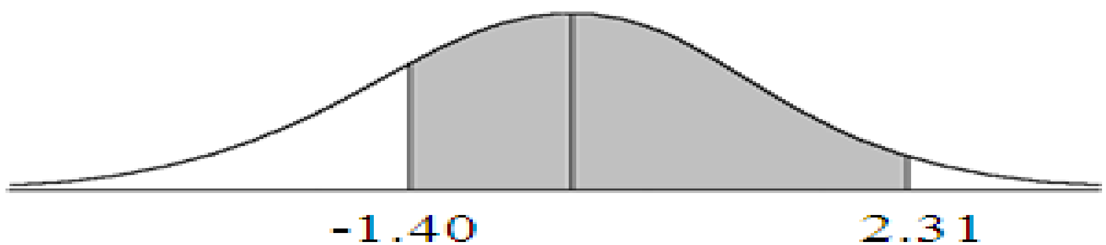
3) $P(t < a) = 0.025$ $d.f. = 12$



$t_{0.975,12} = 2.18$

$t_{0.025,12} = -2.18$

4) $P(-1.40 < t < 2.31) = a$ $d.f. = 8$



ค่า t = 2.31 ตรงกับพื้นที่ 0.975

ค่า t = 1.40 ตรงกับพื้นที่ 0.90

ค่า t = -1.40 ตรงกับพื้นที่ 1-0.90 = 0.10

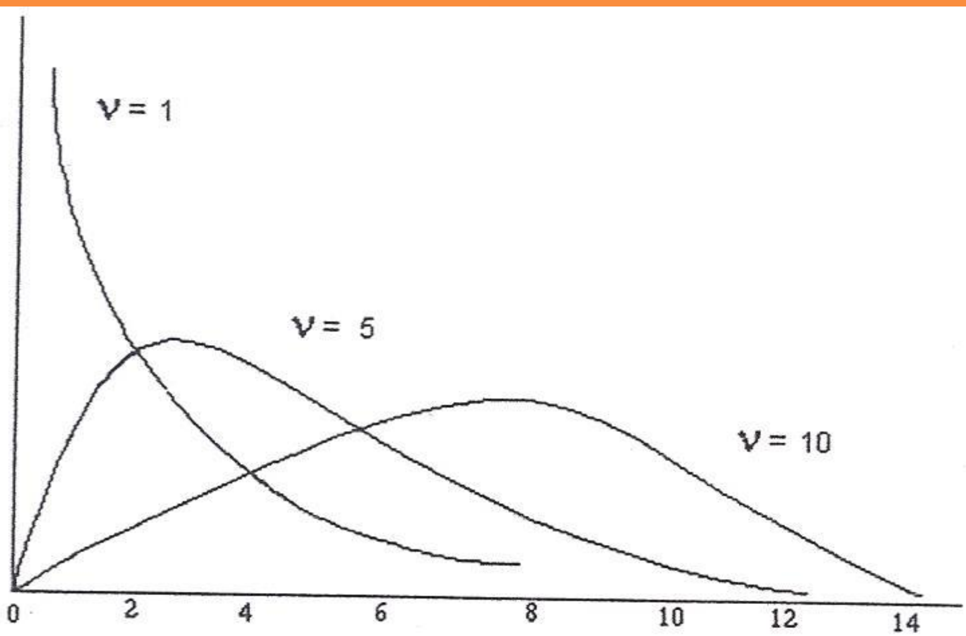
$P(-1.40 < t < 2.31) = 0.975 - 0.10 = 0.875$

4.2.4 การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

นิยาม 4.10

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และค่าความแปรปรวน σ^2 จะได้ $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน หรือ

$z^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$ จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีองศาอิสระเท่ากับ 1



การแจกแจงแบบไคสแควร์ ที่องศาอิสระต่าง ๆ)

4.2.4 การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

ลักษณะเส้นโค้งไคสแควร์

1. มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง ∞
2. เส้นโค้งมีลักษณะเบ้ขวา ซึ่งการเบ้จะแตกต่างกันโดยขึ้นกับองศาอิสระ
3. ถ้าองศาอิสระมีค่ามาก เส้นโค้งไคสแควร์จะคล้ายเส้นโค้งปกติ
4. พื้นที่ใต้โค้งคือความน่าจะเป็น มีค่ารวมเท่ากับ 1

นิยาม 4.11

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไคสแควร์ด้วยองศาอิสระ n ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

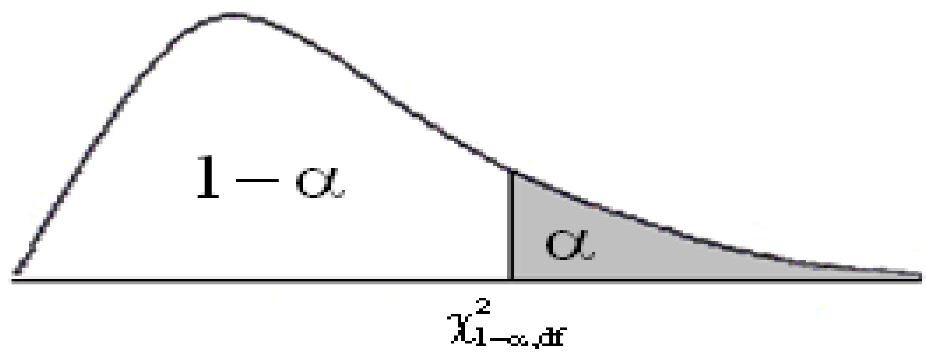
$$f(x;n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\left(\dfrac{n}{2}\right)-1\right)} e^{-x^{2}x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

โดย $e \approx 2.71828$

4.2.4 การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไคสแควร์

ใช้สัญลักษณ์ $P(\chi^2 \le \chi^2_{p,df}) = p$ หรือ $P(\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha,df}) = 1-\alpha$



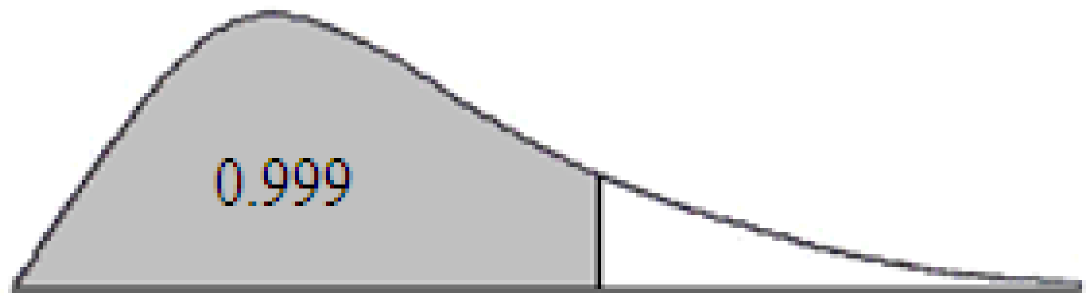
พื้นที่ใต้โค้งไคสแควร์

4.2.4 การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

ตัวอย่าง

จากตารางการแจกแจงแบบไคสแควร์ จงหา

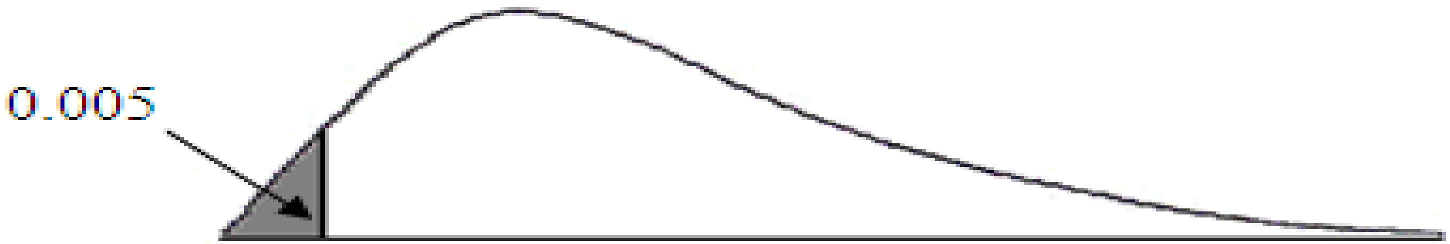
1. $P\left(\chi^2 \le \chi^2_{0.999,4}\right) = 0.999$



จะได้ $\chi^2_{0.999,4} = 18.5$

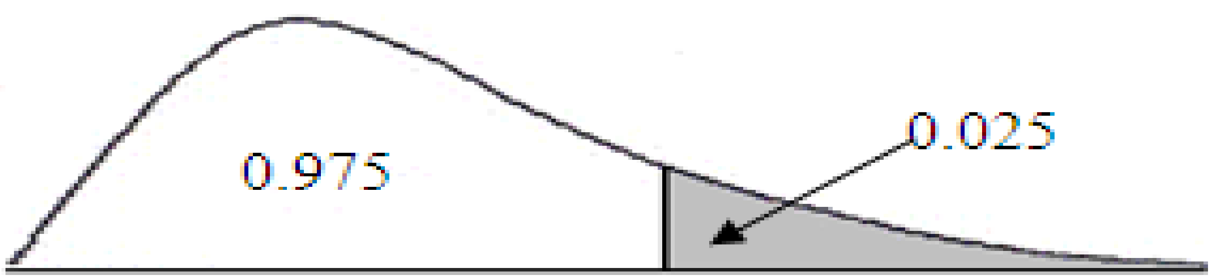
4.2.4 การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

2. $P\left(\chi^2 \le \chi^2_{0.005,27}\right) = 0.005$



จะได้ $\chi^2_{0.005,27} = 11.8$

3. $P\left(\chi^2 > \chi^2_{12}\right) = 0.025$



จะได้ $\chi^2_{0.975,12} = 23.3$

4.2.4 การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

ตัวอย่าง

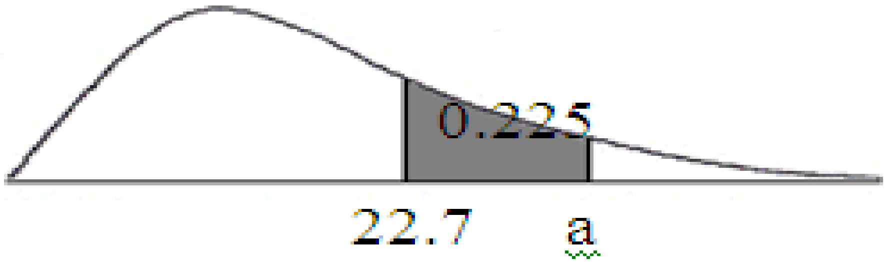
จงหาค่า a

1) $P(22.7 < \chi^2 < a) = 0.225$, $df = 19$

2) $P(\chi^2 \geq a) = 0.10$, $df = 17$

3) $P(\chi^2 \leq 1.48) = a$, $df = 5$

1) $P(22.7 < \chi^2 < a) = 0.225$, $df = 19$



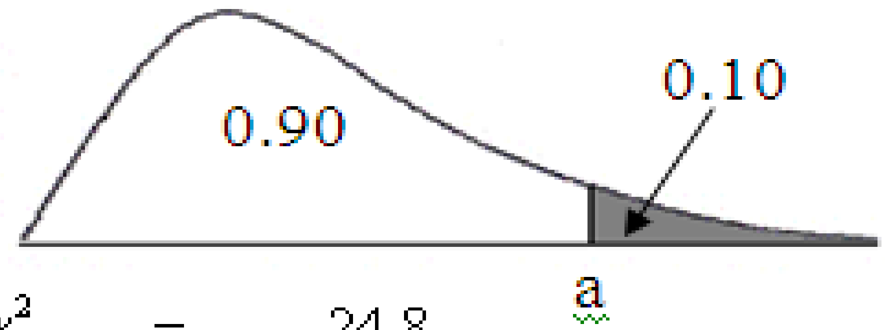
$P(\chi^2 \leq 22.7) = 0.75$

พื้นที่ $0.75 + 0.225 = 0.975$

$P(\chi^2 \leq 32.9) = 0.75$

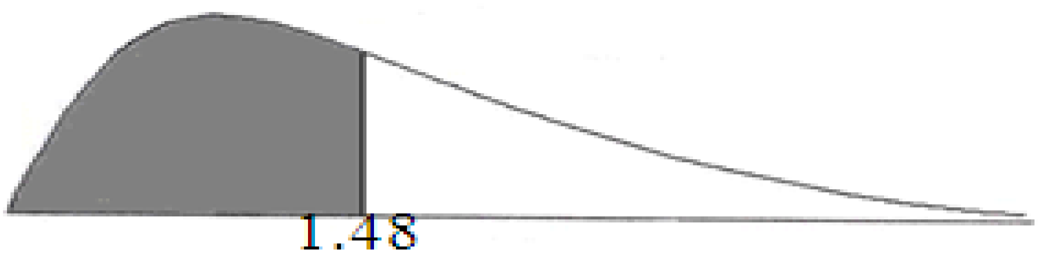
4.2.4 การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

2) $P\left(\chi^2 \geq a\right) = 0.10$, $df = 17$



$\chi^2_{0.90,17} = 24.8$

3) $P\left(\chi^2 \leq 1.48\right) = a$, $df = 5$



$P\left(\chi^2 \leq 1.48\right) = 0.10$