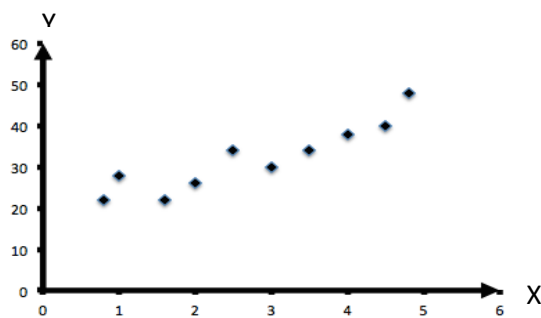


บทที่ 9

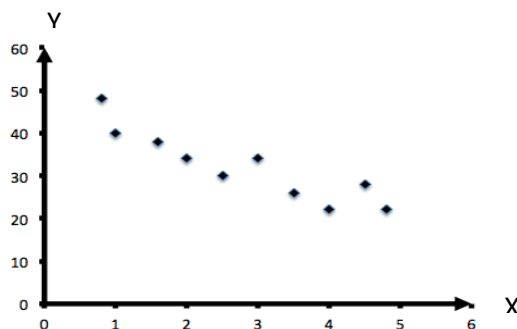
การวิเคราะห์การถดถอยและสหสัมพันธ์อย่างง่าย (Simple Regression Analysis and Correlation)

9.1 การวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่าย (Simple Regression Analysis)

การวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่ายเป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของตัวแปร 2 ตัว คือตัวแปรอิสระ (X) และตัวแปรตาม (Y) โดยที่รูปแบบความสัมพันธ์จะอยู่ในรูปเชิงเส้นหรือเส้นตรง (ดังรูปที่ 9.1 และ 9.2 แผนภาพการกระจายของความสัมพันธ์ตัวแปร X และ Y) แล้วใช้รูปแบบความสัมพันธ์ไปพยากรณ์ค่าของ ตัวแปร Y ในอนาคต เมื่อกำหนดค่าของตัวแปร X เช่น ถ้าทราบความสัมพันธ์ระหว่าง รายได้กับรายจ่ายแล้ว จะทำให้สามารถพยากรณ์รายจ่าย เมื่อกำหนดรายได้ หรือถ้าทราบความสัมพันธ์ระหว่างค่าโฆษณา กับ ยอดขายแล้ว จะทำให้สามารถพยากรณ์ยอดขาย เมื่อกำหนดค่าโฆษณา นั่นคือจะสามารถศึกษาถึงการ เปลี่ยนแปลงของตัวแปรตาม Y เมื่อตัวแปรอิสระ X เปลี่ยนแปลงไป โดยอาศัยหลักการของการวิเคราะห์ การถดถอย



รูปที่ 9.1 ความสัมพันธ์อยู่ในรูปเส้นตรงและเป็นบวก



รูปที่ 9.2 ความสัมพันธ์อยู่ในรูปเส้นตรงและเป็นลบ

9.1.1 ขั้นตอนการวิเคราะห์การถดถอยและสหสัมพันธ์อย่างง่าย

1. เขียนแผนภาพการกระจาย (Scatter Diagram) เพื่อหารูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะความสัมพันธ์ของตัวแปร X และ Y ในรูปเชิงเส้นหรือเส้นตรงเท่านั้น
2. เขียนความสัมพันธ์ของตัวแปร X และ Y ให้อยู่ในตัวแทนทางคณิตศาสตร์
3. จากตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ได้ สามารถนำมาประมาณค่าหรือพยากรณ์ค่า Y ในอนาคต เมื่อกำหนดค่า X

9.1.2 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

จากรูปที่ 9.3 แผนภาพการกระจายระหว่างตัวแปร X และตัวแปร Y ถ้าต้องการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสองตัวนี้ จะพิจารณาที่ความสัมพันธ์อยู่ในรูปเชิงเส้น ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ในรูปสมการเชิงเส้นหรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์หรือสมการถดถอย ดังนี้

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i \quad ; i = 1, 2, \dots, N \quad \text{-----}(9.1)$$

โดยที่ Y คือ ตัวแปรตาม (Dependent Variable)

X คือ ตัวแปรอิสระ (Independent Variable)

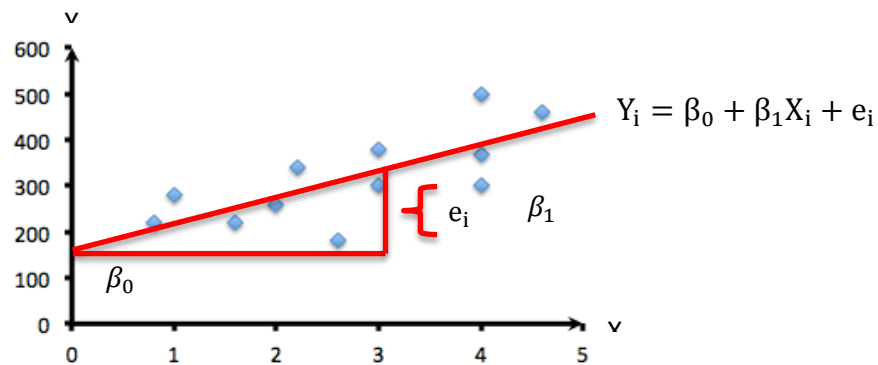
β_0 คือ ค่าของ Y เมื่อ X มีค่าเป็นศูนย์

β_1 คือ ค่าที่แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Y เมื่อ X เปลี่ยนไป 1 หน่วย และจะเรียก β_1 ว่าสัมประสิทธิ์ความถดถอย (Regression Coefficient)

e_i คือ ความคลาดเคลื่อนอย่างสุ่ม (random error)

โดยข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์การถดถอย คือ

1. e_i เป็นตัวแปรที่มีค่าเฉลี่ย = 0 หรือ $E(e_i) = 0$
2. ค่าแปรปรวนของ e_i มีค่าเท่ากันทุกค่าของ i และมีค่าเท่ากับค่าแปรปรวนของ Y
$$V(e_i) = V(Y) = \sigma_{y.x}^2 = \sigma^2$$
3. e_i และ e_j เป็นอิสระกัน นั่นคือ $Cov(e_i, e_j) = 0 ; i \neq j$
4. $e_i \sim \text{normal}(0, \sigma^2)$



รูปที่ 9.3 แผนภาพการกระจายระหว่างตัวแปร X และตัวแปร Y

จากสมการ 9.1 หน่วยของ β_0 และ β_1 จะมีหน่วยเหมือนกับหน่วยของ Y และสามารถแปลความหมายของค่า β_1 ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าค่า $\beta_1 > 0$ แสดงว่า X และ Y มีความสัมพันธ์ในทิศทางเดียวกัน นั่นคือ ถ้าค่าของ X เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของ Y เพิ่มขึ้นด้วย แต่ถ้าค่าของ X ลดลง จะทำให้ค่าของ Y ลดลงด้วย

กรณีที่ 2 ถ้าค่า $\beta_1 < 0$ แสดงว่า X และ Y มีความสัมพันธ์ในทิศทางตรงข้ามกัน นั่นคือ ถ้าค่าของ X เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของ Y ลดลง แต่ถ้าค่าของ X ลดลง จะทำให้ค่าของ Y เพิ่มขึ้น

กรณีที่ 3 ถ้าค่า $\beta_1 = 0$ แสดงว่า X และ Y ไม่มีความสัมพันธ์กันเลย

เนื่องจากการหาสมการเชิงเส้นหรือสมการถดถอยจะต้องทราบค่า X และ Y ทุกค่า จึงจะหาค่า β_0 และ β_1 ได้ ซึ่งในความเป็นจริงจะค่อนข้างยาก ที่จะเก็บข้อมูลทั้งหมดของประชากร จึงทำให้ใช้ข้อมูลตัวอย่าง ขนาด n ในการประมาณค่า β_0 และ β_1 ดังนั้น ค่าประมาณของ Y คือ

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \\ \text{หรือ } \hat{y}_i &= a + bx_i \quad \dots\dots\dots(9.2) \\ \text{โดยที่ } \hat{\beta}_0 &= a, \quad \hat{\beta}_1 = b \end{aligned}$$

ในการประมาณค่า \hat{Y}_i ด้วย \hat{y}_i นั้นต้องการให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด จึงทำให้การประมาณ ค่า β_0 และ β_1 ด้วย a และ b ตามลำดับนั้น จะใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square Method) ซึ่งวิธีนี้ จะให้ค่า a และ b ที่ทำให้ผลบวกของค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองมีค่าน้อยที่สุดและ

ผลรวมความคลาดเคลื่อน มีค่าเท่ากับ 0 ($\sum (y_i - \hat{y}_i) = \sum e_i = 0$) ดังนั้น จากสมการ (9.2) สามารถหาค่า a และ b ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\hat{\beta}_1 = b = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \dots\dots\dots(9.3)$$

$$\hat{\beta}_0 = a = \bar{y} - b\bar{x} \dots\dots\dots(9.4)$$

หรือ $b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$ และ $a = \bar{y} - b\bar{x} \dots\dots\dots(9.5)$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } S_{XX} &= \sum (x_i - \bar{x})^2 &= \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \\ S_{XY} &= \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} \\ S_{YY} &= \sum (y_i - \bar{y})^2 &= \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \\ \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n}, & \bar{y} &= \frac{\sum y_i}{n} \end{aligned}$$

เมื่อ S_{XX} คือ ความแปรปรวนของ X ทั้งหมด

S_{YY} คือ ความแปรปรวนของ Y ทั้งหมด

S_{XY} คือ ความแปรปรวนของ Y ที่เกิดจาก X

ตัวอย่างที่ 9.1 ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าโฆษณาภัยยอดขายของบริษัทแห่งหนึ่ง เก็บข้อมูลย้อนหลัง 9 เดือน ได้ข้อมูลดังนี้

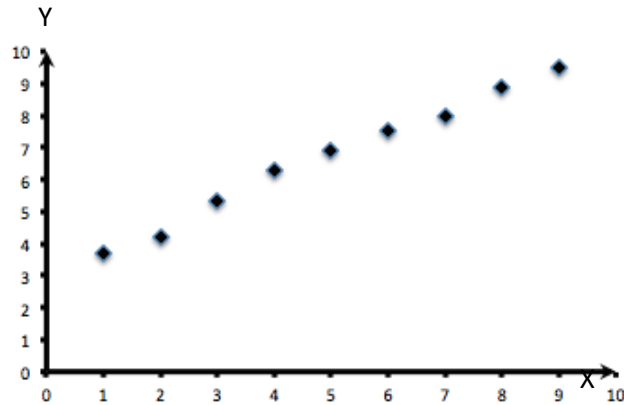
เดือนที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ค่าโฆษณา(X) (หน่วย:แสนบาท)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ยอดขาย(Y) (หน่วย:ล้านบาท)	3.7	4.2	5.3	6.3	6.9	7.5	8.0	8.9	9.5

- 1) จงเขียนแผนภาพการกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าโฆษณากับยอดขาย
- 2) จงหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าโฆษณากับยอดขายของบริษัทนี้
- 3) จงพยากรณ์ยอดขายเดือนหน้า ถ้ากำหนดค่าโฆษณาในเดือนหน้าเป็น 550,000 บาท

วิธีทำ

- 1) ให้ Y = ยอดขาย และ X = ค่าโฆษณา

นำข้อมูลที่มีอยู่มาเขียนกราฟ (แผนภาพการกระจาย) ได้ดังนี้



- 2) หาความสัมพันธ์ระหว่างค่าโฆษณากับยอดขายของบริษัทนี้

ยอดขาย(Y) (หน่วย:ล้านบาท)	ค่าโฆษณา(X) (หน่วย:แสนบาท)	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
3.7	1	1	3.7	13.69
4.2	2	4	8.4	17.64
5.3	3	9	15.9	28.09
6.3	4	16	25.2	39.69
6.9	5	25	34.5	47.61
7.5	6	36	45	56.25
8	7	49	56	64
8.9	8	64	71.2	79.21
9.5	9	81	85.5	90.25
$\sum y = 60.3$	$\sum x = 45$	$\sum x^2 = 285$	$\sum xy = 345.4$	$\sum y_i^2 = 436.43$

คำนวณหาค่า a และ b จากสูตรในสมการที่ (9.3-9.5) ดังนี้

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 285 - \frac{(45)^2}{9} = 60$$

$$S_{XY} = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 345.4 - \frac{(45)(60.3)}{9} = 43.9$$

$$\therefore b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{43.9}{60} = 0.73$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{60.3}{9} - 0.73 \frac{45}{9} = 3.05$$

\therefore สมการความถดถอยคือ

$$\hat{Y}_i = 3.05 + 0.73x$$

ในที่นี้ $b = 0.73$ หมายถึง ถ้าค่าโฆษณา (X) เพิ่มขึ้น 100,000 บาท (1 หน่วยของ X) ยอดขาย (Y) จะเพิ่มขึ้น 730,000 บาท (0.73 หน่วยของ Y)

3) จากสมการความถดถอยคือ

$$\hat{Y}_i = 3.05 + 0.73x$$

แทนค่า $x = 5.5$ จะได้

$$\hat{Y}_i = 3.05 + 0.73(5.5) = 7.065 \text{ ล้านบาท}$$

นั่นคือ ถ้าให้ค่าโฆษณาในเดือนหน้าเป็น 550,000 บาท ยอดขายโดยประมาณในเดือนหน้าจะเป็น 7,065,000 บาท

9.2 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อย่างง่าย (Simple Correlation Coefficient)

สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อย่างง่ายเป็นสถิติที่ใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร Y ขึ้นกับตัวแปร X เพียงตัวเดียวว่ามีความสัมพันธ์กันในเชิงเส้นตรงมากหรือน้อย โดยจะใช้สัญลักษณ์ ρ แทน ค่าพารามิเตอร์ของ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ที่มีค่าประมาณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จากตัวอย่าง แทนด้วย r โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ สหสัมพันธ์ จะมีค่าอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1 และจะไม่มีหน่วย

ในที่นี้ข้อมูลที่วิเคราะห์เป็นข้อมูลตัวอย่าง จึงประมาณค่า ρ ด้วยค่า r โดยที่ การแปลความหมาย ของค่า r สามารถแปลผลได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $r = 0$ แสดงว่า X และ Y ไม่มีความสัมพันธ์กัน

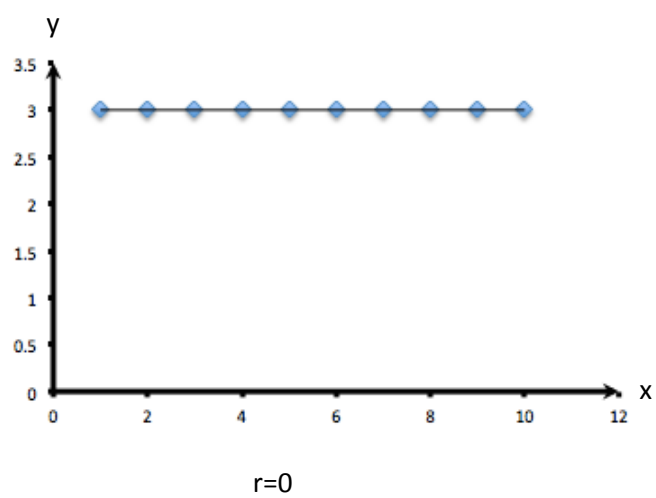
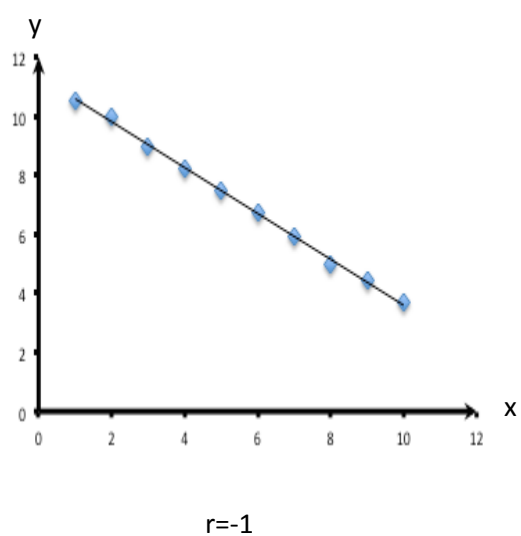
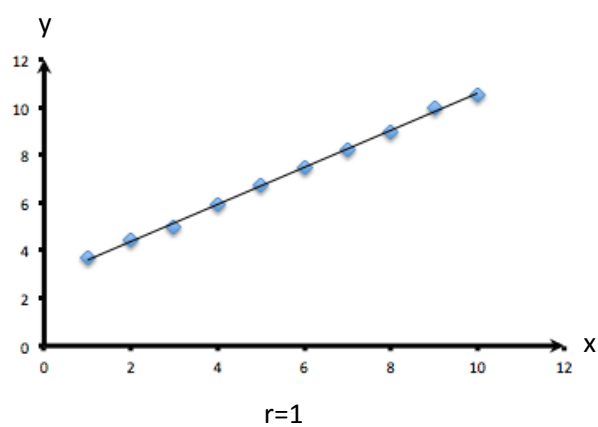
กรณีที่ 2 ถ้า r เข้าใกล้ 0 แสดงว่า X และ Y มีความสัมพันธ์กันน้อย

กรณีที่ 3 ถ้า r เข้าใกล้ -1 แสดงว่า X และ Y มีความสัมพันธ์กันมากและมีความสัมพันธ์ใน

ทิศทาง ตรงกันข้าม คือถ้า X เพิ่ม Y จะลด แต่ถ้า X ลด Y จะเพิ่ม

กรณีที่ 4 ถ้า r เข้าใกล้ 1 แสดงว่า X และ Y มีความสัมพันธ์กันมากและมีความสัมพันธ์ในทิศทาง

เดียวกัน คือ ถ้า X เพิ่ม Y จะเพิ่มด้วยแต่ถ้า X ลด Y จะลดลงด้วย



รูปที่ 9.4 แสดงค่าของ r

สำหรับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ r สามารถคำนวณได้จาก

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2][n \sum y^2 - (\sum y)^2]}} \dots\dots\dots(9.6)$$

ตัวอย่างที่ 9.2 จากตัวอย่างที่ 9.1 จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 9.1 ได้ $S_{XX} = 60$, $S_{XY} = 43.9$

$$\text{พิจารณาหา } S_{YY} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 436.43 - \frac{(60.3)^2}{9} = 32.42$$

แทนค่าลงในสมการ (9.6) จะได้

$$\therefore r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{43.9}{\sqrt{60(32.42)}} = 0.9954$$

$r = 0.9954$ หมายความว่า ค่าโฆษณากับยอดขายมีความสัมพันธ์กันมากและเป็นไปใน

ทิศทาง เดียวกัน

9.3 สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of Determination : r^2 หรือ R^2)

สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ เป็นค่าที่ตัวแปร X สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร Y ได้ โดยจะใช้สัญลักษณ์ R^2 แทน ค่าพารามิเตอร์ของสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ที่มีค่าประมาณสัมประสิทธิ์การตัดสินใจจากตัวอย่าง แทนด้วย r^2 ซึ่งถ้า r^2 มีค่ามากแสดงว่า X และ Y มีความสัมพันธ์กันมากหรือ X สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของค่า Y ได้มาก โดยที่

$$r^2 = b \frac{SS_{xy}}{SS_{yy}} = \frac{\beta_1 S_{xy}}{S_{yy}} \dots\dots\dots(9.7)$$

เนื่องจาก $0 \leq r^2 \leq 1$ นั่นคือ ถ้า r^2 มีค่าเข้าใกล้ 1 แสดงว่าเปอร์เซ็นต์ที่ X สามารถอธิบาย การเปลี่ยนแปลงของ Y มีค่ามาก หรือ X และ Y มีความสัมพันธ์กันมาก แต่ถ้า r^2 มีค่าเข้าใกล้ 0 แสดงว่า เปอร์เซ็นต์ที่ X สามารถการเปลี่ยนแปลงของ Y มีค่าน้อย

ตัวอย่างที่ 9.3 จากตัวอย่างที่ 9.1 จงหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 9.1 และ 9.2 ได้ $S_{XY} = 43.9$, $S_{YY} = 32.42$, $b = 0.73$

แทนค่าลงในสมการ (9.7) จะได้

$$\therefore r^2 = b \frac{SS_{xy}}{SS_{yy}} = 0.73 \frac{43.9}{32.42} = 0.9885 \quad \text{หรือ} \quad 98.85\%$$

$r^2 = 0.9885$ หมายความว่า ค่าโฆษณาสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของยอดขายได้ 98.85%

ส่วนที่เหลือเกิดจากปัจจัยอื่น

9.4 สรุปขั้นตอนการวิเคราะห์การถดถอยและสหสัมพันธ์อย่างง่าย

1. พิจารณาความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ X กับตัวแปรตาม Y จากการเขียนแผนภาพการกระจาย

2. ถ้า X และ Y มีความสัมพันธ์กันในรูปเส้นตรง จะได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์คือ

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + e$$

3. ใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่า β_0 และ β_1 ด้วย a และ b ตามลำดับ ซึ่งจะได้ค่าประมาณจากสมการ $\hat{Y} = a + bx$

4. ใช้สมการที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 ประมาณค่า Y เมื่อกำหนดค่า X

5. คำนวณหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ตัวอย่าง (r) หรือหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (r^2)

ตัวอย่างที่ 9.4 จากการศึกษารายได้กับรายจ่ายของประชาชนในเขตหนึ่ง มีข้อมูลดังนี้

คนที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
รายได้ (X) (หน่วย:หมื่นบาท)	0.8	0.9	1	1.2	1.3	1.5	1.9	2	2.2	2.3	2.4	2.5	3	3.5	4
รายจ่าย (Y) (หน่วย:หมื่นบาท)	0.5	0.6	0.9	1.4	1.6	1.4	1.8	2	2.1	2.2	2.3	2.5	2.7	3.4	3.7

1) จงเขียนแผนภาพการกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรายได้กับรายจ่าย

2) จงหาสมการถดถอยของความสัมพันธ์ระหว่างรายได้กับรายจ่าย

3) จงพยากรณ์รายจ่าย ถ้ากำหนดค่ารายได้ของประชาชนเป็น 14,000 บาท

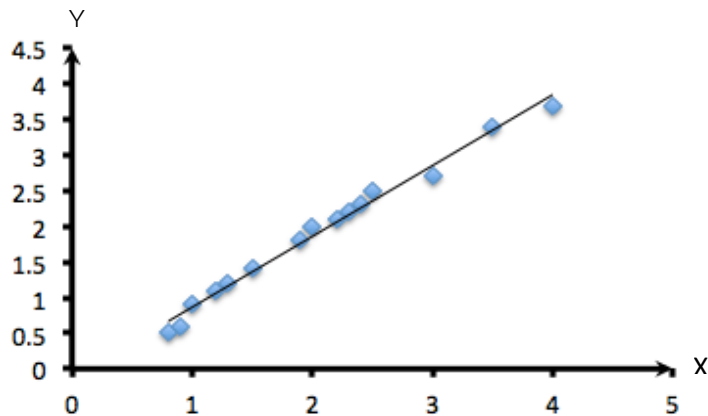
4) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

5) จงหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

วิธีทำ 1) แผนภาพการกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรายได้กับรายจ่าย

ให้ Y = รายจ่าย และ X = รายได้

นำข้อมูลที่มีอยู่มาเขียนกราฟ (แผนภาพการกระจาย) ได้ดังนี้



2) หาสมการถดถอยของความสัมพัธ์ระหว่างรายได้กับรายจ่าย

คนที่	รายได้ (X) (หน่วย:หมื่นบาท)	รายจ่าย (Y) (หน่วย:หมื่นบาท)	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0.8	0.5	0.64	0.4	0.25
2	0.9	0.6	0.81	0.54	0.36
3	1	0.9	1	0.9	0.81
4	1.2	1.1	1.44	1.32	1.21
5	1.3	1.2	1.69	1.56	2.44
6	1.5	1.4	2.25	2.1	1.96
7	1.9	1.8	3.61	3.42	3.24
8	2	2	4	4	4
9	2.2	2.1	4.84	4.62	4.41
10	2.3	2.2	5.29	5.06	4.84
11	2.4	2.3	5.76	5.52	5.29
12	2.5	2.5	6.25	6.25	6.25
13	3	2.7	9	8.1	7.29
14	3.5	3.4	12.25	11.9	11.56
15	4	3.7	16	14.8	13.69
	$\sum x = 30.5$	$\sum y = 28.4$	$\sum x^2 = 74.83$	$\sum xy = 70.49$	$\sum y^2 = 67.6$

คำนวณหาค่า a และ b จากสูตรในสมการที่ (9.3-9.5) ดังนี้

$$S_{XX} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 74.83 - \frac{(30.5)^2}{15} = 12.813$$

$$S_{XY} = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 70.49 - \frac{(30.5)(28.4)}{15} = 12.743$$

$$\therefore b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{12.743}{12.813} = 0.99$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{28.4}{15} - 0.99 \frac{30.5}{15} = -0.12$$

\therefore สมการความถดถอยคือ

$$\hat{Y}_i = -0.12 + 0.99x$$

ในที่นี้ $b = 0.99$ หมายถึง ถ้ารายได้ (X) เพิ่มขึ้น 10,000 บาท (1 หน่วยของ X) รายจ่าย (Y) จะเพิ่มขึ้น 9,900 บาท (0.99 หน่วยของ Y)

3) พยากรณ์รายจ่าย ถ้ากำหนดค่ารายได้ของประชนเป็น 14,000 บาท

จากสมการความถดถอยคือ

$$\hat{Y}_i = -0.12 + 0.99x$$

แทนค่า $x = 1.4$ จะได้

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i &= -0.12 + 0.99(1.4) \\ &= 1.14 \text{ หมื่นบาทบาท}\end{aligned}$$

นั่นคือ ถ้าให้รายได้ของประชนเป็น 14,000 บาท รายจ่ายโดยประมาณจะเป็น 11,400 บาท

4) พิจารณาหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

จาก 1) จะได้ $S_{XX} = 12.813$, $S_{XY} = 12.743$

$$\text{พิจารณาหา } S_{YY} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 67.6 - \frac{(28.4)^2}{15} = 13.8293$$

แทนค่าลงในสมการ (9.6) จะได้

$$\therefore r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{12.743}{\sqrt{12.813(13.8293)}} = 0.9573$$

$r = 0.9573$ หมายความว่า รายได้กับรายจ่ายมีความสัมพันธ์กันมากและเป็นไปในทิศทาง

เดียวกัน นั่นคือ ถ้ารายได้เพิ่ม รายจ่ายก็เพิ่ม แต่ถ้ารายได้ลดลง รายจ่ายก็จะลดลงตามไปด้วย

5) พิจารณาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ

จาก 1) จะได้ $S_{XY} = 12.743$, $S_{YY} = 13.8293$, $b = 0.99$

แทนค่าลงในสมการ (9.6) จะได้

$$\therefore r^2 = b \frac{SS_{xy}}{SS_{yy}} = 0.99 \frac{12.743}{13.8293} = 0.9122 \quad \text{หรือ} \quad 91.22\%$$

$r^2 = 0.9122$ หมายความว่า รายได้สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของรายจ่ายได้ 91.22% ส่วนที่เหลือเกิดจากปัจจัยอื่น

ตัวอย่างที่ 9.5 งานวิจัยชิ้นหนึ่งต้องการศึกษาว่าคะแนนสอบวิชาดนตรี(X) มีผลต่อคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (Y) หรือไม่ จึงเก็บข้อมูลของนักเรียนห้องหนึ่งมา ได้ข้อมูลดังนี้

$$\sum x = 383, \sum y = 508, \sum x^2 = 9875, \sum xy = 13055, \bar{y} = 33.86, \bar{x} = 25.53, n = 15$$

1) จงหาสมการถดถอยของความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนสอบวิชาดนตรี(X)กับคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (Y)

2) จงพยากรณ์คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ ถ้ากำหนดคะแนนสอบวิชาดนตรีเท่ากับ 29 คะแนน

วิธีทำ

1) คำนวณหาค่า a และ b จากสูตรในสมการที่ (9.3-9.5) ดังนี้

$$S_{XX} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 9875 - \frac{(383)^2}{15} = 95.73$$

$$S_{XY} = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 13055 - \frac{(383)(508)}{15} = 84.07$$

$$\therefore b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{84.07}{95.73} = 0.88$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 33.86 - 0.88(25.53) = 11.39$$

$$\therefore \text{สมการความถดถอยคือ} \quad \hat{Y}_i = 11.39 + 0.88x$$

2) พยากรณ์คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ ถ้ากำหนดคะแนนสอบวิชาดนตรีเท่ากับ 29 คะแนน

$$\text{จากสมการความถดถอยคือ} \quad \hat{Y}_i = 11.39 + 0.88x$$

แทนค่า $x = 29$ จะได้

$$\hat{Y}_i = 11.39 + 0.88(29) = 36.91 \approx 37$$

นั่นคือ ถ้ากำหนดคะแนนสอบวิชาดนตรีเท่ากับ 29 คะแนน แล้วคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์

เท่ากับ 37 คะแนน

ตัวอย่างที่ 9.5 บริษัทวิจัยตลาดรถยนต์มือสองต้องการศึกษาความสัมพันธ์อายุการใช้งานของรถยนต์
ยี่ห้อหนึ่งกับราคารถ จึงเก็บข้อมูลดังนี้

อายุการใช้งาน (X) (หน่วย:ปี)	ราคารถ (Y) (หน่วย:แสนบาท)
1	9
2	8.7
3	7.9
4	7
5	6.5
6	5
7	4.3
8	3.8
9	3.5
10	3
11	2.8
12	2.7

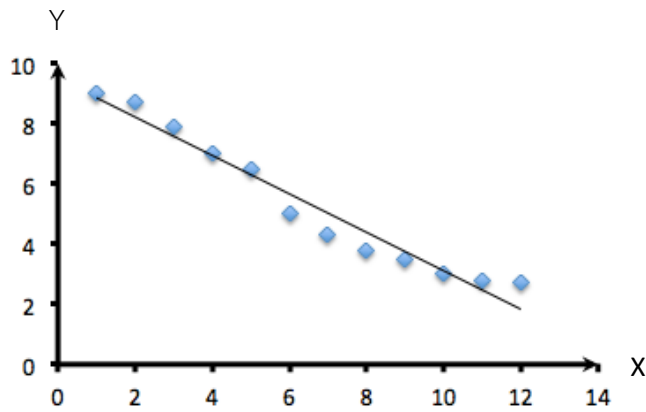
- 1) จงเขียนแผนภาพการกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุการใช้งานของรถยนต์ยี่ห้อหนึ่ง
กับราคารถ
- 2) จงหาสมการถดถอยของความสัมพันธ์ระหว่างอายุการใช้งานของรถยนต์ยี่ห้อหนึ่งกับราคารถ
- 3) จงพยากรณ์ราคารถ ถ้ากำหนดว่ารถยนต์คันหนึ่งใช้งานมาแล้ว 3 ปี 9 เดือน
- 4) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย
- 5) จงหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

วิธีทำ

- 1) แผนภาพการกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุการใช้งานกับราคารถ

ให้ Y = ราคารถ และ X = อายุการใช้งาน

นำข้อมูลที่มีอยู่มาเขียนกราฟ (แผนภาพการกระจาย) ได้ดังนี้



2) หาสมการถดถอยของความสัมพันธ์ระหว่างรายได้กับรายจ่าย

รายได้ (X) (หน่วย:หมื่นบาท)	รายจ่าย (Y) (หน่วย:หมื่นบาท)	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	9	1	9	81
2	8.7	4	17.4	75.69
3	7.9	9	23.7	62.41
4	7	16	28	49
5	6.5	25	32.5	42.25
6	5	36	30	25
7	4.3	49	30.1	18.49
8	3.8	64	30.4	14.44
9	3.5	81	31.5	12.25
10	3	100	30	9
11	2.8	121	30.8	7.84
12	2.7	144	32.4	7.29
$\sum x = 78$	$\sum y = 64.2$	$\sum x^2 = 650$	$\sum xy = 325.8$	$\sum y_i^2 = 404.66$

คำนวณหาค่า a และ b จากสูตรในสมการที่ (9.3-9.5) ดังนี้

$$S_{XX} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 650 - \frac{(78)^2}{12} = 143$$

$$S_{XY} = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 325.8 - \frac{(78)(64.2)}{12} = -91.5$$

$$\therefore b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{-91.5}{143} = -0.64$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{64.2}{12} - (-0.64) \frac{78}{12} = 9.51$$

∴ สมการ การถดถอยคือ

$$\hat{Y}_i = 9.51 - 0.64x$$

ในที่นี้ $b = -0.64$ หมายถึง ถ้าอายุการใช้งานของรถยนต์ยี่ห้อนี้ (X) เพิ่มขึ้น 1 ปี ราคา (Y) จะลดลง 64,000 บาท (0.64 หน่วยของ Y)

3) พยากรณ์ราคา ถ้ากำหนดว่ารถยนต์คันหนึ่งใช้งานมาแล้ว 3 ปี 9 เดือน

จากสมการความถดถอยคือ

$$\hat{Y}_i = 9.51 - 0.64x$$

แทนค่า $x = 3.75$ จะได้

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i &= 9.51 - 0.64(3.75) \\ &= 7.11\end{aligned}$$

ถ้ากำหนดว่ารถยนต์คันหนึ่งใช้งานมาแล้ว 3 ปี 9 เดือน แล้วราคาเท่ากับ 711,000 บาท

4) พิจารณาหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

จาก 1) จะได้ $S_{XX} = 143$, $S_{XY} = -91.5$

$$\text{พิจารณาหา } S_{YY} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 404.66 - \frac{(64.2)^2}{12} = 61.19$$

แทนค่าลงในสมการ (9.6) จะได้

$$\therefore r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{-91.5}{\sqrt{143(61.19)}} = -0.9782$$

$r = -0.9782$ หมายความว่า อายุการใช้งานของรถยนต์กับราคาที่มีความสัมพันธ์กันมาก และเป็นไปในทิศทางตรงข้าม นั่นคือ ถ้าอายุการใช้งานของรถยนต์เพิ่มขึ้น ราคาของรถยนต์จะลดลง

5) สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

จาก 1) และ 3) จะได้ $S_{XY} = -91.5$, $S_{YY} = 61.19$, $b = -0.64$

แทนค่าลงในสมการ (9.6) จะได้

$$\therefore r^2 = b \frac{SS_{xy}}{SS_{yy}} = (-0.64) \frac{(-91.5)}{61.19} = 0.9570 \quad \text{หรือ} \quad 95.70\%$$

$r^2 = 0.9122$ หมายความว่า อายุการใช้งานของรถยนต์สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของราคาารถได้ 95.70% ส่วนที่เหลือเกิดจากปัจจัยอื่น

ตัวอย่างที่ 9.6 บริษัทประกันสุขภาพแห่งหนึ่ง ต้องการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างอายุผู้ป่วยกับค่ารักษาพยาบาล จึงสุ่มถามผู้ป่วยจากโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง ได้ข้อมูลดังนี้

คนที่	อายุ (X) (หน่วย:ปี)	ค่ารักษาพยาบาล (Y) (หน่วย:บาท)
1	40	2700
2	37	2500
3	45	3000
4	46	4000
5	50	4500
6	46	5000
7	53	6000
8	38	1000
9	37	350
10	27	450
11	32	1400
12	56	3500
13	24	300

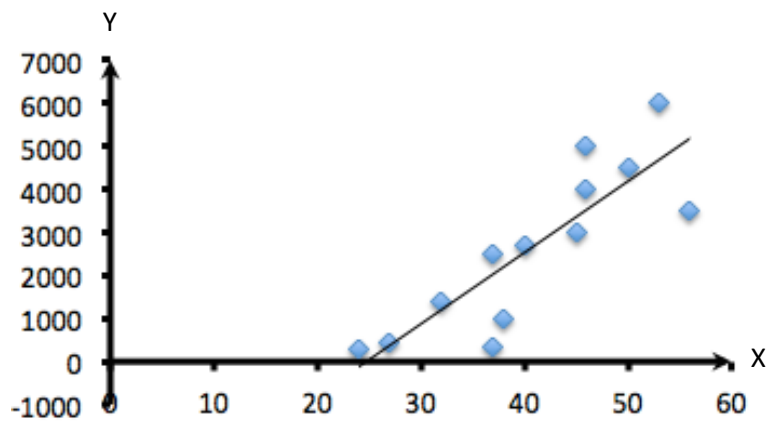
- 1) จงเขียนแผนภาพการกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุผู้ป่วยกับค่ารักษาพยาบาล
- 2) จงหาสมการถดถอยของความสัมพันธระหว่างอายุผู้ป่วยกับค่ารักษาพยาบาล
- 3) จงพยากรณ์ค่ารักษาพยาบาล ถ้ากำหนดอายุผู้ป่วยของผู้ป่วยเป็น 35 ปี
- 4) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย
- 5) จงหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

วิธีทำ

- 1) แผนภาพการกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุผู้ป่วยกับค่ารักษาพยาบาล

ให้ Y = ค่ารักษาพยาบาล และ X = อายุผู้ป่วย

นำข้อมูลที่มีอยู่มาเขียนกราฟ (แผนภาพการกระจาย) ได้ดังนี้



2) หาสมการถดถอยของความสัมพันธ์ระหว่างรายได้กับรายจ่าย

อายุผู้ป่วย (X) (หน่วย:ปี)	ค่ารักษาพยาบาล (Y) (หน่วย:บาท)	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
40	2700	1600	108000	7290000
37	2500	1369	92500	6250000
45	3000	2025	135000	9000000
46	4000	2116	184000	16000000
50	4500	2500	225000	20250000
46	5000	2116	230000	25000000
53	6000	2809	318000	36000000
38	1000	1444	38000	1000000
37	350	1369	12950	122500
27	450	729	12150	202500
32	1400	1024	44800	1960000
56	3500	3136	196000	12250000
24	300	576	7200	90000
$\sum x = 531$	$\sum y = 34700$	$\sum x^2 = 22813$	$\sum xy = 1603600$	$\sum y_i^2 = 135415000$

คำนวณหาค่า a และ b จากสูตรในสมการที่ (9.3-9.5) ดังนี้

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 22813 - \frac{(531)^2}{13} = 1123.69$$

$$S_{XY} = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 1603600 - \frac{(531)(34700)}{13} = 186238.46$$

$$\therefore b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{186238.46}{1123.69} = 165.74$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{34700}{13} - (165.74) \frac{531}{13} = -4100.61$$

\therefore สมการ การถดถอยคือ

$$\hat{Y}_i = -4100.61 + 165.74x$$

ในที่นี้ $b = 165.74$ หมายถึง ถ้าอายุผู้ป่วย (X) เพิ่มขึ้น 1 ปี ค่ารักษาพยาบาล (Y) จะเพิ่มขึ้น 165.74 บาท

3) พยากรณ์ค่ารักษาพยาบาล ถ้ากำหนดว่า อายุของผู้ป่วยเป็น 35 ปี

จากสมการความถดถอยคือ

$$\hat{Y}_i = -4100.61 + 165.74x$$

แทนค่า $x = 35$ จะได้

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i &= -4100.61 + 165.74(35) \\ &= 1700.29\end{aligned}$$

นั่นคือ ถ้ากำหนดว่าอายุของผู้ป่วยเป็น 35 ปี แล้วค่ารักษาพยาบาลเท่ากับ 1700.29 บาท

4) พิจารณาหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

จาก 1) จะได้ $S_{XX} = 1123.69$, $S_{XY} = 186238.46$

$$\text{พิจารณาหา } S_{YY} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 135415000 - \frac{(34700)^2}{13} = 42792692.31$$

แทนค่าลงในสมการ (9.6) จะได้

$$\therefore r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{186238.46}{\sqrt{1123.69(42792692.31)}} = 0.85$$

$r = 0.85$ หมายความว่า อายุผู้ป่วยกับค่ารักษาพยาบาลมีความสัมพันธ์กันมากและ เป็นไปใน

ทิศทางเดียวกัน นั่นคือ ถ้าอายุผู้ป่วยเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่ารักษาพยาบาลเพิ่มขึ้นด้วย

5) สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

จาก 1) และ 3) จะได้ $S_{XY} = 186238.46$, $S_{YY} = 42792692.31$, $b = 165.74$

แทนค่าลงในสมการ (9.6) จะได้

$$\therefore r^2 = b \frac{SS_{xy}}{SS_{yy}} = (165.74) \frac{(186238.46)}{42792692.31} = 0.7213 \quad \text{หรือ} \quad 72.13 \%$$

$r^2 = 0.7213$ หมายความว่า อายุผู้ป่วยสามารถอธิบายค่ารักษาพยาบาลได้ 72.13 % ส่วนที่เหลือเกิดจากปัจจัยอื่น

ตัวอย่างที่ 9.7 ข้อมูลชุดหนึ่งมีสมการถดถอยของตัวอย่าง คือ

$$\hat{Y}_i = 44.49 + 52.57x, \quad \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 0.44, \quad \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 23.34,$$

$$\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 1600$$

จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์และสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ

วิธีทำ

พิจารณาหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

$$\text{จะได้ } S_{XX} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 0.44, \quad S_{XY} = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 23.34$$

$$\text{พิจารณาหา } S_{YY} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 1600$$

แทนค่าลงในสมการ (9.6) จะได้

$$\therefore r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{23.34}{\sqrt{0.44(1600)}} = 0.88$$

พิจารณาหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ

แทนค่าลงในสมการ (9.6) จะได้

$$\therefore r^2 = b \frac{SS_{xy}}{SS_{yy}} = (52.57) \frac{(23.34)}{1600} = 0.7669 \quad \text{หรือ} \quad 76.69 \%$$

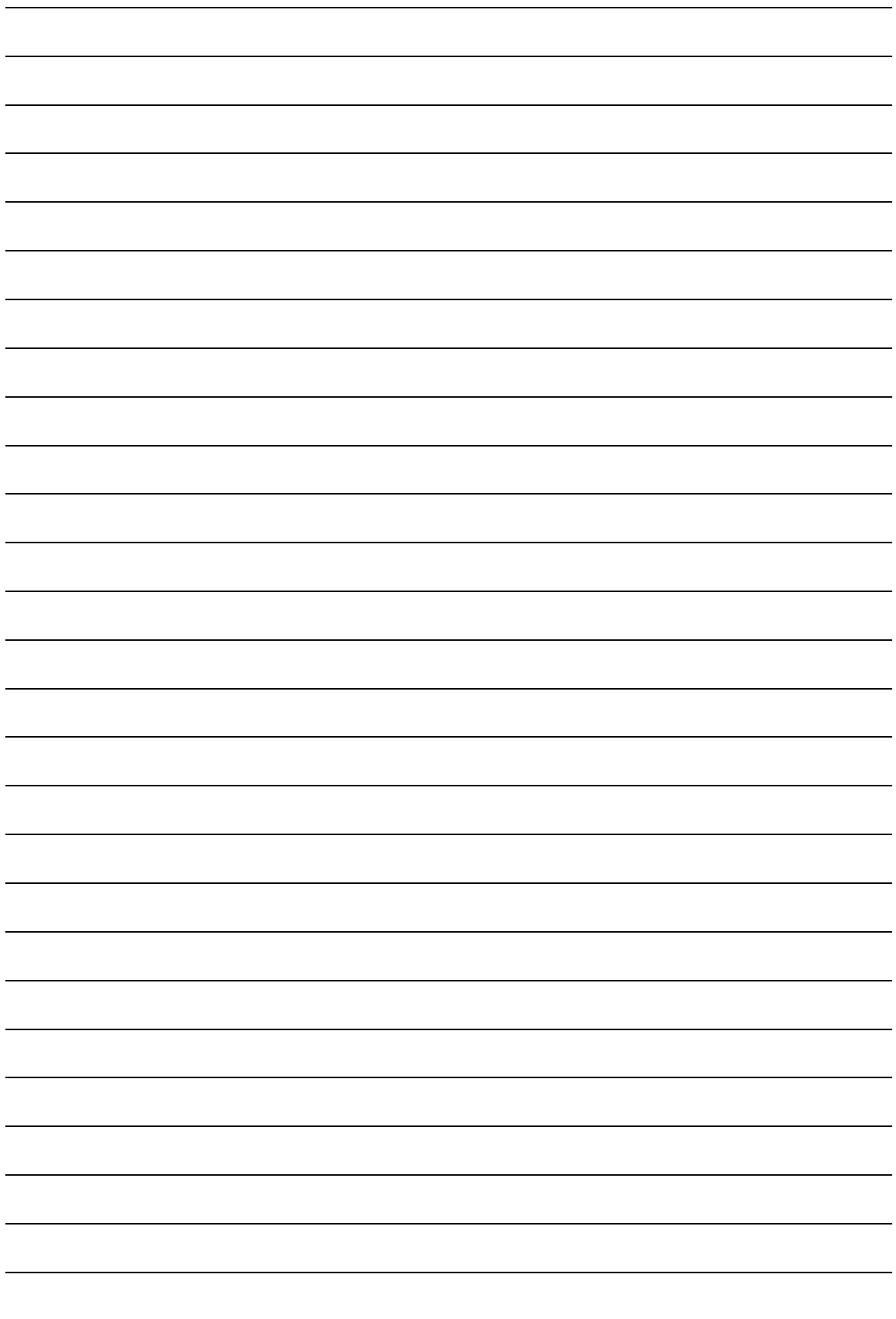
แบบฝึกหัดบทที่ 9

9.1 ในการทดลองปลูกพืชเศรษฐกิจชนิดหนึ่ง ต้องการศึกษาหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะเวลาที่ปลูกพืชกับความสูงของต้นพืช ได้ข้อมูลดังนี้

ระยะเวลา (ปี)	ความสูง (เป็นฟุต)
1	1
2	1
3	2
4	2
5	4

1) จงเขียนแผนภาพการกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะเวลาที่ปลูกพืชกับความสูงของต้นพืช

2) จงหาสมการถดถอยของความสัมพันธ์ระหว่างรายได้กับรายจ่าย

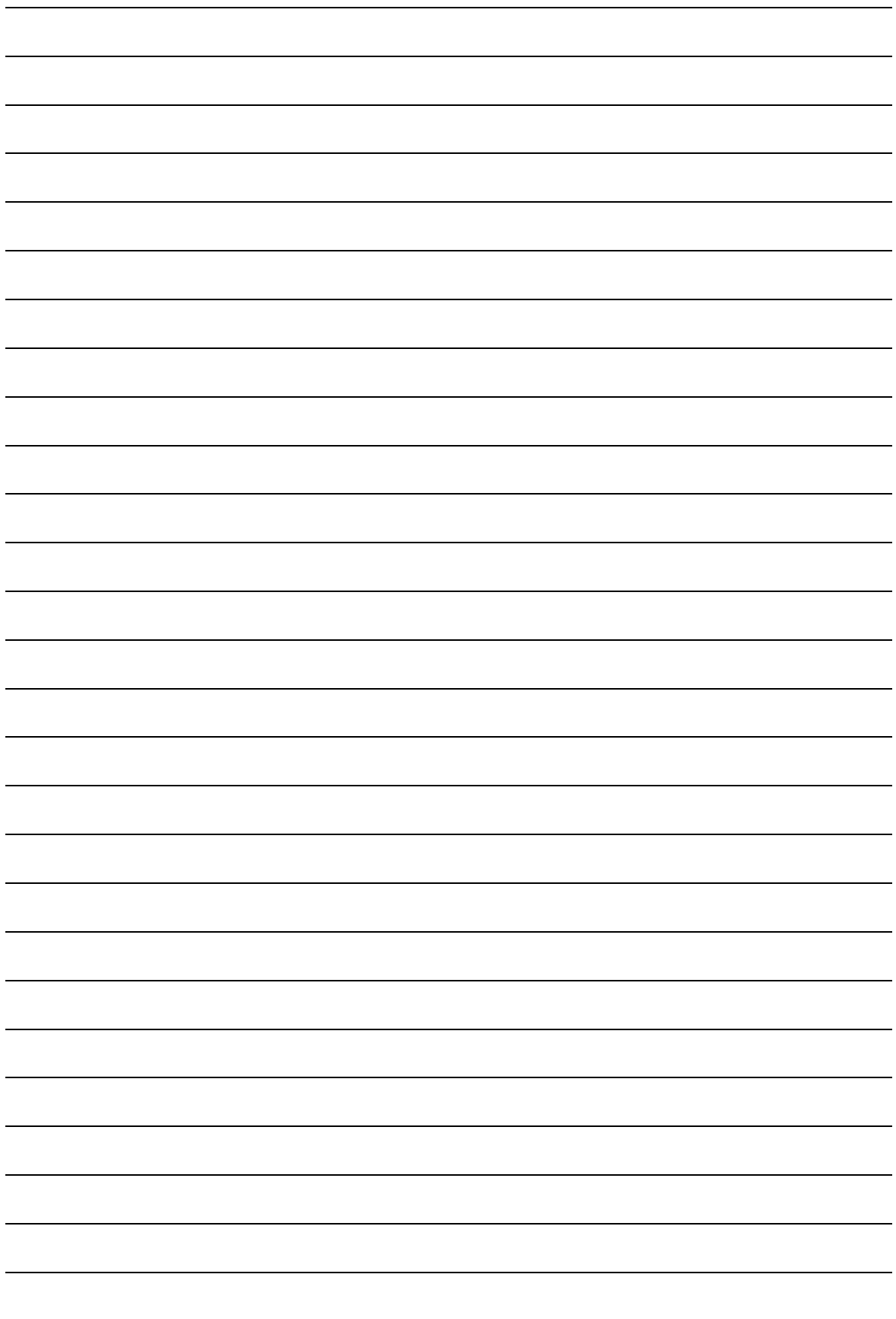


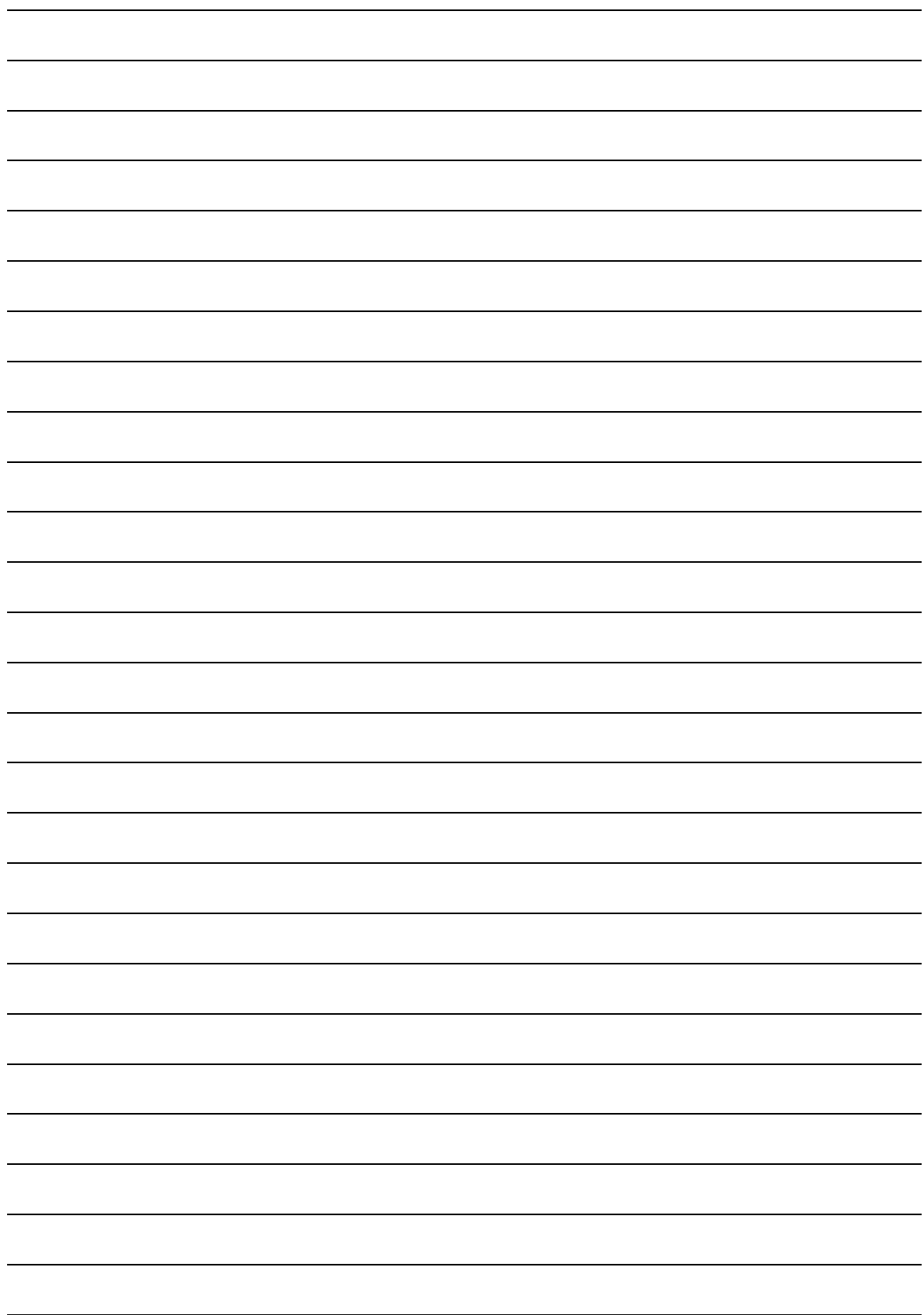
9.2) ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณปุ๋ยที่ใส่ลงไปแปลงทดลองกับผลผลิตที่ได้ เป็นดังนี้

แปลงที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ปริมาณปุ๋ย (กก.)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
ผลผลิต (กก.)	23	30	32	34	36	39	39	42	45	47

1. จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณปุ๋ยที่ใส่ลงไปแปลงทดลองกับผลผลิตที่ได้

2. ถ้าให้ปริมาณปุ๋ย 1.7 กก. ผลผลิตจะเป็นเท่าใด





2) ถ้าต้องการซื้อบ้านที่มีพื้นที่ 120 ตารางวา ต้องซื้อในราคาประมาณเท่าไร

[illegible]

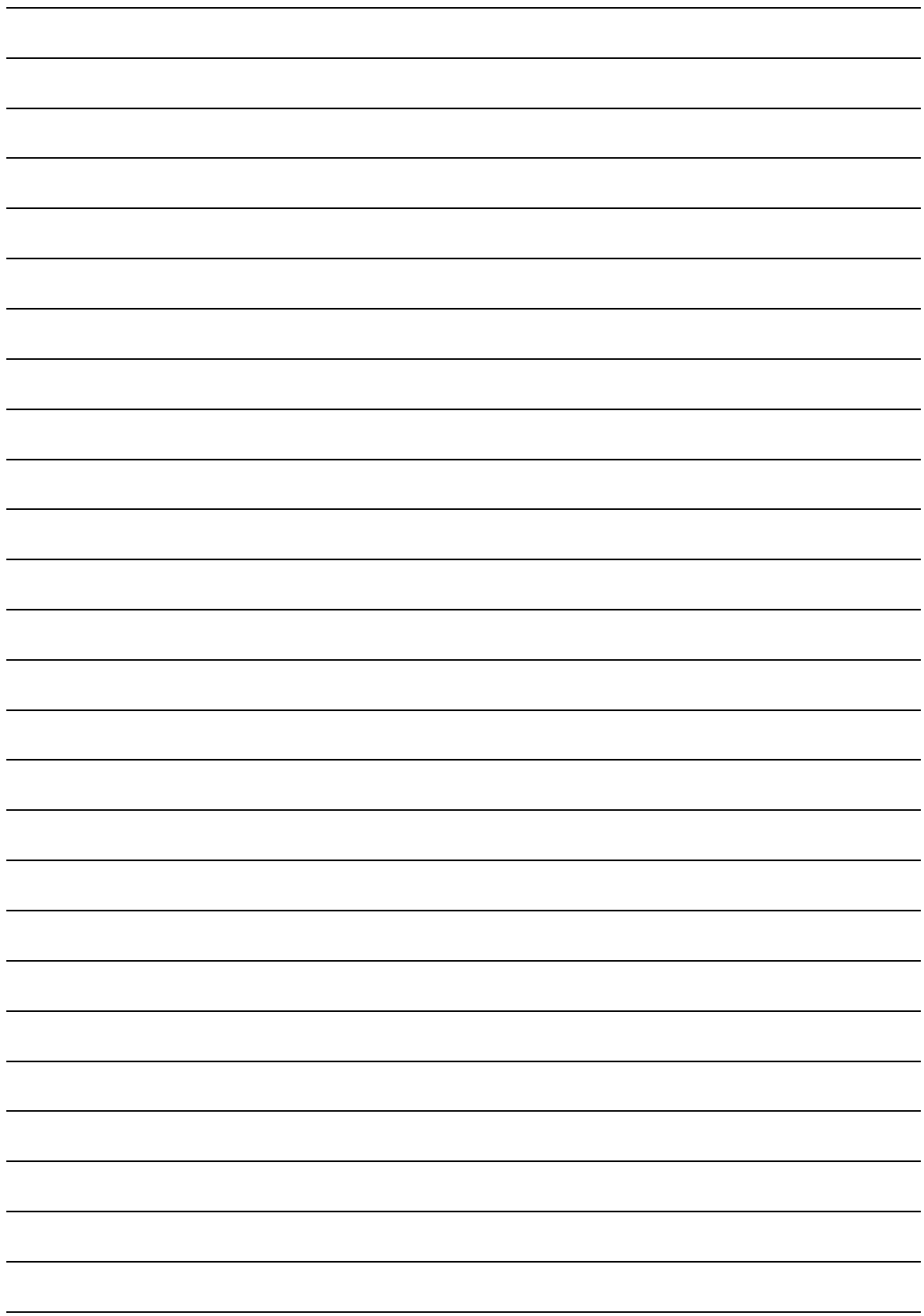
3) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

[illegible]

9.4 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการศึกษาว่าจำนวนชั่วโมงในการอบรมของพนักงานมีความสัมพันธ์กับคะแนนสอบเลื่อนตำแหน่งงาน จึงสุ่มตัวอย่างพนักงานมาจำนวน 15 คน ได้ข้อมูลดังนี้

คนที่	จำนวนชั่วโมง ที่อบรม	คะแนนสอบ
1	55	375
2	54	368
3	25	280
4	18	234
5	51	350
6	20	253
7	45	310
8	19	244
9	20	250
10	45	300
11	50	347
12	35	290
13	30	280
14	30	284
15	53	37

1) จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ข้างต้น



2) ถ้าพนักงานคนหนึ่งต้องการเข้าอบรมจำนวน 40 ชั่วโมงแล้วเขาจะสอบได้กี่คะแนน

[illegible]

3) จงหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

[illegible]

9.5 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการหาความสัมพันธ์ของยอดขาย (Y) และค่าใช้จ่ายในการโฆษณา (X) จึงเก็บข้อมูลที่ผ่านมา 9 ปี ได้ดังนี้

$$\sum Y = 60.45, \sum X = 471, \sum X^2 = 31401, \sum XY = 3643, \sum Y^2 = 440$$

โดยที่ X มีหน่วย 1,000,000 บาท Y มีหน่วยเป็น 10,000 บาท

1) จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ข้างต้น

[illegible]

2) ถ้าบริษัทแห่งหนึ่งต้องการหาความสัมพันธ์ของยอดขาย (Y) เมื่อกำหนดค่าใช้จ่ายในการโฆษณาเท่ากับ 15,000 บาท

3) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

4) จงหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

9.6 ในการศึกษาหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะเวลาที่ใช้รถยนต์(X)กับราคาขายรถยนต์มือสอง(Y) ได้ข้อมูลดังนี้

ระยะเวลา (X) หน่วย: ปี	ราคาขาย (Y) หน่วย: ล้านบาท
1	9
2	8.7
3	7.9
4	7
5	6
6	5
7	4.2
8	3.8
9	3.5
10	3

1) จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ข้างต้น

[illegible]

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

2) ถ้าบริษัทแห่งหนึ่งต้องการหาความสัมพันธ์ของยอดขาย (Y) เมื่อกำหนดค่าใช้จ่ายในการโฆษณาเท่ากับ 15,000 บาท

3) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

[illegible]

4) จงหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

[illegible]

9.7 ฝ่ายวางแผนการผลิตของบริษัทแห่งหนึ่ง ต้องการศึกษาเวลาที่ใช้ในการผลิต (X) กับผลิตภัณฑ์ที่ได้ (Y) มีข้อมูล ดังนี้

เวลา(X) หน่วย : ชั่วโมง	7	6	4	3	2
ผลิตภัณฑ์ (Y) หน่วย: ตัน	21	17	10	13	12

จงสร้างสมการถดถอยและคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ

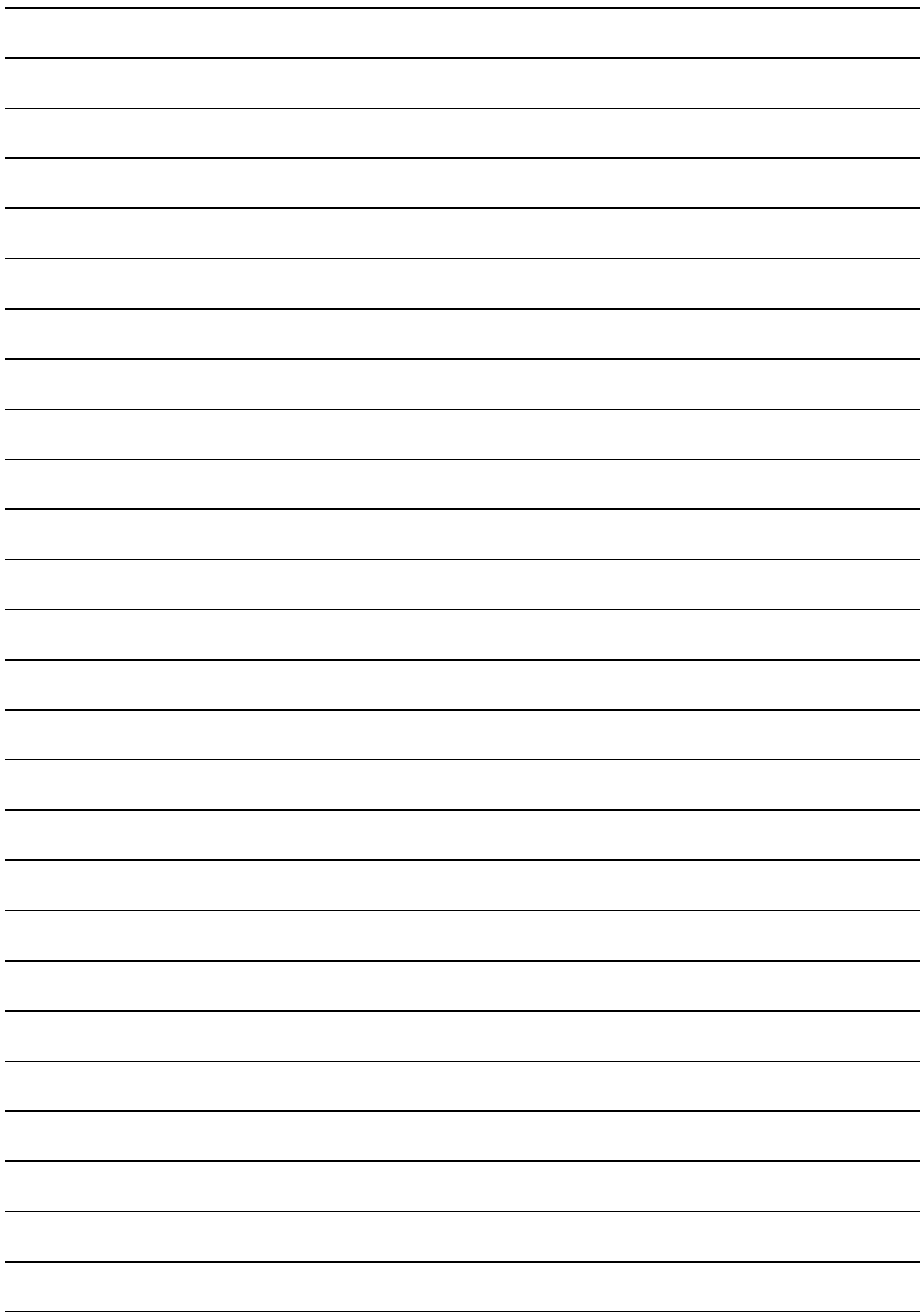
This image shows a single page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

9.8 บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้าออกจำหน่าย โดยตั้งราคาสินค้าแตกต่างกันแล้ว แล้วนำไปวางขายคนละที่
บันทึกจำนวนสินค้าที่ขายได้ดังนี้

ราคา (x) หน่วย: บาท	1000	1100	1200	900	850	1300	1250
จำนวน (Y) หน่วย:ชิ้น	10	8	8	14	15	6	7

จงสร้างสมการถดถอยและคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ พร้อมกับแปลความหมาย

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์และสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ