R PROGRAMMING
Part 7

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อัชฌาณัท รัตนเลิศนุสรณ์

สาขาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

การประมาณค่าพารามิเตอร์

- ความหมายและประเภทของการประมาณค่าพารามิเตอร์
- ความแตกต่างระหว่างค่าพารามิเตอร์กับค่าสถิติ
- การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วงกรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม
  - ค่าเฉลี่ยของประชากร สัดส่วนของประชากร และความแปรปรวนของประชากร
- การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วงกรณีประชากรสองกลุ่ม
  - ผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากรสองกลุ่ม
  - ผลต่างของสัดส่วนของประชากรสองกลุ่ม
  - อัตราส่วนของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่ม

ความหมายและประเภทของการประมาณค่าพารามิเตอร์

- ความหมายการประมาณค่าพารามิเตอร์

  การประมาณค่าพารามิเตอร์ หมายถึง การนำค่าสถิติที่คำนวณจากข้อมูลตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรไปประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร

- ประเภทของการประมาณค่าพารามิเตอร์

  - การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุด (point estimation)

    การนำค่าสถิติที่คำนวณจากข้อมูลตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรเพียงค่าเดียวไปประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร

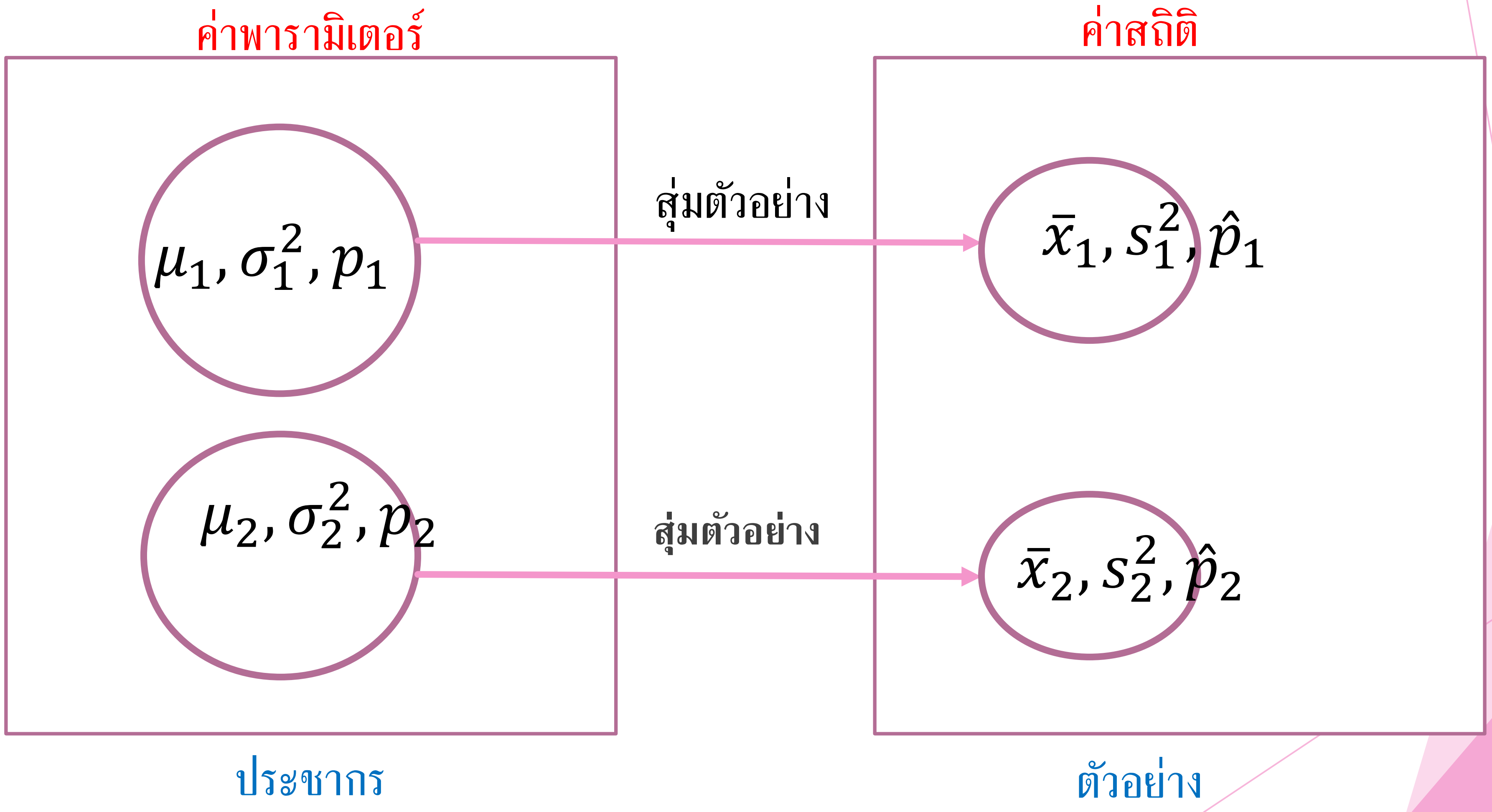
  - การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง (interval estimation)

    การนำค่าสถิติที่คำนวณจากข้อมูลตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรแบบช่วงไปประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร

ความแตกต่างระหว่างค่าพารามิเตอร์กับค่าสถิติ

- ค่าพารามิเตอร์ หมายถึง ค่าที่บอกลักษณะของประชากร
  - กรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม ค่าพารามิเตอร์คือ ค่าเฉลี่ยของประชากร ค่าสัดส่วนของประชากร และความแปรปรวนของประชากร
  - กรณีประชากรสองกลุ่ม ค่าพารามิเตอร์คือ ผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรสองกลุ่ม ผลต่างระหว่างค่าสัดส่วนของประชากรสองกลุ่ม และอัตราส่วนของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่ม
- ค่าสถิติ หมายถึง ค่าที่บอกลักษณะของตัวอย่าง
  - กรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม ค่าสถิติคือ ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง ค่าสัดส่วนของตัวอย่าง และความแปรปรวนของตัวอย่าง
  - กรณีประชากรสองกลุ่ม ค่าสถิติคือ ผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวอย่างสองกลุ่ม ผลต่างระหว่างค่าสัดส่วนของตัวอย่างสองกลุ่ม และอัตราส่วนของความแปรปรวนของตัวอย่างสองกลุ่ม

ความแตกต่างระหว่างค่าพารามิเตอร์กับค่าสถิติ



การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดกรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม

- **การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากรแบบจุด**

  ใช้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างไปประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \cong \mu$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดกรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม

- **การประมาณค่าสัดส่วนของประชากรแบบจุด**

  ใช้ค่าสัดส่วนของตัวอย่างไปประมาณค่าสัดส่วนของประชากร

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \quad \cong \quad p$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดกรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม

- **การประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรแบบจุด**

  ใช้ค่าความแปรปรวนของตัวอย่างไปประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{(n-1)} \cong \sigma^2$$

การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากรแบบช่วงกรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม

- **การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากรแบบช่วง** แบ่งเป็นกรณีดังนี้

1. กรณีที่ทราบการแจกแจงของประชากรเป็นการแจกแจงปกติและทราบความแปรปรวนของประชากร

สูตรประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบช่วงคือ

$$\mu = \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

หรือ

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากรแบบช่วงกรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม

2. กรณีที่ไม่ทราบการแจกแจงของประชากรแต่ทราบความแปรปรวนของประชากรและขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่ $(n \geq 30)$

สูตรประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบช่วงคือ

$$\mu = \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

หรือ

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากรแบบช่วงกรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม

3. กรณีที่ไม่ทราบการแจกแจงของประชากรและไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรแต่ขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่ $(n \geq 30)$

สูตรประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบช่วงคือ

$$\mu = \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

หรือ

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากรแบบช่วงกรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม

4. กรณีที่ไม่ทราบการแจกแจงของประชากรและไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรแต่ขนาดตัวอย่างมีขนาดเล็ก $(n < 30)$

สูตรประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบช่วงคือ

$$\mu = \bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

หรือ

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

การประมาณค่าสัดส่วนของประชากรแบบช่วงกรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม

สูตรประมาณค่าสัดส่วนของประชากรแบบช่วงคือ

$$p = \hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

หรือ

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

การประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรแบบช่วง กรณีประชากรหนึ่งกลุ่ม

สูตรประมาณความแปรปรวนของประชากรแบบช่วงคือ

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{upper}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{lower}}$$

โดยที่

$$\chi^2_{upper} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{และ} \quad \chi^2_{lower} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$$

การประมาณค่าผลต่างของค่าเฉลี่ยประชากรสองกลุ่มแบบช่วง

- กรณีประชากรสองกลุ่มเป็นอิสระกัน

1. ทราบการแจกแจงของประชากรเป็นการแจกแจงแบบปกติ และทราบค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่ม

สูตรประมาณค่าคือ

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1-\mu_2 \leq (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

หรือเขียนเป็น

$$\mu_1-\mu_2 = (\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

การประมาณค่าผลต่างของค่าเฉลี่ยประชากรสองกลุ่มแบบช่วง

- กรณีประชากรสองกลุ่มเป็นอิสระกัน

2. **สุ่มตัวอย่างมาจากสองประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ หรือมีการแจกแจงใกล้เคียงแบบปกติ หรือไม่ทราบการแจกแจงของประชากร ไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มและตัวอย่างมีขนาดใหญ่**

สูตรประมาณค่าคือ

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1-\mu_2 \leq (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

หรือเขียนเป็น

$$\mu_1-\mu_2 = (\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

การประมาณค่าผลต่างของค่าเฉลี่ยประชากรสองกลุ่มแบบช่วง

- กรณีประชากรสองกลุ่มเป็นอิสระกัน

3. **สุ่มตัวอย่างมาจากสองประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ หรือมีการแจกแจงใกล้เคียงแบบปกติ ไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่ม และตัวอย่างมีขนาดเล็ก แต่มีเงื่อนไขว่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มเท่ากัน**

สูตรประมาณค่าคือ

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\ s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\ s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

หรือเขียนเป็น

$$\mu_1-\mu_2 = (\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}\ s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

โดยที่

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1+n_2-2)}}$$ และ $$\upsilon = n_1+n_2-2$$

การประมาณค่าผลต่างของค่าเฉลี่ยประชากรสองกลุ่มแบบช่วง

- กรณีประชากรสองกลุ่มเป็นอิสระกัน

4. **สุ่มตัวอย่างมาจากสองประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ หรือมีการแจกแจงใกล้เคียงแบบปกติ**

ไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่ม และตัวอย่างมีขนาดเล็ก แต่มีเงื่อนไขว่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากัน

สูตรประมาณค่าคือ

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1-\mu_2 \leq (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

หรือเขียนเป็น

$$\mu_1-\mu_2 = (\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

โดยที่

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

การประมาณค่าผลต่างของสัดส่วนประชากรสองกลุ่ม

- สุ่มตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 มาจากประชากรที่ 1 และประชากรที่ 2 ตามลำดับ ถ้าขนาดตัวอย่างใหญ่เพียงพอ ($n_1p_1 \geq 5$ และ$n_2p_2 \geq 5$) จะได้ว่า

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}\right)$$

ดังนั้นสถิติทดสอบที่ใช้ในการประมาณค่าคือ

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$$

การประมาณค่าผลต่างของสัดส่วนประชากรสองกลุ่ม

- จะได้ว่าสูตรประมาณค่าผลต่างของสัดส่วนประชากรคือ

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} \le p_1 - p_2 \le (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

หรือเขียนเป็น

$$p_1 - p_2 = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

การประมาณอัตราส่วนของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่ม

- สูตรประมาณค่าอัตราส่วนของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่มคือ

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}1}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$